

豊穰圏 (モノイダル圏が対称でも閉でもない場合)

alg-d

http://alg-d.com/math/kan_extension/

2020年5月7日

V -豊穰圏を考える際、 V は完備かつ余完備な対称モノイダル閉圏であるという仮定をしたが、ここでは V が一般のモノイダル圏の場合にどうなるかということここでは述べる。

まず、この場合でも V -豊穰圏 \mathcal{C} は全く同様に定義できる。

次に \mathcal{C}^{op} を定義するが、これには対称性を使っていたからそのままではうまくいかない。そこで次のようなものを考える。

命題 1. モノイダル圏 $\langle V, \otimes, I, \alpha, \lambda, \rho \rangle$ に対して

$$\bar{\otimes} := (V \times V \xrightarrow{\text{成分を入れ替える関手}} V \times V \xrightarrow{\otimes} V)$$

$$\bar{\alpha}_{uvw} := \alpha_{wvu}^{-1}$$

と定義すると $\langle V, \bar{\otimes}, I, \bar{\alpha}, \rho, \lambda \rangle$ もモノイダル圏となる。 □

証明. モノイダル圏の 2 条件は次のようになる。

$$\begin{array}{ccc}
 & x \otimes (w \otimes (v \otimes u)) & \\
 \text{id} \otimes \alpha_{wvu}^{-1} \swarrow & & \searrow \alpha_{x,w,v \otimes u}^{-1} \\
 x \otimes ((w \otimes v) \otimes u) & & (x \otimes w) \otimes (v \otimes u) \\
 \alpha_{x,w \otimes v,u}^{-1} \downarrow & & \downarrow \alpha_{x \otimes w,v,u}^{-1} \\
 (x \otimes (w \otimes v)) \otimes u & \xrightarrow{\alpha_{xwv}^{-1} \otimes \text{id}} & ((x \otimes w) \otimes v) \otimes u
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
v \otimes (I \otimes u) & \xrightarrow{\alpha_{vIu}^{-1}} & (v \otimes I) \otimes u \\
\searrow & & \swarrow \\
v \otimes \lambda_u & & \rho_v \otimes u \\
& \searrow & \swarrow \\
& v \otimes u &
\end{array}$$

従って成り立つ. □

このモノイダル圏を \bar{V} で表すことにする. このとき

命題 2. \mathcal{C} を V -豊穡圏とする. \mathcal{C}^{op} を

- $\text{Ob}(\mathcal{C}^{\text{op}}) := \text{Ob}(\mathcal{C})$.
- $\mathcal{C}^{\text{op}}(a, b) := \mathcal{C}(b, a)$.
- 合成は

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}^{\text{op}}(b, c) \otimes \mathcal{C}^{\text{op}}(a, b) &= \mathcal{C}(c, b) \otimes \mathcal{C}(b, a) \\
&= \mathcal{C}(b, a) \otimes \mathcal{C}(c, b) \\
&\xrightarrow{m_{cba}} \mathcal{C}(c, a) \\
&= \mathcal{C}^{\text{op}}(a, c)
\end{aligned}$$

とする.

- 恒等射は $j_a: I \rightarrow \mathcal{C}(a, a) = \mathcal{C}^{\text{op}}(a, a)$ とする.

により定義すれば, これは \bar{V} -豊穡圏 \mathcal{C}^{op} を与える.

証明. \bar{V} -豊穡圏 \mathcal{C}^{op} の条件を書き下すと次の3つの図式となるから, 明らかに成り立つ.

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{C}(b, a) \otimes (\mathcal{C}(c, b) \otimes \mathcal{C}(d, c)) & \xrightarrow{\alpha^{-1}} & (\mathcal{C}(b, a) \otimes \mathcal{C}(c, b)) \otimes \mathcal{C}(d, c) \\
\text{id} \otimes m_{dcb} \downarrow & & \downarrow m_{cba} \otimes \text{id} \\
\mathcal{C}(b, a) \otimes \mathcal{C}(d, b) & & \mathcal{C}(c, a) \otimes \mathcal{C}(d, c) \\
& \searrow m_{dba} & \swarrow m_{dca} \\
& \mathcal{C}(d, a) &
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{C}(b, a) \otimes I & \xrightarrow{\rho} & \mathcal{C}(b, a) \\
\text{id} \otimes j_b \searrow & & \swarrow m_{bba} \\
& \mathcal{C}(b, a) \otimes \mathcal{C}(b, b) &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc}
I \otimes \mathcal{C}(b, a) & \xrightarrow{\lambda} & \mathcal{C}(b, a) \\
j_a \otimes \text{id} \searrow & & \swarrow m_{baa} \\
& \mathcal{C}(a, a) \otimes \mathcal{C}(b, a) &
\end{array}$$

