豊穣圏

alg-d
http://alg-d.com/math/kan_extension/

2017 年 7 月 29 日

※ この PDF は書きかけ (?) で，証明等にギャップがかなりあります．(とりあえず第二章は書けてると思います) (モノイダル圏の説明を追加しましたがまだテキトーです)

大雑把に言うと，$\mathrm{Hom}_C(x, y)$ が集合ではなく，他の (良い) 圏 V の対象になっているような C を V-豊穣圏という．豊穣圏においても Kan 拡張を定義することができ，通常の圏と同様な定理が成り立つ．これを使うと，様々な定理を示すことができる．(全ての概念は Kan 拡張である!) それを説明することがこの PDF の目的である．

目次

1　モノイダル圏

最初に書いた「良い圏」とは「完備かつ余完備な対称モノイダル閉圏」のことである．そこでまずモノイダル圏について説明する．

定義. 対象が 1 つの bicategory をモノイダル圏 (monoidal category) という．

圏 C がモノイド，即ち $\mathrm{Ob}(C) = \{*\}$ の場合に $M := \mathrm{Hom}_C(*,*)$ とすれば M は二項演算と単位元を持つ集合になるのであった (そして通常の意味でのモノイドの条件を満たす)．同様に bicategory $\mathcal{B}$ がモノイダル圏，即ち $\mathrm{Ob}(\mathcal{B}) = \{*\}$ の場合に $V := \mathcal{B}(*,*)$ とすると V は圏であり，「二項演算」を与える関手 $C_{***}\colon V \times V \longrightarrow V$ と「単位元」となる対象 $\mathrm{id}_* \in V$ を持つ．この観点でモノイダル圏の定義を言い換えると次のようになる．

命題 1. モノイダル圏とは圏 V であって，以下を満たすものである．

(1) 関手 $\otimes\colon V \times V \longrightarrow V$ が与えられている．
(2) 対象 $I \in V$ が与えられている．
(3) 自然同型 $\alpha\colon \otimes \circ (\otimes \times \mathrm{id}_V) \Longrightarrow \otimes \circ (\mathrm{id}_V \times \otimes)$ が与えられている．

$$\begin{tikzcd}
& V \times V \times V \arrow[dl, "\otimes \times \mathrm{id}_V"'] \arrow[dr, "\mathrm{id}_V \times \otimes"] & \\
V \times V \arrow[rr, phantom, "\overset{\alpha}{\Longrightarrow}"] \arrow[dr, "\otimes"'] & & V \times V \arrow[dl, "\otimes"] \\
& V &
\end{tikzcd}$$

即ち，$u, v, w \in V$ について自然な同型 $\alpha_{uvw}\colon (u \otimes v) \otimes w \longrightarrow u \otimes (v \otimes w)$ が成り立つ．

(4) 自然同型 $\lambda\colon I \otimes - \Longrightarrow \mathrm{id}_V$ が与えられている．即ち $u \in V$ について自然な同型 $\lambda_u\colon I \otimes u \longrightarrow u$ が成り立つ．
(5) 自然同型 $\rho\colon - \otimes I \Longrightarrow \mathrm{id}_V$ が与えられている．

(6) 次の図式が可換である．

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
& ((u \otimes v) \otimes w) \otimes x \arrow[dl, "\alpha_{uvw} \otimes \mathrm{id}"'] \arrow[dr, "\alpha_{u \otimes v, w, x}"] & \\
(u \otimes (v \otimes w)) \otimes x \arrow[d, "\alpha_{u, v \otimes w, x}"'] & & (u \otimes v) \otimes (w \otimes x) \arrow[d, "\alpha_{u, v, w \otimes x}"] \\
u \otimes ((v \otimes w) \otimes x) \arrow[rr, "\mathrm{id} \otimes \alpha_{vwx}"'] & & u \otimes (v \otimes (w \otimes x))
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
(u \otimes I) \otimes v \arrow[rr, "\alpha_{uIv}"] \arrow[dr, "\rho_u \otimes v"'] & & u \otimes (I \otimes v) \arrow[dl, "u \otimes \lambda_v"] \\
& u \otimes v &
\end{tikzcd}$$

定義. 対称モノイダル圏とは，モノイダル圏 V であって，$u, v \in V$ について自然な同型 $\gamma_{uv} \colon u \otimes v \longrightarrow v \otimes u$ が与えられ，以下の条件を満たすことをいう．

(1) $\gamma_{vu} \circ \gamma_{uv} = \mathrm{id}_{u \otimes v}$

(2) 次の図式が可換である．

$$\begin{tikzcd}
(u \otimes v) \otimes w \arrow[r, "\alpha_{uvw}"] \arrow[d, "\gamma_{uv} \otimes \mathrm{id}"'] & u \otimes (v \otimes w) \arrow[r, "\gamma_{u, v \otimes w}"] & (v \otimes w) \otimes u \arrow[d, "\alpha_{vwu}"] \\
(v \otimes u) \otimes w \arrow[r, "\alpha_{vuw}"'] & v \otimes (u \otimes w) \arrow[r, "\mathrm{id} \otimes \gamma_{uw}"'] & v \otimes (w \otimes u)
\end{tikzcd}$$

補題 2. 対称モノイダル圏において次の図式は可換である．

$$\begin{tikzcd}
u \otimes I \arrow[rr, "\gamma_{uI}"] \arrow[dr, "\rho"'] & & I \otimes u \arrow[dl, "\lambda"] \\
& u &
\end{tikzcd}$$

証明. 次の図式を考える.

$$\begin{tikzcd}
 & (I\otimes u)\otimes I \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[d, "\rho"] \arrow[drr, phantom, "(V)"] & & I\otimes(u\otimes I) \arrow[d, "\lambda"] \arrow[dr, bend left, "\mathrm{id}\otimes\gamma"] & \\
 & I\otimes u \arrow[r, "\lambda"] \arrow[drr, phantom, "(*)"] & u \arrow[r, "\rho^{-1}"] & u\otimes I \arrow[d, "\gamma"] \arrow[dr, phantom, "(\gamma)"] & \\
(u\otimes I)\otimes I \arrow[r, "\rho"] \arrow[uur, bend left, "\gamma\otimes\mathrm{id}"] \arrow[dr, bend right, "\alpha"'] \arrow[ur, phantom, "(\gamma)"] \arrow[dr, phantom, "(V)"] & u\otimes I \arrow[rr, "\gamma"] \arrow[u, "\gamma"] \arrow[drr, phantom, "(\gamma)"] & & I\otimes u \arrow[dr, phantom, "(V)"] & I\otimes(I\otimes u) \arrow[l, "\lambda"'] \\
 & u\otimes(I\otimes I) \arrow[rr, "\gamma"] \arrow[u, "\mathrm{id}\otimes\lambda"] & & (I\otimes I)\otimes u \arrow[u, "\lambda\otimes\mathrm{id}"'] \arrow[ur, bend right, "\alpha"'] &
\end{tikzcd}$$

(V) の部分は coherence 定理より可換である．(γ) の部分は γ の自然性から可換である．また一番外側は対称モノイダル圏の定義により可換である．従って $(*)$ の部分も可換になる．γ は同型だったから $\gamma\circ\rho^{-1}\circ\lambda=\mathrm{id}$ が分かり，故に

$$\begin{tikzcd}
u\otimes I \arrow[rr, "\gamma"] \arrow[dr, "\rho"'] & & I\otimes u \arrow[dl, "\lambda"] \\
 & u &
\end{tikzcd}$$

が可換である． □

定義. 対称モノイダル閉圏とは，対称モノイダル圏 V であって，任意の $u\in V$ に対して関手 $-\otimes u\colon V\longrightarrow V$ が右随伴を持つことを言う．(この右随伴を $[u,-]$ で表す．)

V を対称モノイダル閉圏として $u,v,w\in V$ とすると

$$\mathrm{Hom}_V(u\otimes v,w)\cong\mathrm{Hom}_V(u,[v,w])$$

である．また $x\in V$ に対して自然に

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_V(x,[u\otimes v,w]) &\cong \mathrm{Hom}_V(x\otimes(u\otimes v),w)\\
&\cong \mathrm{Hom}_V((x\otimes u)\otimes v,w)\\
&\cong \mathrm{Hom}_V(x\otimes u,[v,w])\\
&\cong \mathrm{Hom}_V(x,[u,[v,w]])
\end{aligned}$$

であるから，米田の補題により $[u\otimes v,w]\cong[u,[v,w]]$ が分かる．更に V が対称であるから $[u,[v,w]]\cong[u\otimes v,w]\cong[v\otimes u,w]\cong[v,[u,w]]$ となる．

V を対称モノイダル閉圏とするとき, 随伴 $-\otimes u\dashv[u,-]$ の counit を $\mathrm{ev}\colon[u,-]\otimes u\Longrightarrow\mathrm{id}$ と書く．またこの随伴で $\rho\colon u\otimes I\longrightarrow u$ に対応する射を $i\colon u\longrightarrow[I,u]$ と書く．

命題 3. $i\colon u \longrightarrow [I,u]$ は同型射である．

証明. $f\colon [I,u] \longrightarrow u$ を合成 $[I,u] \xrightarrow{\rho^{-1}} [I,u]\otimes I \xrightarrow{\mathrm{ev}} u$ により定める．$f = i^{-1}$ を示す．

まず $i \circ f = \mathrm{id}$ を示す．即ち次の左の図式が可換であることを示す．

$$\begin{tikzcd}
{[I,u]} \arrow[d, "\rho^{-1}"'] \arrow[ddr, "\mathrm{id}"] & \\
{[I,u]\otimes I} \arrow[d, "\mathrm{ev}"'] & \\
u \arrow[r, "i"'] & {[I,u]}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
{[I,u]\otimes I} \arrow[d, "\rho^{-1}\otimes\mathrm{id}"'] \arrow[ddr, "\mathrm{ev}"] & \\
{([I,u]\otimes I)\otimes I} \arrow[d, "\mathrm{ev}\otimes\mathrm{id}"'] & \\
u\otimes I \arrow[r, "\rho"'] & u
\end{tikzcd}$$

その為には随伴により, 右の図式が可換であることを示せばよいが, それは $\rho^{-1}\otimes\mathrm{id} = \rho^{-1}$ より明らか.

次に $f \circ i = \mathrm{id}$ を示す．即ち次の左の図式が可換であることを示す．

$$\begin{tikzcd}
{[I,u]\otimes I} \arrow[d, "\mathrm{ev}"'] \arrow[dr, "\rho"] & \\
u \arrow[r, "i"'] & {[I,u]}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
{([I,u]\otimes I)\otimes I} \arrow[r, "\rho\otimes\mathrm{id}"] \arrow[d, "\mathrm{ev}"'] & {[I,u]\otimes I} \arrow[d, "\mathrm{ev}"] \\
u\otimes I \arrow[r, "\rho"'] & u
\end{tikzcd}$$

その為には随伴により，右の図式が可換であることを示せばよいが，それは $\rho\otimes\mathrm{id} = \rho$ より明らか. $\square$

例 4. C を有限直積を持つ圏とする．このとき C は直積 $\times$ を積，終対象 1 を単位元とする対称モノイダル圏となる．特に **Set** や **Cat** や $\mathbf{2} = \{0 \to 1\}$ は対称モノイダル圏である．これらは対称モノイダル閉圏である． $\square$

例 5. アーベル群と準同型がなす圏 **Ab** はテンソル積 $\otimes$ を積，有理整数環 $\mathbb{Z}$ を単位元とする対称モノイダル閉圏である． $\square$

例 6. $\overline{\mathbb{R}}_+ := [0,\infty]$ に通常と逆の順序 $\geq$ を入れて圏とみなす．すると $\overline{\mathbb{R}}_+$ は和 $+$ を積，0 を単位元とする対称モノイダル圏である．$u, v \in \overline{\mathbb{R}}_+$ に対して $[u,v] \in \overline{\mathbb{R}}_+$ を

$$[u,v] := \begin{cases} 0 & (v \leq u \text{ のとき}) \\ \infty & (u < v = \infty \text{ のとき}) \\ v - u & (u < v < \infty \text{ のとき}) \end{cases}$$

と定める．このとき $u, v, w \in \overline{\mathbb{R}}_+$ に対して

$$\mathrm{Hom}_{\overline{\mathbb{R}}_+}(u+v, w) = \mathrm{Hom}_{\overline{\mathbb{R}}_+}(u, [v, w])$$

である．

$\because$) $u+v \geq w \iff u \geq [v, w]$ を示せばよい．

まず $w \leq v$ の場合，常に $u+v \geq w$ であるが，一方 $[v, w] = 0$ だから常に $u \geq [v, w]$ となりよい．

次に $v < w = \infty$ の場合，$u+v \geq w$ となるのは $u = \infty$ のときのみであるが，一方 $[v, w] = \infty$ だから $u \geq [v, w]$ となるのは $u = \infty$ のときでありよい．

最後に $v < w < \infty$ の場合，$[v, w] = w-v$ なので明らかに $u+v \geq w \iff u \geq w-v$ である．

よって $\overline{\mathbb{R}}_+$ は対称モノイダル閉圏である． $\square$

2 豊穣圏

2.1 定義

以下，この PDF ではモノイダル圏は常に対称モノイダル閉圏で，完備かつ余完備であるとしておく．

定義. V をモノイダル圏とする．V-豊穣圏 (V-enriched category) $\mathcal{C}$ とは，以下の条件を満たすものである．

(1) 対象の集まり $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ が与えられている．

(2) $a, b \in \mathcal{C}$ に対して，V の対象 $\mathcal{C}(a, b) \in V$ が与えられている．（これを a から b への射の集まりと考える．）

(3) $a, b, c \in \mathcal{C}$ に対して，V の射 $m_{abc} \colon \mathcal{C}(b, c) \otimes \mathcal{C}(a, b) \longrightarrow \mathcal{C}(a, c)$ が与えられている．（これが射の合成を与えると考える．）

(4) $a \in \mathcal{C}$ に対して，V の射 $j_a \colon I \longrightarrow \mathcal{C}(a, a)$ が与えられている．（これが c の恒等射を与えると考える．）

(5) V における次の図式が可換である．(即ち，結合律が成り立つ)

$$\begin{tikzcd}[column sep=tiny] \big(\mathcal{C}(c,d)\otimes\mathcal{C}(b,c)\big)\otimes\mathcal{C}(a,b) \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[d, "m_{bcd}\otimes\mathrm{id}"'] & & \mathcal{C}(c,d)\otimes\big(\mathcal{C}(b,c)\otimes\mathcal{C}(a,b)\big) \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes m_{abc}"] \\ \mathcal{C}(b,d)\otimes\mathcal{C}(a,b) \arrow[dr, "m_{acd}"'] & & \mathcal{C}(c,d)\otimes\mathcal{C}(a,c) \arrow[dl, "m_{abd}"] \\ & \mathcal{C}(a,d) & \end{tikzcd}$$

(6) V における次の図式が可換である．(即ち，j_a は恒等射である．)

$$\begin{tikzcd}[column sep=tiny] I\otimes\mathcal{C}(a,b) \arrow[rr, "\lambda"] \arrow[dr, "j_b\otimes\mathrm{id}"'] & & \mathcal{C}(a,b) \\ & \mathcal{C}(b,b)\otimes\mathcal{C}(a,b) \arrow[ur, "m_{abb}"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd}[column sep=tiny] \mathcal{C}(a,b)\otimes I \arrow[rr, "\rho"] \arrow[dr, "\mathrm{id}\otimes j_a"'] & & \mathcal{C}(a,b) \\ & \mathcal{C}(a,b)\otimes\mathcal{C}(a,a) \arrow[ur, "m_{aab}"'] & \end{tikzcd}$$

また，$\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ が集合となるとき，$\mathcal{C}$ を小 V-豊穣圏という．

※ この定義から分かるように，豊穣圏は一般のモノイダル圏に対して定義されるが，始めに注意したようにここでは，モノイダル圏 V は常に対称モノイダル閉圏で，完備かつ余完備であるとする．(この仮定がなくても成り立つ定理も以下にはあるが，どの定理にどの仮定が要るかについては特に注意を払わないことにする．)

定義. $\mathcal{C},\mathcal{D}$ を V-豊穣圏とする．V-関手 $F\colon\mathcal{C}\longrightarrow\mathcal{D}$ とは以下の条件を満たすものである．

(1) 各対象 $a\in\mathcal{C}$ に対して，対象 $Fa\in\mathcal{D}$ が与えられている．
(2) $a,b\in\mathcal{C}$ に対して，V の射 $F_{ab}\colon\mathcal{C}(a,b)\longrightarrow\mathcal{D}(Fa,Fb)$ が与えられている．
(3) 次の図式が可換である．(即ち合成と可換である．)

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}(b,c)\otimes\mathcal{C}(a,b) \arrow[r, "m_{abc}"] \arrow[d, "F_{bc}\otimes F_{ab}"'] & \mathcal{C}(a,c) \arrow[d, "F_{ac}"] \\ \mathcal{D}(Fb,Fc)\otimes\mathcal{D}(Fa,Fb) \arrow[r, "m_{FaFbFc}"'] & \mathcal{D}(Fa,Fc) \end{tikzcd}$$

(4) $a \in \mathcal{C}$ に対して次の図式が可換である．(即ち恒等射を保つ．)

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "j_a"] \arrow[dr, "j_{Fa}"'] & \mathcal{C}(a,a) \arrow[d, "F_{aa}"] \\ & \mathcal{D}(Fa,Fa) \end{tikzcd}$$

例 7. **Set**-豊穣圏が通常の locally small な圏であり，**Set**-関手は通常の関手である． □

例 8. 前順序集合 P を圏とみなすとき $\mathrm{Hom}_P(x,y) \in \mathbf{2}$ と考えることができる．これにより P を小 **2**-豊穣圏とみなすことができる．逆に，小 **2**-豊穣圏は前順序集合とみなすことができる．また **2**-関手は順序を保つ写像とみなすことができる． □

例 9. R を (可換とは限らない) 単位的環とするとき，**Ab**-豊穣圏 $\mathcal{C}$ を以下のように定めることができる．

- $\mathrm{Ob}(\mathcal{C}) := \{*\}$
- $\mathcal{C}(*,*)$ は加法群 R とする．
- 合成 $\mathcal{C}(*,*) \otimes \mathcal{C}(*,*) \longrightarrow \mathcal{C}(*,*)$ は乗法 $R \times R \ni (r,s) \longmapsto rs \in R$ から定まる射とする．
- $j_*\colon \mathbb{Z} \longrightarrow \mathcal{C}(*,*) = R$ を $j_*(1) := 1$ で定める．

逆に，$\mathrm{Ob}(\mathcal{C}) = \{*\}$ となるような **Ab**-豊穣圏 $\mathcal{C}$ に対して $R := \mathcal{C}(*,*)$ は単位的環である．この対応により，単位的環と，1 点 **Ab**-豊穣圏を同一視することができる．また小 **Ab**-豊穣圏を ringoid と呼ぶことがある． □

例 10. (X,d) を距離空間としたとき，$\overline{\mathbb{R}}_+$-豊穣圏 $\mathcal{C}$ を以下のように定めることができる．

- $\mathrm{Ob}(\mathcal{C}) := X$
- $\mathcal{C}(a,b) := d(a,b)$
- 三角不等式 $d(b,c) + d(a,b) \geq d(a,c)$ が成り立つから，射 $\mathcal{C}(b,c) + \mathcal{C}(a,b) \longrightarrow \mathcal{C}(a,c)$ が一意に存在する．これにより m を定める．
- $d(a,a) = 0$ だから射 $0 \longrightarrow \mathcal{C}(a,a)$ が一意に存在する．これにより j_a を定める．

こうして，$\overline{\mathbb{R}}_+$-豊穣圏を一般化された距離空間と見なすことができる．また距離空間 $(X,d_X),(Y,d_Y)$ を $\overline{\mathbb{R}}_+$-豊穣圏とみなして $F\colon X \longrightarrow Y$ を $\overline{\mathbb{R}}_+$-関手とすると，定義より，$x,y \in X$ に対して $\overline{\mathbb{R}}_+$ の射 $F_{xy}\colon X(x,y) \longrightarrow Y(Fx,Fy)$ が存在するから $d_X(x,y) \geq d_Y(Fx,Fy)$ である．即ちこの場合 F は Lipschitz 定数が 1 以下の Lipschitz

連続写像である． □

例 11. 定義から分かる通り，**Cat**-豊穣圏，**Cat**-関手は strict 2-category, strict 2-functor と一致する． □

例 12. モノイダル圏 V に対して，$\mathcal{I}$ を

- $\mathrm{Ob}(\mathcal{I}) := \{*\}$
- $\mathcal{I}(*, *) := I$
- $m_{***} := \lambda \colon I \otimes I \longrightarrow I$
- $j_* := \mathrm{id}_* \colon I \longrightarrow I$

で定めれば，これは V-豊穣圏になる．これを単位 V-豊穣圏という． □

$\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ を V-豊穣圏，$F \colon \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$，$G \colon \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{C}$ を V-関手とする．

- $a \in \mathcal{A}$ に対して $(G \circ F)a := G(Fa)$.
- $a, b \in \mathcal{A}$ に対して $(G \circ F)_{ab} := G_{FaFb} \circ F_{ab} \colon \mathcal{A}(a, b) \longrightarrow \mathcal{C}(GFa, GFb)$.

と定めれば，$G \circ F$ は V-関手 $\mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{C}$ となる．

∵) 次の図式から明らか．

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{A}(b,c) \otimes \mathcal{A}(a,b) \arrow[r, "m_{abc}"] \arrow[d, "F_{bc} \otimes F_{ab}"'] & \mathcal{A}(a,c) \arrow[d, "F_{ac}"] \\
\mathcal{B}(Fb,Fc) \otimes \mathcal{B}(Fa,Fb) \arrow[r, "m_{FaFbFc}"'] \arrow[d, "G_{FbFc} \otimes G_{FaFb}"'] & \mathcal{B}(Fa,Fc) \arrow[d, "G_{FaFc}"] \\
\mathcal{C}(GFb,GFc) \otimes \mathcal{C}(GFa,GFb) \arrow[r, "m_{GFaGFbGFc}"'] & \mathcal{C}(GFa,GFc)
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathcal{A}(a,a) \arrow[d, "F_{aa}"] \\
I \arrow[ur, "j_a"] \arrow[r, "j_{Fa}"'] \arrow[dr, "j_{GFa}"'] & \mathcal{B}(Fa,Fa) \arrow[d, "G_{FaFa}"] \\
 & \mathcal{C}(GFa,GFa)
\end{tikzcd}
$$

これを V-関手の合成とすることで，対象を V-豊穣圏，射を V-関手とする (通常の) 圏が定まることが分かる．この圏を V-**Cat** と書く．

2.2 以降での記法について

特別な V の場合を除いて，V-豊穣圏 $\mathcal{C}$ の「射」$f \in \mathcal{C}(a,b)$ を取ることはできない．そこで代わりに (既に見てきた通り) V の射 $f\colon I \longrightarrow \mathcal{C}(a,b)$ を考えることがある．以降では，この $f\colon I \longrightarrow \mathcal{C}(a,b)$ を単に $\mathcal{C}$ の射と呼び，記号で $f\colon a \xrightarrow{V} b$ と表すことにする．

$f\colon a \xrightarrow{V} b$，$g\colon b \xrightarrow{V} c$ とする．即ち $f\colon I \longrightarrow \mathcal{C}(a,b)$，$g\colon I \longrightarrow \mathcal{C}(b,c)$ である．このとき合成 $g \circ f\colon a \xrightarrow{V} c$ を

$$I \xrightarrow{\lambda^{-1}} I \otimes I \xrightarrow{g \otimes f} \mathcal{C}(b,c) \otimes \mathcal{C}(a,b) \xrightarrow{m} \mathcal{C}(a,c)$$

により定める．この合成は結合律を満たす．

$\because$) $f\colon a \xrightarrow{V} b$，$g\colon b \xrightarrow{V} c$，$h\colon c \xrightarrow{V} d$ とする．定義より $(h \circ g) \circ f\colon a \xrightarrow{V} d$ は

$$\begin{aligned} I \xrightarrow{\lambda^{-1}} I \otimes I \xrightarrow{\lambda^{-1} \otimes \mathrm{id}} (I \otimes I) \otimes I \xrightarrow{(h \otimes g) \otimes f} (\mathcal{C}(c,d) \otimes \mathcal{C}(b,c)) \otimes \mathcal{C}(a,b) \\ \xrightarrow{m \otimes \mathrm{id}} \mathcal{C}(b,d) \otimes \mathcal{C}(a,b) \xrightarrow{m} \mathcal{C}(a,d) \end{aligned}$$

であり，$h \circ (g \circ f)\colon a \xrightarrow{V} d$ は

$$\begin{aligned} I \xrightarrow{\lambda^{-1}} I \otimes I \xrightarrow{\mathrm{id} \otimes \lambda^{-1}} I \otimes (I \otimes I) \xrightarrow{h \otimes (g \otimes f)} \mathcal{C}(c,d) \otimes (\mathcal{C}(b,c) \otimes \mathcal{C}(a,b)) \\ \xrightarrow{\mathrm{id} \otimes m} \mathcal{C}(c,d) \otimes \mathcal{C}(a,c) \xrightarrow{m} \mathcal{C}(a,d) \end{aligned}$$

