自然変換・圏同値

alg-d
http://alg-d.com/math/kan_extension/

2021 年 11 月 6 日

目次

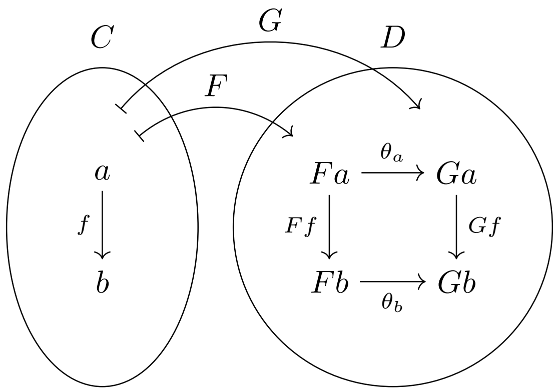
1　自然変換

数学ではしばしば「自然な」という表現が使われる．例えば有限次元実線型空間 V に対して $V^* := \mathrm{Hom}(V, \mathbb{R})$ と定義すると V^* も有限次元実線型空間である．このとき実は $\dim(V^*) = \dim(V)$ となるから $V^* \cong V$ となることが分かる．故に $V^{**} \cong V$ である．この同型は「自然な」同型であると言われる．(一方 $V^* \cong V$ は自然でないと言われる．) これは，同型 $V^* \cong V$ を構成する際は V の基底を取って，それに依存した形で定義を行うのに対して，$V^{**} \cong V$ は任意の V に対して同様の方法で同型が構成できることを指して「自然な」同型と言っている．

この「自然な」という概念を，数学的にきちんと定義することは出来るのであろうか．その答えの一つが，今から定義する自然変換である[*1]．

[*1] このような「自然な」という概念を定義する為に自然変換を定義する必要があって，自然変換を定義する為に関手を定義し，関手を定義する為に圏を定義した，というのが歴史的な流れのようだ．

定義. C, D を圏，$F, G\colon C \to D$ を関手とする．F から G への自然変換とは，D の射の族 $\theta = \{\theta_a\colon Fa \to Ga\}_{a \in \mathrm{Ob}(C)}$ であって，C の射 $f\colon a \to b$ に対して $Gf \circ \theta_a = \theta_b \circ Ff$ を満たすものをいう．(またこのとき θ_a は a について自然であるという言い方をする．) 絵で書けば次のようになる．



θ が F から G への自然変換であることを記号で $\theta\colon F \Rightarrow G$ と表す．また θ_a を θ の a 成分と呼ぶ．

定義. 各 θ_a が同型射となる自然変換 θ を自然同型という．また，自然同型 $\theta\colon F \Rightarrow G$ が存在するとき，F と G は自然同型であるといい，記号で $F \cong G$ と表す．

例 1. M をモノイド，X, Y を左 M-集合とする．M を圏，X, Y を関手とみなすことができるのであった (「圏論とは何か」の PDF を参照)．そこで M を圏とみなしたものを C，X, Y を関手と見なしたものをそれぞれ $F, G\colon C \to \mathbf{Set}$ とする．すると自然変換 $\theta\colon F \Rightarrow G$ を考えることができる．θ は $\mathbf{Set}$ の射の族 $\{\theta_a\}_{a \in \mathrm{Ob}(C)}$ であるが，圏 C の対象はただ一つだから，それを $*$ と書けば $\theta = \{\theta_*\}$ である．自然変換の定義から，任意の射 $m \in \mathrm{Mor}(C) = M$ に対して $Gm \circ \theta_* = \theta_* \circ Fm$ が成り立つ．

$$\begin{tikzcd} * \arrow[d, "m"] & F(*) \arrow[r, "\theta_*"] \arrow[d, "Fm"'] & G(*) \arrow[d, "Gm"] \\ * & F(*) \arrow[r, "\theta_*"'] & G(*) \end{tikzcd}$$

F, G の定義から $F(*) = X$，$G(*) = Y$ であり，また Fm, Gm は m を左から作用させる

写像となるのであった．つまり図式は次のように書き換えることができる．

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\theta_*"] \arrow[d, "m\text{ 倍}"'] & Y \arrow[d, "m\text{ 倍}"] \\
X \arrow[r, "\theta_*"'] & Y
\end{tikzcd}
$$