□

次に \mathcal{V} を定義したいが、これはモノイダル閉であることを使っていたからそのままではうまくいかない。そこで V -豊穡圏の代わりに V -加群というものを考える。

定義. V -加群とは組 $\langle M, \odot, \varphi, \psi \rangle$ であって

- (1) M は圏であり $\odot: V \times M \rightarrow M$ は関手である。
- (2) φ は次の自然同型である。

$$\begin{array}{ccc} V \times V \times M & \xrightarrow{\text{id} \times \odot} & V \times M \\ \otimes \times \text{id} \downarrow & \nearrow \varphi & \downarrow \odot \\ V \times M & \xrightarrow{\quad \quad \quad} & M \\ & \odot & \end{array}$$

- (3) ψ は次の自然同型である。

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{1} \times M & \xrightarrow{\quad \quad \quad} & M \\ I \times \text{id} \downarrow & \nearrow \psi & \downarrow \cong \\ V \times M & \xrightarrow{\quad \quad \quad} & M \\ & \odot & \end{array}$$

- (4) $u, v, w \in V, m \in M$ に対して次の図式が可換である。

$$\begin{array}{ccccc} & & ((u \otimes v) \otimes w) \odot m & & \\ & \swarrow \alpha_{uvw} \odot m & & \searrow \varphi_{u \otimes v, w, m} & \\ (u \otimes (v \otimes w)) \odot m & & & & (u \otimes v) \odot (w \odot m) \\ \downarrow \varphi_{u, v \otimes w, m} & & & & \downarrow \varphi_{u, v, w \odot m} \\ u \odot ((v \otimes w) \odot m) & \xrightarrow{\text{id} \odot \varphi_{vwm}} & & & u \odot (v \odot (w \odot m)) \\ & & & & \\ (u \otimes I) \odot m & \xrightarrow{\varphi_{uIm}} & & & u \odot (I \odot m) \\ \swarrow \rho_u \otimes m & & & \searrow u \otimes \psi_m & \\ & & u \odot m & & \end{array}$$

※ M を V -加群とする。対象 $m, n \in M$ に対して関手 $\text{Hom}_M(- \odot m, n)$ が表現可能であるとする。このとき $\text{Hom}_M(- \odot m, n) \cong \text{Hom}_M(-, \mathcal{M}(m, n))$ と書くと $\mathcal{M}(m, n)$ は V -豊穡圏 \mathcal{M} を定めることがわかる。この意味で V -加群は V -豊穡圏 \mathcal{M} と似たようなものである。

例 3. $\langle V, \otimes, \alpha, \lambda \rangle$ は V -加群である. 同様に \bar{V} は \bar{V} -加群となる. □

定義. \mathcal{C} を V -豊穡圏, M を V -加群とする. V -関手 $F: \mathcal{C} \rightarrow M$ とは

- (1) 各対象 $a \in \mathcal{C}$ に対して, 対象 $Fa \in M$ が与えられている.
- (2) $a, b \in \mathcal{C}$ に対して, M の射 $F_{ab}: \mathcal{C}(a, b) \odot Fa \rightarrow Fb$ が与えられている.
- (3) $a, b, c \in \mathcal{C}$ に対して次の図式が可換である.

$$\begin{array}{ccc}
 (\mathcal{C}(b, c) \otimes \mathcal{C}(a, b)) \odot Fa & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{C}(b, c) \odot (\mathcal{C}(a, b) \odot Fa) \\
 \downarrow m_{abc} \odot \text{id} & & \downarrow \text{id} \odot F_{ab} \\
 & & \mathcal{C}(b, c) \odot Fb \\
 & & \downarrow F_{bc} \\
 \mathcal{C}(a, c) \odot Fa & \xrightarrow{F_{ac}} & Fc
 \end{array}$$

- (4) $a \in \mathcal{C}$ に対して次の図式は可換である.

$$\begin{array}{ccc}
 I \odot Fa & \xrightarrow{j_a \odot \text{id}} & \mathcal{C}(a, a) \odot Fa \\
 & \searrow \psi & \downarrow F_{aa} \\
 & & Fa
 \end{array}$$