である．次の図式を考える．

$$\begin{tikzcd}
 & (I \otimes I) \otimes I \arrow[r, "(h \otimes g) \otimes f"] \arrow[dd, "\alpha"] & (\mathcal{C}(c,d) \otimes \mathcal{C}(b,c)) \otimes \mathcal{C}(a,b) \arrow[r, "m \otimes \mathrm{id}"] \arrow[dd, "\alpha"'] & \mathcal{C}(b,d) \otimes \mathcal{C}(a,b) \arrow[d, "m"] \\
I \otimes I \arrow[ur, "\lambda^{-1} \otimes \mathrm{id}"] \arrow[dr, "\mathrm{id} \otimes \lambda^{-1}"'] \arrow[r, phantom, "(V)"] & {} \arrow[r, phantom, "(\alpha)"] & {} \arrow[r, phantom, "(\mathcal{C})"] & \mathcal{C}(a,d)) \\
 & I \otimes (I \otimes I) \arrow[r, "h \otimes (g \otimes f)"'] & \mathcal{C}(c,d) \otimes (\mathcal{C}(b,c) \otimes \mathcal{C}(a,b)) \arrow[r, "\mathrm{id} \otimes m"'] & \mathcal{C}(c,d) \otimes \mathcal{C}(a,c) \arrow[u, "m"']
\end{tikzcd}$$

(V) の部分は，coherence 定理より可換である．(α) の部分は α の自然性から可換である．$(\mathcal{C})$ の部分は豊穣圏の定義から可換である．よってこの図式は可換であり，したがって $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$ が分かった．

$j_a\colon I \longrightarrow \mathcal{C}(a,a)$ に対応する $\mathcal{C}$ の射 $j_a\colon a \xrightarrow{V} a$ は「恒等射」である．

∵) $f\colon a \xrightarrow{V} b$ とする．定義より $f \circ j_a$ は合成

$$I \xrightarrow{\lambda^{-1}} I \otimes I \xrightarrow{f \otimes j_a} \mathcal{C}(a,b) \otimes \mathcal{C}(a,a) \xrightarrow{m} \mathcal{C}(a,b)$$

である．次の図式が可換であるから $f \circ j_a = f$ が分かる．

$$\begin{tikzcd}
I \otimes I \arrow[r, "f\otimes \mathrm{id}"] \arrow[dr, "\lambda=\rho"'] & \mathcal{C}(a,b) \otimes I \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes j_a"] \arrow[dr, "\rho"] & \mathcal{C}(a,b) \otimes \mathcal{C}(a,a) \arrow[d, "m"] \\
& I \arrow[r, "f"'] & \mathcal{C}(a,b)
\end{tikzcd}$$

同様に次の図式から $j_b \circ f = f$ も分かる．

$$\begin{tikzcd}
I \otimes I \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes f"] \arrow[dr, "\lambda"'] & I \otimes \mathcal{C}(a,b) \arrow[r, "j_b\otimes \mathrm{id}"] \arrow[dr, "\lambda"] & \mathcal{C}(a,a) \otimes \mathcal{C}(a,b) \arrow[d, "m"] \\
& I \arrow[r, "f"'] & \mathcal{C}(a,b)
\end{tikzcd}$$

故に $\mathcal{C}$ の対象と $\mathcal{C}$ の射は圏をなすことが分かる．この圏を $\mathcal{C}$ の underlying category という．(後で定義するが，underlying category を $U(\mathcal{C})$ で表す．)

$F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ を V-関手とする．$\mathcal{C}$ の射 $f\colon a \xrightarrow{V} b$ に対して $\mathcal{D}$ の射 $Ff\colon Fa \xrightarrow{V} Fb$ を合成 $I \xrightarrow{f} \mathcal{C}(a,b) \xrightarrow{F} \mathcal{D}(Fa,Fb)$ で定義する．このとき $F(g \circ f) = Fg \circ Ff$, $F(j_a) = j_{Fa}$ である．

2.3 双対圏 $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$

今 V は対称だから，$u, v \in V$ について自然な V の同型射 $\gamma_{uv}\colon u \otimes v \longrightarrow v \otimes u$ が与えられている．

命題 13. V-豊穣圏 $\mathcal{C}$ に対して，$\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ を

- $\mathrm{Ob}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}) := \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$
- $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}(a,b) := \mathcal{C}(b,a)$

- 合成は

$$
\begin{aligned}
\mathcal{C}^{\mathrm{op}}(b,c)\otimes\mathcal{C}^{\mathrm{op}}(a,b) &= \mathcal{C}(c,b)\otimes\mathcal{C}(b,a) \\
&\xrightarrow{\gamma} \mathcal{C}(b,a)\otimes\mathcal{C}(c,b) \\
&\xrightarrow{m_{cba}} \mathcal{C}(c,a) \\
&= \mathcal{C}^{\mathrm{op}}(a,c)
\end{aligned}
$$

  とする．
- 恒等射は $j_a\colon I\longrightarrow\mathcal{C}(a,a)=\mathcal{C}^{\mathrm{op}}(a,a)$ とする．

により定義すれば，これは V-豊穣圏 $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ を与える．

証明. その為には次の 3 つの図式が可換であることを示せばよい．

$$
\begin{tikzcd}
\big(\mathcal{C}(d,c)\otimes\mathcal{C}(c,b)\big)\otimes\mathcal{C}(b,a) \arrow[rrrr, "\alpha"] \arrow[d, "\gamma\otimes\mathrm{id}"'] & & & & \mathcal{C}(d,c)\otimes\big(\mathcal{C}(c,b)\otimes\mathcal{C}(b,a)\big) \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes\gamma"] \\
\big(\mathcal{C}(c,b)\otimes\mathcal{C}(d,c)\big)\otimes\mathcal{C}(b,a) \arrow[dr, "\gamma"] \arrow[dd, "m_{dcb}\otimes\mathrm{id}"'] \arrow[ddr, phantom, "(\gamma)"] & & (V) & & \mathcal{C}(d,c)\otimes\big(\mathcal{C}(b,a)\otimes\mathcal{C}(c,b)\big) \arrow[dl, "\gamma"'] \arrow[dd, "\mathrm{id}\otimes m_{cba}"] \arrow[ddl, phantom, "(\gamma)"] \\
& \mathcal{C}(b,a)\otimes\big(\mathcal{C}(c,b)\otimes\mathcal{C}(d,c)\big) \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[dd, "\mathrm{id}\otimes m_{dcb}"] & & \big(\mathcal{C}(b,a)\otimes\mathcal{C}(c,b)\big)\otimes\mathcal{C}(d,c) \arrow[dd, "m_{cba}\otimes\mathrm{id}"'] & \\
\mathcal{C}(d,b)\otimes\mathcal{C}(b,a) \arrow[dr, "\gamma"'] & & (\mathcal{C}) & & \mathcal{C}(d,c)\otimes\mathcal{C}(c,a) \arrow[dl, "\gamma"] \\
& \mathcal{C}(b,a)\otimes\mathcal{C}(d,b) \arrow[dr, "m_{dba}"'] & & \mathcal{C}(c,a)\otimes\mathcal{C}(d,c) \arrow[dl, "m_{dca}"] & \\
& & \mathcal{C}(d,a) & &
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
I\otimes\mathcal{C}(b,a) \arrow[rr, "\lambda", "(V)"'] \arrow[dr, "\gamma"] \arrow[dd, "j_b\otimes\mathrm{id}"', "(\gamma)"] & & \mathcal{C}(b,a) \\
& \mathcal{C}(b,a)\otimes I \arrow[ur, "\rho"'] \arrow[dd, "\mathrm{id}\otimes j_b"', "(\mathcal{C})"] & \\
\mathcal{C}(b,b)\otimes\mathcal{C}(b,a) \arrow[dr, "\gamma"] & & \\
& \mathcal{C}(b,a)\otimes\mathcal{C}(b,b) \arrow[uuur, bend right, "m_{bba}"'] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathcal{C}(b,a)\otimes I \arrow[rr, "\rho", "(V)"'] \arrow[dr, "\gamma"] \arrow[dd, "\mathrm{id}\otimes j_a"', "(\gamma)"] & & \mathcal{C}(b,a) \\
& I\otimes\mathcal{C}(b,a) \arrow[ur, "\lambda"'] \arrow[dd, "j_a\otimes\mathrm{id}"', "(\mathcal{C})"] & \\
\mathcal{C}(b,a)\otimes\mathcal{C}(a,a) \arrow[dr, "\gamma"] & & \\
& \mathcal{C}(a,a)\otimes\mathcal{C}(b,a) \arrow[uuur, bend right, "m_{baa}"'] &
\end{tikzcd}
$$

(γ) は γ の自然性から可換である．(V) は対称モノイダル圏の性質 (定義と補題 2) から可換である．$(\mathcal{C})$ は $\mathcal{C}$ が V-豊穣圏であるから可換である．以上によりこれらの図式は可換である． □

2.4 V-豊穣圏 $\mathcal{V}$

$u, v, w \in V$ とする．随伴 $- \otimes u \dashv [u, -]$ で

$$([v,w] \otimes [u,v]) \otimes u \xrightarrow{\alpha} [v,w] \otimes ([u,v] \otimes u) \xrightarrow{\mathrm{id} \otimes \mathrm{ev}} [v,w] \otimes v \xrightarrow{\mathrm{ev}} w$$

に対応する射を $m_{uvw}\colon [v,w] \otimes [u,v] \longrightarrow [u,v]$ とする．

補題 14. 次の図式は可換である．

$$\begin{tikzcd}
([v,w] \otimes [u,v]) \otimes u \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[d, "m_{uvw} \otimes \mathrm{id}"'] & & {[v,w] \otimes ([u,v] \otimes u)} \arrow[d, "\mathrm{id} \otimes \mathrm{ev}"] \\
{[u,w] \otimes u} \arrow[dr, "\mathrm{ev}"'] & & {[v,w] \otimes v} \arrow[dl, "\mathrm{ev}"] \\
& w &
\end{tikzcd}$$

証明. ev が随伴 $- \otimes v \dashv [v, -]$ の counit だったから，V の射 $f\colon u \otimes v \longrightarrow w$ に対応する射を $g\colon u \longrightarrow [v,w]$ とするとき $f = \mathrm{ev} \circ (g \otimes \mathrm{id}_v)$ である．

$$\begin{tikzcd}
u \otimes v \arrow[d, "g \otimes \mathrm{id}_v"'] \arrow[dr, "f"] & \\
{[v,w] \otimes v} \arrow[r, "\mathrm{ev}"'] & w
\end{tikzcd}$$

故に m の定義より，与えられた図式が可換であることが分かる． $\square$

命題 15. $\mathcal{V}$ を

- $\mathrm{Ob}(\mathcal{V}) := \mathrm{Ob}(V)$
- $\mathcal{V}(u,v) := [u,v]$
- 合成は上で定義した $m_{uvw}\colon [v,w] \otimes [u,v] \longrightarrow [u,w]$ とする．
- 恒等射 $j_u\colon I \longrightarrow [u,u]$ は $\lambda\colon I \otimes u \longrightarrow u$ に対応するものを取る．

により定義すれば，これは V-豊穣圏 $\mathcal{V}$ を与える．

証明. まず m が結合律を満たすことを示すため，次の図式を考える．

$$
\begin{tikzcd}
([w,x]\otimes([v,w]\otimes[u,v]))\otimes u \arrow[rr, "(\mathrm{id}\otimes m)\otimes\mathrm{id}"] \arrow[d, "\alpha"'] \arrow[drr, phantom, "(\alpha)"] & & ([w,x]\otimes[u,w])\otimes u \arrow[d, "\alpha"] \\
{[w,x]}\otimes(([v,w]\otimes[u,v])\otimes u) \arrow[rr, "\mathrm{id}\otimes(m\otimes\mathrm{id})"] \arrow[dd, "\mathrm{id}\otimes\alpha"'] \arrow[drr, phantom, "(m)"] & & {[w,x]}\otimes([u,w]\otimes u) \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes\mathrm{ev}"] \\
& {[w,x]}\otimes([v,w]\otimes v) \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes\mathrm{ev}"] \arrow[ddr, phantom, "(m)"] & {[w,x]}\otimes w \arrow[d, "\mathrm{ev}"] \\
{[w,x]}\otimes([v,w]\otimes([u,v]\otimes u)) \arrow[ur, "\mathrm{id}\otimes(\mathrm{id}\otimes\mathrm{ev})"] \arrow[dr, phantom, "(\alpha)"] & & x \\
& ([w,x]\otimes[v,w])\otimes v \arrow[uu, "\alpha"] \arrow[r, "m\otimes\mathrm{id}"] \arrow[dr, phantom, "(*)"] & {[v,x]}\otimes v \arrow[u, "\mathrm{ev}"'] \\
([w,x]\otimes[v,w])\otimes([u,v]\otimes u) \arrow[uu, "\alpha"] \arrow[ur, "(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})\otimes\mathrm{ev}"] \arrow[rr, "m\otimes(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})"] \arrow[drr, phantom, "(\alpha)"] & & {[v,x]}\otimes([u,v]\otimes u) \arrow[u, "\mathrm{id}\otimes\mathrm{ev}"'] \\
(([w,x]\otimes[v,w])\otimes[u,v])\otimes u \arrow[u, "\alpha"] \arrow[rr, "(m\otimes\mathrm{id})\otimes\mathrm{id}"'] \arrow[uuuuuu, bend left=60, "\alpha\otimes\mathrm{id}", "(V)"'] & & ([v,x]\otimes[u,v])\otimes u \arrow[u, "\alpha"']
\end{tikzcd}
$$

(α) の部分は α の自然性から可換である．(m) の部分は補題 14 より可換である．(V) は coherence 定理より可換である．$(*)$ も明らかに可換である．従って次の図式が可換で

ある．

$$\begin{tikzcd}
([w,x] \otimes ([v,w] \otimes [u,v])) \otimes u \arrow[r, "(\mathrm{id}\otimes m)\otimes \mathrm{id}"] & ([w,x] \otimes [u,w]) \otimes u \arrow[d, "\alpha"] \\
& {[w,x]} \otimes ([u,w] \otimes u) \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes \mathrm{ev}"] \\
& {[w,x]} \otimes w \arrow[d, "\mathrm{ev}"] \\
& x \\
& {[v,x]} \otimes v \arrow[u, "\mathrm{ev}"'] \\
& {[v,x]} \otimes ([u,v] \otimes u) \arrow[u, "\mathrm{id}\otimes \mathrm{ev}"'] \\
(([w,x] \otimes [v,w]) \otimes [u,v]) \otimes u \arrow[uuuuuu, "\alpha\otimes \mathrm{id}"'] \arrow[r, "(m\otimes \mathrm{id})\otimes \mathrm{id}"'] & ([v,x] \otimes [u,v]) \otimes u \arrow[u, "\alpha"']
\end{tikzcd}$$

よって随伴 $- \otimes u \dashv [u,-]$ により次が可換であることが分かる．

$$\begin{tikzcd}
{[w,x]} \otimes ([v,w] \otimes [u,v]) \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes m"] & {[w,x]} \otimes [u,w] \arrow[d, "m"] \\
& {[u,x]} \\
([w,x] \otimes [v,w]) \otimes [u,v] \arrow[uu, "\alpha"'] \arrow[r, "m\otimes \mathrm{id}"'] & {[v,x]} \otimes [u,v] \arrow[u, "m"']
\end{tikzcd}$$

従って結合律が成り立つことが分かった．

　次に

$$\begin{tikzcd}
I \otimes [u,v] \arrow[rr, "\lambda"] \arrow[dr, "j_v\otimes \mathrm{id}"'] & & {[u,v]} \\
& {[v,v]} \otimes [u,v] \arrow[ur, "m"'] &
\end{tikzcd}$$

が可換であることを示す．$\lambda\colon I \otimes [u,v] \longrightarrow [u,v]$ に随伴 $- \otimes u \dashv [u,-]$ で対応するのは

$\mathrm{ev}\circ(\lambda\otimes\mathrm{id})\colon (I\otimes[u,v])\otimes u \longrightarrow v$ であるから

$$
\begin{tikzcd}
 & & {[u,v]\otimes u} \arrow[dr, "\mathrm{ev}"] \arrow[d, phantom, "(\lambda)"] & \\
(I\otimes[u,v])\otimes u \arrow[r, "\alpha"] \arrow[urr, bend left, "\lambda\otimes\mathrm{id}"] \arrow[d, "(j_v\otimes\mathrm{id})\otimes\mathrm{id}"'] \arrow[dr, phantom, "(\alpha)"] & I\otimes([u,v]\otimes u) \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes\mathrm{ev}"] \arrow[ur, "\lambda"] \arrow[u, phantom, "(V)"] \arrow[d, "j_v\otimes(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})"'] \arrow[dr, phantom, "(*)"] & I\otimes v \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "j_v\otimes\mathrm{id}"'] \arrow[dr, phantom, "(j)"] & v \\
([v,v]\otimes[u,v])\otimes u \arrow[r, "\alpha"'] & {[v,v]\otimes([u,v]\otimes u)} \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes\mathrm{ev}"'] & {[v,v]\otimes v} \arrow[ur, bend right, "\mathrm{ev}"'] &
\end{tikzcd}
$$

が可換であることを示せばよい．(α) の部分は α の自然性から可換である．(λ) の部分は λ の自然性から可換である．(j) の部分は j_v の定義から可換である．(V) の部分は coherence 定理より可換である．$(*)$ の部分は明らかに可換である．以上によりこの図式が可換であることが分かった.

$$
\begin{tikzcd}
{[u,v]\otimes I} \arrow[rr, "\rho"] \arrow[dr, "\mathrm{id}\otimes j_u"'] & & {[u,v]} \\
 & {[u,v]\otimes[u,u]} \arrow[ur, "m"'] &
\end{tikzcd}
$$

についても同様に

$$
\begin{tikzcd}
([u,v]\otimes I)\otimes u \arrow[r, "\alpha"] \arrow[rr, bend left, "\rho\otimes\mathrm{id}"] \arrow[d, "(\mathrm{id}\otimes j_u)\otimes\mathrm{id}"'] \arrow[dr, phantom, "(\alpha)"] & {[u,v]\otimes(I\otimes u)} \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes\lambda"] \arrow[u, phantom, "(V)"] \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes(j_u\otimes\mathrm{id})"'] \arrow[dr, phantom, "(j)"] & {[u,v]\otimes u} \arrow[r, "\mathrm{ev}"] & v \\
([u,v]\otimes[u,u])\otimes u \arrow[r, "\alpha"'] & {[u,v]\otimes([u,u]\otimes u)} \arrow[ur, "\mathrm{id}\otimes\mathrm{ev}"'] & &
\end{tikzcd}
$$

が可換であることから分かる.

以上により $\mathcal{V}$ は V-豊穣圏である. □

こうして V は自然に V-豊穣圏となる.

定義より $\mathrm{Hom}_V(x,y)\cong\mathrm{Hom}_V(I,[x,y])$ だから，$\mathcal{V}$ の射 $x \xrightarrow{V} y$ と (通常の意味での) V の射 $x\longrightarrow y$ が一対一に対応する．$f\colon x\longrightarrow y$ を V の射として，f に対応する $\mathcal{V}$ の射を $\widetilde{f}\colon x\xrightarrow{V} y$ とするとき (即ち $\widetilde{f}\colon I\longrightarrow\mathcal{V}(x,y)$ とするとき) $f=\mathrm{ev}\circ(\widetilde{f}\otimes\mathrm{id})\circ\lambda^{-1}$ で

ある．

$$
\begin{tikzcd}
x \arrow[d, "\lambda^{-1}"'] \arrow[dr, "f"] & \\
I \otimes x \arrow[d, "\widetilde{f}\otimes\mathrm{id}"'] & y \\
{[x,y] \otimes x} \arrow[ur, "\mathrm{ev}"'] &
\end{tikzcd}
$$

2.5 テンソル積 $\mathcal{C} \otimes \mathcal{D}$

命題 16. V-豊穣圏 $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ に対して $\mathcal{C} \otimes \mathcal{D}$ を

- $\mathrm{Ob}(\mathcal{C} \otimes \mathcal{D}) := \mathrm{Ob}(\mathcal{C}) \times \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$
- $\mathcal{C} \otimes \mathcal{D}(\langle c_0, d_0 \rangle, \langle c_1, d_1 \rangle) := \mathcal{C}(c_0, c_1) \otimes \mathcal{D}(d_0, d_1)$
- 合成は

$$
\begin{aligned}
&\bigl(\mathcal{C} \otimes \mathcal{D}(\langle c_1, d_1 \rangle, \langle c_2, d_2 \rangle)\bigr) \otimes \bigl(\mathcal{C} \otimes \mathcal{D}(\langle c_0, d_0 \rangle, \langle c_1, d_1 \rangle)\bigr) \\
&= \bigl(\mathcal{C}(c_1, c_2) \otimes \mathcal{D}(d_1, d_2)\bigr) \otimes \bigl(\mathcal{C}(c_0, c_1) \otimes \mathcal{D}(d_0, d_1)\bigr) \\
&\xrightarrow{\delta} \mathcal{C}(c_1, c_2) \otimes \mathcal{C}(c_0, c_1) \otimes \mathcal{D}(d_1, d_2) \otimes \mathcal{D}(d_0, d_1) \\
&\xrightarrow{m \otimes m} \mathcal{C}(c_0, c_2) \otimes \mathcal{D}(d_0, d_2) \\
&= \mathcal{C} \otimes \mathcal{D}(\langle c_0, d_0 \rangle, \langle c_2, d_2 \rangle)
\end{aligned}
$$

  から得られる射とする．ここで $\delta = \delta_{uvwx}$ は合成

$$
\begin{aligned}
(uv)(wx) \xrightarrow{\alpha} u(v(wx)) \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes\alpha^{-1}} u((vw)x) \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes(\gamma\otimes\mathrm{id})} u((wv)x) \\
\xrightarrow{\mathrm{id}\otimes\alpha} u(w(vx)) \xrightarrow{\alpha^{-1}} (uw)(vx)
\end{aligned}
$$

  を表す．
- 恒等射は $I \xrightarrow{\lambda^{-1}} I \otimes I \xrightarrow{j_c \otimes j_d} \mathcal{C} \otimes \mathcal{D}(\langle c, d \rangle, \langle c, d \rangle)$ とする．

により定義すれば，これは V-豊穣圏 $\mathcal{C} \otimes \mathcal{D}$ を与える．

証明. まず結合律については，次の図式が可換であることから分かる．(ここでスペースの都合上，$\mathcal{C}(a,b)$ を $\mathcal{C}_{ab}$ と表記し，$\otimes$ は省略した．また名前のついていない矢印は α と

γ を組み合わせてできる射である．)

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
((\mathcal{C}_{cd}\mathcal{D}_{c'd'})(\mathcal{C}_{bc}\mathcal{D}_{b'c'}))(\mathcal{C}_{ab}\mathcal{D}_{a'b'}) \arrow[rrrrrr, "\alpha"] \arrow[d] & & & & & & (\mathcal{C}_{cd}\mathcal{D}_{c'd'})((\mathcal{C}_{bc}\mathcal{D}_{b'c'})(\mathcal{C}_{ab}\mathcal{D}_{a'b'})) \arrow[d] \\
((\mathcal{C}_{cd}\mathcal{C}_{bc})(\mathcal{D}_{c'd'}\mathcal{D}_{b'c'}))(\mathcal{C}_{ab}\mathcal{D}_{a'b'}) \arrow[dr] \arrow[dd, "(m\otimes m)\otimes\mathrm{id}"] & & & & & & (\mathcal{C}_{cd}\mathcal{D}_{c'd'})((\mathcal{C}_{bc}\mathcal{C}_{ab})(\mathcal{D}_{b'c'}\mathcal{D}_{a'b'})) \arrow[dl] \arrow[dd, "\mathrm{id}\otimes(m\otimes m)"'] \\
& ((\mathcal{C}_{cd}\mathcal{C}_{bc})\mathcal{C}_{ab})((\mathcal{D}_{c'd'}\mathcal{D}_{b'c'})\mathcal{D}_{a'b'}) \arrow[rrrr, "\alpha\otimes\alpha"'] \arrow[dd, "(m\otimes\mathrm{id})\otimes(m\otimes\mathrm{id})"] & & & & (\mathcal{C}_{cd}(\mathcal{C}_{bc}\mathcal{C}_{ab}))(\mathcal{D}_{c'd'}(\mathcal{D}_{b'c'}\mathcal{D}_{a'b'})) \arrow[dd, "(\mathrm{id}\otimes m)\otimes(\mathrm{id}\otimes m)"'] & \\
(\mathcal{C}_{bd}\mathcal{D}_{b'd'})(\mathcal{C}_{ab}\mathcal{D}_{a'b'}) \arrow[dr] & & & & & & (\mathcal{C}_{cd}\mathcal{D}_{c'd'})(\mathcal{C}_{ac}\mathcal{D}_{a'c'}) \arrow[dl] \\
& (\mathcal{C}_{bd}\mathcal{C}_{ab})(\mathcal{D}_{b'd'}\mathcal{D}_{a'b'}) \arrow[drr, "m\otimes m"'] & & & & (\mathcal{C}_{cd}\mathcal{C}_{ac})(\mathcal{D}_{c'd'}\mathcal{D}_{a'c'}) \arrow[dll, "m\otimes m"] & \\
& & & \mathcal{C}_{ad}\mathcal{D}_{a'd'} & & &
\end{tikzcd}
$$