よって $x \in X$ に対して $\theta_*(mx) = m(\theta_*(x))$ となる．即ち $\theta_* \colon X \to Y$ は準同型写像である．逆に準同型 $f \colon X \to Y$ は自然変換 $F \Rightarrow G$ を定めることも分かる．こうして，この場合の自然変換とは左 M-集合の準同型写像である． □

例 2. 有限次元実線型空間を対象とし，線型写像を射とする圏を C とする．双対を取る操作は関手 $F \colon C^{\mathrm{op}} \to C$ を定める．そのためには

- $V \in C$ に対して $F(V) := V^*$.
- 線型写像 $f \colon V \to W$ に対して $Ff \colon W^* \to V^*$ を，$\varphi \in W^*$ に対して $Ff(\varphi) := \varphi \circ f$ により定める．

とすればよい．

このとき $F^{\mathrm{op}} \colon C \to C^{\mathrm{op}}$ と $F \colon C^{\mathrm{op}} \to C$ の合成は関手 $F \circ F^{\mathrm{op}} \colon C \to C$ である．$V \in C$ に対して，射 $\theta_V \colon V \to F \circ F^{\mathrm{op}}(V) = V^{**}$ を $x \in V$，$\varphi \in V^*$ に対して $\theta_V(x)(\varphi) := \varphi(x)$ で定めることができる．

この θ_V は自然変換 $\theta \colon \mathrm{id}_C \Rightarrow F \circ F^{\mathrm{op}}$ を与える．

$\because$) それを示す為に，任意の線型写像 $f \colon V \to W$ を取る．$FFf \circ \theta_V = \theta_W \circ f$ を示せばよい．

$$
\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "\theta_V"] \arrow[d, "f"'] & V^{**} \arrow[d, "FFf"] \\
W \arrow[r, "\theta_W"'] & W^{**}
\end{tikzcd}
$$

$x \in V$ とする．$\varphi \in W^*$ に対して

$$\bigl(\theta_W \circ f(x)\bigr)(\varphi) = \bigl(\theta_W(f(x))\bigr)(\varphi) = \varphi(f(x))$$

である．一方 $FFf \circ \theta_V(x) = FFf(\theta_V(x)) = \theta_V(x) \circ Ff$ だから

$$\bigl(FFf \circ \theta_V(x)\bigr)(\varphi) = \theta_V(x)(Ff(\varphi)) = \theta_V(x)(\varphi \circ f) = \varphi(f(x))$$

となる．故に $\theta_W \circ f(x) = FFf \circ \theta_V(x)$ である．従って θ が自然変換であることが分かった．

各 θ_V は同型だから，θ は自然同型である．つまり同型 $V \cong V^{**}$ は，それが自然同型をなすという意味で「自然」である． $\square$

2 圏同値

2.1 定義

数学的な概念 (例えば群，環，位相空間，などなど) があればそこから圏を作ることができた．すると，ある二つの概念を比較する方法の一つとして，それらから作られた二つの圏を比較するという手法が考えられる．例えば，もしこの二つの圏が「同じ」であることが分かれば，元の二つの概念が本質的に同じものであると言えるであろうし，概念 A から作られた圏が概念 B から作られた圏に「埋め込まれる」ことが分かれば，概念 B は概念 A の一般化であると言えるであろう．

そのような例としてよく知られているのが，幾何学における「空間」と「関数」の関係である．例えば二つの空間として円周 S^1 と直線 $\mathbb{R}$ を考える．これらの空間は明らかに違うものであろう (例えば同相ではない)．ところで S^1 上の実数値連続関数を考えるとこれは必ず最大値を持つが，一方 $\mathbb{R}$ 上の実数値連続関数は最大値を持つとは限らない．このように空間の違いは関数が持つ性質の違いとして現れる，という事が古くから経験的に知られていた．

この事は圏を使って定式化できる．ここでは「空間」としてコンパクト Hausdorff 空間を考える．コンパクト Hausdorff 空間を対象とし，連続写像を射とすれば，これは圏となることがわかる．この圏を $\mathbf{CptHaus}$ と書くことにする．$X \in \mathbf{CptHaus}$ に対して，X 上の複素数値連続関数全体 $F(X)$ を考えると，これは単位的可換 C^*-環と呼ばれる種類の環となる．また $f\colon X \to Y$ を連続写像とするとき，$*$-準同型と呼ばれる写像 $Ff\colon F(Y) \to F(X)$ が $Ff(g) := g \circ f$ により定義できる．単位的可換 C^*-環と $*$-準同型がなす圏を C^*-$\mathbf{Alg}$ と書けば，関手 $F\colon \mathbf{CptHaus}^{\mathrm{op}} \to C^*\text{-}\mathbf{Alg}$ が定義されたことになる．この関手により，「空間」がなす圏 $\mathbf{CptHaus}^{\mathrm{op}}$ と「関数環」がなす圏 C^*-$\mathbf{Alg}$ が「同じ」であることが分かるのである．