定義. $F, G: \mathcal{C} \rightarrow M$ を V -関手とする. V -自然変換 $\theta: F \Rightarrow G$ とは M の射の族 $\theta = \{\theta_a: Fa \rightarrow Ga\}_{a \in \mathcal{C}}$ であって任意の $a, b \in \mathcal{C}$ に対して

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{C}(a, b) \odot Fa & \xrightarrow{\text{id} \odot \theta_a} & \mathcal{C}(a, b) \odot Ga \\
 F_{ab} \downarrow & & \downarrow G_{ab} \\
 Fb & \xrightarrow{\theta_b} & Gb
 \end{array}$$

が可換になるもののことである.

定義. V -関手 $F: \mathcal{C} \rightarrow M$ と V -自然変換のなす圏を $\text{Fun}_V(\mathcal{C}, M)$ と書く.

定義. V -豊穡圏 \mathcal{C} に対して $\hat{\mathcal{C}} := \text{Fun}_{\bar{V}}(\mathcal{C}^{\text{op}}, \bar{V})$ と書く.

$F \in \hat{\mathcal{C}}$ とするとき, 定義を書き下すと, $a, b \in \mathcal{C}$ に対して $F_{ba}: Fb \otimes \mathcal{C}(a, b) \rightarrow Fa$ で

あり, これは

$$\begin{array}{ccc}
 Fc \otimes (\mathcal{C}(b, c) \otimes \mathcal{C}(a, b)) & \xrightarrow{\alpha^{-1}} & (Fc \otimes \mathcal{C}(b, c)) \otimes \mathcal{C}(a, b) \\
 \downarrow \text{id} \otimes m_{abc} & & \downarrow F_{cb} \otimes \text{id} \\
 & & Fb \otimes \mathcal{C}(a, b) \\
 & & \downarrow F_{ba} \\
 Fc \otimes \mathcal{C}(a, c) & \xrightarrow{F_{ca}} & Fa \\
 & & \\
 Fa \otimes I & \xrightarrow{\text{id} \otimes j_a} & Fa \otimes \mathcal{C}(a, a) \\
 & \searrow \rho & \downarrow F_{aa} \\
 & & Fa
 \end{array}$$

を可換とするものである.

命題 4. V -豊穰圏 \mathcal{C} に対して $\hat{\mathcal{C}}$ は V -加群となる.

証明. 関手 $\odot: V \times \hat{\mathcal{C}} \rightarrow \hat{\mathcal{C}}$ を以下のように定める.

- $x \in V, F \in \hat{\mathcal{C}}$ に対して $x \odot F \in \hat{\mathcal{C}}$ を以下のように定める.
 - $a \in \mathcal{C}$ に対して $(x \odot F)(a) := x \otimes (Fa)$
 - $a, b \in \mathcal{C}$ に対して, V の射 $(x \odot F)_{ab}: (x \odot F)(b) \otimes \mathcal{C}(a, b) \rightarrow (x \odot F)(a)$ を

$$(x \otimes Fb) \otimes \mathcal{C}(a, b) \xrightarrow{\alpha} x \otimes (Fb \otimes \mathcal{C}(a, b)) \xrightarrow{\text{id} \otimes F_{ba}} x \otimes Fa$$

で定める.