また恒等射については次の図式が可換であることを示せばよい．

$$
\begin{tikzcd}
I(\mathcal{C}_{ab}\mathcal{D}_{a'b'}) \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "\alpha^{-1}"'] \arrow[ddd, bend right=60, "\lambda^{-1}\otimes\mathrm{id}"'] \arrow[dr, phantom, "(V)" near start] & \mathcal{C}_{ab}\mathcal{D}_{a'b'} \arrow[r, "\mathrm{id}"] \arrow[dr, phantom, "(*)"] & \mathcal{C}_{ab}\mathcal{D}_{a'b'} \\
(I\mathcal{C}_{ab})\mathcal{D}_{a'b'} \arrow[ur, "\lambda\otimes\mathrm{id}"] \arrow[r, "(j_b\otimes\mathrm{id})\otimes\mathrm{id}"'] \arrow[d, "(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})\otimes\lambda^{-1}"] \arrow[ur, phantom, "(\mathcal{C})" near end, shift right=4] \arrow[dr, phantom, "(*)"] & (\mathcal{C}_{bb}\mathcal{C}_{ab})\mathcal{D}_{a'b'} \arrow[u, "m\otimes\mathrm{id}"'] \arrow[r, "\mathrm{id}"] \arrow[dr, phantom, "(*)" near start] & (\mathcal{C}_{bb}\mathcal{C}_{ab})\mathcal{D}_{a'b'} \arrow[u, "m\otimes\mathrm{id}"'] \\
(I\mathcal{C}_{ab})(I\mathcal{D}_{a'b'}) \arrow[r, "(j_b\otimes\mathrm{id})\otimes(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})"'] \arrow[d, "\delta"] \arrow[dr, phantom, "(\delta)"] & (\mathcal{C}_{bb}\mathcal{C}_{ab})(I\mathcal{D}_{a'b'}) \arrow[u, "(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})\otimes\lambda"] \arrow[ur, "(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})\otimes\lambda"] \arrow[r, "(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})\otimes(j_{b'}\otimes\mathrm{id})"'] \arrow[ur, phantom, "(\mathcal{D})" near end, shift right=4] \arrow[dr, phantom, "(\delta)"] & (\mathcal{C}_{bb}\mathcal{C}_{ab})(\mathcal{D}_{b'b'}\mathcal{D}_{a'b'}) \arrow[u, "(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})\otimes m"'] \\
(II)(\mathcal{C}_{ab}\mathcal{D}_{a'b'}) \arrow[r, "(j_b\otimes\mathrm{id})\otimes(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})"'] \arrow[u, phantom, "(V)", shift right=12] & (\mathcal{C}_{bb}I)(\mathcal{C}_{ab}\mathcal{D}_{a'b'}) \arrow[u, "\delta^{-1}"] \arrow[r, "(\mathrm{id}\otimes j_{b'})\otimes(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})"'] & (\mathcal{C}_{bb}\mathcal{D}_{b'b'})(\mathcal{C}_{ab}\mathcal{D}_{a'b'}) \arrow[u, "\delta^{-1}"']
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
(\mathcal{C}_{ab}\mathcal{D}_{a'b'})I \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "\alpha"'] \arrow[ddd, bend right=60, "\mathrm{id}\otimes\lambda^{-1}"'] \arrow[dr, phantom, "(V)" near start] & \mathcal{C}_{ab}\mathcal{D}_{a'b'} \arrow[r, "\mathrm{id}"] \arrow[dr, phantom, "(*)"] & \mathcal{C}_{ab}\mathcal{D}_{a'b'} \\
\mathcal{C}_{ab}(\mathcal{D}_{a'b'}I) \arrow[ur, "\mathrm{id}\otimes\rho"] \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes(\mathrm{id}\otimes j_{a'})"'] \arrow[d, "\rho^{-1}\otimes(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})"] \arrow[ur, phantom, "(\mathcal{D})" near end, shift right=4] \arrow[dr, phantom, "(*)"] & \mathcal{C}_{ab}(\mathcal{D}_{a'b'}\mathcal{D}_{a'a'}) \arrow[u, "\mathrm{id}\otimes m"'] \arrow[r, "\mathrm{id}"] \arrow[dr, phantom, "(*)" near start] & \mathcal{C}_{ab}(\mathcal{D}_{a'b'}\mathcal{D}_{a'a'}) \arrow[u, "\mathrm{id}\otimes m"'] \\
(\mathcal{C}_{ab}I)(\mathcal{D}_{a'b'}I) \arrow[r, "(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})\otimes(\mathrm{id}\otimes j_{a'})"'] \arrow[d, "\delta"] \arrow[dr, phantom, "(\delta)"] & (\mathcal{C}_{ab}I)(\mathcal{D}_{a'b'}\mathcal{D}_{a'a'}) \arrow[u, "\rho\otimes(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})"] \arrow[ur, "\rho\otimes(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})"] \arrow[r, "(\mathrm{id}\otimes j_a)\otimes(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})"'] \arrow[ur, phantom, "(\mathcal{C})" near end, shift right=4] \arrow[dr, phantom, "(\delta)"] & (\mathcal{C}_{ab}\mathcal{C}_{aa})(\mathcal{D}_{a'b'}\mathcal{D}_{a'a'}) \arrow[u, "m\otimes(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})"'] \\
(\mathcal{C}_{ab}\mathcal{D}_{a'b'})(II) \arrow[r, "(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})\otimes(\mathrm{id}\otimes j_{a'})"'] \arrow[u, phantom, "(V)", shift right=12] & (\mathcal{C}_{ab}\mathcal{D}_{a'b'})(I\mathcal{D}_{a'a'}) \arrow[u, "\delta^{-1}"] \arrow[r, "(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})\otimes(j_a\otimes\mathrm{id})"'] & (\mathcal{C}_{ab}\mathcal{D}_{a'b'})(\mathcal{C}_{aa}\mathcal{D}_{a'a'}) \arrow[u, "\delta^{-1}"']
\end{tikzcd}
$$

(V) はモノイダル圏の性質から可換である．(δ) は δ の自然性から可換である．$(\mathcal{C})$，$(\mathcal{D})$

は豊穣圏の定義から可換である．$(*)$ は明らかに可換である．以上によりこれらの図式は可換である $\square$

命題 17. $\mathcal{A}$,$\mathcal{B}$,$\mathcal{C}$ を V-豊穣圏，$T\colon \mathcal{A}\otimes\mathcal{B}\longrightarrow\mathcal{C}$ を V-関手とする．$a\in\mathcal{A}$，$b,c\in\mathcal{B}$ に対して V の射 $T(a,-)_{bc}$ を合成

$$\mathcal{B}(b,c)\xrightarrow{\lambda^{-1}} I\otimes\mathcal{B}(b,c)\xrightarrow{j_a\otimes\mathrm{id}}\mathcal{A}(a,a)\otimes\mathcal{B}(b,c)\xrightarrow{T}\mathcal{C}(T(a,b),T(a,c))$$

により定義すると，これは V-関手 $T(a,-)\colon\mathcal{B}\longrightarrow\mathcal{C}$ を定める．同様にして V-関手 $T(-,b)\colon\mathcal{A}\longrightarrow\mathcal{C}$ も

$$\mathcal{A}(a,c)\xrightarrow{\rho^{-1}}\mathcal{A}(a,c)\otimes I\xrightarrow{\mathrm{id}\otimes j_b}\mathcal{A}(a,c)\otimes\mathcal{B}(b,b)\xrightarrow{T}\mathcal{C}(T(a,b),T(c,b))$$

により得られる．

証明. まず次の図式が可換であることを示す．

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{B}(c,d)\otimes\mathcal{B}(b,c) \arrow[r, "m"] \arrow[d, "T(a,-)_{cd}\otimes T(a,-)_{bc}"'] & \mathcal{B}(b,d) \arrow[d, "T(a,-)_{bd}"] \\
\mathcal{C}(T(a,c),T(a,d))\otimes\mathcal{C}(T(a,b),T(a,c)) \arrow[r, "m"'] & \mathcal{C}(T(a,b),T(a,d))
\end{tikzcd}$$

即ち，次の図式が可換であることを示せばよい．(ここでスペースの都合上，$\mathcal{A}(a,b)$ を $\mathcal{A}_{ab}$ と表記した．また $\otimes$ は省略した．)

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{B}_{cd}\mathcal{B}_{bc} \arrow[r, "\mathrm{id}"] \arrow[d, "\lambda^{-1}\otimes\mathrm{id}"'] \arrow[dr, phantom, "(V)"] & \mathcal{B}_{cd}\mathcal{B}_{bc} \arrow[r, "m"] \arrow[d, "\lambda^{-1}"'] \arrow[dr, phantom, "(\lambda)"] & \mathcal{B}_{bd} \arrow[r, "\mathrm{id}"] \arrow[d, "\lambda^{-1}"] \arrow[ddr, phantom, "(*)"] & \mathcal{B}_{bd} \arrow[dd, "\lambda^{-1}"] \\
(I\mathcal{B}_{cd})\mathcal{B}_{bc} \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})\otimes\lambda^{-1}"'] \arrow[dr, phantom, "(V)"] & I(\mathcal{B}_{cd}\mathcal{B}_{bc}) \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes m"'] \arrow[d, "\lambda^{-1}\otimes(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})"'] \arrow[dr, phantom, "(*)"] & I\mathcal{B}_{bd} \arrow[d, "\lambda^{-1}\otimes\mathrm{id}"] & \\
(I\mathcal{B}_{cd})(I\mathcal{B}_{bc}) \arrow[r, "\delta"'] \arrow[d, "(j_a\otimes\mathrm{id})\otimes(j_a\times\mathrm{id})"'] \arrow[dr, phantom, "(\delta)"] & (II)(\mathcal{B}_{cd}\mathcal{B}_{bc}) \arrow[r, "(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})\otimes m"'] \arrow[d, "(j_a\otimes j_a)\otimes(\mathrm{id}\times\mathrm{id})"'] \arrow[dr, phantom, "(*)"] & (II)\mathcal{B}_{bd} \arrow[r, "\lambda\otimes\mathrm{id}"'] \arrow[d, "(j_a\otimes j_a)\otimes\mathrm{id}"] \arrow[dr, phantom, "(j)"] & I\mathcal{B}_{bd} \arrow[d, "j_a\otimes\mathrm{id}"] \\
(\mathcal{A}_{aa}\mathcal{B}_{cd})(\mathcal{A}_{aa}\mathcal{B}_{bc}) \arrow[r, "\delta"'] \arrow[d, "T\otimes T"'] \arrow[drrr, phantom, "(T)"] & (\mathcal{A}_{aa}\mathcal{A}_{aa})(\mathcal{B}_{cd}\mathcal{B}_{bc}) \arrow[r, "(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})\otimes m"'] & (\mathcal{A}_{aa}\mathcal{A}_{aa})\mathcal{B}_{bd} \arrow[r, "m\otimes\mathrm{id}"'] & \mathcal{A}_{aa}\mathcal{B}_{bd} \arrow[d, "T"] \\
\mathcal{C}(T(a,c),T(a,d))\otimes\mathcal{C}(T(a,b),T(a,c)) \arrow[rrr, "m"'] & & & \mathcal{C}(T(a,b),T(a,d))
\end{tikzcd}$$

ここで δ は $\mathcal{C}\otimes\mathcal{D}$ の定義で使用した δ である．(V) はモノイダル圏の性質から可換である．(λ) は λ の自然性から可換である．(δ) は δ の自然性から可換である．$(*)$ は明らか

に可換である．(j) は次の図式により可換である．

$$
\begin{tikzcd}
I \otimes I \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes j_a"'] & I \arrow[d, "j_a"] \\
I \otimes \mathcal{A}(a,a) \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "j_a\otimes \mathrm{id}"'] & \mathcal{A}(a,a) \\
\mathcal{A}(a,a) \otimes \mathcal{A}(a,a) \arrow[ur, "m"'] &
\end{tikzcd}
$$

(T) は T が V-関手だから可換である．以上によりこの図式は可換である．

後は，次の図式が可換であることを示せばよい．

$$
\begin{tikzcd}
I \arrow[r, "j_b"] \arrow[dr, "j_{T(a,b)}"'] & \mathcal{B}(b,b) \arrow[d, "T(a,-)_{bb}"] \\
& \mathcal{C}(T(a,b),T(a,b))
\end{tikzcd}
$$

即ち次の図式が可換であることを示せばよい．

$$
\begin{tikzcd}
I \arrow[r, "j_b"] \arrow[d, "\lambda^{-1}"] \arrow[dr, phantom, "(\lambda)"] \arrow[dddr, bend right=60, "j_{T(a,b)}"'] & \mathcal{B}(b,b) \arrow[d, "\lambda^{-1}"] \\
I \otimes I \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes j_b"] \arrow[dr, "j_a\otimes j_b"'] & I \otimes \mathcal{B}(b,b) \arrow[d, "j_a\otimes \mathrm{id}"] \arrow[dl, phantom, "(*)"] \\
\arrow[r, phantom, "(T)"] & \mathcal{A}(a,a) \otimes \mathcal{B}(b,b) \arrow[d, "T"] \\
& \mathcal{C}(T(a,b),T(a,b))
\end{tikzcd}
$$

(λ) は λ の自然性から可換である．$(*)$ は明らかに可換である．(T) は T が V-関手であることから可換である．以上によりこの図式は可換である． □

補題 18. $\mathcal{A},\mathcal{B},\mathcal{C}$ を V-豊穣圏とする．$a \in \mathcal{A}$ に対して V-関手 $F^a\colon \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{C}$ が与えられ，$b \in \mathcal{B}$ に対して V-関手 $G^b\colon \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{C}$ が与えられ，$F^a b = G^b a$ を満たすとする．また

$a, b \in \mathcal{A}$, $c, d \in \mathcal{B}$ に対して，次の実線部が可換であるとする．

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A}(a,b) \otimes \mathcal{B}(c,d) \arrow[r, "G^d_{ab} \otimes F^a_{cd}"] \arrow[dd, "\gamma"'] \arrow[dr, dashed, "T"'] & \mathcal{C}(G^d a, G^d b) \otimes \mathcal{C}(F^a c, F^a d) \arrow[d, "m"] \\
 & \mathcal{C}(F^a c, G^d b) \\
\mathcal{B}(c,d) \otimes \mathcal{A}(a,b) \arrow[r, "F^b_{cd} \otimes G^c_{ab}"'] & \mathcal{C}(F^b c, F^b d) \otimes \mathcal{C}(G^c a, G^c b) \arrow[u, "m"']
\end{tikzcd}$$

このとき $T(a,b) := F^a b = G^b a$, $T_{\langle a,c\rangle\langle b,d\rangle} := m \circ (G^d_{ab} \otimes F^a_{cd})$ と定義すれば，これは $T(a,-) = F^a$, $T(-,b) = G^b$ を満たす V-関手 $T\colon \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{C}$ を与える．

証明. まず次の図式が可換であることを示す．

$$\begin{tikzcd}
(\mathcal{A}(c,s) \otimes \mathcal{B}(d,t)) \otimes (\mathcal{A}(a,c) \otimes \mathcal{B}(b,d)) \arrow[r, "m"] \arrow[d, "T_{\langle c,d\rangle\langle s,t\rangle} \otimes T_{\langle a,b\rangle\langle c,d\rangle}"'] & \mathcal{A}(a,s) \otimes \mathcal{B}(b,t) \arrow[d, "T_{\langle a,b\rangle\langle s,t\rangle}"] \\
\mathcal{C}(T(c,d), T(s,t)) \otimes \mathcal{C}(T(a,b), T(c,d)) \arrow[r, "m"'] & \mathcal{C}(T(a,b), T(s,t))
\end{tikzcd}$$

その為に次の図式を考える．(ここでスペースの都合上，$\mathcal{A}(a,b)$ を $\mathcal{A}_{ab}$ と表記した．

$\mathcal{C}(a,b)$ については $\langle a,b\rangle$ という記法も使った．またテンソル積 $\otimes$ は省略した．)

$$
\begin{tikzcd}
(\mathcal{A}_{cs}\mathcal{B}_{dt})(\mathcal{A}_{ac}\mathcal{B}_{bd}) \arrow[rr, "(G^t\otimes\mathrm{id})\otimes(G^d\otimes\mathrm{id})"] \arrow[d, "\alpha"'] & & ((\langle G^tc, G^ts\rangle\mathcal{B}_{dt})(\langle G^da, G^dc\rangle\mathcal{B}_{bd}) \arrow[d, "\alpha"] \\
\mathcal{A}_{cs}(\mathcal{B}_{dt}(\mathcal{A}_{ac}\mathcal{B}_{bd})) \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes\alpha^{-1}"'] \arrow[rr, phantom, "(\alpha)" below] & & \langle G^tc, G^ts\rangle(\mathcal{B}_{dt}(\langle G^da, G^dc\rangle\mathcal{B}_{bd})) \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes\alpha^{-1}"] \\
\mathcal{A}_{cs}((\mathcal{B}_{dt}\mathcal{A}_{ac})\mathcal{B}_{bd}) \arrow[r, "G^t\otimes((\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})\otimes\mathrm{id})"] \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes(\gamma\otimes\mathrm{id})"'] \arrow[dr, phantom, "(\gamma)"] & \langle G^tc, G^ts\rangle((\mathcal{B}_{dt}\mathcal{A}_{ac})\mathcal{B}_{bd}) \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes((\mathrm{id}\otimes G^d)\otimes\mathrm{id})"] \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes(\gamma\otimes\mathrm{id})"] & \langle G^tc, G^ts\rangle((\mathcal{B}_{dt}\langle G^da, G^dc\rangle)\mathcal{B}_{bd}) \\
\mathcal{A}_{cs}((\mathcal{A}_{ac}\mathcal{B}_{dt})\mathcal{B}_{bd}) \arrow[r, "G^t\otimes((\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})\otimes\mathrm{id})"] \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes\alpha"'] & \langle G^tc, G^ts\rangle((\mathcal{A}_{ac}\mathcal{B}_{dt})\mathcal{B}_{bd}) \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes((G^t\otimes\mathrm{id})\otimes\mathrm{id})"] \arrow[d, phantom, "(\alpha)"] & \langle G^tc, G^ts\rangle(((\langle G^ta, G^tc\rangle\mathcal{B}_{dt})\mathcal{B}_{bd}) \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes\alpha"] \\
\mathcal{A}_{cs}(\mathcal{A}_{ac}(\mathcal{B}_{dt}\mathcal{B}_{bd})) \arrow[d, "\alpha^{-1}"'] & & \langle G^tc, G^ts\rangle(\langle G^ta, G^tc\rangle(\mathcal{B}_{dt}\mathcal{B}_{bd})) \arrow[d, "\alpha^{-1}"] \\
(\mathcal{A}_{cs}\mathcal{A}_{ac})(\mathcal{B}_{dt}\mathcal{B}_{bd}) \arrow[rr, "(G^t\otimes G^t)\otimes(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})"] \arrow[d, "(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})\otimes m"'] \arrow[drr, phantom, "(*)"] & & (\langle G^tc, G^ts\rangle\langle G^ta, G^tc\rangle)(\mathcal{B}_{dt}\mathcal{B}_{bd}) \arrow[d, "(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})\otimes m"] \\
(\mathcal{A}_{cs}\mathcal{A}_{ac})\mathcal{B}_{bt} \arrow[rr, "(G^t\otimes G^t)\otimes\mathrm{id}"'] \arrow[d, "m\otimes\mathrm{id}"'] \arrow[drr, phantom, "(G^t)"] & & (\langle G^tc, G^ts\rangle\langle G^ta, G^tc\rangle)\mathcal{B}_{bt} \arrow[d, "m\otimes\mathrm{id}"] \\
\mathcal{A}_{as}\mathcal{B}_{bt} \arrow[rr, "G^t\otimes\mathrm{id}"'] & & \langle G^ta, G^ts\rangle\mathcal{B}_{bt}
\end{tikzcd}
$$

(α) は α の自然性から可換である．(γ) は γ の自然性から可換である．(G^t) は G^t が V-関手であることから可換である．$(*)$ は明らかに可換である．以上により，この図式は可

換である．次の図式を考える．

$$
\begin{tikzcd}
((\langle G^tc, G^ts\rangle\mathcal{B}_{dt})(\langle G^da, G^dc\rangle\mathcal{B}_{bd}) \arrow[r, "(\mathrm{id}\otimes F^c)\otimes(\mathrm{id}\otimes F^a)"] \arrow[d, "\alpha"] & ((\langle G^tc, G^ts\rangle\langle F^cd, F^ct\rangle)(\langle G^da, G^dc\rangle\langle F^ab, F^ad\rangle)) \arrow[d, "\alpha"'] \\
\langle G^tc, G^ts\rangle(\mathcal{B}_{dt}(\langle G^da, G^dc\rangle\mathcal{B}_{bd})) \arrow[dd, "\mathrm{id}\otimes\alpha^{-1}"] & \langle G^tc, G^ts\rangle(\langle F^cd, F^ct\rangle(\langle G^da, G^dc\rangle\langle F^ab, F^ad\rangle)) \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes\alpha^{-1}"'] \\
{} \arrow[r, phantom, "(\alpha)"] & \langle G^tc, G^ts\rangle((\langle F^cd, F^ct\rangle\langle G^da, G^dc\rangle)\langle F^ab, F^ad\rangle) \\
\langle G^tc, G^ts\rangle((\mathcal{B}_{dt}\langle G^da, G^dc\rangle)\mathcal{B}_{bd}) \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes((F^c\otimes\mathrm{id})\otimes\mathrm{id})"] & \langle G^tc, G^ts\rangle((\langle F^cd, F^ct\rangle\langle G^da, G^dc\rangle)\mathcal{B}_{bd}) \arrow[u, "\mathrm{id}\otimes((\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})\otimes F^a)"'] \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes(m\otimes\mathrm{id})"'] \\
 & \langle G^tc, G^ts\rangle(\langle G^da, F^ct\rangle\mathcal{B}_{bd}) \\
\langle G^tc, G^ts\rangle((\langle G^ta, G^tc\rangle\mathcal{B}_{dt})\mathcal{B}_{bd}) \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes((\mathrm{id}\otimes F^a)\otimes\mathrm{id})"] \arrow[dd, "\mathrm{id}\otimes\alpha"] & \langle G^tc, G^ts\rangle((\langle G^ta, G^tc\rangle\langle F^ad, F^at\rangle)\mathcal{B}_{bd}) \arrow[u, "\mathrm{id}\otimes(m\otimes\mathrm{id})"'] \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes((\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})\otimes F^a)"'] \\
{} \arrow[r, phantom, "(\alpha)"] & \langle G^tc, G^ts\rangle((\langle G^ta, G^tc\rangle\langle F^ad, F^at\rangle)\langle F^ab, F^ad\rangle) \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes\alpha"'] \\
\langle G^tc, G^ts\rangle(\langle G^ta, G^tc\rangle(\mathcal{B}_{dt}\mathcal{B}_{bd})) \arrow[d, "\alpha^{-1}"] & \langle G^tc, G^ts\rangle(\langle G^ta, G^tc\rangle(\langle F^ad, F^at\rangle\langle F^ab, F^ad\rangle)) \arrow[d, "\alpha^{-1}"'] \\
((\langle G^tc, G^ts\rangle\langle G^ta, G^tc\rangle)(\mathcal{B}_{dt}\mathcal{B}_{bd}) \arrow[r, "(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})\otimes(F^a\otimes F^a)"] \arrow[d, "(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})\otimes m"] \arrow[dr, phantom, "(F^a)"] & ((\langle G^tc, G^ts\rangle\langle G^ta, G^tc\rangle)(\langle F^ad, F^at\rangle\langle F^ab, F^ad\rangle)) \arrow[d, "(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})\otimes m"'] \\
((\langle G^tc, G^ts\rangle\langle G^ta, G^tc\rangle)\mathcal{B}_{bt} \arrow[r, "(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})\otimes F^a"'] \arrow[d, "m\otimes\mathrm{id}"] \arrow[dr, phantom, "(*)"] & ((\langle G^tc, G^ts\rangle\langle G^ta, G^tc\rangle)\langle F^ab, F^at\rangle \arrow[d, "m\otimes\mathrm{id}"'] \\
\langle G^ta, G^ts\rangle\mathcal{B}_{bt} \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes F^a"'] & \langle G^ta, G^ts\rangle\langle F^ab, F^at\rangle
\end{tikzcd}
$$