さて，先の $F\colon \mathbf{CptHaus}^{\mathrm{op}} \to C^*\text{-}\mathbf{Alg}$ の「逆」が構成できることは，実はよく知られている．それには C^*-環 A に対して $G(A) := \{\mathfrak{m} \subset A \mid \mathfrak{m}\ \text{は極大イデアル}\ \}$ と定めて，

$G(A)$ に Zarski 位相と呼ばれる位相を入れる．このとき $G(A)$ はコンパクト Hausdorff 空間になることが知られており，これを使って関手 $G\colon C^*\text{-}\mathbf{Alg} \to \mathbf{CptHaus}^{\mathrm{op}}$ を構成することができる．すると，任意の $X \in \mathbf{CptHaus}$ に対して同型 $G(F(X)) \cong X$ が，任意の $A \in C^*\text{-}\mathbf{Alg}$ に対して同型 $F(G(A)) \cong A$ が成り立つのである．こうして「空間」と「関数環」が対応し，この意味で「空間」と「関数環」を同一視することができる．

この意味で G は F の「逆」なのであるが，しかしこの F と G は圏の同型を与えない．というのも，同型の定義によれば $F \circ G = \mathrm{id}$ かつ $G \circ F = \mathrm{id}$ となければならない．すなわち $G(F(X)) = X$ や $F(G(A)) = A$ が成り立たなければならないが，これは成り立たず $G(F(X)) \cong X$ や $F(G(A)) \cong A$ が成り立つだけだからである．

この例からわかるように圏の同型という条件は非常に強く，これでは使いづらい．そこでこの条件を弱め「同型程度の違いは許す」ようにしたのが圏同値という概念である．

定義． 圏 C, D が圏同値 ($C \simeq D$ で表す)
$\Longleftrightarrow$ 関手 $F\colon C \to D$，$G\colon D \to C$ と自然同型 $GF \cong \mathrm{id}_C$，$FG \cong \mathrm{id}_D$ が存在する．

例 3. 圏同値 $\mathbf{CptHaus}^{\mathrm{op}} \simeq C^*\text{-}\mathbf{Alg}$ が成り立つことが分かる． □

2.2 忠実充満な本質的全射

さて，圏同値の定義はできたが，これだけではどういった圏が圏同値になるのかいまいち分からないと思う．そこで圏同値になるための必要十分条件 (定理 8) を見ることで圏同値がどういうものなのかを見ていく．そのためにまず関手の性質についていくつか説明する．

定義． C, D を圏，$F\colon C \to D$ を関手とする．

(1) F が忠実 (faithful)
$\Longleftrightarrow$ 任意の $a, b \in C$ に対して $F\colon \mathrm{Hom}_C(a,b) \to \mathrm{Hom}_D(Fa, Fb)$ が単射．
(2) F が充満 (full)
$\Longleftrightarrow$ 任意の $a, b \in C$ に対して $F\colon \mathrm{Hom}_C(a,b) \to \mathrm{Hom}_D(Fa, Fb)$ が全射．
(3) F が忠実充満 (fully faithful) $\Longleftrightarrow$ F が忠実かつ充満.
(4) 関手 $F\colon C \to D$ が conservative*2
$\Longleftrightarrow$ f が C の射で Ff が同型ならば f も同型である．

*2 同型を反射する (reflect isomorphisms) という言い方をすることもある

(5) F が本質的単射[*3]

$\Longleftrightarrow a, b \in C$ が $Fa \cong Fb$ を満たすならば $a \cong b$ である．

(6) F が本質的全射 (essentially surjective)

