豊穣圏 (モノイダル圏が対称でも閉でもない場合)

alg-d
http://alg-d.com/math/kan_extension/

2022 年 10 月 1 日

V-豊穣圏を考える際，V は完備かつ余完備な対称モノイダル閉圏であるという仮定をしたが，ここでは V が一般のモノイダル圏の場合にどうなるかということを述べる (これは [1] を参考にした)．目標は米田埋込を定義して米田の補題 (定理 7) を示すことである．

まず，この場合でも V-豊穣圏 $\mathcal{C}$ は全く同様に定義できる．

次に $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ を定義するが，これには対称性を使っていたからそのままではうまくいかない．そこで次のようなものを考える．

命題 1. モノイダル圏 $\langle V, \otimes, I, \alpha, \lambda, \rho \rangle$ に対して

$$\overline{\otimes} := (V \times V \xrightarrow{\text{成分を入れ替える関手}} V \times V \xrightarrow{\otimes} V)$$

$$\bar{\alpha}_{uvw} := \alpha^{-1}_{wvu}$$

と定義すると $\langle V, \overline{\otimes}, I, \bar{\alpha}, \rho, \lambda \rangle$ もモノイダル圏となる． □

証明. モノイダル圏の 2 条件は次のようになる．

$$\begin{tikzcd}
 & x \otimes (w \otimes (v \otimes u)) \arrow[dl, "\mathrm{id}\otimes\alpha^{-1}_{wvu}"'] \arrow[dr, "\alpha^{-1}_{x,w,v\otimes u}"] & \\
x \otimes ((w \otimes v) \otimes u) \arrow[d, "\alpha^{-1}_{x,w\otimes v,u}"'] & & (x \otimes w) \otimes (v \otimes u) \arrow[d, "\alpha^{-1}_{x\otimes w,v,u}"] \\
(x \otimes (w \otimes v)) \otimes u \arrow[rr, "\alpha^{-1}_{xwv}\otimes\mathrm{id}"'] & & ((x \otimes w) \otimes v) \otimes u
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
v \otimes (I \otimes u) \arrow[rr, "\alpha^{-1}_{vIu}"] \arrow[dr, "v\otimes\lambda_u"'] & & (v \otimes I) \otimes u \arrow[dl, "\rho_v\otimes u"] \\
& v \otimes u &
\end{tikzcd}$$

従って成り立つ. □

このモノイダル圏を $\overline{V}$ で表すことにする．このとき

命題 2. $\mathcal{C}$ を V-豊穣圏とする．$\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ を

- $\mathrm{Ob}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}) := \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$.
- $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}(a,b) := \mathcal{C}(b,a)$.
- 合成は

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}^{\mathrm{op}}(b,c) \mathbin{\overline{\otimes}} \mathcal{C}^{\mathrm{op}}(a,b) &= \mathcal{C}(c,b) \mathbin{\overline{\otimes}} \mathcal{C}(b,a) \\
&= \mathcal{C}(b,a) \otimes \mathcal{C}(c,b) \\
&\xrightarrow{m_{cba}} \mathcal{C}(c,a) \\
&= \mathcal{C}^{\mathrm{op}}(a,c)
\end{aligned}$$

  とする．
- 恒等射は $j_a \colon I \to \mathcal{C}(a,a) = \mathcal{C}^{\mathrm{op}}(a,a)$ とする．

により定義すれば，これは $\overline{V}$-豊穣圏 $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ を与える．

証明. $\overline{V}$-豊穣圏 $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ の条件を書き下すと次の 3 つの図式となるから，明らかに成り立つ．