– このとき $x \odot F \in \widehat{\mathcal{C}}$ である。実際

$$\begin{array}{ccc}
 (x \otimes Fc) \otimes (\mathcal{C}(b, c) \otimes \mathcal{C}(a, b)) & \xrightarrow{\alpha^{-1}} & ((x \otimes Fc) \otimes \mathcal{C}(b, c)) \otimes \mathcal{C}(a, b) \\
 \downarrow \text{id} \otimes m_{abc} & \searrow \alpha & \downarrow \alpha \otimes \text{id} \\
 (x \otimes Fc) \otimes \mathcal{C}(a, c) & x \otimes (Fc \otimes (\mathcal{C}(b, c) \otimes \mathcal{C}(a, b))) & (x \otimes (Fc \otimes \mathcal{C}(b, c))) \otimes \mathcal{C}(a, b) \\
 \downarrow \alpha & \downarrow \text{id} \otimes \alpha^{-1} & \downarrow (\text{id} \otimes F_{cb}) \otimes \text{id} \\
 x \otimes (Fc \otimes \mathcal{C}(a, c)) & x \otimes ((Fc \otimes \mathcal{C}(b, c)) \otimes \mathcal{C}(a, b)) & (x \otimes Fb) \otimes \mathcal{C}(a, b) \\
 \downarrow \text{id} \otimes (\text{id} \otimes m_{abc}) & \downarrow \text{id} \otimes (F_{bc} \otimes \text{id}) & \downarrow \alpha \\
 x \otimes (Fc \otimes \mathcal{C}(a, c)) & x \otimes (Fb \otimes \mathcal{C}(a, b)) & x \otimes (Fb \otimes \mathcal{C}(a, b)) \\
 \downarrow \text{id} \otimes F_{ca} & \downarrow \text{id} \otimes F_{ba} & \downarrow \text{id} \otimes F_{ba} \\
 x \otimes (Fc \otimes \mathcal{C}(a, c)) & \xrightarrow{\text{id} \otimes F_{ca}} & x \otimes Fa
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 (x \otimes Fa) \otimes I & \xrightarrow{\text{id} \otimes j_a} & (x \otimes Fb) \otimes \mathcal{C}(a, a) \\
 \downarrow \alpha & & \downarrow \alpha \\
 x \otimes (Fa \otimes I) & \xrightarrow{\text{id} \otimes (\text{id} \otimes j_a)} & x \otimes (Fa \otimes \mathcal{C}(a, a)) \\
 \downarrow \text{id} \otimes \rho & & \downarrow \text{id} \times F_{aa} \\
 x \otimes Fa & \xrightarrow{\rho} & x \otimes Fa
 \end{array}$$

は可換である。

- $f: u \rightarrow v$ を V の射, $\theta: F \Rightarrow G$ を $\widehat{\mathcal{C}}$ の射とすると, $(f \odot \theta)_a := f \odot \theta_a$ と定めると $f \odot \theta: u \odot F \Rightarrow v \odot G$ は $\widehat{\mathcal{C}}$ の射である。

∴) 次の図式が可換だからである。

$$\begin{array}{ccc}
 (u \otimes Fb) \otimes \mathcal{C}(a, b) & \xrightarrow{(f \odot \theta_b) \otimes \text{id}} & (v \otimes Gb) \otimes \mathcal{C}(a, b) \\
 \downarrow \alpha & & \downarrow \alpha \\
 u \otimes (Fb \otimes \mathcal{C}(a, b)) & \xrightarrow{f \odot (\theta_b \otimes \text{id})} & v \otimes (Gb \otimes \mathcal{C}(a, b)) \\
 \downarrow \text{id} \otimes F_{ab} & & \downarrow \text{id} \otimes G_{ab} \\
 u \otimes Fb & \xrightarrow{f \odot \theta_b} & v \otimes Gb
 \end{array}$$

- 明らかにこの \odot は関手である。

自然同型

$$\begin{array}{ccc}
 V \times V \times \widehat{\mathcal{C}} & \xrightarrow{\text{id} \times \odot} & V \times \widehat{\mathcal{C}} \\
 \otimes \times \text{id} \downarrow & \nearrow \varphi & \downarrow \odot \\
 V \times \widehat{\mathcal{C}} & \xrightarrow{\quad \odot \quad} & \widehat{\mathcal{C}}
 \end{array}$$

を, $u, v \in V$, $F \in \widehat{\mathcal{C}}$, $a \in \mathcal{C}$ に対して

$$(\varphi_{uvF})_a := \alpha_{uvFa}: (u \otimes v) \otimes Fa \rightarrow u \otimes (v \otimes Fa)$$

により定める. また自然同型 ψ を

$$(\psi_F)_a := \lambda_{Fa}: I \otimes Fa \rightarrow Fa$$

により定める. これにより $\langle \widehat{\mathcal{C}}, \odot, \varphi, \psi \rangle$ が V -加群であることを示そう. 即ち $u, v, w \in V$ と $F \in \widehat{\mathcal{C}}$ に対して次の図式が可換であることを示す.