$\Longleftrightarrow$ 任意の $d \in D$ に対して，ある $c \in C$ が存在して $Fc \cong d$ となる．

conservative と本質的単射は異なることに注意する．例えば忘却関手 $U\colon \mathbf{Grp} \to \mathbf{Set}$ を考える．$\mathbf{Grp}$ の射 $f\colon G \to H$ が同型となるのは全単射 (即ち $U(f)$ が同型射) のときだから U は conservative である．しかし $U(G)$ と $U(H)$ の間に全単射があるからと言って $G \cong H$ であるとは限らない．

命題 4. 関手 $F\colon C \to D$ が忠実充満ならば conservative である．

証明. $f\colon a \to b$ を C の射として Ff が同型であるとする．$(Ff)^{-1}\colon Fb \to Fa$ であり，F が充満だから $g\colon b \to a$ が存在して $Fg = (Ff)^{-1}$ となる．このとき

$$F(g \circ f) = Fg \circ Ff = \mathrm{id}_{Fa} = F(\mathrm{id}_a)$$
$$F(f \circ g) = Ff \circ Fg = \mathrm{id}_{Fb} = F(\mathrm{id}_b)$$

で F が忠実だから $g \circ f = \mathrm{id}_a$，$f \circ g = \mathrm{id}_b$ となる．即ち f は同型である． □

命題 5. 関手 $F\colon C \to D$ が充満かつ conservative ならば，本質的単射である．

証明. $a, b \in C$ が $Fa \cong Fb$ を満たすとして，同型射 $f\colon Fa \to Fb$ を取る．F が充満だから，C の射 $g\colon a \to b$ が存在して $Fg = f$ となる．今 F が conservative だから g は同型であり従って $a \cong b$ である． □

系 6. 関手 $F\colon C \to D$ が忠実充満ならば本質的単射である．

証明. 命題 4 より F が conservative だから，命題 5 より成り立つ． □

命題 7. $F\colon A \to B$，$G\colon B \to C$ を関手とする．

(1) F と G が忠実ならば GF も忠実である．

(2) F と G が充満ならば GF も充満である．

(3) F と G が本質的全射ならば GF も本質的全射である．

証明. (1) 単射と単射の合成は単射となるから明らか．

[*3] 本質的単射という言葉はググっても出てこない程度には使われていない言葉 (系 6 がある為と思われる) であるが，説明するうえで分かりやすいと思うのでここでは定義した．

(2) 全射と全射の合成は全射となるから明らか.

(3) F, G を本質的全射とする．任意の $c \in C$ を取る．G が本質的全射だから，ある $b \in B$ が存在して $Gb \cong c$ となる．また F が本質的全射だから，ある $a \in A$ が存在して $Fa \cong b$ となる．このとき $GFa \cong Gb \cong c$ である．故に GF が本質的全射であることが分かる． □

以上を使って圏同値の条件を言い換えるのが次の定理である.[*4]

定理 8. 関手 $F\colon C \to D$ が圏同値を与える $\Longleftrightarrow$ F が忠実充満な本質的全射.

証明. ($\Longrightarrow$) 関手 $G\colon D \to C$ と自然同型 $\theta\colon GF \Rightarrow \mathrm{id}_C$，$\varepsilon\colon FG \Rightarrow \mathrm{id}_D$ が存在するとする.

まず本質的全射を示す．$d \in D$ を任意にとる．$c := Gd$ とすれば $\varepsilon_d\colon FG(d) \to d$ が同型射だから $Fc \cong d$ である.

次に忠実であることを示す．$f, f'\colon c \to c'$ を C の射として $Ff = Ff'$ であるとする．$\theta\colon GF \Rightarrow \mathrm{id}_C$ が自然同型だから，次の二つの図式は可換である.

$$
\begin{tikzcd}
GFc \arrow[r, "\theta_c"] \arrow[d, "GFf"'] & c \arrow[d, "f"] \\
GFc' \arrow[r, "\theta_{c'}"'] & c'
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
GFc \arrow[r, "\theta_c"] \arrow[d, "GFf'"'] & c \arrow[d, "f'"] \\
GFc' \arrow[r, "\theta_{c'}"'] & c'
\end{tikzcd}
$$

即ち $f = \theta_{c'} \circ GFf \circ \theta_c^{-1}$，$f' = \theta_{c'} \circ GFf' \circ \theta_c^{-1}$ である．今 $Ff = Ff'$ だったから $f = f'$ が分かる.