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}(b,a) \otimes \big(\mathcal{C}(c,b) \otimes \mathcal{C}(d,c)\big)\otimes \arrow[rr, "\alpha^{-1}"] \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes m_{dcb}"'] & & \big(\mathcal{C}(b,a) \otimes \mathcal{C}(c,b)\big) \otimes \mathcal{C}(d,c) \arrow[d, "m_{cba}\otimes\mathrm{id}"] \\
\mathcal{C}(b,a) \otimes \mathcal{C}(d,b) \arrow[dr, "m_{dba}"'] & & \mathcal{C}(c,a) \otimes \mathcal{C}(d,c) \arrow[dl, "m_{dca}"] \\
& \mathcal{C}(d,a) &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}(b,a) \otimes I \arrow[rr, "\rho"] \arrow[dr, "\mathrm{id}\otimes j_b"'] & & \mathcal{C}(b,a) \\
& \mathcal{C}(b,a) \otimes \mathcal{C}(b,b) \arrow[ur, "m_{bba}"'] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
I \otimes \mathcal{C}(b,a) \arrow[rr, "\lambda"] \arrow[dr, "j_a\otimes\mathrm{id}"'] & & \mathcal{C}(b,a) \\
& \mathcal{C}(a,a) \otimes \mathcal{C}(b,a) \arrow[ur, "m_{baa}"'] &
\end{tikzcd}$$

□

次に $\mathcal{V}$ を定義したいが，これはモノイダル閉であることを使っていたからそのままではうまくいかない．そこで V-豊穣圏の代わりに V-加群というものを考える．

定義. V-加群とは組 $\langle M, \odot, \varphi, \psi \rangle$ であって

(1) M は圏であり $\odot\colon V \times M \to M$ は関手である．

(2) φ は次の自然同型である．

$$\begin{tikzcd}
V \times V \times M \arrow[r, "\mathrm{id}\times\odot"] \arrow[d, "\otimes\times\mathrm{id}"'] \arrow[dr, phantom, "\varphi\Nearrow"] & V \times M \arrow[d, "\odot"] \\
V \times M \arrow[r, "\odot"'] & M
\end{tikzcd}$$

(3) ψ は次の自然同型である．

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{1} \times M \arrow[d, "I\times\mathrm{id}"'] \arrow[rd, bend left, "\cong"] \arrow[dr, phantom, "\psi\Nearrow"] & \\
V \times M \arrow[r, "\odot"'] & M
\end{tikzcd}$$

(4) $u, v, w \in V$，$m \in M$ に対して次の図式が可換である．

$$\begin{tikzcd}
 & ((u \otimes v) \otimes w) \odot m \arrow[dl, "\alpha_{uvw}\odot m"'] \arrow[dr, "\varphi_{u\otimes v, w, m}"] & \\
(u \otimes (v \otimes w)) \odot m \arrow[d, "\varphi_{u, v\otimes w, m}"'] & & (u \otimes v) \odot (w \odot m) \arrow[d, "\varphi_{u,v,w\odot m}"] \\
u \odot ((v \otimes w) \odot m) \arrow[rr, "\mathrm{id}\odot\varphi_{vwm}"'] & & u \odot (v \odot (w \odot m))
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
(u \otimes I) \odot m \arrow[rr, "\varphi_{uIm}"] \arrow[dr, "\rho_u\otimes m"'] & & u \odot (I \odot m) \arrow[dl, "u\otimes\psi_m"] \\
 & u \odot m &
\end{tikzcd}$$

※ M を V-加群とする．対象 $m, n \in M$ に対して関手 $\mathrm{Hom}_M(- \odot m, n)$ が表現可能であるとする．このとき $\mathrm{Hom}_M(- \odot m, n) \cong \mathrm{Hom}_M(-, \mathcal{M}(m, n))$ と書くと，$\mathcal{M}(m, n)$ は copower を持つ V-豊穣圏 $\mathcal{M}$ を定めることがわかる．逆に copower を

持つ V-豊穣圏 $\mathcal{M}$ があれば，その copower により V-加群が得られる．この意味で V-加群は V-豊穣圏 $\mathcal{M}$ と似たようなものである．

例 **3.** $\langle V, \otimes, \alpha, \lambda \rangle$ は V-加群である．同様にして $\overline{V}$ は $\overline{V}$-加群となる． □