$$\begin{array}{ccc}
 & ((u \otimes v) \otimes w) \odot F & \\
 \alpha_{uvw} \odot \text{id} \swarrow & & \searrow \varphi_{u \otimes v, w, F} \\
 (u \otimes (v \otimes w)) \odot F & & (u \otimes v) \odot (w \odot F) \\
 \varphi_{u, v \otimes w, F} \downarrow & & \downarrow \varphi_{u, v, w \odot F} \\
 u \odot ((v \otimes w) \odot F) & \xrightarrow{\text{id} \odot \varphi_{vwF}} & u \odot (v \odot (w \odot F)) \\
 & & \\
 (u \otimes I) \odot F & \xrightarrow{\varphi_{uIF}} & u \odot (I \odot F) \\
 \rho_u \otimes F \searrow & & \swarrow u \otimes \psi_F \\
 & u \odot F &
 \end{array}$$

そのためには $a \in \mathcal{C}$ に対して

$$\begin{array}{ccc}
 & ((u \otimes v) \otimes w) \otimes Fa & \\
 \alpha_{uvw} \otimes \text{id} \swarrow & & \searrow \alpha_{u \otimes v, w, Fa} \\
 (u \otimes (v \otimes w)) \otimes Fa & & (u \otimes v) \otimes (w \otimes Fa) \\
 \alpha_{u, v \otimes w, Fa} \downarrow & & \downarrow \alpha_{u, v, w \otimes Fa} \\
 u \otimes ((v \otimes w) \otimes Fa) & \xrightarrow{\text{id} \otimes \alpha_{vwFa}} & u \otimes (v \otimes (w \otimes Fa))
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
(u \otimes I) \otimes Fa & \xrightarrow{\alpha_{uIFa}} & u \odot (I \otimes Fa) \\
\rho_u \otimes Fa \searrow & & \swarrow u \otimes \lambda_{Fa} \\
& u \otimes Fa &
\end{array}$$

が可換であることを示せばよいが、それはモノイダル圏の条件から成り立つ。 \square

命題 5. $s \in \mathcal{C}$ に対して $a \mapsto \mathcal{C}(a, s)$ は \bar{V} -関手 $F: \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow V$ を定める。

証明. $a \in \mathcal{C}$ に対して $Fa := \mathcal{C}(a, s)$ として、 $a, b \in \mathcal{C}$ に対して $F_{ab} := m_{abs}: \mathcal{C}(b, s) \otimes \mathcal{C}(a, b) \rightarrow \mathcal{C}(a, s)$ と定める。このとき

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{C}(c, s) \otimes (\mathcal{C}(b, c) \otimes \mathcal{C}(a, b)) & \xrightarrow{\alpha^{-1}} & (\mathcal{C}(c, s) \otimes \mathcal{C}(b, c)) \otimes \mathcal{C}(a, b) \\
\text{id} \otimes m_{abc} \downarrow & & \downarrow F_{bc} \otimes \text{id} \\
& & \mathcal{C}(b, s) \otimes \mathcal{C}(a, b) \\
& & \downarrow F_{ab} \\
\mathcal{C}(c, s) \otimes \mathcal{C}(a, c) & \xrightarrow{F_{ac}} & \mathcal{C}(a, s)
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{C}(a, s) \otimes I & \xrightarrow{\text{id} \otimes j_a} & \mathcal{C}(a, s) \otimes \mathcal{C}(a, a) \\
\rho \searrow & & \downarrow F_{aa} \\
& & \mathcal{C}(a, s)
\end{array}$$

は可換だからこの F は \bar{V} -関手である。 \square

この \bar{V} -関手を $y(a)$ と書く。

命題 6. $a \mapsto y(a)$ は V -関手 $y: \mathcal{C} \rightarrow \hat{\mathcal{C}}$ を定める。

証明. $a, b \in \mathcal{C}$ に対して $\hat{\mathcal{C}}$ の射 $y_{ab}: \mathcal{C}(a, b) \odot y(a) \rightarrow y(b)$ を

$$(y_{ab})_c := m_{cab}: \mathcal{C}(a, b) \otimes \mathcal{C}(c, a) \rightarrow \mathcal{C}(c, a)$$

により定める. このとき

$$\begin{array}{ccc}
(\mathcal{C}(b, c) \otimes \mathcal{C}(a, b)) \odot y(a) & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{C}(b, c) \odot (\mathcal{C}(a, b) \odot y(a)) \\
\downarrow m_{abc} \odot \text{id} & & \downarrow \text{id} \odot y_{ab} \\
\mathcal{C}(a, c) \odot y(a) & \xrightarrow{y_{ac}} & \mathcal{C}(b, c) \odot y(b) \\
& & \downarrow y_{bc} \\
& & y(c)
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
I \odot y(a) & \xrightarrow{j_a \odot \text{id}} & \mathcal{C}(a, a) \odot y(a) \\
& \searrow \psi & \downarrow y_{aa} \\
& & Fa
\end{array}$$