(α) は α の自然性から可換である．(F^a) は F^a が V-関手であることから可換である．

$(*)$ は明らかに可換である．以上により，この図式も可換である．次の図式を考える．

$$
\begin{tikzcd}
(\langle G^t c, G^t s\rangle\langle F^c d, F^c t\rangle)(\langle G^d a, G^d c\rangle\langle F^a b, F^a d\rangle) \arrow[r, "(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})\otimes m"] \arrow[d, "\alpha"'] \arrow[dr, phantom, "(\alpha)"] & (\langle G^t c, G^t s\rangle\langle F^c d, F^c t\rangle)\langle F^a b, G^d c\rangle \arrow[d, "\alpha"] \arrow[ddddddddddr, "m\otimes\mathrm{id}"] & \\
\langle G^t c, G^t s\rangle(\langle F^c d, F^c t\rangle(\langle G^d a, G^d c\rangle\langle F^a b, F^a d\rangle)) \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes(\mathrm{id}\otimes m)"'] \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes\alpha^{-1}"'] & \langle G^t c, G^t s\rangle(\langle F^c d, F^c t\rangle\langle F^a b, G^d c\rangle) \arrow[dddddr, "\mathrm{id}\otimes m"] \arrow[ddd, phantom, "(m)"] & \\
\langle G^t c, G^t s\rangle((\langle F^c d, F^c t\rangle\langle G^d a, G^d c\rangle)\langle F^a b, F^a d\rangle) \arrow[ddr, "\mathrm{id}\otimes(m\otimes\mathrm{id})"] & & \\
\langle G^t c, G^t s\rangle((\langle F^c d, F^c t\rangle\langle G^d a, G^d c\rangle)\mathcal{B}_{bd}) \arrow[u, "\mathrm{id}\otimes((\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})\otimes F^a)"] \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes(m\otimes\mathrm{id})"'] \arrow[dr, phantom, "(*)"] & & \\
\langle G^t c, G^t s\rangle(\langle G^d a, F^c t\rangle\mathcal{B}_{bd}) \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes(\mathrm{id}\otimes F^a)"] & \langle G^t c, G^t s\rangle(\langle G^d a, F^c t\rangle\langle F^a b, F^a d\rangle) \arrow[ddr, "\mathrm{id}\otimes m"'] \arrow[dd, phantom, "(m)"] & \\
\langle G^t c, G^t s\rangle((\langle G^t a, G^t c\rangle\langle F^a d, F^a t\rangle)\mathcal{B}_{bd}) \arrow[u, "\mathrm{id}\otimes(m\otimes\mathrm{id})"] \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes((\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})\otimes F^a)"'] \arrow[ur, phantom, "(*)"] & & \\
\langle G^t c, G^t s\rangle((\langle G^t a, G^t c\rangle\langle F^a d, F^a t\rangle)\langle F^a b, F^a d\rangle) \arrow[uur, "\mathrm{id}\otimes(m\otimes\mathrm{id})"'] \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes\alpha"'] & & \langle G^t c, G^t s\rangle\langle F^a b, G^t c\rangle \arrow[ddddl, "m"] \\
\langle G^t c, G^t s\rangle(\langle G^t a, G^t c\rangle(\langle F^a d, F^a t\rangle\langle F^a b, F^a d\rangle)) \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes(\mathrm{id}\otimes m)"] \arrow[d, "\alpha^{-1}"'] \arrow[dr, phantom, "(\alpha)"] & \langle G^t c, G^t s\rangle(\langle G^t a, G^t c\rangle\langle F^a b, F^a t\rangle) \arrow[ur, "\mathrm{id}\otimes m"] \arrow[ddl, "\alpha^{-1}"] \arrow[ddd, phantom, "(m)"] & \\
(\langle G^t c, G^t s\rangle\langle G^t a, G^t c\rangle)(\langle F^a d, F^a t\rangle\langle F^a b, F^a d\rangle) \arrow[d, "(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})\otimes m"'] & & \\
(\langle G^t c, G^t s\rangle\langle G^t a, G^t c\rangle)\langle F^a b, F^a t\rangle \arrow[d, "m\otimes\mathrm{id}"'] & & \arrow[d, phantom, "(m)"] \\
\langle G^t a, G^t s\rangle\langle F^a b, F^a t\rangle \arrow[r, "m"'] & \langle F^a b, G^t s\rangle & \langle F^c d, G^t s\rangle\langle F^a b, G^d c\rangle \arrow[l, "m"]
\end{tikzcd}
$$

(α) は α の自然性から可換である．(m) は豊穣圏の定義から可換である．$(*)$ は明らかに可換である．以上によりこの図式も可換である．以上の図式を組み合わせれば，示した

かった図式の可換性が分かる (次の図式を参照).

$$
\begin{tikzcd}
(\mathcal{A}_{cs}\mathcal{B}_{dt})(\mathcal{A}_{ac}\mathcal{B}_{bd}) \arrow[ddd, "m"'] \arrow[rrrr, dash, "T\otimes T"] & & {} \arrow[d] & {} \arrow[d] & {} \arrow[ddd] \\
& {} \arrow[r] \arrow[d] & {} \arrow[r] & {} \arrow[d] & \\
& {} \arrow[r] & {} \arrow[r] \arrow[d] & {} \arrow[d] & \\
\mathcal{A}_{as}\mathcal{B}_{bt} \arrow[rrr, "T"'] & & {} & \langle F^a b, G^t s\rangle & \langle F^c d, G^t s\rangle\langle F^a b, G^d c\rangle \arrow[l, "m"]
\end{tikzcd}
$$

次に，次の図式が可換であることを示す.

$$
\begin{tikzcd}
I \arrow[r, "j_{\langle a,b\rangle}"] \arrow[dr, "j_{T(a,b)}"'] & \mathcal{A}(a,a)\otimes\mathcal{B}(b,b) \arrow[d, "T"] \\
& \mathcal{C}(T(a,b),T(a,b))
\end{tikzcd}
$$

その為には次の図式の一番外側が可換であることを示せばよい.

$$
\begin{tikzcd}
I \arrow[r, "\lambda^{-1}"] \arrow[dddrrr, bend right, "j_{F^a b}"'] & I\otimes I \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes j_b"] \arrow[dr, "\mathrm{id}\otimes j_{F^a b}"'] & I\otimes\mathcal{B}(b,b) \arrow[r, "j_a\otimes\mathrm{id}"] \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes F^a"] \arrow[dr, "j_{G^b a}\otimes\mathrm{id}"] \arrow[l, phantom, "(F^a)"] & \mathcal{A}(a,a)\otimes\mathcal{B}(b,b) \arrow[d, "G^b\otimes\mathrm{id}"] \arrow[d, phantom, "(G^b)"', shift right=20] \\
& & I\otimes\mathcal{C}(F^a b,F^a b) \arrow[dr, "j_{G^b a}\otimes\mathrm{id}"] \arrow[ddr, bend right, "\lambda"] \arrow[r, phantom, "(*)"] \arrow[dl, phantom, "(\lambda)"] & \mathcal{C}(G^b a,G^b a)\otimes\mathcal{B}(b,b) \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes F^a"] \\
& & & \mathcal{C}(G^b a,G^b a)\otimes\mathcal{C}(F^a b,F^a b) \arrow[d, "m"] \arrow[d, phantom, "(**)"', shift right=20] \\
& & & \mathcal{C}(F^a b,G^b a)
\end{tikzcd}
$$

(F^a)，(G^b) は F^a, G^b が V-関手だから可換である．(λ) は λ の自然性から可換である．$(*)$ は明らかに可換である．$(**)$ は豊穣圏の定義から可換である.

以上により T は V-関手である．また，$T(a,-)_{bc}$ は定義から，合成

$$
\begin{aligned}
\mathcal{B}(b,c) &\xrightarrow{\lambda^{-1}} I\otimes\mathcal{B}(b,c) \xrightarrow{j_a\otimes\mathrm{id}} \mathcal{A}(a,a)\otimes\mathcal{B}(b,c) \\
&\xrightarrow{G^c\otimes F^a} \mathcal{C}(T(a,c),T(a,c))\otimes\mathcal{C}(T(a,b),T(a,c)) \\
&\xrightarrow{m} \mathcal{C}(T(a,b),T(a,c))
\end{aligned}
$$

と一致する．よって次の図式により $T(a,-)=F^a$ が分かる．

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{B}(b,c) \arrow[r, "\lambda^{-1}"] \arrow[ddr, "F^a"'] & I\otimes\mathcal{B}(b,c) \arrow[rr, "j_a\otimes\mathrm{id}"] \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes F^a"] \arrow[drr, "j\otimes\mathrm{id}"] & & \mathcal{A}(a,a)\otimes\mathcal{B}(b,c) \arrow[d, "G^c\otimes\mathrm{id}"] \arrow[dl, phantom, "(G^c)"] \\
& I\otimes\mathcal{C}(T(a,b),T(a,c)) \arrow[d, "\lambda"] \arrow[drr, "j\otimes\mathrm{id}"] \arrow[dl, phantom, "(\lambda)"] \arrow[r, phantom, "(*)"] & & \mathcal{C}(T(a,c),T(a,c))\otimes\mathcal{B}(b,c) \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes F^a"] \\
& \mathcal{C}(T(a,b),T(a,c)) \arrow[ur, phantom, "(j)"] & & \mathcal{C}(T(a,c),T(a,c))\otimes\mathcal{C}(T(a,b),T(a,c)) \arrow[ll, "m"]
\end{tikzcd}
$$

但し (λ) は λ の自然性により可換である．(G^c) は G^c が V-関手であるから可換である．j は $\mathcal{C}$ が V-豊穣圏であるから可換である．$(*)$ は明らかに可換である．

同様にして $T(-,b)=G^b$ も分かる． $\square$

2.6 V-関手 $\otimes$

命題 19. $x\in\mathcal{V}$ とする．F を

- $u\in\mathcal{V}$ に対して $Fu:=u\otimes x$.
- $u,v\in\mathcal{V}$ に対して $F_{uv}\colon[u,v]\longrightarrow[u\otimes x,v\otimes x]$ を

$$[u,v]\otimes(u\otimes x)\xrightarrow{\alpha^{-1}}([u,v]\otimes u)\otimes x\xrightarrow{\mathrm{ev}\otimes\mathrm{id}}v\otimes x$$

  に対応する射とする．

により定めれば，これは V-関手 $F\colon\mathcal{V}\longrightarrow\mathcal{V}$ を与える．

証明. まず次の図式が可換であることを示す．

$$
\begin{tikzcd}
{[v,w]\otimes[u,v]} \arrow[r, "m"] \arrow[d, "F_{vw}\otimes F_{uv}"'] & {[u,w]} \arrow[d, "F_{uw}"] \\
{[v\otimes x,w\otimes x]\otimes[u\otimes x,v\otimes x]} \arrow[r, "m"'] & {[u\otimes x,w\otimes x]}
\end{tikzcd}
$$

その為には随伴により次の図式が可換であることを示せばよい．

$$\begin{tikzcd}
([v,w]\otimes[u,v])\otimes(u\otimes x) \arrow[r, "m\otimes(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})"] \arrow[dd, "(F_{vw}\otimes F_{uv})\otimes(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})"'] & {[u,w]\otimes(u\otimes x)} \arrow[d, "\alpha^{-1}"] \\
 & ([u,w]\otimes u)\otimes x \arrow[d, "\mathrm{ev}\otimes\mathrm{id}"] \\
([v\otimes x,w\otimes x]\otimes[u\otimes x,v\otimes x])\otimes(u\otimes x) \arrow[d, "\alpha"'] & w\otimes x \\
{[v\otimes x,w\otimes x]\otimes([u\otimes x,v\otimes x]\otimes(u\otimes x))} \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes\mathrm{ev}"'] & {[v\otimes x,w\otimes x]\otimes(v\otimes x)} \arrow[u, "\mathrm{ev}"']
\end{tikzcd}$$

即ち，次の図式が可換であることを示せばよい．

$$\begin{tikzcd}
([v,w][u,v])(ux) \arrow[rrr, "m\otimes(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})"] \arrow[drr, "\alpha^{-1}"] \arrow[ddr, "\alpha"] \arrow[dddd, "(F\otimes F)\otimes(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})"] & & \arrow[d, phantom, "(\alpha)"] & {[u,w](ux)} \arrow[d, "\alpha^{-1}"'] \\
 & \arrow[d, phantom, "(V)"] & (([v,w][u,v])u)x \arrow[r, "(m\otimes\mathrm{id})\otimes\mathrm{id}"] \arrow[dr, "\alpha\otimes\mathrm{id}"'] & ([u,w]u)x \arrow[ddd, bend left=60, "\mathrm{ev}\otimes\mathrm{id}"] \arrow[d, phantom, "(*)"] \\
\arrow[d, phantom, "(\alpha)"] & {[v,w]([u,v](ux))} \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes\alpha^{-1}"'] \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes(F\otimes\mathrm{id})"'] \arrow[dr, phantom, "(F)"] & {[v,w](([u,v]u)x)} \arrow[r, "\alpha^{-1}"] \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes(\mathrm{ev}\otimes\mathrm{id})"'] \arrow[dr, phantom, "(\alpha)"] & ([v,w]([u,v]u))x \arrow[d, "(\mathrm{id}\otimes\mathrm{ev})\otimes\mathrm{id}"'] \\
 & {[v,w]([ux,vx](ux))} \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes\mathrm{ev}"'] \arrow[d, "F\otimes(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})"'] \arrow[dr, phantom, "(**)"] & {[v,w](vx)} \arrow[r, "\alpha^{-1}"'] \arrow[d, "F\otimes(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})"'] \arrow[dr, phantom, "(F)"] & ([v,w]v)x \arrow[d, "\mathrm{ev}\otimes\mathrm{id}"'] \\
([vx,wx][ux,vx])(ux) \arrow[r, "\alpha"'] & {[vx,wx]([ux,vx](ux))} \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes\mathrm{ev}"'] & {[vx,wx](vx)} \arrow[r, "\mathrm{ev}"'] & wx
\end{tikzcd}$$

(α) は α の自然性から可換である．(F) は F の定義から可換である．(V) は coherence 定理から可換である．$(*)$ は補題 14 より可換である．$(**)$ は明らかに可換である．以上により，この図式は可換である．

後は次の図式の可換性を示せばよい．

$$\begin{tikzcd}
I \arrow[r, "j_u"] \arrow[dr, "j_{u\otimes x}"'] & {[u,u]} \arrow[d, "F_{uu}"] \\
 & {[u\otimes x,u\otimes x]}
\end{tikzcd}$$

その為には随伴により，次の図式が可換であることを示せばよい．

$$
\begin{tikzcd}
I \otimes (u \otimes x) \arrow[r, "j_u\otimes(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})"] \arrow[ddr, "\lambda"'] & {[u,u] \otimes (u \otimes x)} \arrow[d, "\alpha^{-1}"] \\
& ([u,u] \otimes u) \otimes x \arrow[d, "\mathrm{ev}\otimes\mathrm{id}"] \\
& u \otimes x
\end{tikzcd}
$$

即ち次の図式の外側が可換であることを示せばよい．

$$
\begin{tikzcd}
I \otimes (u \otimes x) \arrow[r, "j_u\otimes(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})"] \arrow[d, "\alpha^{-1}"'] \arrow[dr, phantom, "(\alpha)"] \arrow[dd, bend right=60, "\lambda"'] & {[u,u] \otimes (u \otimes x)} \arrow[d, "\alpha^{-1}"] \\
(I \otimes u) \otimes x \arrow[r, "(j_u\otimes\mathrm{id})\otimes\mathrm{id}"] \arrow[dr, "\lambda\otimes\mathrm{id}"] \arrow[d, phantom, "(V)"] \arrow[r, phantom, "(j)", shift right=6] & ([u,u] \otimes u) \otimes x \arrow[d, "\mathrm{ev}\otimes\mathrm{id}"] \\
{} & u \otimes x
\end{tikzcd}
$$

(α) は α の自然性から可換である．(j) は j_u の定義から可換である．(V) は coherence 定理から可換である．以上により，この図式は可換である． $\square$

この V-関手 F を $-\otimes x$ と書く．同様にして V-関手 $x \otimes -\colon \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V}$ も得られる．即ち $x \otimes -\colon [u,v] \longrightarrow [x\otimes u, x\otimes v]$ を

$$
[u,v]\otimes(x\otimes u) \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes\gamma} [u,v]\otimes(u\otimes x) \xrightarrow{\alpha^{-1}} ([u,v]\otimes u)\otimes x \xrightarrow{\mathrm{ev}\otimes\mathrm{id}} v\otimes x \xrightarrow{\gamma} x\otimes v
$$

に対応する射とすればよい．

命題 20. $\otimes\colon \langle u,v\rangle \longmapsto u\otimes v$ は V-関手 $\otimes\colon \mathcal{V}\otimes\mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V}$ を定める．

証明. 補題 18 により，次の図式が可換であることを示せばよい．

$$
\begin{tikzcd}
{[u,v]\otimes[w,x]} \arrow[r, "(-\otimes x)\otimes(u\otimes -)"] \arrow[dd, "\gamma"'] & {[u\otimes x, v\otimes x]\otimes[u\otimes w, u\otimes x]} \arrow[d, "m"] \\
& {[u\otimes w, v\otimes x]} \\
{[w,x]\otimes[u,v]} \arrow[r, "(v\otimes -)\otimes(-\otimes w)"'] & {[v\otimes w, v\otimes x]\otimes[u\otimes w, v\otimes w]} \arrow[u, "m"']
\end{tikzcd}
$$

随伴により次の図式が可換であることを示せばよい.

$$\begin{tikzcd}
([u,v]\otimes[w,x])\otimes(u\otimes w) \arrow[r, "((-\otimes x)\otimes(u\otimes -))\otimes \mathrm{id}"] \arrow[dd, "\gamma\otimes\mathrm{id}"'] & ([u\otimes x, v\otimes x]\otimes[u\otimes w, u\otimes x])\otimes(u\otimes w) \arrow[d] \\
 & v\otimes x \\
([w,x]\otimes[u,v])\otimes(u\otimes w) \arrow[r, "((v\otimes -)\otimes(-\otimes w))\otimes\mathrm{id}"'] & ([v\otimes w, v\otimes x]\otimes[u\otimes w, v\otimes w])\otimes(u\otimes w) \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

即ち，次の図式の一番外側が可換であることを示せばよい．

$$
\begin{tikzcd}
([u,v][w,x])(uw) \arrow[r, "(-\otimes x)\otimes\mathrm{id}"] \arrow[d, "\alpha"'] \arrow[dr, phantom, "(\alpha)"] \arrow[dddddddddddd, bend right, "\gamma\otimes\mathrm{id}"'] & ([ux,vx][w,x])(uw) \arrow[r, "(\mathrm{id}\otimes(u\otimes-))\otimes\mathrm{id}"] \arrow[d, "\alpha"] \arrow[dr, phantom, "(\alpha)"] & ([ux,vx][uw,ux])(uw) \arrow[d, "\alpha"] \\
{[u,v]([w,x](uw))} \arrow[r, "(-\otimes x)\otimes\mathrm{id}"] \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes(\mathrm{id}\otimes\gamma)"'] \arrow[dr, phantom, "(\gamma)"] & {[ux,vx]([w,x](uw))} \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes((u\otimes-)\otimes\mathrm{id})"] \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes(\mathrm{id}\otimes\gamma)"] \arrow[dr, phantom, "(u\otimes-)"] & {[ux,vx]([uw,ux](uw))} \arrow[dddd, bend left=60, "\mathrm{id}\otimes\mathrm{ev}"] \\
{[u,v]([w,x](wu))} \arrow[r, "(-\otimes x)\otimes\mathrm{id}"] \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes\alpha^{-1}"'] \arrow[dr, phantom, "(\alpha)"] & {[ux,vx]([w,x](wu))} \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes\alpha^{-1}"] & \\
{[u,v](([w,x]w)u)} \arrow[r, "(-\otimes x)\otimes\mathrm{id}"] \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes\gamma"'] \arrow[dr, phantom, "(\gamma)"] & {[ux,vx](([w,x]w)u)} \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes(\mathrm{ev}\otimes\mathrm{id})"'] \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes\gamma"] \arrow[dr, phantom, "(\gamma)"] & {[ux,vx](xu)} \arrow[dd, "\mathrm{id}\otimes\gamma"] \\
{[u,v](u([w,x]w))} \arrow[r, "(-\otimes x)\otimes\mathrm{id}"] \arrow[ddd, "\alpha^{-1}"'] \arrow[ddd, phantom, "(V)"', shift right=8ex] \arrow[dr, "\mathrm{id}\otimes(\mathrm{id}\otimes\mathrm{ev})"'] & {[ux,vx](u([w,x]w))} \arrow[dr, "\mathrm{id}\otimes(\mathrm{id}\otimes\mathrm{ev})"] \arrow[d, phantom, "(*)"] & \\
 & {[u,v](ux)} \arrow[r, "(-\otimes x)\otimes\mathrm{id}"'] \arrow[d, "\alpha^{-1}"'] \arrow[dr, phantom, "(\alpha)"] & {[ux,vx](ux)} \arrow[d, "\mathrm{ev}"] \\
 \arrow[r, phantom, "(\alpha)"] & ([u,v]u)x \arrow[r, "\mathrm{ev}\otimes\mathrm{id}"'] \arrow[d, phantom, "(*)"] & vx \\
([u,v]u)([w,x]w) \arrow[r, "\mathrm{ev}\otimes(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})"'] \arrow[ur, "(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})\otimes\mathrm{ev}"] & v([w,x]w) \arrow[ur, "\mathrm{id}\otimes\mathrm{ev}"'] \arrow[dr, phantom, "(**)"] & \\
([u,v]u)(w[w,x]) \arrow[u, "(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})\otimes\gamma"] \arrow[r, "\mathrm{ev}\otimes(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})"'] \arrow[ur, phantom, "(\gamma)"] & v(w[w,x]) \arrow[u, "(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})\otimes\gamma"'] & {[vw,vx](vw)} \arrow[uu, "\mathrm{ev}"'] \\
(([u,v]u)w)[w,x] \arrow[u, "\alpha"] \arrow[r, "(\mathrm{ev}\otimes\mathrm{id})\otimes\mathrm{id}"'] \arrow[ur, phantom, "(\alpha)"] & (vw)[w,x] \arrow[u, "\alpha"] \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes(v\otimes-)"'] & (vw)[vw,vx] \arrow[u, "\gamma"'] \\
([u,v](uw))[w,x] \arrow[u, "\alpha^{-1}\otimes\mathrm{id}"] \arrow[r, "(-\otimes w)\otimes\mathrm{id}"'] \arrow[ur, phantom, "(-\otimes w)"] & ([uw,vw](uw))[w,x] \arrow[u, "\mathrm{ev}\otimes\mathrm{id}"] \arrow[r, "(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})\otimes(v\otimes-)"'] \arrow[ur, phantom, "(*)"] & ([uw,vw](uw))[vw,vx] \arrow[u, "\mathrm{ev}\otimes\mathrm{id}"'] \\
{[w,x]([u,v](uw))} \arrow[u, "\gamma"] \arrow[r, "(-\otimes w)\otimes\mathrm{id}"'] \arrow[ur, phantom, "(\gamma)"] & {[w,x]([uw,vw](uw))} \arrow[u, "\gamma"] \arrow[r, "(v\otimes-)\otimes(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})"'] \arrow[ur, phantom, "(\gamma)"] & {[vw,vx]([uw,vw](uw))} \arrow[u, "\gamma"'] \\
([w,x][u,v])(uw) \arrow[u, "\alpha"] \arrow[r, "(-\otimes w)\otimes\mathrm{id}"'] \arrow[ur, phantom, "(\alpha)"] & ([w,x][uw,vw])(uw) \arrow[u, "\alpha"] \arrow[r, "((v\otimes-)\otimes\mathrm{id})\otimes\mathrm{id}"'] \arrow[ur, phantom, "(\alpha)"] & ([vw,vx][uw,vw])(uw) \arrow[u, "\alpha"']
\end{tikzcd}
$$

(α) は α の自然性から可換である．(γ) は γ の自然性から可換である．$(u\otimes -), (-\otimes w)$ は $u\otimes -, -\otimes w$ の定義から可換である．(V) は coherence 定理から可換である．$(*)$ は

明らかに可換である．$(**)$ は次の図式により可換である．

$$
\begin{tikzcd}
v([w,x]w) \arrow[rrr, "\mathrm{id}\otimes\mathrm{ev}"] \arrow[drr, phantom, "(\gamma)"] & & & vx \\
& ([w,x]w)v \arrow[ul, "\gamma"'] \arrow[r, "\mathrm{ev}\otimes\mathrm{id}"] & xv \arrow[ur, "\gamma"'] & \\
v(w[w,x]) \arrow[uu, "\mathrm{id}\otimes\gamma"] \arrow[d, phantom, "(V)"] & {[w,x](wv)} \arrow[u, "\alpha^{-1}"] & (v\otimes -) & \\
& {[w,x](vw)} \arrow[u, "\mathrm{id}\otimes\gamma"] \arrow[rr, "(v\otimes -)\otimes(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})"] \arrow[drr, phantom, "(\gamma)"] & & {[vw,vx](vw)} \arrow[uuu, "\mathrm{ev}"'] \\
(vw)[w,x] \arrow[uu, "\alpha"] \arrow[ur, "\gamma"'] \arrow[rrr, "(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})\otimes(v\otimes -)"'] & & & (vw)[vw,vx] \arrow[u, "\gamma"']
\end{tikzcd}
$$