定義. $\mathcal{C}$ を V-豊穣圏，M を V-加群とする．V-関手 $F\colon \mathcal{C} \to M$ とは

(1) 各対象 $a \in \mathcal{C}$ に対して，対象 $Fa \in M$ が与えられている．
(2) $a, b \in \mathcal{C}$ に対して，M の射 $F_{ab}\colon \mathcal{C}(a,b) \odot Fa \to Fb$ が与えられている．
(3) $a, b, c \in \mathcal{C}$ に対して次の図式が可換である．

$$\begin{tikzcd}
(\mathcal{C}(b,c) \otimes \mathcal{C}(a,b)) \odot Fa \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dd, "m_{abc} \odot \mathrm{id}"'] & \mathcal{C}(b,c) \odot (\mathcal{C}(a,b) \odot Fa) \arrow[d, "\mathrm{id} \odot F_{ab}"] \\
& \mathcal{C}(b,c) \odot Fb \arrow[d, "F_{bc}"] \\
\mathcal{C}(a,c) \odot Fa \arrow[r, "F_{ac}"'] & Fc
\end{tikzcd}$$

(4) $a \in \mathcal{C}$ に対して次の図式は可換である．

$$\begin{tikzcd}
I \odot Fa \arrow[r, "j_a \odot \mathrm{id}"] \arrow[dr, "\psi"'] & \mathcal{C}(a,a) \odot Fa \arrow[d, "F_{aa}"] \\
& Fa
\end{tikzcd}$$

定義. $F, G\colon \mathcal{C} \to M$ を V-関手とする．V-自然変換 $\theta\colon F \Rightarrow G$ とは M の射の族 $\theta = \{\theta_a\colon Fa \to Ga\}_{a \in \mathcal{C}}$ であって，任意の $a, b \in \mathcal{C}$ に対して次の図式が可換となるものである．

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}(a,b) \odot Fa \arrow[r, "\mathrm{id} \odot \theta_a"] \arrow[d, "F_{ab}"'] & \mathcal{C}(a,b) \odot Ga \arrow[d, "G_{ab}"] \\
Fb \arrow[r, "\theta_b"'] & Gb
\end{tikzcd}$$

定義. V-関手 $F\colon \mathcal{C} \to M$ と V-自然変換のなす圏を $\mathrm{Fun}_V(\mathcal{C}, M)$ と書く．

定義. V-豊穣圏 $\mathcal{C}$ に対して $P(\mathcal{C}) := \mathrm{Fun}_{\overline{V}}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}, \overline{V})$ と書く．

$F \in P(\mathcal{C})$ とするとき，定義を書き下すと，$a, b \in \mathcal{C}$ に対して $F_{ba} \colon Fb \otimes \mathcal{C}(a,b) \to Fa$ であり，これは

$$\begin{tikzcd}
Fc \otimes (\mathcal{C}(b,c) \otimes \mathcal{C}(a,b)) \arrow[r, "\alpha^{-1}"] \arrow[dd, "\mathrm{id} \otimes m_{abc}"'] & (Fc \otimes \mathcal{C}(b,c)) \otimes \mathcal{C}(a,b) \arrow[d, "F_{cb} \otimes \mathrm{id}"] \\
 & Fb \otimes \mathcal{C}(a,b) \arrow[d, "F_{ba}"] \\
Fc \otimes \mathcal{C}(a,c) \arrow[r, "F_{ca}"'] & Fa
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
Fa \otimes I \arrow[r, "\mathrm{id} \otimes j_a"] \arrow[dr, "\rho"'] & Fa \otimes \mathcal{C}(a,a) \arrow[d, "F_{aa}"] \\
 & Fa
\end{tikzcd}$$

を可換とするものである．

命題 4. V-豊穣圏 $\mathcal{C}$ に対して $P(\mathcal{C})$ は V-加群となる．

証明. 関手 $\odot \colon V \times P(\mathcal{C}) \to P(\mathcal{C})$ を以下のように定める．

- $x \in V$，$F \in P(\mathcal{C})$ に対して $x \odot F \in P(\mathcal{C})$ を以下のように定める．
  - ⋆ $a \in \mathcal{C}$ に対して $(x \odot F)(a) := x \otimes (Fa)$
  - ⋆ $a, b \in \mathcal{C}$ に対して，V の射 $(x \odot F)_{ab} \colon (x \odot F)(b) \otimes \mathcal{C}(a,b) \to (x \odot F)(a)$ を

$$(x \otimes Fb) \otimes \mathcal{C}(a,b) \xrightarrow{\alpha} x \otimes (Fb \otimes \mathcal{C}(a,b)) \xrightarrow{\mathrm{id} \otimes F_{ba}} x \otimes Fa$$