が可換であることを示せばよい. そのためには成分ごとに示せばよいから, $d \in \mathcal{C}$ に対して

$$\begin{array}{ccc}
(\mathcal{C}(b, c) \otimes \mathcal{C}(a, b)) \otimes \mathcal{C}(d, a) & \xrightarrow{\alpha} & \mathcal{C}(b, c) \otimes (\mathcal{C}(a, b) \otimes \mathcal{C}(d, a)) \\
\downarrow m_{abc} \otimes \text{id} & & \downarrow \text{id} \otimes m_{dab} \\
\mathcal{C}(a, c) \otimes \mathcal{C}(d, a) & \xrightarrow{m_{dac}} & \mathcal{C}(b, c) \otimes \mathcal{C}(d, b) \\
& & \downarrow m_{dbc} \\
& & \mathcal{C}(d, c)
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
I \odot \mathcal{C}(b, a) & \xrightarrow{j_a \odot \text{id}} & \mathcal{C}(a, a) \odot \mathcal{C}(b, a) \\
& \searrow \lambda & \downarrow m_{baa} \\
& & \mathcal{C}(b, a)
\end{array}$$

が可換であることを示せばよい. これは V -豊穡圏の条件である. □

定理 7 (米田の補題). 自然同型 $\text{Hom}_{\widehat{\mathcal{C}}}(- \odot y(c), F) \cong \text{Hom}_V(-, Fc)$ が成り立つ.

証明. $x \in V$ に対して自然な同型 $\theta_x: \text{Hom}_{\widehat{\mathcal{C}}}(x \odot y(c), F) \cong \text{Hom}_V(x, Fc)$ を定義する. そのために $\beta: x \odot y(c) \Rightarrow F$ に対して

$$\theta_x(\beta) := (x \xrightarrow{\rho_x^{-1}} x \otimes I \xrightarrow{\text{id} \otimes j_c} x \otimes \mathcal{C}(c, c) \xrightarrow{\beta_c} Fc)$$

と定義する. この写像 θ_x は x について自然である.

∴) $f: u \rightarrow x$ に対して $\theta_u(\beta \circ (f \circ y(c))) = \theta_x(\beta) \circ f$ を示せばよい. 定義より $\beta \circ (f \circ y(c))$ は

$$(\beta \circ (f \circ y(c)))_a = (u \otimes \mathcal{C}(a, c) \xrightarrow{f \otimes \text{id}} x \otimes \mathcal{C}(a, c) \xrightarrow{\beta_a} Fa)$$

で与えられるから次の図式が可換であることを示せばよい.

$$\begin{array}{ccccc} u & \xrightarrow{\rho^{-1}} & u \otimes I & \xrightarrow{\text{id} \otimes j_c} & u \otimes \mathcal{C}(c, c) \\ f \downarrow & & \downarrow f \otimes \text{id} & & \downarrow f \otimes \text{id} \\ x & \xrightarrow{\rho^{-1}} & x \otimes I & \xrightarrow{\text{id} \otimes j_c} & x \otimes \mathcal{C}(c, c) \\ & & & & \downarrow \beta_c \\ & & & & Fc \end{array}$$

θ_x が同型であることを示せばよい. そのために $k: x \rightarrow Fc$, $a \in \mathcal{C}$ に対して

$$\sigma_x(k)_a := (x \otimes \mathcal{C}(a, c) \xrightarrow{k \otimes \text{id}} Fc \otimes \mathcal{C}(a, c) \xrightarrow{F_{ca}} Fa)$$

と定める. $\sigma_x(k): x \circ y(c) \Rightarrow F$ である.

∴) 次の図式が可換だからである.

$$\begin{array}{ccccc} (x \otimes \mathcal{C}(b, c)) \otimes \mathcal{C}(a, b) & \xrightarrow{(k \otimes \text{id}) \otimes \text{id}} & (Fc \otimes \mathcal{C}(b, c)) \otimes \mathcal{C}(a, b) & \xrightarrow{F_{cb} \otimes \text{id}} & Fb \otimes \mathcal{C}(a, b) \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \alpha & & \downarrow F_{ba} \\ x \otimes (\mathcal{C}(b, c) \otimes \mathcal{C}(a, b)) & \xrightarrow{k \otimes (\text{id} \otimes \text{id})} & Fc \otimes (\mathcal{C}(b, c) \otimes \mathcal{C}(a, b)) & & \\ \text{id} \otimes m_{abc} \downarrow & & \downarrow \text{id} \otimes m_{abc} & & \\ x \otimes \mathcal{C}(a, c) & \xrightarrow{k \otimes \text{id}} & Fc \otimes \mathcal{C}(a, c) & \xrightarrow{F_{ca}} & Fa \end{array}$$