最後に充満であることを示す．対象 $c, c' \in C$ と D の射 $g\colon Fc \to Fc'$ を任意に取る．$f := \theta_{c'} \circ Gg \circ \theta_c^{-1}$ と定義する.

$$
\begin{tikzcd}
GFc \arrow[r, "\theta_c"] \arrow[d, "Gg"'] & c \arrow[d, "f"] \\
GFc' \arrow[r, "\theta_{c'}"'] & c'
\end{tikzcd}
$$

[*4] この条件を圏同値の定義にしている文献もある.

$\theta\colon GF \Rightarrow \mathrm{id}_C$ が自然同型だから，

$$\begin{array}{ccc} GFc & \xrightarrow{\theta_c} & c \\ {\scriptstyle GFf}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ GFc' & \xrightarrow[\theta_{c'}]{} & c' \end{array}$$

が可換である．即ち $GFf = \theta_{c'}^{-1} \circ f \circ \theta_c$ である．一方 f の定義より $Gg = \theta_{c'}^{-1} \circ f \circ \theta_c$ だから $Gg = GFf$ が分かる．F が忠実であるのと同様にして G も忠実だから，$g = Ff$ である．

($\Longleftarrow$) $F\colon C \to D$ を忠実充満な本質的全射とする．$d \in D$ とすると，ある $c \in C$ と同型射 $Fc \to d$ が存在する．そのような対象 $Gd \in C$ と同型射 $\varepsilon_d\colon F(Gd) \to d$ を一つ取る．

D の射 $g\colon d \to d'$ に対して C の射 $Gg\colon Gd \to Gd'$ を $F(Gg) = \varepsilon_{d'}^{-1} \circ g \circ \varepsilon_d$ を満たすものとする．(F が忠実充満だから，そのような Gg は一意に存在する．)

$$\begin{array}{ccc} FGd & \xrightarrow{\varepsilon_d} & d \\ {\scriptstyle F(Gg)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ FGd' & \xrightarrow[\varepsilon_{d'}]{} & d' \end{array}$$

このとき G は関手 $D \to C$ となる．

$\because$) $g\colon d_0 \to d_1$, $h\colon d_1 \to d_2$ を D の射とする．定義より, $G(h \circ g)$ は, $F(G(h \circ g)) = \varepsilon_{d_2}^{-1} \circ h \circ g \circ \varepsilon_{d_0}$ を満たす一意な射である．

一方，Gg，Gh の定義より，次の図式が可換である．

$$\begin{array}{ccc} FGd_0 & \xrightarrow{\varepsilon_{d_0}} & d_0 \\ {\scriptstyle F(Gg)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ FGd_1 & \xrightarrow[\varepsilon_{d_1}]{} & d_1 \\ {\scriptstyle F(Gh)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle h} \\ FGd_2 & \xrightarrow[\varepsilon_{d_2}]{} & d_2 \end{array}$$

即ち $F(Gh \circ Gg) = \varepsilon_{d_2}^{-1} \circ h \circ g \circ \varepsilon_{d_0}$ である．故に $G(h \circ g)$ の一意性から, $Gh \circ Gg = G(h \circ g)$ でなければならない.

同様にして $G(\mathrm{id}_d) = \mathrm{id}_{Gd}$ も分かる．従って G は関手である．

$g\colon d \to d'$ を D の射とすると，Gg の定義から

$$\begin{tikzcd} FGd \arrow[r, "\varepsilon_d"] \arrow[d, "FGg"'] & d \arrow[d, "g"] \\ FGd' \arrow[r, "\varepsilon_{d'}"'] & d' \end{tikzcd}$$

が可換である．故に $\varepsilon\colon FG \Rightarrow \mathrm{id}_D$ は自然変換である．ε_d は同型射だったから，ε は自然同型である．

後は自然同型 $\theta\colon GF \Rightarrow \mathrm{id}_C$ を定義すればよい．対象 $c \in C$ を取る．$Fc \in D$ だから $\varepsilon_{Fc}\colon FGFc \to Fc$ は D の同型射である．$F\colon C \to D$ は忠実充満だから，$F(\theta_c) = \varepsilon_{Fc}$ となるような C の射 $\theta_c\colon GFc \to c$ が一意に存在する．命題 4 より F は conservative であり，故に θ_c は同型である．このとき θ_c が自然変換 $\theta\colon GF \Rightarrow \mathrm{id}_C$ を定めることを示せばよい．