    で定める．

$\star$ このとき $x \odot F \in P(\mathcal{C})$ である．実際

$$
\begin{tikzcd}
(x \otimes Fc) \otimes (\mathcal{C}(b,c) \otimes \mathcal{C}(a,b)) \arrow[rr, "\alpha^{-1}"] \arrow[dd, "\mathrm{id} \otimes m_{abc}"'] \arrow[dr, "\alpha"] & & ((x \otimes Fc) \otimes \mathcal{C}(b,c)) \otimes \mathcal{C}(a,b) \arrow[d, "\alpha \otimes \mathrm{id}"] \\
& x \otimes (Fc \otimes (\mathcal{C}(b,c) \otimes \mathcal{C}(a,b))) \arrow[dd, "\mathrm{id} \otimes \alpha^{-1}"'] \arrow[ddddl, "\mathrm{id} \otimes (\mathrm{id} \otimes m_{abc})"] & (x \otimes (Fc \otimes \mathcal{C}(b,c))) \otimes \mathcal{C}(a,b) \arrow[d, "(\mathrm{id} \otimes F_{cb}) \otimes \mathrm{id}"] \arrow[ddl, "\alpha"'] \\
(x \otimes Fc) \otimes \mathcal{C}(a,c) \arrow[ddd, "\alpha"'] & & (x \otimes Fb) \otimes \mathcal{C}(a,b) \arrow[dd, "\alpha"] \\
& x \otimes ((Fc \otimes \mathcal{C}(b,c)) \otimes \mathcal{C}(a,b)) \arrow[dr, "\mathrm{id} \otimes (F_{bc} \otimes \mathrm{id})"'] & \\
& & x \otimes (Fb \otimes \mathcal{C}(a,b)) \arrow[d, "\mathrm{id} \otimes F_{ba}"] \\
x \otimes (Fc \otimes \mathcal{C}(a,c)) \arrow[rr, "\mathrm{id} \otimes F_{ca}"'] & & x \otimes Fa
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
(x \otimes Fa) \otimes I \arrow[r, "\mathrm{id} \otimes j_a"] \arrow[d, "\alpha"'] \arrow[rdd, bend right, "\rho"'] & (x \otimes Fb) \otimes \mathcal{C}(a,a) \arrow[d, "\alpha"] \\
x \otimes (Fa \otimes I) \arrow[r, "\mathrm{id} \otimes (\mathrm{id} \otimes j_a)"] \arrow[dr, "\mathrm{id} \otimes \rho"'] & x \otimes (Fa \otimes \mathcal{C}(a,a)) \arrow[d, "\mathrm{id} \otimes F_{aa}"] \\
& x \otimes Fa
\end{tikzcd}
$$

は可換である．

- $f\colon u \to v$ を V の射，$\theta\colon F \Rightarrow G$ を $P(\mathcal{C})$ の射とするとき，$(f \odot \theta)_a := f \odot \theta_a$ と定めると $f \odot \theta\colon u \odot F \Rightarrow v \odot G$ は $P(\mathcal{C})$ の射である．

$\because$) 次の図式が可換だからである．

$$
\begin{tikzcd}
(u \otimes Fb) \otimes \mathcal{C}(a,b) \arrow[r, "(f \otimes \theta_b) \otimes \mathrm{id}"] \arrow[d, "\alpha"'] & (v \otimes Gb) \otimes \mathcal{C}(a,b) \arrow[d, "\alpha"] \\
u \otimes (Fb \otimes \mathcal{C}(a,b)) \arrow[r, "f \otimes (\theta_b \otimes \mathrm{id})"] \arrow[d, "\mathrm{id} \otimes F_{ab}"'] & v \otimes (Gb \otimes \mathcal{C}(a,b)) \arrow[d, "\mathrm{id} \otimes G_{ab}"'] \\
u \otimes Fb \arrow[r, "f \otimes \theta_b"'] & v \otimes Gb
\end{tikzcd}
$$