以上により，この図式は可換である． $\square$

2.7 V-関手 $\mathcal{C}(-,\square)$

命題 21. $s\in\mathcal{C}$ とする．F を

- $a\in\mathcal{C}$ に対して $Fa := \mathcal{C}(s,a)$.
- $a,b\in\mathcal{C}$ に対して $F_{ab}\colon \mathcal{C}(a,b)\longrightarrow[\mathcal{C}(s,a),\mathcal{C}(s,b)]$ を $m\colon\mathcal{C}(a,b)\otimes\mathcal{C}(s,a)\longrightarrow\mathcal{C}(s,b)$ に対応する射とする．

により定めれば，これは V-関手 $F\colon\mathcal{C}\longrightarrow\mathcal{V}$ を与える．

証明. まず次の図式が可換であることを示す．

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{C}(b,c)\otimes\mathcal{C}(a,b) \arrow[r, "m"] \arrow[d, "F_{bc}\otimes F_{ab}"'] & \mathcal{C}(a,c) \arrow[d, "F_{ac}"] \\
{[\mathcal{C}(s,b),\mathcal{C}(s,c)]\otimes[\mathcal{C}(s,a),\mathcal{C}(s,b)]} \arrow[r, "m"'] & {[\mathcal{C}(s,a),\mathcal{C}(s,c)]}
\end{tikzcd}
$$

随伴 $-\otimes\mathcal{C}(s,a)\dashv[\mathcal{C}(s,a),-]$ により，次の図式が可換であることを示せばよい．

$$
\begin{tikzcd}
(\mathcal{C}(b,c)\otimes\mathcal{C}(a,b))\otimes\mathcal{C}(s,a) \arrow[r, "m\otimes\mathrm{id}"] \arrow[d, "(F_{bc}\otimes F_{ab})\otimes\mathrm{id}"'] & \mathcal{C}(a,c)\otimes\mathcal{C}(s,a) \arrow[d, "m"] \\
({[\mathcal{C}(s,b),\mathcal{C}(s,c)]\otimes[\mathcal{C}(s,a),\mathcal{C}(s,b)]})\otimes\mathcal{C}(s,a) \arrow[r] & \mathcal{C}(s,c)
\end{tikzcd}
$$

即ち，次の図式が可換であることを示せばよい.

$$
\begin{tikzcd}
(\mathcal{C}(b,c)\otimes\mathcal{C}(a,b))\otimes\mathcal{C}(s,a) \arrow[rr, "m\otimes\mathrm{id}"] \arrow[dr, "\alpha"] \arrow[dd, "(F\otimes\mathrm{id})\otimes\mathrm{id}"'] & & \mathcal{C}(a,c)\otimes\mathcal{C}(s,a) \arrow[dddddd, bend left=60, "m"] \arrow[dd, phantom, "(m)"] \\
& \mathcal{C}(b,c)\otimes(\mathcal{C}(a,b)\otimes\mathcal{C}(s,a)) \arrow[dr, "\mathrm{id}\otimes m"] \arrow[dd, "F\otimes(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})"] \arrow[d, phantom, "(\alpha)"] & \\
([\mathcal{C}(s,b),\mathcal{C}(s,c)]\otimes\mathcal{C}(a,b))\otimes\mathcal{C}(s,a) \arrow[dr, "\alpha"] \arrow[dd, "(\mathrm{id}\otimes F)\otimes\mathrm{id}"'] & \arrow[r, phantom, "(*)"] & \mathcal{C}(b,c)\otimes\mathcal{C}(s,b) \arrow[dd, "F\otimes\mathrm{id}"] \arrow[dddd, bend left=40, "m"] \\
& [\mathcal{C}(s,b),\mathcal{C}(s,c)]\otimes(\mathcal{C}(a,b)\otimes\mathcal{C}(s,a)) \arrow[dr, "\mathrm{id}\otimes m"] \arrow[dd, "\mathrm{id}\otimes(F\otimes\mathrm{id})"] \arrow[d, phantom, "(\alpha)"] & \\
([\mathcal{C}(s,b),\mathcal{C}(s,c)]\otimes[\mathcal{C}(s,a),\mathcal{C}(s,b)])\otimes\mathcal{C}(s,a) \arrow[dr, "\alpha"] \arrow[dd, "m\otimes\mathrm{id}"'] & \arrow[r, phantom, "(F)"] & [\mathcal{C}(s,b),\mathcal{C}(s,c)]\otimes\mathcal{C}(s,b) \arrow[dd, "\mathrm{ev}"] \arrow[dd, phantom, shift left=8, "(F)"] \\
& [\mathcal{C}(s,b),\mathcal{C}(s,c)]\otimes([\mathcal{C}(s,a),\mathcal{C}(s,b)]\otimes\mathcal{C}(s,a)) \arrow[ur, "\mathrm{id}\otimes\mathrm{ev}"] \arrow[d, phantom, "(**)"] & \\
{[\mathcal{C}(s,a),\mathcal{C}(s,c)]}\otimes\mathcal{C}(s,a) \arrow[rr, "\mathrm{ev}"'] & & \mathcal{C}(s,c)
\end{tikzcd}
$$

(α) は α の自然性から可換である．(F) は F の定義から可換である．(m) は豊穣圏の定義から可換である．$(*)$ は明らかに可換である．$(**)$ は補題 14 により可換である．以上によりこの図式は可換である.

次に次の図式の可換性を示す.

$$
\begin{tikzcd}
I \arrow[r, "j_a"] \arrow[dr, "j_{\mathcal{C}(s,a)}"'] & \mathcal{C}(a,a) \arrow[d, "F_{aa}"] \\
& {[\mathcal{C}(s,a),\mathcal{C}(s,a)]}
\end{tikzcd}
$$

随伴 $-\otimes\mathcal{C}(s,a)\dashv[\mathcal{C}(s,a),-]$ により，次の図式が可換であることを示せばよいが，それは豊穣圏の定義から明らか.

$$
\begin{tikzcd}
I\otimes\mathcal{C}(s,a) \arrow[r, "j_a\otimes\mathrm{id}"] \arrow[dr, "\lambda"'] & \mathcal{C}(a,a)\otimes\mathcal{C}(s,a) \arrow[d, "m"] \\
& \mathcal{C}(s,a)
\end{tikzcd}
$$

$\square$

この V-関手 F を $\mathcal{C}(s,-)$ と書く.

$\mathcal{C}$ として $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ を考えれば V-関手 $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}(s,-)\colon \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathcal{V}$ が得られる．これを $\mathcal{C}(-,s)$ で表す．$\mathcal{C}(-,s)_{ab}\colon \mathcal{C}^{\mathrm{op}}(a,b) \longrightarrow [\mathcal{C}(a,s),\mathcal{C}(b,s)]$ に対応する射は定義より

$$\mathcal{C}(b,a)\otimes\mathcal{C}(a,s) \xrightarrow{\gamma} \mathcal{C}(a,s)\otimes\mathcal{C}(b,a) \xrightarrow{m} \mathcal{C}(b,s)$$

である．

命題 22. $\mathcal{C}(-,\Box)\colon \langle a,b\rangle \longmapsto \mathcal{C}(a,b)$ は V-関手 $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}\otimes\mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{V}$ を定める．

証明. 補題 18 により次の図式が可換であることを示せばよい．(ここでスペースの都合上，$\mathcal{C}(a,b)$ を $\mathcal{C}_{ab}$ と表記した．)

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}_{dt}\otimes\mathcal{C}_{ca} \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes\mathcal{C}(-,d)"] \arrow[dd, "\gamma"'] & \mathcal{C}_{dt}\otimes[\mathcal{C}_{ad},\mathcal{C}_{cd}] \arrow[r, "\mathcal{C}(c,-)\otimes\mathrm{id}"] & {[\mathcal{C}_{cd},\mathcal{C}_{ct}]\otimes[\mathcal{C}_{ad},\mathcal{C}_{cd}]} \arrow[d, "m"] \\
 & & {[\mathcal{C}_{ad},\mathcal{C}_{ct}]} \\
\mathcal{C}_{ca}\otimes\mathcal{C}_{dt} \arrow[r, "\mathcal{C}(-,t)\otimes\mathrm{id}"'] & {[\mathcal{C}_{at},\mathcal{C}_{ct}]\otimes\mathcal{C}_{dt}} \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes\mathcal{C}(a,-)"'] & {[\mathcal{C}_{at},\mathcal{C}_{ct}]\otimes[\mathcal{C}_{ad},\mathcal{C}_{at}]} \arrow[u, "m"']
\end{tikzcd}$$

随伴 $-\otimes\mathcal{C}_{ad} \dashv [\mathcal{C}_{ad},-]$ により，次の可換性を示せばよい．(スペースの都合上テンソル積 $\otimes$ は省略した．)

$$\begin{tikzcd}
(\mathcal{C}_{dt}\mathcal{C}_{ca})\mathcal{C}_{ad} \arrow[r, "(\mathrm{id}\otimes\mathcal{C}(-,d))\otimes\mathrm{id}"] \arrow[dddddddd, "\gamma\otimes\mathrm{id}"'] & (\mathcal{C}_{dt}[\mathcal{C}_{ad},\mathcal{C}_{cd}])\mathcal{C}_{ad} \arrow[r, "(\mathcal{C}(c,-)\otimes\mathrm{id})\otimes\mathrm{id}"] & ([\mathcal{C}_{cd},\mathcal{C}_{ct}][\mathcal{C}_{ad},\mathcal{C}_{cd}])\mathcal{C}_{ad} \arrow[d, "\alpha"] \\
 & & {[\mathcal{C}_{cd},\mathcal{C}_{ct}]([\mathcal{C}_{ad},\mathcal{C}_{cd}]\mathcal{C}_{ad})} \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes\mathrm{ev}"] \\
 & & {[\mathcal{C}_{cd},\mathcal{C}_{ct}]\mathcal{C}_{cd}} \arrow[d, "\mathrm{ev}"] \\
 & & \mathcal{C}_{ct} \\
 & & {[\mathcal{C}_{at},\mathcal{C}_{ct}]\mathcal{C}_{at}} \arrow[u, "\mathrm{ev}"'] \\
 & & {[\mathcal{C}_{at},\mathcal{C}_{ct}]([\mathcal{C}_{ad},\mathcal{C}_{at}]\mathcal{C}_{ad})} \arrow[u, "\mathrm{id}\otimes\mathrm{ev}"'] \\
 & & \\
 & & \\
(\mathcal{C}_{ca}\mathcal{C}_{dt})\mathcal{C}_{ad} \arrow[r, "(\mathcal{C}(-,t)\otimes\mathrm{id})\otimes\mathrm{id}"'] & ([\mathcal{C}_{at},\mathcal{C}_{ct}]\mathcal{C}_{dt})\mathcal{C}_{ad} \arrow[r, "(\mathrm{id}\otimes\mathcal{C}(a,-))\otimes\mathrm{id}"'] & ([\mathcal{C}_{at},\mathcal{C}_{ct}][\mathcal{C}_{ad},\mathcal{C}_{at}])\mathcal{C}_{ad} \arrow[uuu, "\alpha"']
\end{tikzcd}$$

即ち次の図式が可換であることを示せばよい．

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & (\mathcal{C}_{dt}[\mathcal{C}_{ad},\mathcal{C}_{cd}])\mathcal{C}_{ad} \arrow[rr, "(\mathcal{C}(c,-)\otimes\mathrm{id})\otimes\mathrm{id}"] \arrow[d, "\alpha"'] \arrow[drr, phantom, "(\alpha)"] & & ([\mathcal{C}_{cd},\mathcal{C}_{ct}][\mathcal{C}_{ad}\mathcal{C}_{cd}])\mathcal{C}_{ad} \arrow[d, "\alpha"] \\
 & \mathcal{C}_{dt}([\mathcal{C}_{ad},\mathcal{C}_{cd}]\mathcal{C}_{ad}) \arrow[rr, "\mathcal{C}(c,-)\otimes(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})"] \arrow[ddr, "\mathrm{id}\otimes\mathrm{ev}"] & & {[\mathcal{C}_{cd},\mathcal{C}_{ct}]([\mathcal{C}_{ad}\mathcal{C}_{cd}]\mathcal{C}_{ad})} \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes\mathrm{ev}"] \\
(\mathcal{C}_{dt}\mathcal{C}_{ca})\mathcal{C}_{ad} \arrow[r, "\alpha"] \arrow[uur, "(\mathrm{id}\otimes\mathcal{C}(-,d))\otimes\mathrm{id}"] \arrow[dddd, "\gamma\otimes\mathrm{id}"'] \arrow[ur, phantom, "(\alpha)"] & \mathcal{C}_{dt}(\mathcal{C}_{ca}\mathcal{C}_{ad}) \arrow[u, "\mathrm{id}\otimes(\mathcal{C}(-,d)\otimes\mathrm{id})"] \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes\gamma"'] \arrow[dr, phantom, "(**)"] & (*) & {[\mathcal{C}_{cd},\mathcal{C}_{ct}]\mathcal{C}_{cd}} \arrow[dd, "\mathrm{ev}"] \\
 & \mathcal{C}_{dt}(\mathcal{C}_{ad}\mathcal{C}_{ca}) \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes m"] & \mathcal{C}_{dt}\mathcal{C}_{cd} \arrow[ur, "\mathcal{C}(c,-)\otimes\mathrm{id}"] \arrow[dr, "m"] \arrow[r, phantom, "(**)"] & \, \\
 & (V) & (m) & \mathcal{C}_{ct} \\
 & (\mathcal{C}_{dt}\mathcal{C}_{ad})\mathcal{C}_{ca} \arrow[r, "m\otimes\mathrm{id}"'] \arrow[uu, "\alpha"] & \mathcal{C}_{at}\mathcal{C}_{ca} \arrow[ur, "m"'] \arrow[r, phantom, "(**)"] & \, \\
(\mathcal{C}_{ca}\mathcal{C}_{dt})\mathcal{C}_{ad} \arrow[r, "\alpha"'] \arrow[ddr, "(\mathcal{C}(-,t)\otimes\mathrm{id})\otimes\mathrm{id}"'] \arrow[ddr, phantom, "(\alpha)"] & \mathcal{C}_{ca}(\mathcal{C}_{dt}\mathcal{C}_{ad}) \arrow[u, "\gamma"] \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes m"'] \arrow[d, "\mathcal{C}(-,t)\otimes(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})"'] \arrow[ur, phantom, "(\gamma)"] & \mathcal{C}_{ca}\mathcal{C}_{at} \arrow[u, "\gamma"] \arrow[r, "\mathcal{C}(-,t)\otimes\mathrm{id}"] \arrow[d, phantom, "(*)"] & {[\mathcal{C}_{at},\mathcal{C}_{ct}]\mathcal{C}_{at}} \arrow[uu, "\mathrm{ev}"'] \arrow[dl, phantom, "(**)"] \\
 & {[\mathcal{C}_{at},\mathcal{C}_{ct}](\mathcal{C}_{dt}\mathcal{C}_{ad})} \arrow[rr, "\mathrm{id}\otimes(\mathcal{C}(a,-)\otimes\mathrm{id})"'] \arrow[urr, "\mathrm{id}\otimes m"] \arrow[drr, phantom, "(\alpha)"] & & {[\mathcal{C}_{at},\mathcal{C}_{ct}]([\mathcal{C}_{ad}\mathcal{C}_{at}]\mathcal{C}_{ad})} \arrow[u, "\mathrm{id}\otimes\mathrm{ev}"'] \\
 & ([\mathcal{C}_{at},\mathcal{C}_{ct}]\mathcal{C}_{dt})\mathcal{C}_{ad} \arrow[u, "\alpha"] \arrow[rr, "(\mathrm{id}\otimes\mathcal{C}(a,-))\otimes\mathrm{id}"'] & & ([\mathcal{C}_{at},\mathcal{C}_{ct}][\mathcal{C}_{ad}\mathcal{C}_{at}])\mathcal{C}_{ad} \arrow[u, "\alpha"']
\end{tikzcd}
$$

(α) は α の自然性から可換である．(γ) は γ の自然性から可換である．(m) は豊穣圏の定義から可換である．(V) は対称モノイダル圏の定義から可換である．$(*)$ は明らかに可換である．$(**)$ は $\mathcal{C}(a,-)$，$\mathcal{C}(-,a)$ の定義から可換である．以上により一番外側も可換である． $\square$

$f\colon a \xrightarrow{V} b$ を $\mathcal{C}$ の射とすると $\mathcal{C}(c,f)\colon \mathcal{C}(c,a) \xrightarrow{V} \mathcal{C}(c,b)$ は $\mathcal{V}$ の射である．これに対応する V の射を $f\circ -\colon \mathcal{C}(c,a) \longrightarrow \mathcal{C}(c,b)$ と書くことにする．2.4 で述べたことから

$f \circ -$ は可換図式

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}(c,a) \arrow[d, "\lambda^{-1}"'] \arrow[dr, "f\circ -"] & \\
I \otimes \mathcal{C}(c,a) \arrow[d, "f\otimes \mathrm{id}"'] & \mathcal{C}(c,b) \\
\mathcal{C}(a,b) \otimes \mathcal{C}(c,a) \arrow[d, "\mathcal{C}(c,-)\otimes \mathrm{id}"'] & \\
{[\mathcal{C}(c,a),\mathcal{C}(c,b)] \otimes \mathcal{C}(c,a)} \arrow[uur, "\mathrm{ev}"'] &
\end{tikzcd}$$

を満たす．ここで $\mathcal{C}(c,-)$ の定義より

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}(c,a) \arrow[d, "\lambda^{-1}"'] \arrow[dr, "f\circ -"] & \\
I \otimes \mathcal{C}(c,a) \arrow[d, "f\otimes \mathrm{id}"'] & \mathcal{C}(c,b) \\
\mathcal{C}(a,b) \otimes \mathcal{C}(c,a) \arrow[ur, "m"'] &
\end{tikzcd}$$

が可換である．

$- \circ f \colon \mathcal{C}(b,c) \longrightarrow \mathcal{C}(a,c)$ も同様に定義する．即ち

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}(b,c) \arrow[d, "\lambda^{-1}"'] \arrow[dr, "-\circ f"] & \\
I \otimes \mathcal{C}(b,c) \arrow[d, "f\otimes \mathrm{id}"'] & \mathcal{C}(a,c) \\
\mathcal{C}(a,b) \otimes \mathcal{C}(b,c) \arrow[d, "\mathcal{C}(-,c)"'] & \\
{[\mathcal{C}(b,c),\mathcal{C}(a,c)] \otimes \mathcal{C}(b,c)} \arrow[uur, "\mathrm{ev}"'] &
\end{tikzcd}$$

である．この場合も $\mathcal{C}(-,c)$ の定義から

$$
\begin{tikzcd}
& \mathcal{C}(b,c) \arrow[dl, "\rho^{-1}"'] \arrow[d, "\lambda^{-1}"] \arrow[dr, "-\circ f"] & \\
\mathcal{C}(b,c)\otimes I \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes f"'] & I\otimes\mathcal{C}(b,c) \arrow[l, "\gamma"] \arrow[d, "f\otimes\mathrm{id}"'] & \mathcal{C}(a,c) \\
\mathcal{C}(b,c)\otimes\mathcal{C}(a,b) \arrow[rru, bend right=70, "m"'] & \mathcal{C}(a,b)\otimes\mathcal{C}(b,c) \arrow[l, "\gamma"] \arrow[d, "\mathcal{C}(-,c)"'] & \\
& {[\mathcal{C}(b,c),\mathcal{C}(a,c)]\otimes\mathcal{C}(b,c)} \arrow[uur, "\mathrm{ev}"'] &
\end{tikzcd}
$$

が可換となる．即ち

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{C}(b,c) \arrow[d, "\rho^{-1}"'] \arrow[dr, "-\circ f"] & \\
\mathcal{C}(b,c)\otimes I \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes f"'] & \mathcal{C}(a,c) \\
\mathcal{C}(b,c)\otimes\mathcal{C}(a,b) \arrow[ur, "m"'] &
\end{tikzcd}
$$

が可換である．

$\mathcal{C}=\mathcal{V}$ の場合は次のようになる．

命題 23. $f\colon u \xrightarrow{V} v$ を $\mathcal{V}$ の射として，対応する V の射を $\widetilde{f}\colon u \longrightarrow v$ とする．このとき $f\circ -\colon [x,u] \longrightarrow [x,v]$ は $[\mathrm{id}_x, \widetilde{f}]$ と一致し，$-\circ f\colon [v,x] \longrightarrow [u,x]$ は $[\widetilde{f}, \mathrm{id}_x]$ と一致する．

証明. 次の図式は可換である．

$$
\begin{tikzcd}
& {[x,u]\otimes x} \arrow[drr, bend left, "\mathrm{ev}"] & & \\
(I\otimes[x,u])\otimes x \arrow[ur, bend left, "\lambda\otimes\mathrm{id}"] \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "(f\otimes\mathrm{id})\otimes\mathrm{id}"'] & I\otimes([x,u]\otimes x) \arrow[u, "\lambda"] \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes\mathrm{ev}"] \arrow[d, "f\otimes(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})"'] & I\otimes u \arrow[r, "\lambda"'] \arrow[d, "f\otimes\mathrm{id}"'] & u \arrow[d, "\widetilde{f}"] \\
({[u,v]}\otimes[x,u])\otimes x \arrow[r, "\alpha"] \arrow[dr, bend right, "m\otimes\mathrm{id}"'] & {[u,v]}\otimes([x,u]\otimes x) \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes\mathrm{ev}"] & {[u,v]}\otimes u \arrow[r, "\mathrm{ev}"] & v \\
& {[x,v]\otimes x} \arrow[urr, bend right, "\mathrm{ev}"'] & &
\end{tikzcd}
$$

よって随伴 $-\otimes x \dashv [x,-]$ により得られる次の図式も可換である．

$$\begin{tikzcd}
I\otimes[x,u] \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "f\otimes\mathrm{id}"'] & {[x,u]} \arrow[d, "{[\mathrm{id},\widetilde{f}]}"] \\
{[u,v]\otimes[x,u]} \arrow[r, "m"'] & {[x,v]}
\end{tikzcd}$$

故に $f\circ-$ の定義から $f\circ- = [\mathrm{id},\widetilde{f}]$ が分かる．

次の図式も可換である．

$$\begin{tikzcd}
({[v,x]}\otimes I)\otimes v \arrow[r, "\rho\otimes\mathrm{id}"] & {[v,x]}\otimes v \arrow[rr, "\mathrm{ev}"] & & x \arrow[dd, "\mathrm{id}"] \\
& & {[v,x]}\otimes({[u,v]}\otimes u) \arrow[ul, "\mathrm{id}\otimes\mathrm{ev}"'] & \\
({[v,x]}\otimes I)\otimes u \arrow[uu, "(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})\otimes\widetilde{f}"] \arrow[r, "\rho\otimes\mathrm{id}"] \arrow[drr, bend right, "\alpha"'] \arrow[dd, "(\mathrm{id}\otimes f)\otimes\mathrm{id}"'] \arrow[dr, phantom, "(\alpha)"] & {[v,x]}\otimes u \arrow[uu, "\mathrm{id}\otimes\widetilde{f}"'] & & x \\
& & {[v,x]}\otimes(I\otimes u) \arrow[ul, "\mathrm{id}\otimes\lambda"] \arrow[uu, "\mathrm{id}\otimes(f\otimes\mathrm{id})"'] \arrow[r, phantom, "(14)"] & \\
({[v,x]}\otimes{[u,v]})\otimes u \arrow[r, "m\otimes\mathrm{id}"'] \arrow[uuurr, "\alpha"] & {[u,x]}\otimes u \arrow[rr, "\mathrm{ev}"'] & & x \arrow[uu, "\mathrm{id}"']
\end{tikzcd}$$

よって随伴により得られる次の図式も可換である．

$$\begin{tikzcd}
{[v,x]}\otimes I \arrow[r, "\rho"] & {[v,x]} \arrow[d, "{[\widetilde{f},\mathrm{id}]}"] \\
{[v,x]}\otimes I \arrow[u, "\mathrm{id}\otimes\mathrm{id}"] \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes f"'] & {[u,x]} \\
{[v,x]}\otimes{[u,v]} \arrow[r, "m"'] & {[u,x]} \arrow[u, "{[\mathrm{id},\mathrm{id}]}"']
\end{tikzcd}$$

故に $-\circ f$ の定義から $-\circ f = [\widetilde{f},\mathrm{id}]$ が分かる． □

命題 24. $f\colon a \xrightarrow{V} b$, $g\colon b \xrightarrow{V} c$ を $\mathcal{C}$ の射とするとき，$(g\circ-)\circ(f\circ-) = (g\circ f)\circ-$, $(-\circ f)\circ(-\circ g) = -\circ(g\circ f)$ である．