$f\colon c \to c'$ を C の射とする．$\varepsilon\colon FG \Rightarrow \mathrm{id}_D$ が自然同型だから

$$\begin{tikzcd} FGFc \arrow[r, "\varepsilon_{Fc}"] \arrow[d, "FGFf"'] & Fc \arrow[d, "Ff"] \\ FGFc' \arrow[r, "\varepsilon_{Fc'}"'] & Fc' \end{tikzcd}$$

は可換である．故に θ_c の定義から

$$\begin{tikzcd} FGFc \arrow[r, "F(\theta_c)"] \arrow[d, "FGFf"'] & Fc \arrow[d, "Ff"] \\ FGFc' \arrow[r, "F(\theta_{c'})"'] & Fc' \end{tikzcd}$$

が可換となる．従って $F(f \circ \theta_c) = F(\theta_{c'} \circ GFf)$ が分かる．今 F は忠実関手だったから $f \circ \theta_c = \theta_{c'} \circ GFf$ である．即ち

$$\begin{tikzcd} GFc \arrow[r, "\theta_c"] \arrow[d, "GFf"'] & c \arrow[d, "f"] \\ GFc' \arrow[r, "\theta_{c'}"'] & c' \end{tikzcd}$$

が可換であり，θ は自然変換である． □

系 9. $A \simeq B$, $B \simeq C$ ならば $A \simeq C$ である．

証明. $F\colon A \to B$, $G\colon B \to C$ を圏同値を与える関手とすれば，命題 8 より F, G は忠実充満な本質的全射である．故に命題 7 より $GF\colon A \to C$ も忠実充満な本質的全射だから再び命題 8 により GF が圏同値を与える． □

例 10. 集合 X, Y を離散圏，写像 $F\colon X \to Y$ を関手とみなすと，F は明らかに忠実である．また

- F が (関手として) 充満 $\Longleftrightarrow$ F が (写像として) 単射
- F が (関手として) 本質的全射 $\Longleftrightarrow$ F が (写像として) 全射

だから，F が圏同値を与えるのは F が全単射のときである． □

例 11. 群 G, H を圏，群準同型 $F\colon G \to H$ を関手とみなすと，F は明らかに本質的全射である．また

$$F \text{ が (関手として) 忠実充満} \Longleftrightarrow F \text{ が (準同型写像として) 全単射}$$

だから，F が圏同値を与えるのは F が群同型のときである． □

例 12. $\langle X, \leq \rangle$ を前順序集合とする．X の同値関係 $\sim$ を，$a, b \in X$ に対して

$$a \sim b \Longleftrightarrow a \leq b \text{ かつ } b \leq a$$

で定義して，a の同値類を $[a]$ で表すことにする．商集合 $X/{\sim}$ 上の関係 R を

$$[a]R[b] \Longleftrightarrow a \leq b$$

で定義すると R は順序関係となり，標準的全射 $\pi\colon X \to X/{\sim}$ は前順序を保つ写像である．よって前順序集合 $X, X/{\sim}$ を圏とみなせば π は関手である．π は全射だから明らかに本質的全射であり，また定義から忠実充満となることが分かる．故に圏同値 $X \simeq X/{\sim}$ が成り立つ．つまり前順序集合はある順序集合と圏同値になる． □

例 13. 有限次元実線型空間と線型写像がなす圏を $\mathbf{FinVect}_{\mathbb{R}}$ とする．今，圏 C を以下のように定める．

- $\mathrm{Ob}(C) := \mathbb{N}$.
- $\mathrm{Hom}_C(m, n) := \mathrm{M}(n, m, \mathbb{R}) =$「実 $n \times m$ 行列全体」とする．
- 射の合成は行列の積で定める．

すると関手 $F\colon C \to \mathbf{FinVect}_{\mathbb{R}}$ が

- $F(n) := \mathbb{R}^n$.
- $M \in \mathrm{Hom}_C(m,n)$ に対して $F(M)$ で対応する線型写像 $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ を表す.

により定められる．容易に分かるように，この F は忠実充満な本質的全射である．故に圏同値 $C \simeq \mathbf{FinVect}_{\mathbb{R}}$ が得られることがわかる．つまりこの意味で，線型写像を考えることと行列を考えることは同等である． $\square$

ちなみに圏同型については次のようになる.

命題 14. 関手 $F\colon C \to D$ が同型 $\iff$ F が忠実充満で，対象について全単射.