- 明らかにこの $\odot$ は関手である．

自然同型

$$\begin{tikzcd}
V \times V \times P(\mathcal{C}) \arrow[r, "\mathrm{id}\times\odot"] \arrow[d, "\otimes\times\mathrm{id}"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\varphi}{\Nearrow}"] & V \times P(\mathcal{C}) \arrow[d, "\odot"] \\
V \times P(\mathcal{C}) \arrow[r, "\odot"'] & P(\mathcal{C})
\end{tikzcd}$$

を，$u, v \in V$，$F \in P(\mathcal{C})$，$a \in \mathcal{C}$ に対して

$$(\varphi_{uvF})_a := \alpha_{uvFa} \colon (u \otimes v) \otimes Fa \to u \otimes (v \otimes Fa)$$

により定める．また自然同型 ψ を

$$(\psi_F)_a := \lambda_{Fa} \colon I \otimes Fa \to Fa$$

により定める．これにより $\langle P(\mathcal{C}), \odot, \varphi, \psi\rangle$ が V-加群であることを示そう．即ち $u, v, w \in V$ と $F \in P(\mathcal{C})$ に対して次の図式が可換であることを示す．

$$\begin{tikzcd}
& ((u \otimes v) \otimes w) \odot F \arrow[dl, "\alpha_{uvw}\odot\mathrm{id}"'] \arrow[dr, "\varphi_{u\otimes v, w, F}"] & \\
(u \otimes (v \otimes w)) \odot F \arrow[d, "\varphi_{u, v\otimes w, F}"'] & & (u \otimes v) \odot (w \odot F) \arrow[d, "\varphi_{u, v, w\odot F}"] \\
u \odot ((v \otimes w) \odot F) \arrow[rr, "\mathrm{id}\odot\varphi_{vwF}"'] & & u \odot (v \odot (w \odot F))
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
(u \otimes I) \odot F \arrow[rr, "\varphi_{uIF}"] \arrow[dr, "\rho_u\otimes F"'] & & u \odot (I \odot F) \arrow[dl, "u\otimes\psi_F"] \\
& u \odot F &
\end{tikzcd}$$

そのためには $a \in \mathcal{C}$ に対して

$$\begin{tikzcd}
& ((u \otimes v) \otimes w) \otimes Fa \arrow[dl, "\alpha_{uvw}\otimes\mathrm{id}"'] \arrow[dr, "\alpha_{u\otimes v, w, Fa}"] & \\
(u \otimes (v \otimes w)) \otimes Fa \arrow[d, "\alpha_{u, v\otimes w, Fa}"'] & & (u \otimes v) \otimes (w \otimes Fa) \arrow[d, "\alpha_{u, v, w\otimes Fa}"] \\
u \otimes ((v \otimes w) \otimes Fa) \arrow[rr, "\mathrm{id}\otimes\alpha_{vwFa}"'] & & u \otimes (v \otimes (w \otimes Fa))
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
(u \otimes I) \otimes Fa \arrow[rr, "\alpha_{uIFa}"] \arrow[dr, "\rho_u \otimes Fa"'] & & u \otimes (I \otimes Fa) \arrow[dl, "u \otimes \lambda_{Fa}"] \\
& u \otimes Fa &
\end{tikzcd}$$

が可換であることを示せばよいが，それはモノイダル圏の条件から成り立つ． □

命題 5. $s \in \mathcal{C}$ に対して $a \mapsto \mathcal{C}(a,s)$ は $\overline{V}$-関手 $F\colon \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to V$ を定める．