証明. まず $(g \circ -) \circ (f \circ -) = (g \circ f) \circ -$ は次の図式が可換であることから分かる．

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathcal{C}(s,a) \arrow[d, "\lambda^{-1}"'] \arrow[dr, "f\circ -"] & & \\
 & I \otimes \mathcal{C}(s,a) \arrow[dl, "\lambda^{-1}\otimes\mathrm{id}"'] \arrow[d, "f\otimes\mathrm{id}"'] \arrow[r, phantom, "(f)"] & \mathcal{C}(s,b) \arrow[d, "\lambda^{-1}"] \arrow[dr, "g\circ -"] & \\
(I \otimes I) \otimes \mathcal{C}(s,a) \arrow[d, "(\mathrm{id}\otimes f)\otimes\mathrm{id}"'] \arrow[r, phantom, "(\lambda)"] \arrow[dr, phantom, "(V)"] & \mathcal{C}(a,b) \otimes \mathcal{C}(s,a) \arrow[ur, "m"'] \arrow[dl, "\lambda^{-1}\otimes\mathrm{id}"'] \arrow[d, "\lambda^{-1}"] \arrow[r, phantom, "(\lambda)"] & I \otimes \mathcal{C}(s,b) \arrow[d, "g\otimes\mathrm{id}"] \arrow[r, phantom, "(g)"] & \mathcal{C}(s,c) \\
(I \otimes \mathcal{C}(a,b)) \otimes \mathcal{C}(s,a) \arrow[r, "\alpha"'] \arrow[d, "(g\otimes\mathrm{id})\otimes\mathrm{id}"'] \arrow[dr, phantom, "(\alpha)"] & I \otimes (\mathcal{C}(a,b) \otimes \mathcal{C}(s,a)) \arrow[ur, "\mathrm{id}\otimes m"'] \arrow[d, "g\otimes(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})"'] \arrow[r, phantom, "(*)"] & \mathcal{C}(b,c) \otimes \mathcal{C}(s,b) \arrow[ur, "m"'] & \\
(\mathcal{C}(b,c) \otimes \mathcal{C}(a,b)) \otimes \mathcal{C}(s,a) \arrow[r, "\alpha"'] \arrow[dr, bend right, "m\otimes\mathrm{id}"'] & \mathcal{C}(b,c) \otimes (\mathcal{C}(a,b) \otimes \mathcal{C}(s,a)) \arrow[uur, "\mathrm{id}\otimes m"'] \arrow[r, phantom, "(m)"] & & \\
 & \mathcal{C}(a,c) \otimes \mathcal{C}(s,a) \arrow[uuurr, "m"'] & &
\end{tikzcd}
$$

ここで (α) は α の自然性から可換である．(λ) は λ の自然性から可換である．(m) は豊穣圏の定義から可換である．(V) は coherence 定理より可換である．$(f), (g)$ は $f \circ -$, $g \circ -$ の定義から可換である．$(*)$ は明らかに可換である．

同様に $(- \circ f) \circ (- \circ g) = - \circ (g \circ f)$ についても次の図式の可換性から分かる．

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathcal{C}(c,s) \arrow[d, "\rho^{-1}"'] \arrow[dr, "-\circ g"] & & \\
 & \mathcal{C}(c,s) \otimes I \arrow[dl, "\mathrm{id}\otimes\rho^{-1}"'] \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes g"'] \arrow[r, phantom, "(g)"] & \mathcal{C}(b,s) \arrow[d, "\rho^{-1}"] \arrow[dr, "-\circ f"] & \\
\mathcal{C}(c,s) \otimes (I \otimes I) \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes(g\otimes\mathrm{id})"'] \arrow[r, phantom, "(\rho)"] \arrow[dr, phantom, "(V)"] & \mathcal{C}(c,s) \otimes \mathcal{C}(b,c) \arrow[ur, "m"'] \arrow[dl, "\mathrm{id}\otimes\rho^{-1}"'] \arrow[d, "\rho^{-1}"] \arrow[r, phantom, "(\rho)"] & \mathcal{C}(b,s) \otimes I \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes f"] \arrow[r, phantom, "(f)"] & \mathcal{C}(a,s) \\
\mathcal{C}(c,s) \otimes (\mathcal{C}(b,c) \otimes I) \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes(\mathrm{id}\otimes f)"'] \arrow[dr, phantom, "(\alpha)"] & (\mathcal{C}(c,s) \otimes \mathcal{C}(b,c)) \otimes I \arrow[l, "\alpha"] \arrow[ur, "m\otimes\mathrm{id}"'] \arrow[d, "(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})\otimes f"'] \arrow[r, phantom, "(*)"] & \mathcal{C}(b,s) \otimes \mathcal{C}(a,b) \arrow[ur, "m"'] & \\
\mathcal{C}(c,s) \otimes (\mathcal{C}(b,c) \otimes \mathcal{C}(a,b)) \arrow[dr, bend right, "\mathrm{id}\otimes m"'] & (\mathcal{C}(c,s) \otimes \mathcal{C}(b,c)) \otimes \mathcal{C}(a,b) \arrow[l, "\alpha"] \arrow[uur, "m\otimes\mathrm{id}"'] \arrow[r, phantom, "(m)"] & & \\
 & \mathcal{C}(a,c) \otimes \mathcal{C}(s,a) \arrow[uuurr, "m"'] & &
\end{tikzcd}
$$

$\square$

命題 25. $f\colon a \xrightarrow{V} b$, $g\colon c \xrightarrow{V} d$ を $\mathcal{C}$ の射とするとき, $(-\circ f)\circ(g\circ -) = (g\circ -)\circ(-\circ f)$ である.

証明. 定義により次の 2 つの可換図式を得る.

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{C}(b,c) \arrow[d, "\rho^{-1}"'] \arrow[drr, "-\circ f"] & & & \\
\mathcal{C}(b,c)\otimes I \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes f"'] \arrow[rr, phantom, "(f)"] & & \mathcal{C}(a,c) \arrow[d, "\lambda^{-1}"] \arrow[dr, "g\circ -"] & \\
\mathcal{C}(b,c)\otimes\mathcal{C}(a,b) \arrow[urr, "m"'] \arrow[d, "\lambda^{-1}"'] \arrow[rr, phantom, "(\lambda)"] & & I\otimes\mathcal{C}(a,c) \arrow[d, "g\otimes\mathrm{id}"] \arrow[r, phantom, "(g)"] & \mathcal{C}(a,d) \\
I\otimes(\mathcal{C}(b,c)\otimes\mathcal{C}(a,b)) \arrow[urr, "\mathrm{id}\otimes m"'] \arrow[d, "g\otimes(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})"'] \arrow[rr, phantom, "(*)"] & & \mathcal{C}(c,d)\otimes\mathcal{C}(a,c) \arrow[ur, "m"'] & \\
\mathcal{C}(c,d)\otimes(\mathcal{C}(b,c)\otimes\mathcal{C}(a,b)) \arrow[urr, "\mathrm{id}\otimes m"'] & & &
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{C}(b,c) \arrow[d, "\lambda^{-1}"'] \arrow[drr, "g\circ -"] & & & \\
I\otimes\mathcal{C}(b,c) \arrow[d, "g\otimes\mathrm{id}"'] \arrow[rr, phantom, "(g)"] & & \mathcal{C}(b,d) \arrow[d, "\rho^{-1}"] \arrow[dr, "-\circ f"] & \\
\mathcal{C}(c,d)\otimes\mathcal{C}(b,c) \arrow[urr, "m"'] \arrow[d, "\rho^{-1}"'] \arrow[rr, phantom, "(\rho)"] & & \mathcal{C}(b,d)\otimes I \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes f"] \arrow[r, phantom, "(f)"] & \mathcal{C}(a,d) \\
(\mathcal{C}(c,d)\otimes\mathcal{C}(b,c))\otimes I \arrow[urr, "m\otimes\mathrm{id}"'] \arrow[d, "(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})\otimes f"'] \arrow[rr, phantom, "(*)"] & & \mathcal{C}(b,d)\otimes\mathcal{C}(a,b) \arrow[ur, "m"'] \arrow[d, phantom, "(m)"] & \\
(\mathcal{C}(c,d)\otimes\mathcal{C}(b,c))\otimes\mathcal{C}(a,b) \arrow[urr, "m\otimes\mathrm{id}"'] \arrow[d, "\alpha"'] & & & \mathcal{C}(c,d)\otimes\mathcal{C}(a,c) \arrow[uu, "m"'] \\
\mathcal{C}(c,d)\otimes(\mathcal{C}(b,c)\otimes\mathcal{C}(a,b)) \arrow[urrr, "\mathrm{id}\otimes m"'] & & &
\end{tikzcd}
$$

よってこの 2 つの図式の左の縦列の合成が一致することを示せば，これらの図式を組み合わせることで $(-\circ f)\circ(g\circ -) = (g\circ -)\circ(-\circ f)$ が分かる．それは次の図式が可換であ

ることから分かる.

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{C}(b,c) \arrow[r, "\lambda^{-1}"] \arrow[d, "\rho^{-1}"'] & I\otimes\mathcal{C}(b,c) \arrow[r, "g\otimes\mathrm{id}"] \arrow[d, "\rho^{-1}"] & \mathcal{C}(c,d)\otimes\mathcal{C}(b,c) \arrow[d, "\rho^{-1}"] \\
\mathcal{C}(b,c)\otimes I \arrow[r, "\lambda^{-1}\otimes\mathrm{id}"'] \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes f"'] & (I\otimes\mathcal{C}(b,c))\otimes I \arrow[r, "(g\otimes\mathrm{id})\otimes\mathrm{id}"'] \arrow[d, "(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})\otimes f"'] & (\mathcal{C}(c,d)\otimes\mathcal{C}(b,c))\otimes I \arrow[d, "(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})\otimes f"] \\
\mathcal{C}(b,c)\otimes\mathcal{C}(a,b) \arrow[r, "\lambda^{-1}\otimes\mathrm{id}"'] \arrow[dr, bend right, "\lambda^{-1}"'] & (I\otimes\mathcal{C}(b,c))\otimes\mathcal{C}(a,b) \arrow[r, "(g\otimes\mathrm{id})\otimes\mathrm{id}"'] \arrow[d, "\alpha"'] & (\mathcal{C}(c,d)\otimes\mathcal{C}(b,c))\otimes\mathcal{C}(a,b) \arrow[d, "\alpha"] \\
& I\otimes(\mathcal{C}(b,c)\otimes\mathcal{C}(a,b)) \arrow[r, "g\otimes(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})"'] & \mathcal{C}(c,d)\otimes(\mathcal{C}(b,c)\otimes\mathcal{C}(a,b))
\end{tikzcd}
$$

□

2.8 まとめ

- $-\otimes x$ に対応する射:

$$[u,v]\otimes(u\otimes x) \xrightarrow{\alpha^{-1}} ([u,v]\otimes u)\otimes x \xrightarrow{\mathrm{ev}\otimes\mathrm{id}} v\otimes x$$

- $x\otimes -$ に対応する射:

$$[u,v]\otimes(x\otimes u) \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes\gamma} [u,v]\otimes(u\otimes x) \xrightarrow{\alpha^{-1}} ([u,v]\otimes u)\otimes x \xrightarrow{\mathrm{ev}\otimes\mathrm{id}} v\otimes x \xrightarrow{\gamma} x\otimes v$$

- $\mathcal{C}(s,-)$ に対応する射:

$$\mathcal{C}(a,b)\otimes\mathcal{C}(s,a) \xrightarrow{m} \mathcal{C}(s,b)$$

- $\mathcal{C}(-,s)$ に対応する射:

$$\mathcal{C}(b,a)\otimes\mathcal{C}(a,s) \xrightarrow{\gamma} \mathcal{C}(a,s)\otimes\mathcal{C}(b,a) \xrightarrow{m} \mathcal{C}(b,s)$$

- $f\circ -$, $-\circ f$ が満たす図式

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{C}(c,a) \arrow[d, "\lambda^{-1}"'] \arrow[dr, "f\circ -"] & \\
I\otimes\mathcal{C}(c,a) \arrow[d, "f\otimes\mathrm{id}"'] & \mathcal{C}(c,b) \\
\mathcal{C}(a,b)\otimes\mathcal{C}(c,a) \arrow[ur, "m"'] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathcal{C}(b,c) \arrow[d, "\rho^{-1}"'] \arrow[dr, "-\circ f"] & \\
\mathcal{C}(b,c)\otimes I \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes f"'] & \mathcal{C}(a,c) \\
\mathcal{C}(b,c)\otimes\mathcal{C}(a,b) \arrow[ur, "m"'] &
\end{tikzcd}
$$

3 V-自然変換

定義. $\mathcal{C},\mathcal{D}$ を V-豊穣圏，$F,G\colon \mathcal{C}\longrightarrow\mathcal{D}$ を V-関手とする．V-自然変換 $\theta\colon F\Longrightarrow G$ とは $\mathcal{D}$ の射の族 $\theta=\{\theta_a\colon Fa\xrightarrow{V}Ga\}_{a\in\mathcal{C}}$ であって，任意の $a,b\in\mathcal{C}$ に対して次の図式が可換となるものである．

$$\begin{tikzcd}
 & I\otimes\mathcal{C}(a,b) \arrow[r, "\theta_b\otimes F_{ab}"] & \mathcal{D}(Fb,Gb)\otimes\mathcal{D}(Fa,Fb) \arrow[dr, "m"] & \\
\mathcal{C}(a,b) \arrow[ur, "\lambda^{-1}"] \arrow[dr, "\rho^{-1}"'] & & & \mathcal{D}(Fa,Gb) \\
 & \mathcal{C}(a,b)\otimes I \arrow[r, "G_{ab}\otimes\theta_a"'] & \mathcal{D}(Ga,Gb)\otimes\mathcal{D}(Fa,Ga) \arrow[ur, "m"'] &
\end{tikzcd}$$

またこのとき，$\theta_a\colon Fa\xrightarrow{V}Ga$ は $a\in\mathcal{C}$ について自然であるという．

命題 26. $F,G\colon\mathcal{C}\longrightarrow\mathcal{D}$ を V-関手とする．$\theta_a\colon Fa\xrightarrow{V}Ga$ が $a\in\mathcal{C}$ について自然 $\Longleftrightarrow$ 任意の $a,b\in\mathcal{C}$ に対して，次の図式が可換となる．

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{D}(Fa,Fb) \arrow[dr, "\theta_b\circ-"] & \\
\mathcal{C}(a,b) \arrow[ur, "F_{ab}"] \arrow[dr, "G_{ab}"'] & & \mathcal{D}(Fa,Gb) \\
 & \mathcal{D}(Ga,Gb) \arrow[ur, "-\circ\theta_a"'] &
\end{tikzcd}$$

証明. 次の図式を考える．

$$\begin{tikzcd}
 & I\otimes\mathcal{C}(a,b) \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes F"] \arrow[dr, phantom, "(\lambda)"] & I\otimes\mathcal{D}(Fa,Fb) \arrow[r, "\theta_b\otimes\mathrm{id}"] \arrow[dr, phantom, "(*)"] & \mathcal{D}(Fb,Gb)\otimes\mathcal{D}(Fa,Fb) \arrow[ddr, "m"] & \\
 & & \mathcal{D}(Fa,Fb) \arrow[u, "\lambda^{-1}"] \arrow[drr, "\theta_b\circ-"] & & \\
\mathcal{C}(a,b) \arrow[uur, "\lambda^{-1}"] \arrow[urr, "F_{ab}"] \arrow[drr, "G_{ab}"'] \arrow[ddr, "\rho^{-1}"'] & & (**) & & \mathcal{D}(Fa,Gb) \\
 & & \mathcal{D}(Ga,Gb) \arrow[d, "\rho^{-1}"'] \arrow[urr, "-\circ\theta_a"'] & & \\
 & \mathcal{C}(a,b)\otimes I \arrow[r, "G\otimes\mathrm{id}"'] \arrow[ur, phantom, "(\rho)"] & \mathcal{D}(Ga,Gb)\otimes I \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes\theta_a"'] \arrow[ur, phantom, "(*)"] & \mathcal{D}(Ga,Gb)\otimes\mathcal{D}(Fa,Ga) \arrow[uur, "m"'] &
\end{tikzcd}$$

(λ)，(ρ) は λ,ρ の自然性から可換である．$(*)$ は $-\circ\theta_a$，$\theta_b\circ-$ の定義から可換であ

る．従って「α が V-自然変換となること (= 一番外側が可換) $\Longleftrightarrow$ (∗∗) が可換」が分かる． □

命題 27. $F, G, H\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ を V-関手として $\theta_a\colon Fa \xrightarrow{V} Ga$，$\tau_a\colon Ga \xrightarrow{V} Ha$ は $a \in \mathcal{C}$ について自然であるとする．このとき $\tau_a \circ \theta_a$ も a について自然である．

証明. 命題 24，26 により次の図式が可換となるからである．

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{D}(Fa,Fb) \arrow[dr, "\theta_b\circ-"] \arrow[ddrr, bend left, "(\tau_b\circ\theta_b)\circ-"] & & \\
 & & \mathcal{D}(Fa,Gb) \arrow[dr, "\tau_b\circ-"] & \\
\mathcal{C}(a,b) \arrow[uur, "F"] \arrow[r, "G"'] \arrow[ddr, "H"'] & \mathcal{D}(Ga,Gb) \arrow[ur, "-\circ\theta_a"'] \arrow[dr, "\tau_b\circ-"] & & \mathcal{D}(Fa,Hb) \\
 & & \mathcal{D}(Ga,Hb) \arrow[ur, "-\circ\theta_a"'] & \\
 & \mathcal{D}(Ha,Hb) \arrow[ur, "-\circ\tau_a"'] \arrow[uurr, bend right, "-\circ(\tau_a\circ\theta_a)"'] & &
\end{tikzcd}$$

□

よって，V-自然変換 $\theta\colon F \Longrightarrow G$，$\tau\colon G \Longrightarrow H$ に対して垂直合成 $\tau * \theta\colon F \Longrightarrow H$ を，$(\tau * \theta)_a := \tau_a \circ \theta_a$ により定義することができる．これにより，$\mathcal{C}$ から $\mathcal{D}$ への V-関手全体 $\mathrm{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ は (通常の) 圏となる．また $\mathrm{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ の同型射を V-自然同型という．

命題 28. $F\colon \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$，$G, H\colon \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{C}$ を V-関手とする．$\mathcal{C}$ の射 $\theta_b\colon Gb \xrightarrow{V} Hb$ が $b \in \mathcal{B}$ について自然ならば，$\theta_{Fa}\colon GFa \xrightarrow{V} HFa$ も $a \in \mathcal{A}$ について自然である．

証明. 次の図式から分かる．

$$\begin{tikzcd}
 & & \mathcal{C}(GFa,GFb) \arrow[dr, "\theta_{Fb}\circ-"] & \\
\mathcal{A}(a,b) \arrow[urr, bend left, "(GF)_{ab}"] \arrow[r, "F_{ab}"] \arrow[drr, bend right, "(HF)_{ab}"'] & \mathcal{B}(Fa,Fb) \arrow[ur, "G_{FaFb}"'] \arrow[dr, "H_{FaFb}"] & & \mathcal{C}(GFa,HFb) \\
 & & \mathcal{C}(HFa,HFb) \arrow[ur, "-\circ\theta_{Fa}"'] &
\end{tikzcd}$$

□

故に V-自然変換 $\theta = \{\theta_b\}_{b\in\mathcal{B}}\colon G \Longrightarrow H$ に対して V-自然変換 $\theta_F\colon GF \Longrightarrow HF$ を $(\theta_F)_a := \theta_{Fa}$ により定めることができる．これは関手 $\mathrm{Fun}(\mathcal{B},\mathcal{C}) \longrightarrow \mathrm{Fun}(\mathcal{A},\mathcal{C})$ を定めることが容易に分かる．

命題 29. $F, G\colon \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$, $H\colon \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{C}$ を V-関手とする．$\mathcal{B}$ の射 $\theta_a\colon Fa \xrightarrow{V} Ga$ が $a \in \mathcal{A}$ について自然ならば，$H(\theta_a)\colon HFa \xrightarrow{V} HGa$ も $a \in \mathcal{A}$ について自然である．

証明. 次の図式が可換であることを示せばよい．

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathcal{B}(Fa, Fb) \arrow[rr, "H_{FaFb}"] \arrow[dr, "\theta_b\circ-"] & & \mathcal{C}(HFa, HFb) \arrow[dr, "H\theta_b\circ-"] \arrow[d, phantom, "(*)"] & \\
\mathcal{A}(a, b) \arrow[ur, "F_{ab}"] \arrow[dr, "G_{ab}"'] \arrow[r, phantom, "(\theta)"] & {} & \mathcal{B}(Fa, Gb) \arrow[rr, "H_{FaGb}"] & {} \arrow[d, phantom, "(**)"] & \mathcal{C}(HFa, HGb) \\
 & \mathcal{B}(Ga, Gb) \arrow[rr, "H_{GaGb}"'] \arrow[ur, "-\circ\theta_a"'] & & \mathcal{C}(HGa, HGb) \arrow[ur, "-\circ H\theta_a"'] &
\end{tikzcd}
$$

(θ) は θ_a が a について自然だから可換である．$(*)$ が可換であることは次の図式が可換であることから分かる．

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{B}(Fa, Fb) \arrow[rr, "H"] \arrow[d, "\lambda^{-1}"'] \arrow[dddd, bend right=70, "\theta_b\circ-"'] & & \mathcal{C}(HFa, HFb) \arrow[d, "\lambda^{-1}"'] \arrow[dddd, bend left=70, "H\theta_b\circ-"] \\
I \otimes \mathcal{B}(Fa, Fb) \arrow[rr, "\mathrm{id}\otimes H"] \arrow[d, "\theta_b\otimes\mathrm{id}"'] & & I \otimes \mathcal{C}(HFa, HFb) \arrow[d, "\theta_b\otimes\mathrm{id}"'] \\
\mathcal{B}(Fb, Gb) \otimes \mathcal{B}(Fa, Fb) \arrow[rr, "\mathrm{id}\otimes H"] \arrow[dd, "m"] & & \mathcal{B}(Fb, Gb) \otimes \mathcal{C}(HFa, HFb) \arrow[d, "H\otimes\mathrm{id}"'] \\
 & & \mathcal{C}(HFb, HGb) \otimes \mathcal{C}(HFa, HFb) \arrow[d, "m"] \\
\mathcal{B}(Fa, Gb) \arrow[rr, "H"'] & & \mathcal{C}(HFa, HGb)
\end{tikzcd}
$$

同様に，$(**)$ が可換であることは次の図式から分かる．

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{B}(Ga,Gb) \arrow[r, "H"] \arrow[d, "\lambda^{-1}"'] \arrow[ddddd, bend right=60, "-\circ\theta_a"'] & \mathcal{C}(HGa,HGb) \arrow[d, "\lambda^{-1}"'] \arrow[ddddd, bend left=60, "-\circ H\theta_a"] \\
I\otimes\mathcal{B}(Ga,Gb) \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes H"] \arrow[d, "\theta_a\otimes\mathrm{id}"'] & I\otimes\mathcal{C}(HGa,HGb) \arrow[d, "\theta_a\otimes\mathrm{id}"'] \\
\mathcal{B}(Fa,Ga)\otimes\mathcal{B}(Ga,Gb) \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes H"] \arrow[dd, "\gamma"] & \mathcal{B}(Fa,Ga)\otimes\mathcal{C}(HGa,HGb) \arrow[d, "H\otimes\mathrm{id}"'] \\
 & \mathcal{C}(HFa,HGa)\otimes\mathcal{C}(HGa,HGb) \arrow[d, "\gamma"] \\
\mathcal{B}(Ga,Gb)\otimes\mathcal{B}(Fa,Ga) \arrow[r, "H\otimes H"'] \arrow[d, "m"] & \mathcal{C}(HGa,HGb)\otimes\mathcal{C}(HFa,HGa) \arrow[d, "m"] \\
\mathcal{B}(Fa,Gb) \arrow[r, "H"'] & \mathcal{C}(HFa,HGb)
\end{tikzcd}
$$

□

故に V-自然変換 $\theta\colon F \Longrightarrow G$ に対して V-自然変換 $H\theta\colon HF \Longrightarrow HG$ を $(H\theta)_a := H(\theta_a)$ により定めることができる．これは関手 $\mathrm{Fun}(\mathcal{A},\mathcal{B}) \longrightarrow \mathrm{Fun}(\mathcal{A},\mathcal{C})$ を定める．以上の二つにより，**Cat** の場合と同様に次の定理が証明できる．

定理 30. V-$\mathbf{Cat}$ は $\mathcal{A},\mathcal{B} \in V$-$\mathbf{Cat}$ に対して V-$\mathbf{Cat}(\mathcal{A},\mathcal{B}) := \mathrm{Fun}(\mathcal{A},\mathcal{B})$ と定めることにより strict 2-category となる．

証明. □

$U := V$-$\mathbf{Cat}(\mathcal{I},-)\colon V$-$\mathbf{Cat} \longrightarrow \mathbf{Cat}$ と定める．U は strict 2-functor である．また V-豊穣圏 $\mathcal{C}$ に対して $U(\mathcal{C}) = \mathrm{Fun}(\mathcal{I},\mathcal{C})$ となるが，$\mathcal{I} = \{*\}$ だから，$F \in U(\mathcal{C})$ に対して対象 $F(*) \in \mathcal{C}$ が定まる．逆に対象 $a \in \mathcal{C}$ に対して，$F(*) = a$ となる $F \in U(\mathcal{C})$ が一意に存在する．

$\because$) まず $F(*) := a$，$F_{**} := j_a$ と定義すれば，次の図式は可換である．

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{I}(*,*)\otimes\mathcal{I}(*,*) \arrow[r, "m"] \arrow[d, "F_{**}\otimes F_{**}"'] & \mathcal{I}(*,*) \arrow[d, "F_{**}"] \\
\mathcal{C}(a,a)\otimes\mathcal{C}(a,a) \arrow[r, "m"'] & \mathcal{C}(a,a)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
I \arrow[r, "j_*"] \arrow[dr, "j_{F*}"'] & \mathcal{I}(*,*) \arrow[d, "F_{**}"] \\
 & \mathcal{C}(a,a)
\end{tikzcd}
$$

実際右の図式は明らかに可換で，左の図式は次の図式により可換である．

$$\begin{tikzcd}
I \otimes I \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes j_a"'] & I \arrow[d, "j_a"] \\
I \otimes \mathcal{C}(a,a) \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "j_a\otimes \mathrm{id}"'] & \mathcal{C}(a,a) \\
\mathcal{C}(a,a) \otimes \mathcal{C}(a,a) \arrow[ur, "m"'] &
\end{tikzcd}$$

従ってこの F は V-関手 $F\colon \mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{C}$ を定める．故に $F(*) = a$ となる $F \in U(\mathcal{C})$ は存在する．

逆に $F \in U(\mathcal{C})$ が $F(*) = a$ を満たすとする．このとき $F_{**}\colon \mathcal{I}(*,*) \longrightarrow \mathcal{C}(a,a)$ は V の射である．V-関手の条件から $F_{**}(j_*) = j_a$ である．

$$\begin{tikzcd}
I \arrow[r, "j_*"] \arrow[dr, "j_a"'] & \mathcal{I}(*,*) \arrow[d, "F_{**}"] \\
& \mathcal{C}(a,a)
\end{tikzcd}$$

$\mathcal{I}$ の定義から $\mathcal{I}(*,*) = I$，$j_* = \mathrm{id}_I$ である．故に $F_{**} = j_a$ でなければならない．よって，$a \in \mathcal{C}$ に対して $F(*) = a$ となる V-関手 $F\colon \mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{C}$ はただ一つ存在することがわかる．

従って $\mathrm{Ob}(U(\mathcal{C})) = \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ とみなすことができる．

次に Hom について考える．V-自然変換の条件の可換性は常に満たされる事が分かるから，$a, b \in U(\mathcal{C})$ に対して $\mathrm{Hom}_{U(\mathcal{C})}(a,b) = \{f\colon I \longrightarrow \mathcal{C}(a,b)\} = \mathrm{Hom}_V(I, \mathcal{C}(a,b))$ である．即ち $U(\mathcal{C})$ は $\mathcal{C}$ の underlying category である．

V-関手 $F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ に対して関手 $U(F)\colon U(\mathcal{C}) \longrightarrow U(\mathcal{D})$ を F の underlying functor という．$U(F)$ は次のようになる．

- $a \in U(\mathcal{C})$ に対して $U(F)(a) := Fa$.
- $a, b \in U(\mathcal{C})$ に対して $U(F)(f) := F(f)$.