$\theta_x^{-1} = \sigma_x$ であることを示そう. まず $k: x \rightarrow Fc$ に対して

$$\begin{aligned} \theta_x(\sigma_x(k)) &= (x \xrightarrow{\rho_x^{-1}} x \otimes I \xrightarrow{\text{id} \otimes j_c} x \otimes \mathcal{C}(c, c) \xrightarrow{\sigma_x(k)_c} Fc) \\ &= (x \xrightarrow{\rho_x^{-1}} x \otimes I \xrightarrow{\text{id} \otimes j_c} x \otimes \mathcal{C}(c, c) \xrightarrow{k \otimes \text{id}} Fc \otimes \mathcal{C}(c, c) \xrightarrow{F_{cc}} Fc) \end{aligned}$$

であるが

$$\begin{array}{ccccc}
 x & \xrightarrow{\rho^{-1}} & x \otimes I & \xrightarrow{\text{id} \otimes j_c} & x \otimes \mathcal{C}(c, c) & \xrightarrow{k \otimes \text{id}} & Fc \otimes \mathcal{C}(c, c) \\
 & & & \searrow k \otimes \text{id} & & \nearrow \text{id} \otimes j_c & \downarrow F_{cc} \\
 & & & & Fc \otimes I & \xrightarrow{\rho} & Fc \\
 & & & \nearrow k & & & \uparrow \\
 & & & & & &
 \end{array}$$

が可換だから $\theta_x(\sigma_x(k)) = k$ である.

次に $\beta: x \odot y(c) \Rightarrow F$ に対して

$$\begin{aligned}
 \sigma_x(\theta_x(\beta))_a &= (x \otimes \mathcal{C}(a, c) \xrightarrow{\theta_x(\beta) \otimes \text{id}} Fc \otimes \mathcal{C}(a, c) \xrightarrow{F_{ca}} Fa) \\
 &= (x \otimes \mathcal{C}(a, c) \xrightarrow{\rho_x^{-1} \otimes \text{id}} (x \otimes I) \otimes \mathcal{C}(a, c) \\
 &\quad \xrightarrow{(\text{id} \otimes j_c) \otimes \text{id}} (x \otimes \mathcal{C}(c, c)) \otimes \mathcal{C}(a, c) \\
 &\quad \xrightarrow{\beta_c \otimes \text{id}} Fc \otimes \mathcal{C}(a, c) \xrightarrow{F_{ca}} Fa)
 \end{aligned}$$

であるが

$$\begin{array}{ccccc}
 x \otimes \mathcal{C}(a, b) & \xrightarrow{\rho^{-1} \otimes \text{id}} & (x \otimes I) \otimes \mathcal{C}(a, b) & \xrightarrow{(\text{id} \otimes j_c) \otimes \text{id}} & (x \otimes \mathcal{C}(b, c)) \otimes \mathcal{C}(a, b) & \xrightarrow{\beta_b \otimes \text{id}} & Fb \otimes \mathcal{C}(a, b) \\
 & & \alpha \downarrow & & \downarrow \alpha & & \downarrow F_{ba} \\
 & & x \otimes (I \otimes \mathcal{C}(a, b)) & \xrightarrow{\text{id} \otimes (j_c \otimes \text{id})} & x \otimes (\mathcal{C}(b, c) \otimes \mathcal{C}(a, b)) & & \\
 & & \text{id} \otimes \lambda \downarrow & & \downarrow \text{id} \otimes m_{abc} & & \\
 & & x \otimes \mathcal{C}(a, c) & \xrightarrow{\text{id}} & x \otimes \mathcal{C}(a, c) & \xrightarrow{\beta_a} & Fa \\
 & \text{id} \nearrow & & & & &
 \end{array}$$

が可換だから $\sigma_x(\theta_x(\beta))_a = \beta_a$ である. □

参考文献

- [1] V. Hinich, Enriched Yoneda Lemma, <https://arxiv.org/abs/1511.00857>