証明. $a \in \mathcal{C}$ に対して $Fa := \mathcal{C}(a,s)$ として，$a,b \in \mathcal{C}$ に対して $F_{ab} := m_{abs}\colon \mathcal{C}(b,s) \otimes \mathcal{C}(a,b) \to \mathcal{C}(a,s)$ と定める．このとき

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}(c,s) \otimes (\mathcal{C}(b,c) \otimes \mathcal{C}(a,b)) \arrow[r, "\alpha^{-1}"] \arrow[dd, "\mathrm{id} \otimes m_{abc}"'] & (\mathcal{C}(c,s) \otimes \mathcal{C}(b,c)) \otimes \mathcal{C}(a,b) \arrow[d, "F_{bc} \otimes \mathrm{id}"] \\
& \mathcal{C}(b,s) \otimes \mathcal{C}(a,b) \arrow[d, "F_{ab}"] \\
\mathcal{C}(c,s) \otimes \mathcal{C}(a,c) \arrow[r, "F_{ac}"'] & \mathcal{C}(a,s)
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}(a,s) \otimes I \arrow[r, "\mathrm{id} \otimes j_a"] \arrow[dr, "\rho"'] & \mathcal{C}(a,s) \otimes \mathcal{C}(a,a) \arrow[d, "F_{aa}"] \\
& \mathcal{C}(a,s)
\end{tikzcd}$$

は可換だからこの F は $\overline{V}$-関手である． □

この $\overline{V}$-関手を $y(s)$ と書く．

命題 6. $a \mapsto y(a)$ は V-関手 $y\colon \mathcal{C} \to P(\mathcal{C})$ を定める．

証明. $a,b \in \mathcal{C}$ に対して $P(\mathcal{C})$ の射 $y_{ab}\colon \mathcal{C}(a,b) \odot y(a) \to y(b)$ を

$$(y_{ab})_c := m_{cab}\colon \mathcal{C}(a,b) \otimes \mathcal{C}(c,a) \to \mathcal{C}(c,a)$$

により定める．このとき

$$\begin{tikzcd}
(\mathcal{C}(b,c)\otimes\mathcal{C}(a,b))\odot y(a) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dd, "m_{abc}\odot\mathrm{id}"'] & \mathcal{C}(b,c)\odot(\mathcal{C}(a,b)\odot y(a)) \arrow[d, "\mathrm{id}\odot y_{ab}"] \\
 & \mathcal{C}(b,c)\odot y(b) \arrow[d, "y_{bc}"] \\
\mathcal{C}(a,c)\odot y(a) \arrow[r, "y_{ac}"'] & y(c)
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
I\odot y(a) \arrow[r, "j_a\odot\mathrm{id}"] \arrow[dr, "\psi"'] & \mathcal{C}(a,a)\odot y(a) \arrow[d, "y_{aa}"] \\
 & Fa
\end{tikzcd}$$

が可換であることを示せばよい．そのためには成分ごとに示せばよいから，$d\in\mathcal{C}$ に対して

$$\begin{tikzcd}
(\mathcal{C}(b,c)\otimes\mathcal{C}(a,b))\otimes\mathcal{C}(d,a) \arrow[r, "\alpha"] \arrow[dd, "m_{abc}\otimes\mathrm{id}"'] & \mathcal{C}(b,c)\otimes(\mathcal{C}(a,b)\otimes\mathcal{C}(d,a)) \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes m_{dab}"] \\
 & \mathcal{C}(b,c)\otimes\mathcal{C}(d,b) \arrow[d, "m_{dbc}"] \\
\mathcal{C}(a,c)\otimes\mathcal{C}(d,a) \arrow[r, "m_{dac}"'] & \mathcal{C}(d,c)
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
I\odot\mathcal{C}(d,a) \arrow[r, "j_a\odot\mathrm{id}"] \arrow[dr, "\lambda"'] & \mathcal{C}(a,a)\odot\mathcal{C}(d,a) \arrow[d, "m_{daa}"] \\
 & \mathcal{C}(d,a)
\end{tikzcd}$$