証明. ($\Longrightarrow$) 圏同型は圏同値だから F は忠実充満である．また圏同型の定義から明らかに対象について全単射である.

($\Longleftarrow$) まず $d \in D$ とすると，F が対象について全単射だから，ある $Gd \in C$ が一意に存在して $F(Gd) = d$ となる．次に $f\colon d_0 \to d_1$ を D の射とすると $f\colon F(Gd_0) \to F(Gd_1)$ である．今 F が忠実充満だから，$Gf\colon Gd_0 \to Gd_1$ が一意に存在して $F(Gf) = f$ となる．このとき G は関手 $G\colon D \to C$ を定める.

$\because$) $f\colon d_0 \to d_1$, $g\colon d_1 \to d_2$ を D の射とする．定義より $F(G(g\circ f)) = g\circ f$ である．一方 $F(Gg\circ Gf) = FGg\circ FGf = g\circ f$ であるから, F が忠実より $G(g\circ f) = Gg\circ Gf$ が分かる.

同じように，定義から $F(G(\mathrm{id}_{d_0})) = \mathrm{id}_{d_0}$ かつ $F(\mathrm{id}_{Gd_0}) = \mathrm{id}_{FGd_0} = \mathrm{id}_{d_0}$ だから $G(\mathrm{id}_{d_0}) = \mathrm{id}_{Gd_0}$ である.

定義から明らかに $GF = \mathrm{id}_C$，$FG = \mathrm{id}_D$ である．故に F は同型関手である． $\square$

2.3 圏の骨格

定義. $C \subset D$ を部分圏とするとき，関手 $F\colon C \to D$ を

- $a \in C$ に対して $F(a) := a$.
- $f \in \mathrm{Mor}(C)$ に対して $F(f) := f$.

により定義することができる．この関手を包含関手 (inclusion functor) という.

包含関手は明らかに忠実であり，また包含関手が充満となるのは充満部分圏のときであ

る．従って定理 8 によれば次の命題が成り立つ．

命題 15. $C \subset D$ を充満部分圏とする．任意の $d \in D$ に対して，ある $c \in C$ が存在して $c \cong d$ となるならば，$C \simeq D$ である． □

従って，圏同値により圏を同一視するならば，圏に同型な対象が複数ある場合には，そのうちの 1 つだけを残して残りを全て取り除いた充満部分圏を考えてもよいということになる．そこで次の定義をする．

定義. 圏 C が骨格的 (skeletal) $\iff$ $a \cong b$ ならば $a = b$ である．

定義. 圏 C の骨格 (skeleton) とは，骨格的な充満部分圏 $S \subset C$ であって条件

任意の $c \in C$ に対して，ある $s \in S$ が存在して $c \cong s$ となる

を満たすものをいう．

$S \subset C$ が骨格のとき，上で述べたことから $S \simeq C$ である．

例 16. 順序集合を圏とみなすと，これは明らかに骨格的である．よって例 12 により，前順序集合 X は骨格を持ち，それは (例 12 の記号を使うと) $X/\sim$ である． □

定理 17. 任意の圏は骨格を持つ．また骨格は圏同型を除いて一意である．

証明. C を圏とする．$\mathrm{Ob}(C)/\cong$ の完全代表系 $S \subset \mathrm{Ob}(C)$ を取る．この S を充満部分圏 $S \subset C$ と見なせば，明らかに S が骨格である．即ち骨格は存在する．

骨格の一意性を示すため，C を圏，$S, T \subset C$ を骨格とする．$s \in S$ とすると，T が骨格だから $t \in T$ が一意に存在して $s \cong t$ となる．そのような対象 $Fs \in T$ と同型射 $f_s\colon s \to Fs$ を一つ取る．$f\colon s_0 \to s_1$ に対して $Ff\colon Fs_0 \to Fs_1$ を $Ff := f_{s_1} \circ f \circ f_{s_0}^{-1}$ により定める．

$$\begin{tikzcd} s_0 \arrow[r, "f_{s_0}"] \arrow[d, "f"'] & Fs_0 \arrow[d, dashed, "Ff"] \\ s_1 \arrow[r, "f_{s_1}"'] & Fs_1 \end{tikzcd}$$