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Hom}_{U(\mathcal{C})}(a,b) & \xrightarrow{\quad U(F) \quad} & \mathrm{Hom}_{U(\mathcal{D})}(Fa,Fb) \\
\Cup & & \Cup \\
\bigl(I \xrightarrow{f} \mathcal{C}(a,b)\bigr) & \longmapsto & \bigl(I \xrightarrow{f} \mathcal{C}(a,b) \xrightarrow{F} \mathcal{D}(Fa,Fb)\bigr).
\end{array}$$

命題 31. $F, G\colon \mathcal{A}\otimes\mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{C}$ を V-関手として $a\in\mathcal{A},\ b\in\mathcal{B}$ に対して $\theta_{ab}\colon F(a,b) \xrightarrow{V} G(a,b)$ を $\mathcal{C}$ の射とする．このとき θ_{ab} が $\langle a,b\rangle\in\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$ について自然
$\Longleftrightarrow$ 各 $a\in\mathcal{A}$ に対して θ_{ab} が $b\in\mathcal{B}$ について自然かつ，各 $b\in\mathcal{B}$ に対して θ_{ab} が $a\in\mathcal{A}$ について自然.

証明. $(\Longrightarrow)$ 明らか.

$(\Longleftarrow)$ 次の図式が可換であることから分かる.

$$\begin{tikzcd}
 & & \mathcal{A}(a,a')\otimes\mathcal{B}(b,b') \arrow[dl, "G(-,b')\otimes\mathrm{id}"'] \arrow[dr, "\mathrm{id}\otimes F(a,-)"] & & \\
 & \mathcal{C}(Gab',Ga'b')\otimes\mathcal{B}(b,b') \arrow[dl, "\mathrm{id}\otimes\lambda^{-1}"'] \arrow[dddr, "\mathrm{id}\otimes F(a,-)"] & & \mathcal{A}(a,a')\otimes\mathcal{C}(Fab,Fab') \arrow[dddl, "G(-,b')\otimes\mathrm{id}"'] \arrow[dr, "\rho^{-1}\otimes\mathrm{id}"] & \\
\mathcal{C}(Gab',Ga'b')\otimes(I\otimes\mathcal{B}(b,b')) \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes(j_a\otimes\mathrm{id})"'] & & & & (\mathcal{A}(a,a')\otimes I)\otimes\mathcal{C}(Fab,Fab') \arrow[d, "(\mathrm{id}\otimes j_{b'})\otimes\mathrm{id}"] \\
\mathcal{C}(Gab',Ga'b')\otimes(\mathcal{A}(a,a)\otimes\mathcal{B}(b,b')) \arrow[dr, "\mathrm{id}\otimes F"] \arrow[dd, "\mathrm{id}\otimes G"'] & & & & (\mathcal{A}(a,a')\otimes\mathcal{B}(b',b'))\otimes\mathcal{C}(Fab,Fab') \arrow[dll, "G\otimes\mathrm{id}"'] \arrow[dd, "F\otimes\mathrm{id}"] \\
 & & \mathcal{C}(Gab',Ga'b')\otimes\mathcal{C}(Fab,Fab') \arrow[ddl, "\mathrm{id}\otimes(\theta_{ab'}\circ-)"'] \arrow[ddr, "(-\circ\theta_{ab'})\otimes\mathrm{id}"] & & \\
\mathcal{C}(Gab',Ga'b')\otimes\mathcal{C}(Gab,Gab') \arrow[dr, "\mathrm{id}\otimes(-\circ\theta_{ab})"] \arrow[dd, bend right, "m"'] & & & & \mathcal{C}(Fab',Fa'b')\otimes\mathcal{C}(Fab,Fab') \arrow[dl, "(\theta_{a'b'}\circ-)\otimes\mathrm{id}"'] \arrow[dd, bend left, "m"] \\
 & \mathcal{C}(Gab',Ga'b')\otimes\mathcal{C}(Fab,Gab') \arrow[dr, "m"] & & \mathcal{C}(Fab',Ga'b')\otimes\mathcal{C}(Fab,Fab') \arrow[dl, "m"'] & \\
\mathcal{C}(Gab,Ga'b') \arrow[rr, "-\circ\theta_{ab}"'] & & \mathcal{C}(Fab,Ga'b') & & \mathcal{C}(Fab,Fa'b') \arrow[ll, "\theta_{a'b'}\circ-"]
\end{tikzcd}$$

□

定義. $\mathcal{C},\mathcal{D}$ を V-豊穣圏，$T\colon \mathcal{C}^{\mathrm{op}}\otimes\mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ を V-関手とする．$d\in\mathcal{D}$ として，$a\in\mathcal{C}$ に対して $\sigma_a\colon d \xrightarrow{V} T(a,a)$ を $\mathcal{D}$ の射とする．σ_a が $a\in\mathcal{C}$ について自然とは，任意の $a,b\in\mathcal{C}$ に対して，次の図式が可換であることをいう.

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{D}(T(a,a),T(a,b)) \arrow[dr, "-\circ\sigma_a"] & \\
\mathcal{C}(a,b) \arrow[ur, "T(a,-)"] \arrow[dr, "T(-,b)"'] & & \mathcal{D}(d,T(a,b)) \\
 & \mathcal{D}(T(b,b),T(a,b)) \arrow[ur, "-\circ\sigma_b"'] &
\end{tikzcd}$$

同様に，$\mathcal{D}$ の射 $\sigma_a\colon T(a,a) \xrightarrow{V} d$ が $a\in\mathcal{C}$ について自然とは，任意の $a,b\in\mathcal{C}$ に対し

て，次の図式が可換であることをいう．

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{D}(T(b,a),T(a,a)) \arrow[dr, "\sigma_a\circ-"] & \\ \mathcal{C}(a,b) \arrow[ur, "T(-,a)"] \arrow[dr, "T(b,-)"'] & & \mathcal{D}(T(b,a),d) \\ & \mathcal{D}(T(b,a),T(b,b)) \arrow[ur, "\sigma_b\circ-"'] & \end{tikzcd}$$

$\mathcal{D}=\mathcal{V}$ の場合を考える．V の射の族 $\{\theta_a\colon Fa \longrightarrow Ga\}$ を $\mathcal{V}$ の射の族と見なしたものを $\{\widetilde{\theta}_a\colon Fa \xrightarrow{V} Ga\}$ とする．$\bar{\theta}_a$ が a について自然であるとき θ_a が a について自然であると言う事にすると，θ_a が a について自然である条件は，命題 23，26 によれば任意の $a,b\in\mathcal{C}$ に対して

$$\begin{tikzcd} & {[Fa,Fb]} \arrow[dr, "{[\mathrm{id},\theta_b]}"] & \\ \mathcal{C}(a,b) \arrow[ur, "F_{ab}"] \arrow[dr, "G_{ab}"'] & & {[Fa,Gb]} \\ & {[Ga,Gb]} \arrow[ur, "{[\theta_a,\mathrm{id}]}"'] & \end{tikzcd}$$

が可換となることである．V の射 $\sigma_a\colon d \longrightarrow T(a,a)$，$\sigma_a\colon T(a,a) \longrightarrow d$ についても同様とする．

命題 32. V の射 $j_a\colon I \longrightarrow \mathcal{C}(a,a)$ は $a\in\mathcal{C}$ について自然である．

証明. 任意の $a,b\in\mathcal{C}$ に対して，次の図式が可換であることを示せばよい．

$$\begin{tikzcd} & {[\mathcal{C}(a,a),\mathcal{C}(a,b)]} \arrow[dr, "{[j_a,\mathrm{id}]}"] & \\ \mathcal{C}(a,b) \arrow[ur, "{\mathcal{C}(a,-)}"] \arrow[dr, "{\mathcal{C}(-,b)}"'] & & {[I,\mathcal{C}(a,b)]} \\ & {[\mathcal{C}(b,b),\mathcal{C}(a,b)]} \arrow[ur, "{[j_b,\mathrm{id}]}"'] & \end{tikzcd}$$

次の図式は可換である．

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}(a,b)\otimes\mathcal{C}(a,a) \arrow[rr, "m"] & & \mathcal{C}(a,b) \arrow[d, "\mathrm{id}"] \\ \mathcal{C}(a,b)\otimes I \arrow[u, "\mathrm{id}\otimes j_a"] \arrow[rr, "\rho"] \arrow[dr, "\gamma"'] \arrow[dd, "\mathrm{id}\otimes j_b"'] & & \mathcal{C}(a,b) \\ & I\otimes\mathcal{C}(a,b) \arrow[ur, "\lambda"'] \arrow[d, "j_b\otimes\mathrm{id}"] & \\ \mathcal{C}(a,b)\otimes\mathcal{C}(b,b) \arrow[r, "\gamma"'] & \mathcal{C}(b,b)\otimes\mathcal{C}(a,b) \arrow[r, "m"'] & \mathcal{C}(a,b) \arrow[uu, "\mathrm{id}"'] \end{tikzcd}$$

故に随伴により次の図式が可換であると分かる.

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{C}(a,b) \arrow[r, "\mathcal{C}(a,-)"] & {[\mathcal{C}(a,a),\mathcal{C}(a,b)]} \arrow[d, "{[j_a,\mathrm{id}]}"] \\
\mathcal{C}(a,b) \arrow[u, "\mathrm{id}"] \arrow[d, "\mathrm{id}"'] & {[I,\mathcal{C}(a,b)]} \\
\mathcal{C}(a,b) \arrow[r, "\mathcal{C}(-,b)"'] & {[\mathcal{C}(b,b),\mathcal{C}(a,b)]} \arrow[u, "{[j_b,\mathrm{id}]}"']
\end{tikzcd}
$$

この図式が可換性を示したかった図式である. □

補題 33. 次の図式は可換である.

$$
\begin{tikzcd}
{[u,v]} \otimes u \arrow[r, "\mathrm{ev}"] \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes i"'] & v \arrow[d, "i"] \\
{[u,v]} \otimes [I,u] \arrow[r, "m"'] & {[I,v]}
\end{tikzcd}
$$

証明. 随伴により次の図式が可換であることを示せばよい.

$$
\begin{tikzcd}
({[u,v]} \otimes u) \otimes I \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "(\mathrm{id}\otimes i)\otimes\mathrm{id}"'] \arrow[rrr, bend left, "\mathrm{ev}\otimes\mathrm{id}"] \arrow[drr, bend left, "\rho"] & {[u,v]} \otimes (u \otimes I) \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes(i\otimes\mathrm{id})"'] \arrow[dr, "\mathrm{id}\otimes\rho"] & & v \otimes I \arrow[d, "\rho"] \\
({[u,v]} \otimes [I,u]) \otimes I \arrow[r, "\alpha"'] & {[u,v]} \otimes ([I,u] \otimes I) \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes\mathrm{ev}"'] & {[u,v]} \otimes u \arrow[r, "\mathrm{ev}"'] & v
\end{tikzcd}
$$

□

命題 34. V の射 $i\colon x \longrightarrow [I,x]$ は $x \in \mathcal{V}$ について自然である.

証明. 補題 33 より次の図式が可換である.

$$\begin{tikzcd}
{[u,v]\otimes u} \arrow[rr, "\mathrm{ev}"] & & v \arrow[d, "i"] \\
{[u,v]\otimes u} \arrow[u, "\mathrm{id}\otimes\mathrm{id}"] \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes i"'] & & {[I,v]} \\
{[u,v]\otimes[I,u]} \arrow[rr, "m"'] & & {[I,v]} \arrow[u, "\mathrm{id}"']
\end{tikzcd}$$

よって随伴により次の図式が可換となる.

$$\begin{tikzcd}
{[u,v]} \arrow[rr, "\mathrm{id}"] & & {[u,v]} \arrow[d, "{[\mathrm{id},i]}"] \\
{[u,v]} \arrow[u, "\mathrm{id}"] \arrow[d, "\mathrm{id}"'] & & {[u,[I,v]]} \\
{[u,v]} \arrow[rr, "{[I,-]}"'] & & {[[I,u],[I,v]]} \arrow[u, "{[i,\mathrm{id}]}"']
\end{tikzcd}$$

即ち次の図式が可換であり, i は $x \in \mathcal{V}$ について自然である.

$$\begin{tikzcd}
 & {[u,v]} \arrow[dr, "{[\mathrm{id},i]}"] & \\
{[u,v]} \arrow[ur, "\mathrm{id}"] \arrow[dr, "{[I,-]}"'] & & {[u,[I,u]]} \\
 & {[[I,u],[I,v]]} \arrow[ur, "{[i,\mathrm{id}]}"'] &
\end{tikzcd}$$

□

命題 35. V の射 $\mathrm{ev}\colon [x,y]\otimes x \longrightarrow y$ は $x, y \in \mathcal{V}$ について自然である.

証明. まず x について自然なことを示す. 即ち次の図式が可換であることを示す.

$$\begin{tikzcd}
 & & {[[v,y]\otimes u,[u,y]\otimes u]} \arrow[dr, "{[\mathrm{id},\mathrm{ev}]}"] & \\
 & {[[v,y],[u,y]]} \arrow[ur, "-\otimes u"] & & {[[v,y]\otimes u,y]} \\
{[u,v]} \arrow[ur, "{[-,y]}"] \arrow[rr, "{[v,y]\otimes-}"'] & & {[[v,y]\otimes u,[v,y]\otimes v]} \arrow[ur, "{[\mathrm{id},\mathrm{ev}]}"'] &
\end{tikzcd}$$

随伴 $-\otimes([v,y]\otimes u)\dashv[[v,y]\otimes u,-]$ により，次の一番外側が可換であることを示せばよい．

$$
\begin{tikzcd}
{[u,v]([v,y]u)} \arrow[r, "{[-,y]\otimes(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})}"] \arrow[d, "\alpha^{-1}"'] \arrow[dr, phantom, "(\alpha)"] \arrow[rrdddddd, rounded corners, to path={-| ([xshift=-2ex]\tikztostart.west) |- (\tikztotarget)}, "{([v,y]\otimes-)\otimes(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})}"'] & {[[v,y],[u,y]]([v,y]u)} \arrow[r, "{(-\otimes u)\otimes(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})}"] \arrow[d, "\alpha^{-1}"] & {[[v,y]u,[u,y]u]([v,y]u)} \arrow[ddd, "\mathrm{ev}"] \\
{([u,v][v,y])u} \arrow[r, "{([-,y]\otimes\mathrm{id})\otimes\mathrm{id}}"] \arrow[d, "\gamma"'] \arrow[dr, phantom, "{([-,y])}"] & {([[v,y],[u,y]][v,y])u} \arrow[d, "\mathrm{ev}\otimes\mathrm{id}"] \arrow[r, phantom, "(\otimes)"] & {} \\
{([v,y][u,v])u} \arrow[r, "m"] \arrow[dd, "\alpha"'] \arrow[ddr, phantom, "(*)"] & {[u,y]u} \arrow[dr, "\mathrm{ev}"] & \\
 & & y \\
{[v,y]([u,v]u)} \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes\mathrm{ev}"] \arrow[d, "\gamma"'] \arrow[dr, phantom, "(\gamma)"] & {[v,y]v} \arrow[ur, "\mathrm{ev}"'] \arrow[r, phantom, "(\otimes)"] & {} \\
{([u,v]u)[v,y]} \arrow[r, "\mathrm{ev}\otimes\mathrm{id}"] & {v[v,y]} \arrow[u, "\gamma^{-1}"'] & \\
 & & {[[v,y]u,[v,y]v]([v,y]u)} \arrow[uuu, "\mathrm{ev}"']
\end{tikzcd}
$$

(α) は α の自然性から可換である．(γ) は γ の自然性から可換である．$([-,y])$ は $[-,y]$ の定義から可換である．$(\otimes)$ は $-\otimes u$ や $[v,y]\otimes-$ の定義から可換である．$(*)$ は補題 14 より可換である．以上により x について自然なことが分かった．

次に y について自然なことを示す．即ち次の図式が可換であることを示す．

$$
\begin{tikzcd}
 & & {[[x,u]\otimes x,[x,v]\otimes x]} \arrow[dr, "{[\mathrm{id},\mathrm{ev}]}"] & \\
 & {[[x,u],[x,v]]} \arrow[ur, "-\otimes x"] & & \\
{[u,v]} \arrow[ur, "{[x,-]}"] \arrow[drr, "\mathrm{id}"'] & & & {[[x,u]\otimes x,v]} \\
 & & {[u,v]} \arrow[ur, "{[\mathrm{ev},\mathrm{id}]}"'] &
\end{tikzcd}
$$

その為には次の一番外側が可換であることを示せばよい.

$$
\begin{tikzcd}
 & {[u,v] \otimes ([x,u] \otimes x)} \arrow[r, "{[x,-]\otimes(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})}"] \arrow[d, "\alpha^{-1}"] \arrow[dddl, "\mathrm{id}\otimes\mathrm{ev}"'] \arrow[dr, phantom, "(\alpha)"] \arrow[ddd, phantom, "(*)"] & {[[x,u],[x,v]] \otimes ([x,u] \otimes x)} \arrow[d, "\alpha^{-1}"] \\
 & {([u,v] \otimes [x,u]) \otimes x} \arrow[r, "{([x,-]\otimes\mathrm{id})\otimes\mathrm{id}}"] \arrow[dr, "m\otimes\mathrm{id}"'] \arrow[dr, phantom, "{([x,-])}", shift left=3ex] & {([[x,u],[x,v]] \otimes [x,u]) \otimes x} \arrow[d, "\mathrm{ev}\otimes\mathrm{id}"] \\
 & & {[x,v] \otimes x} \arrow[d, "\mathrm{ev}"] \\
{[u,v] \otimes u} \arrow[rr, "\mathrm{ev}"'] & & v
\end{tikzcd}
$$

(α) は α の自然性から可換である．$([x,-])$ は $[x,-]$ の定義から可換である．$(*)$ は補題 14 より可換である．以上により y について自然なことが分かった． $\square$

命題 36. $F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ を V-関手とするとき，V の射 $F_{ab}\colon \mathcal{C}(a,b) \longrightarrow \mathcal{D}(Fa,Fb)$ は $a,b \in \mathcal{C}$ について自然である．

証明. まず b について自然であることを示す．F が V-関手であるから，次の図式が可換である．

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{C}(s,t) \otimes \mathcal{C}(a,s) \arrow[r, "m"] & \mathcal{C}(a,t) \arrow[d, "F_{at}"] \\
\mathcal{C}(s,t) \otimes \mathcal{C}(a,s) \arrow[u, "\mathrm{id}\otimes\mathrm{id}"] \arrow[d, "F_{st}\otimes F_{as}"'] & \mathcal{D}(Fa,Ft) \\
\mathcal{D}(Fs,Ft) \otimes \mathcal{D}(Fa,Fs) \arrow[r, "m"'] & \mathcal{D}(Fa,Ft) \arrow[u, "\mathrm{id}"']
\end{tikzcd}
$$

よって随伴により次の可換図式を得る．

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{C}(s,t) \arrow[r, "{\mathcal{C}(a,-)}"] & {[\mathcal{C}(a,s), \mathcal{C}(a,t)]} \arrow[d, "{[\mathrm{id},F_{at}]}"] \\
\mathcal{C}(s,t) \arrow[u, "\mathrm{id}"] \arrow[d, "F_{st}"'] & {[\mathcal{C}(a,s), \mathcal{D}(Fa,Ft)]} \\
\mathcal{D}(Fs,Ft) \arrow[r, "{\mathcal{D}(Fa,-)}"'] & {[\mathcal{D}(Fa,Fs), \mathcal{D}(Fa,Ft)]} \arrow[u, "{[F_{as},\mathrm{id}]}"']
\end{tikzcd}
$$

故に次の図式が可換であることが分かり，F_{ab} は b について自然である．

$$\begin{tikzcd}
 & {[\mathcal{C}(a,s),\mathcal{C}(a,t)]} \arrow[dr, "{[\mathrm{id},F_{at}]}"] & \\
\mathcal{C}(s,t) \arrow[ur, "{\mathcal{C}(a,-)}"] \arrow[dr, "{\mathcal{D}(Fa,F-)}"'] & & {[\mathcal{C}(a,s),\mathcal{D}(Fa,Ft)]} \\
 & {[\mathcal{D}(Fa,Fs),\mathcal{D}(Fa,Ft)]} \arrow[ur, "{[F_{as},\mathrm{id}]}"'] &
\end{tikzcd}$$

a についても同様に，次の図式の可換性から

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}(s,t)\otimes\mathcal{C}(t,b) \arrow[r, "\gamma"] & \mathcal{C}(t,b)\otimes\mathcal{C}(s,t) \arrow[r, "m"] & \mathcal{C}(s,b) \arrow[d, "F_{sb}"] \\
\mathcal{C}(s,t)\otimes\mathcal{C}(t,b) \arrow[u, "\mathrm{id}\otimes\mathrm{id}"] \arrow[r, "\gamma"'] \arrow[d, "F_{st}\otimes F_{tb}"'] & \mathcal{C}(t,b)\otimes\mathcal{C}(s,t) \arrow[u, "\mathrm{id}\otimes\mathrm{id}"] \arrow[d, "F_{tb}\otimes F_{st}"'] & \mathcal{D}(Fs,Fb) \\
\mathcal{D}(Fs,Ft)\otimes\mathcal{D}(Ft,Fb) \arrow[r, "\gamma"'] & \mathcal{D}(Ft,Fb)\otimes\mathcal{D}(Fs,Ft) \arrow[r, "m"'] & \mathcal{D}(Fs,Fb) \arrow[u, "\mathrm{id}"']
\end{tikzcd}$$

次の図式の可換性が分かり，

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}(s,t) \arrow[r, "{\mathcal{C}(-,b)}"] & {[\mathcal{C}(t,b),\mathcal{C}(s,b)]} \arrow[d, "{[\mathrm{id},F_{sb}]}"] \\
\mathcal{D}(Fs,Ft) \arrow[u, "\mathrm{id}"] \arrow[d, "F_{st}"'] & {[\mathcal{C}(t,b),\mathcal{D}(Fs,Fb)]} \\
\mathcal{D}(Fs,Ft) \arrow[r, "{\mathcal{D}(-,Fb)}"'] & {[\mathcal{D}(Ft,Fb),\mathcal{D}(Fs,Fb)]} \arrow[u, "{[F_{tb},\mathrm{id}]}"']
\end{tikzcd}$$

F_{ab} が a について自然だと分かる．

$$\begin{tikzcd}
 & {[\mathcal{C}(t,b),\mathcal{C}(s,b)]} \arrow[dr, "{[\mathrm{id},F_{sb}]}"] & \\
\mathcal{C}(s,t) \arrow[ur, "{\mathcal{C}(-,b)}"] \arrow[dr, "{\mathcal{D}(F-,Fb)}"'] & & {[\mathcal{C}(t,b),\mathcal{D}(Fs,Fb)]} \\
 & {[\mathcal{D}(Ft,Fb),\mathcal{D}(Fs,Fb)]} \arrow[ur, "{[F_{tb},\mathrm{id}]}"'] &
\end{tikzcd}$$

□

命題 37. $T\colon \mathcal{C}^{\mathrm{op}}\otimes\mathcal{C}\longrightarrow\mathcal{D}$ を V-関手とする．$f\colon d\xrightarrow{V} d'$ と $\sigma_a\colon d'\longrightarrow T(a,a)$ を $\mathcal{D}$ の射とするとき，σ_a が $a\in\mathcal{C}$ について自然であれば $f\circ\sigma_a$ も a について自然である．$\tau_a\colon T(a,a)\longrightarrow d$ についても同様.