が可換であることを示せばよい．これは V-豊穣圏の条件である． □

定理 7 (米田の補題)**.** 自然同型 $\mathrm{Hom}_{P(\mathcal{C})}(-\odot y(a),F)\cong\mathrm{Hom}_V(-,Fa)$ が成り立つ．

証明. $u\in V$ について自然な全単射 $\theta_u\colon \mathrm{Hom}_{P(\mathcal{C})}(u\odot y(a),F)\cong\mathrm{Hom}_V(u,Fa)$ を定義する．そのために $\beta\colon u\odot y(a)\Rightarrow F$ に対して

$$\theta_u(\beta):=(u\xrightarrow{\rho_u^{-1}}u\otimes I\xrightarrow{\mathrm{id}\otimes j_a}u\otimes\mathcal{C}(a,a)\xrightarrow{\beta_a}Fa)$$

と定義する．この写像 θ_u は $u\in V$ について自然である．

∵) $f\colon v\to u$ に対して次の図式が可換であることを示せばよい.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{P(\mathcal{C})}(u\odot y(a),F) \arrow[r, "\theta_u"] \arrow[d, "-\circ(f\odot y(a))"'] & \mathrm{Hom}_V(u,Fa) \arrow[d, "-\circ f"] \\
\mathrm{Hom}_{P(\mathcal{C})}(v\odot y(a),F) \arrow[r, "\theta_v"'] & \mathrm{Hom}_V(v,Fa)
\end{tikzcd}$$

$\beta\in\mathrm{Hom}_{P(\mathcal{C})}(u\odot y(a),F)$ とすると，定義より $\beta\circ(f\odot y(a))$ は

$$(\beta\circ(f\odot y(a)))_b=(u\otimes\mathcal{C}(b,a)\xrightarrow{f\otimes\mathrm{id}}v\otimes\mathcal{C}(b,a)\xrightarrow{\beta_b}Fb)$$

で与えられる．従って次の図式の可換性から $\theta_v(\beta\circ(f\odot y(a)))=\theta_u(\beta)\circ f$ が分かる.

$$\begin{tikzcd}
u \arrow[r, "\rho^{-1}"] \arrow[d, "f"'] & u\otimes I \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes j_a"] \arrow[d, "f\otimes\mathrm{id}"] & u\otimes\mathcal{C}(a,a) \arrow[d, "f\otimes\mathrm{id}"] \\
v \arrow[r, "\rho^{-1}"'] & v\otimes I \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes j_a"'] & v\otimes\mathcal{C}(a,a) \arrow[d, "\beta_a"] \\
 & & Fa
\end{tikzcd}$$

θ_u が全単射であることを示せばよい．そのために $k\colon u\to Fa$，$b\in\mathcal{C}$ に対して

$$\sigma_u(k)_b:=(u\otimes\mathcal{C}(b,a)\xrightarrow{k\otimes\mathrm{id}}Fa\otimes\mathcal{C}(b,a)\xrightarrow{F_{ab}}Fb)$$

と定める．$\sigma_u(k)\colon u\odot y(a)\Rightarrow F$ である.

∵) 任意の $b,c\in\mathcal{C}$ に対して次の図式が可換だからである.

$$\begin{tikzcd}
(u\otimes\mathcal{C}(b,a))\otimes\mathcal{C}(c,b) \arrow[r, "(k\otimes\mathrm{id})\otimes\mathrm{id}"] \arrow[d, "\alpha"'] & (Fa\otimes\mathcal{C}(b,a))\otimes\mathcal{C}(c,b) \arrow[r, "F_{ab}\otimes\mathrm{id}"] \arrow[d, "\alpha"] & Fb\otimes\mathcal{C}(c,b) \arrow[dd, "F_{bc}"] \\
u\otimes(\mathcal{C}(b,a)\otimes\mathcal{C}(c,b)) \arrow[r, "k\otimes(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})"'] \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes m_{cba}"'] & Fa\otimes(\mathcal{C}(b,a)\otimes\mathcal{C}(c,b)) \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes m_{cba}"] & \\
u\otimes\mathcal{C}(c,a) \arrow[r, "k\otimes\mathrm{id}"'] & Fa\otimes\mathcal{C}(c,a) \arrow[r, "F_{ac}"'] & Fc
\end{tikzcd}$$