この $F\colon S \to T$ は関手である．

∵) まず $s \in S$ に対して $F(\mathrm{id}_s) = f_s \circ \mathrm{id}_s \circ f_s^{-1} = \mathrm{id}_{Fs}$ だから恒等射に関してはよ

い．合成に関しても，$f\colon s_0 \to s_1$，$g\colon s_1 \to s_2$ を S の射とすると

$$F(g \circ f) = f_{s_2} \circ (g \circ f) \circ f_{s_0}^{-1} = (f_{s_2} \circ g \circ f_{s_1}^{-1}) \circ (f_{s_1} \circ f \circ f_{s_0}^{-1}) = Fg \circ Ff$$

となるからよい．

この F が圏同型を与えることを示せばよい．まず F は対象について全単射である．

∵) まず $s_0, s_1 \in S$ が $Fs_0 = Fs_1$ を満たすとすると, 定義より $s_0 \cong Fs_0 = Fs_1 \cong s_1$ である．今 S が骨格だから $s_0 = s_1$ が分かる．

次に $t \in T$ を任意に取る．S が骨格だから，ある $s \in S$ が存在して $s \cong t$ となる．このとき $Fs \cong s \cong t$ で T が骨格だから $Fs = t$ である．

また F は忠実充満である．

∵) まず S の射 $f, g\colon s_0 \to s_1$ が $Ff = Fg$ を満たすとすると, 定義より $f_{s_1} \circ f \circ f_{s_0}^{-1} = f_{s_1} \circ g \circ f_{s_0}^{-1}$ だから $f = g$ である．故に F は忠実である．

次に T の射 $f\colon t_0 \to t_1$ を任意に取る．$s_0, s_1 \in S$ を $Fs_0 = t_0$，$Fs_1 = t_1$ を満たすように取り，$g := f_{s_1}^{-1} \circ f \circ f_{s_0}$ と定めれば $Fg = f$ である．従って F は充満である．

従って命題 14 により $F\colon S \to T$ は圏同型である． □

定理 18. C, D を圏，$S \subset C$，$T \subset D$ を骨格とする．このとき

$$C \text{ と } D \text{ が圏同値} \iff S \text{ と } T \text{ が圏同型}.$$

証明. ($\Longrightarrow$) 圏同値 $C \simeq D$ が成り立つとする．即ち関手 $F\colon C \to D$，$G\colon D \to C$ と自然同型 $\theta\colon GF \Rightarrow \mathrm{id}_C$，$\varepsilon\colon FG \Rightarrow \mathrm{id}_D$ が存在する．関手 F を $S \subset C$ に制限した関手を $F|_S\colon S \to D$ とする．即ち以下により定まる関手である．

- $s \in \mathrm{Ob}(S)$ に対して $F|_S(s) := F(s)$.
- $f \in \mathrm{Mor}(S)$ に対して $F|_S(f) := F(f)$.

この関手 $F|_S\colon S \to D$ は忠実充満で，対象について単射である．

∵) 忠実充満であることは明らかだから，対象について単射であることを示す．そのために $s_0, s_1 \in S$ が $F(s_0) = F(s_1)$ を満たすとする．F が忠実充満だから命題 4 より conservative であり，よって命題 5 から $s_0 \cong s_1$ が分かる．従って S が骨格であることより $s_0 = s_1$ である．

故に $\{Fs \mid s \in S\} \subset \mathrm{Ob}(D)$ が定める充満部分圏を $F(S) \subset D$ と書けば，命題 14 より関

手 $F|_S\colon S \to F(S)$ は圏同型を与える．また $F(S) \subset D$ は骨格である．

$\because$) 明らかに $F(S)$ は骨格的である．

任意の $d \in D$ を取る．$S \subset C$ が骨格だから，ある $s \in S$ が存在して $s \cong Gd$ となる．よって $Fs \cong FGd \cong d$ である．

従って骨格の一意性から $F(S)$ と T は圏同型であり，故に S と T も圏同型である．

($\Longleftarrow$) $F\colon S \to T$ を圏同型として，$I\colon S \to C$, $J\colon T \to D$ を包含関手とする．I, J は圏同値であるから，I の逆を与える関手を $G\colon C \to S$ とすれば，系 9 により $JFG\colon C \to D$ も圏同値である．

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, shift left, "G"] & S \arrow[l, shift left, "I"] \arrow[r, "F"] & T \arrow[r, "J"] & D \end{tikzcd}$$

$\square$