$\theta_u^{-1} = \sigma_u$ であることを示そう．まず $k\colon u \to Fa$ に対して

$$\begin{aligned}
\theta_u(\sigma_u(k)) &= (u \xrightarrow{\rho_u^{-1}} u \otimes I \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes j_a} u \otimes \mathcal{C}(a,a) \xrightarrow{\sigma_u(k)_a} Fa) \\
&= (x \xrightarrow{\rho_u^{-1}} u \otimes I \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes j_a} u \otimes \mathcal{C}(a,a) \xrightarrow{k\otimes\mathrm{id}} Fa \otimes \mathcal{C}(a,a) \xrightarrow{F_{aa}} Fa)
\end{aligned}$$

であるが

$$\begin{tikzcd}
u \arrow[r, "\rho^{-1}"] \arrow[drrr, bend right, "k"'] & u \otimes I \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes j_a"] \arrow[dr, "k\otimes\mathrm{id}"'] & u \otimes \mathcal{C}(a,a) \arrow[r, "k\otimes\mathrm{id}"] & Fa \otimes \mathcal{C}(a,a) \arrow[d, "F_{aa}"] \\
 & & Fa \otimes I \arrow[ur, "\mathrm{id}\otimes j_a"] \arrow[r, "\rho"'] & Fa
\end{tikzcd}$$

が可換だから $\theta_u(\sigma_u(k)) = k$ である．

次に $\beta\colon u \odot y(a) \Rightarrow F$ に対して

$$\begin{aligned}
\sigma_u(\theta_u(\beta))_b &= (u \otimes \mathcal{C}(b,a) \xrightarrow{\theta_u(\beta)\otimes\mathrm{id}} Fa \otimes \mathcal{C}(b,a) \xrightarrow{F_{ab}} Fb) \\
&= (u \otimes \mathcal{C}(b,a) \xrightarrow{\rho_u^{-1}\otimes\mathrm{id}} (u \otimes I) \otimes \mathcal{C}(b,a) \\
&\qquad \xrightarrow{(\mathrm{id}\otimes j_a)\otimes\mathrm{id}} (u \otimes \mathcal{C}(a,a)) \otimes \mathcal{C}(b,a) \\
&\qquad \xrightarrow{\beta_a\otimes\mathrm{id}} Fa \otimes \mathcal{C}(b,a) \xrightarrow{F_{ab}} Fb)
\end{aligned}$$

であるが

$$\begin{tikzcd}
u \otimes \mathcal{C}(b,a) \arrow[r, "\rho^{-1}\otimes\mathrm{id}"] \arrow[ddr, bend right, "\mathrm{id}"'] & (u \otimes I) \otimes \mathcal{C}(b,a) \arrow[r, "(\mathrm{id}\otimes j_a)\otimes\mathrm{id}"] \arrow[d, "\alpha"'] & (u \otimes \mathcal{C}(a,a)) \otimes \mathcal{C}(b,a) \arrow[r, "\beta_a\otimes\mathrm{id}"] \arrow[d, "\alpha"] & Fa \otimes \mathcal{C}(b,a) \arrow[dd, "F_{ab}"] \\
 & u \otimes (I \otimes \mathcal{C}(b,a)) \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes(j_a\otimes\mathrm{id})"'] \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes\lambda"'] & u \otimes (\mathcal{C}(a,a) \otimes \mathcal{C}(b,a)) \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes m_{baa}"] & \\
 & u \otimes \mathcal{C}(b,a) \arrow[r, "\mathrm{id}"'] & u \otimes \mathcal{C}(b,a) \arrow[r, "\beta_b"'] & Fb
\end{tikzcd}$$

が可換だから $\sigma_u(\theta_u(\beta))_b = \beta_b$ である． □

参考文献

[1] V. Hinich, Enriched Yoneda Lemma, `https://arxiv.org/abs/1511.00857`