証明. 命題 24 と次の図式により明らか.

$$\begin{tikzcd}
& \mathcal{D}(T(a,a),T(a,b)) \arrow[dr, "-\circ\sigma_a"] \arrow[rr, bend left, "-\circ(\sigma_a\circ f)"] & & \\
\mathcal{C}(a,b) \arrow[ur, "T(a,-)"] \arrow[dr, "T(-,b)"'] & & \mathcal{D}(d',T(a,b)) \arrow[r, "-\circ f"] & \mathcal{D}(d,T(b,a)) \\
& \mathcal{D}(T(b,b),T(a,b)) \arrow[ur, "-\circ\sigma_b"'] \arrow[urr, bend right, "-\circ(\sigma_b\circ f)"'] & &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
& \mathcal{D}(T(b,a),T(a,a)) \arrow[dr, "\tau_a\circ-"] \arrow[drr, bend left, "(f\circ\tau_a)\circ-"] & & \\
\mathcal{C}(a,b) \arrow[ur, "T(-,a)"] \arrow[dr, "T(b,-)"'] & & \mathcal{D}(T(b,a),d) \arrow[r, "f\circ-"] & \mathcal{D}(T(b,a),d') \\
& \mathcal{D}(T(b,a),T(b,b)) \arrow[ur, "\tau_b\circ-"'] \arrow[urr, bend right, "(f\circ\tau_b)\circ-"'] & &
\end{tikzcd}$$

□

命題 38. $F,G\colon \mathcal{C}\longrightarrow\mathcal{V}$ を V-関手として，$\theta_a\colon Fa\longrightarrow Ga$ が $a\in\mathcal{C}$ について自然であるとする．$f\colon u\longrightarrow v$ が V の射のとき，$\theta_a\otimes f\colon Fa\otimes u\longrightarrow Ga\otimes v$ も $a\in\mathcal{C}$ について自然である.

証明. 次の図式が可換であることを示せばよい.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}(a,b) \arrow[r, "F"] \arrow[d, "G"'] & {[Fa,Fb]} \arrow[r, "-\otimes u"] \arrow[d, "{[\mathrm{id},\theta_b]}"] & {[Fa\otimes u,Fb\otimes u]} \arrow[d, "{[\mathrm{id},\theta_b\otimes\mathrm{id}]}"] \\
{[Ga,Gb]} \arrow[r, "{[\theta_a,\mathrm{id}]}"'] \arrow[d, "-\otimes v"'] & {[Fa,Gb]} \arrow[r, "-\otimes u"] \arrow[d, "-\otimes v"] \arrow[dr, phantom, "(*)"] & {[Fa\otimes u,Gb\otimes u]} \arrow[d, "{[\mathrm{id},\mathrm{id}\otimes f]}"] \\
{[Ga\otimes v,Gb\otimes v]} \arrow[r, "{[\theta_a\otimes\mathrm{id},\mathrm{id}]}"'] & {[Fa\otimes v,Gb\otimes v]} \arrow[r, "{[\mathrm{id}\otimes f,\mathrm{id}]}"'] & {[Fa\otimes u,Gb\otimes v]}
\end{tikzcd}$$

他の部分は明らかに可換なので $(*)$ が可換であることを示せばよい．それは次の図式が可換であることから随伴により分かる.

$$\begin{tikzcd}
{[Fa,Gb]\otimes(Fa\otimes u)} \arrow[r, "\alpha^{-1}"] & {([Fa,Gb]\otimes Fa)\otimes u} \arrow[r, "\mathrm{ev}\otimes\mathrm{id}"] & Gb\otimes u \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes f"] \\
{[Fa,Gb]\otimes(Fa\otimes u)} \arrow[r, "\alpha^{-1}"] \arrow[u, "\mathrm{id}\otimes(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})"] \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes(\mathrm{id}\otimes f)"'] & {([Fa,Gb]\otimes Fa)\otimes u} \arrow[r, "\mathrm{ev}\otimes f"] \arrow[u, "(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})\otimes\mathrm{id}"'] \arrow[d, "(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})\otimes f"'] & Gb\otimes v \\
{[Fa,Gb]\otimes(Fa\otimes v)} \arrow[r, "\alpha^{-1}"'] & {([Fa,Gb]\otimes Fa)\otimes v} \arrow[r, "\mathrm{ev}\otimes\mathrm{id}"'] & Gb\otimes v \arrow[u, "\mathrm{id}"']
\end{tikzcd}$$

$\square$

命題 39. $S, T\colon \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \otimes \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ を V-関手として，$\sigma_a\colon d \xrightarrow{V} S(a,a)$ が $a \in \mathcal{C}$ について自然，$\theta_{ab}\colon S(a,b) \xrightarrow{V} T(a,b)$ が a, b について自然であるとする．このとき，これらの合成 $\theta_{aa} \circ \sigma_a\colon d \xrightarrow{V} T(a,a)$ も a について自然である．

証明. 次の図式により，a について自然であることが分かる．

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{D}(T(a,a),T(a,b)) \arrow[dr, "-\circ\theta_{aa}"] & & \\
 & & \mathcal{D}(S(a,a),T(a,b)) \arrow[ddr, "-\circ\sigma_a"] & \\
 & \mathcal{D}(S(a,a),S(a,b)) \arrow[ur, "\theta_{ab}\circ-"'] \arrow[dr, "-\circ\sigma_a"] & & \\
\mathcal{C}(a,b) \arrow[uuur, "T(a,-)"] \arrow[ur, "S(a,-)"'] \arrow[dr, "S(-,b)"] \arrow[dddr, "T(-,b)"'] & & \mathcal{D}(d,S(a,b)) \arrow[r, "\theta_{ab}\circ-"] & \mathcal{D}(d,T(a,b)) \\
 & \mathcal{D}(S(b,b),S(a,b)) \arrow[ur, "-\circ\sigma_b"'] \arrow[dr, "\theta_{ab}\circ-"] & & \\
 & & \mathcal{D}(S(b,b),T(a,b)) \arrow[uur, "-\circ\sigma_b"'] & \\
 & \mathcal{D}(T(b,b),T(a,b)) \arrow[ur, "-\circ\theta_{bb}"'] & &
\end{tikzcd}$$

$\square$

命題 40. V-関手 $T\colon \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{C}$ に対し $T(a,-)_{bc}\colon \mathcal{B}(b,c) \longrightarrow \mathcal{C}(T(a,b),T(a,c))$ は a, b, c について自然である．

証明. 命題 36 により b, c については自然である．また $T(a,-)_{bc}$ は合成

$$\mathcal{B}(b,c) \xrightarrow{\lambda^{-1}} I \otimes \mathcal{B}(b,c) \xrightarrow{j_a \otimes \mathrm{id}} \mathcal{A}(a,a) \otimes \mathcal{B}(b,c) \xrightarrow{T} \mathcal{C}(T(a,b),T(a,c))$$

で定義されていたから，命題 32, 38, 37, 39 を組み合わせれば a について自然であることが分かる． $\square$

命題 41. $m_{abc}\colon \mathcal{C}(b,c) \otimes \mathcal{C}(a,b) \longrightarrow \mathcal{C}(a,c)$ は a, b, c について自然である．

証明. $m = \big(\mathcal{C}(b,c) \otimes \mathcal{C}(a,b) \xrightarrow{\mathcal{C}(a,-)_{bc} \otimes \mathrm{id}} [\mathcal{C}(a,b), \mathcal{C}(a,c)] \otimes \mathcal{C}(a,b) \xrightarrow{\mathrm{ev}} \mathcal{C}(a,c)\big)$ であったから，命題 35, 28, 38, 40 により，a, b, c について自然である． $\square$

命題 42. $S\colon \mathcal{C}^{\mathrm{op}}\otimes\mathcal{C}\otimes\mathcal{C}^{\mathrm{op}}\otimes\mathcal{C}\longrightarrow\mathcal{D}$, $T\colon\mathcal{C}^{\mathrm{op}}\otimes\mathcal{C}\longrightarrow\mathcal{D}$ を V-関手とする．$\sigma_{ab}\colon x\xrightarrow{V} S(a,a,b,b)$，$\tau_{abc}\colon S(a,b,b,c)\xrightarrow{V} T(a,c)$ を $\mathcal{D}$ の射とする．σ_{ab} は a,b について自然で，τ_{abc} は a,b,c について自然であるとする．このとき $\tau_{aaa}\circ\sigma_{aa}\colon x\longrightarrow T(a,a)$ は a について自然である．

証明. 次の図式が可換であることを示せばよい．

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathcal{D}(T(a,a),T(a,b)) \arrow[dr, "-\circ\tau_{aaa}"] \arrow[dd, phantom, "(\tau)"] & & \\
 & & \mathcal{D}(S(a,a,a,a),T(a,b)) \arrow[ddddr, "-\circ\sigma_{aa}"] \arrow[dd, phantom, "(*)"] & \\
 & \mathcal{D}(S(a,a,a,a),S(a,a,a,b)) \arrow[ur, "\tau_{aab}\circ-"'] \arrow[dr, "-\circ\sigma_{aa}"] \arrow[dd, phantom, "(\sigma)"] & & \\
 & & \mathcal{D}(x,S(a,a,a,b)) \arrow[ddr, "\tau_{aab}\circ-"] \arrow[dd, phantom, "(*)"] & \\
 & \mathcal{D}(S(a,a,b,b),S(a,a,a,b)) \arrow[ur, "-\circ\sigma_{ab}"'] \arrow[dr, "\tau_{aab}\circ-"] \arrow[dd, phantom, "(\tau)"] & & \\
\mathcal{C}(a,b) \arrow[uuuuur, "T(a,-)"] \arrow[uuur, "S(a,a,a,-)"] \arrow[ur, "S(a,a,-,b)"] \arrow[dr, "S(a,-,b,b)"'] \arrow[dddr, "S(-,b,b,b)"'] \arrow[dddddr, "T(-,b)"'] & & \mathcal{D}(S(a,a,b,b),T(a,b)) \arrow[r, "-\circ\sigma_{ab}"] \arrow[dd, phantom, "(*)"] & \mathcal{D}(x,T(a,b)) \\
 & \mathcal{D}(S(a,a,b,b),S(a,b,b,b)) \arrow[ur, "\tau_{abb}\circ-"'] \arrow[dr, "-\circ\sigma_{ab}"] \arrow[dd, phantom, "(\sigma)"] & & \\
 & & \mathcal{D}(x,S(a,b,b,b)) \arrow[uur, "\tau_{abb}\circ-"'] \arrow[dd, phantom, "(*)"] & \\
 & \mathcal{D}(S(b,b,b,b),S(a,b,b,b)) \arrow[ur, "-\circ\sigma_{bb}"'] \arrow[dr, "\tau_{abb}\circ-"] \arrow[dd, phantom, "(\tau)"] & & \\
 & & \mathcal{D}(S(b,b,b,b),T(a,b)) \arrow[uuuur, "-\circ\sigma_{bb}"'] & \\
 & \mathcal{D}(T(b,b),T(a,b)) \arrow[ur, "-\circ\tau_{bbb}"'] & &
\end{tikzcd}
$$

(τ) の部分は τ_{abc} が a,b,c について自然だから可換である．(σ) の部分は σ_{ab} が a,b について自然だから可換である．$(*)$ の部分は命題 25 により可換である． $\square$

命題 43. $F, G\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$, $T\colon \mathcal{C} \otimes \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \otimes \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ を V-関手とする．$\sigma_{ab}\colon Fa \xrightarrow{V} T(a,b,b)$，$\tau_{ab}\colon T(a,a,b) \xrightarrow{V} Gb$ を $\mathcal{D}$ の射とする．σ_{ab}, τ_{ab} は a, b について自然であるとする．このとき $\tau_{aa} \circ \sigma_{aa}\colon Fa \longrightarrow Ga$ は a について自然である．

証明. 次の図式が可換であることを示せばよい．

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathcal{D}(Fa,Fb) \arrow[dr, "\sigma_{bb}\circ-"] & & \\
 & (\sigma) & \mathcal{D}(Fa,T(b,b,b)) \arrow[dddr, "\tau_{bb}\circ-"] & \\
 & \mathcal{D}(T(a,b,b),T(b,b,b)) \arrow[ur, "-\circ\sigma_{ab}"'] \arrow[dr, "\tau_{bb}\circ-"] & (*) & \\
 & (\tau) & \mathcal{D}(T(a,b,b),Gb) \arrow[dr, "-\circ\sigma_{ab}"] & \\
\mathcal{C}(a,b) \arrow[uuuur, "F"] \arrow[uur, "T(-,b,b)"] \arrow[r, "T(a,-,b)"] \arrow[ddr, "T(a,a,-)"'] \arrow[ddddr, "G"'] & \mathcal{D}(T(a,b,b),T(a,a,b)) \arrow[ur, "\tau_{ab}\circ-"'] \arrow[dr, "-\circ\sigma_{ab}"] & (*) & \mathcal{D}(Fa,Gb) \\
 & (\sigma) & \mathcal{D}(Fa,T(a,a,b)) \arrow[ur, "\tau_{ab}\circ-"'] & \\
 & \mathcal{D}(T(a,a,a),T(a,a,b)) \arrow[ur, "-\circ\sigma_{aa}"'] \arrow[dr, "-\circ\tau_{ab}"] & (*) & \\
 & (\tau) & \mathcal{D}(T(a,a,a),Gb) \arrow[uuur, "-\circ\sigma_{aa}"'] & \\
 & \mathcal{D}(Ga,Gb) \arrow[ur, "-\circ\tau_{aa}"'] & &
\end{tikzcd}
$$

(τ) の部分は τ_{ab} が a, b について自然だから可換である．(σ) の部分は σ_{ab} が a, b について自然だから可換である．$(*)$ の部分は命題 25 により可換である． □

4 エンド

定義. $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ を V-豊穣圏，$T\colon \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \otimes \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ を V-関手とする．T のエンドとは組 $\langle e, \lambda \rangle$ であって，以下を満たすものである．

(1) $e \in \mathcal{D}$ は対象である．

(2) $\lambda_a \colon e \xrightarrow{V} T(a,a)$ は $a \in \mathcal{C}$ について自然である．

(3) $\sigma_a \colon x \xrightarrow{V} T(a,a)$ が $a \in \mathcal{C}$ について自然なとき，$\mathcal{D}$ の射 $p \colon x \xrightarrow{V} e$ が一意に存在して $\lambda_a \circ p = \sigma_a$ となる．

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, dashed, "p"] \arrow[dr, "\sigma_a"'] & e \arrow[d, "\lambda_a"] \\ & T(a,a) \end{tikzcd}$$

この e を記号 $\displaystyle\int_{c\in\mathcal{C}} T(c,c)$ で表す．また λ をこのエンドの counit という．双対的にコエンド $\displaystyle\int^{c\in\mathcal{C}} T(c,c)$ も定義される (省略).

$\mathcal{D} = \mathcal{V}$ の場合を考える．$T \colon \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \otimes \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{V}$ を V-関手として $\sigma_a \colon x \xrightarrow{V} T(a,a)$ が a について自然であるとする．即ち次の図式が可換である．

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}(a,b) \arrow[r, "T(a,-)_{ab}"] & {[T(a,a), T(a,b)]} \arrow[d, "{[\sigma_a, \mathrm{id}]}"] \\ \mathcal{C}(a,b) \arrow[u, "\mathrm{id}"] \arrow[d, "\mathrm{id}"'] & {[x, T(a,b)]} \\ \mathcal{C}(a,b) \arrow[r, "T(-,b)_{ab}"'] & {[T(b,b), T(a,b)]} \arrow[u, "{[\sigma_b, \mathrm{id}]}"'] \end{tikzcd}$$

随伴により次の可換図式を得る．

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}(a,b) \otimes T(a,a) \arrow[r, "\tau'_{ab}"] & T(a,b) \arrow[d, "\mathrm{id}"] \\ \mathcal{C}(a,b) \otimes x \arrow[u, "\mathrm{id}\otimes\sigma_a"] \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes\sigma_b"'] & T(a,b) \\ \mathcal{C}(a,b) \otimes T(b,b) \arrow[r, "\lambda'_{ab}"'] & T(a,b) \arrow[u, "\mathrm{id}"'] \end{tikzcd}$$

更に随伴により次の可換図式を得る．

$$\begin{tikzcd}
T(a,a) \arrow[rr, "\tau_{ab}"] & & {[\mathcal{C}(a,b), T(a,b)]} \arrow[d, "\mathrm{id}"] \\
x \arrow[u, "\sigma_a"] \arrow[d, "\sigma_b"'] & & {[\mathcal{C}(a,b), T(a,b)]} \\
T(b,b) \arrow[rr, "\lambda_{ab}"'] & & {[\mathcal{C}(a,b), T(a,b)]} \arrow[u, "\mathrm{id}"']
\end{tikzcd}$$

以上により，$\sigma_a\colon x \longrightarrow T(a,a)$ が a について自然であるとは，このような図式が可換であることだと分かる．故に T のエンドとは $\tau,\lambda\colon \prod_{c\in\mathrm{Ob}(\mathcal{C})} T(c,c) \longrightarrow \prod_{c,d\in\mathrm{Ob}(\mathcal{C})} \mathcal{V}(\mathcal{C}(c,d), T(c,d))$ の equalizer である．今 V は完備だから，$\mathcal{C}$ が小さければエンドは存在する．

$\mathcal{C},\mathcal{D}$ を V-豊穣圏とし，$\mathcal{C}$ は小さいとする．V-関手 $F,G\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ に対して $[\mathcal{C},\mathcal{D}](F,G) \in V$ を $[\mathcal{C},\mathcal{D}](F,G) := \int_{a\in\mathcal{C}} \mathcal{D}(Fa,Ga)$ で定義する (上で述べた通りこのエンドは存在する)．

$F,G,H\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ としてエンド $[\mathcal{C},\mathcal{D}](F,G)$，$[\mathcal{C},\mathcal{D}](G,H)$ の counit をそれぞれ σ,τ とする．即ち $a\in\mathcal{C}$ に対して $\sigma_a\colon [\mathcal{C},\mathcal{D}](F,G) \longrightarrow \mathcal{D}(Fa,Ga)$，$\tau_a\colon [\mathcal{C},\mathcal{D}](G,H) \longrightarrow \mathcal{D}(Ga,Ha)$ である．ρ_a を合成

$$[\mathcal{C},\mathcal{D}](G,H)\otimes[\mathcal{C},\mathcal{D}](F,G) \xrightarrow{\tau_a\otimes\sigma_a} \mathcal{D}(Ga,Ha)\otimes\mathcal{D}(Fa,Ga) \xrightarrow{m} \mathcal{D}(Fa,Ha)$$

で定義する．命題 38, 41, 42 により，この ρ_a は $a\in\mathcal{C}$ について自然である．故にエンドの普遍性から，射 $m_{FGH}\colon [\mathcal{C},\mathcal{D}](G,H)\otimes[\mathcal{C},\mathcal{D}](F,G) \longrightarrow [\mathcal{C},\mathcal{D}](F,H)$ が得られる．また，命題 32 より $j_{Fa}\colon I \longrightarrow \mathcal{D}(Fa,Fa)$ は $a\in\mathcal{C}$ について自然である．故にエンドの普遍性から，射 $j_F\colon I \longrightarrow [\mathcal{C},\mathcal{D}](F,F)$ が得られる．

$\mathrm{Ob}([\mathcal{C},\mathcal{D}]) := \mathrm{Ob}(\mathrm{Fun}(\mathcal{C},\mathcal{D}))$ と定める．

定理 44. 上記で定めた $\mathrm{Ob}([\mathcal{C},\mathcal{D}])$，$[\mathcal{C},\mathcal{D}](F,G)$，$m_{FGH}$, j_F により $[\mathcal{C},\mathcal{D}]$ は V-豊穣圏となる．この $[\mathcal{C},\mathcal{D}]$ を関手圏という．

証明. エンドの普遍性から豊穣圏の条件が成り立つことが分かる． □

小 V-豊穣圏 $\mathcal{C}$ に対して $\widehat{\mathcal{C}} := [\mathcal{C}^{\mathrm{op}}, \mathcal{V}]$ と置く．

エンドの定義から，V の射 $I \longrightarrow [\mathcal{C},\mathcal{D}](F,G)$ は $a \in \mathcal{C}$ について自然な $\theta_a\colon I \longrightarrow \mathcal{D}(Fa,Ga)$ と一対一に対応する．従って次の命題から，$U([\mathcal{C},\mathcal{D}]) = \mathrm{Fun}(\mathcal{C},\mathcal{D})$ が分かる．

命題 45. $\mathcal{D}$ の射 $\theta_a\colon Fa \xrightarrow{V} Ga$ が $a \in \mathcal{C}$ について自然
$\Longleftrightarrow$ 対応する V の射 $\widetilde{\theta}_a\colon I \longrightarrow \mathcal{D}(Fa,Ga)$ が $a \in \mathcal{C}$ について自然.

証明. ($\Longrightarrow$) $\mathcal{D}$ の射 $\theta_a\colon Fa \xrightarrow{V} Ga$ が $a \in \mathcal{C}$ について自然であるとする．次の図式が可換であることを示せばよい．

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{D}(Ga,Gb) \arrow[r, "\mathcal{D}(Fa,-)"] & {[\mathcal{D}(Fa,Ga),\mathcal{D}(Fa,Gb)]} \arrow[d, "{[\widetilde{\theta}_a,\mathrm{id}]}"] \\
\mathcal{C}(a,b) \arrow[u, "G_{ab}"] \arrow[d, "F_{ab}"'] & {[I,\mathcal{D}(Fa,Gb)]} \\
\mathcal{C}(Fa,Fb) \arrow[r, "\mathcal{D}(-,Gb)"'] & {[\mathcal{D}(Fb,Gb),\mathcal{D}(Fa,Gb)]} \arrow[u, "{[\widetilde{\theta}_b,\mathrm{id}]}"']
\end{tikzcd}$$

その為には，随伴により次の図式が可換であることを示せばよい．

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{D}(Ga,Gb)\otimes\mathcal{D}(Fa,Ga) \arrow[rr, "m"] & & \mathcal{D}(Fa,Gb) \arrow[d, "\mathrm{id}"] \\
\mathcal{C}(a,b)\otimes I \arrow[u, "G_{ab}\otimes\widetilde{\theta}_a"] \arrow[d, "F_{ab}\otimes\widetilde{\theta}_b"'] & & \mathcal{D}(Fa,Gb) \\
\mathcal{C}(Fa,Fb)\otimes\mathcal{D}(Fb,Gb) \arrow[r, "\gamma"'] & \mathcal{C}(Fb,Gb)\otimes\mathcal{D}(Fa,Fb) \arrow[r, "m"'] & \mathcal{D}(Fa,Gb) \arrow[u, "\mathrm{id}"']
\end{tikzcd}$$

それは次の図式が可換であることから分かる．

$$
\begin{tikzcd}
 & & \mathcal{D}(Ga,Gb)\otimes\mathcal{D}(Fa,Ga) \arrow[rddddd, "m"] & \\
 & & \mathcal{D}(Fa,Ga)\otimes\mathcal{D}(Ga,Gb) \arrow[u, "\gamma"'] & \\
 & & I\otimes\mathcal{D}(Ga,Gb) \arrow[u, "\widetilde{\theta}_a\otimes\mathrm{id}"'] & \\
 & I\otimes\mathcal{C}(a,b) \arrow[ur, "\mathrm{id}\otimes G_{ab}"] & & \\
 & & \mathcal{D}(Ga,Gb) \arrow[uu, "\lambda^{-1}"'] \arrow[dr, "-\circ\theta_a"] & \\
\mathcal{C}(a,b)\otimes I \arrow[uuuuurr, "G_{ab}\otimes\widetilde{\theta}_a"] \arrow[uur, "\gamma"] \arrow[r, "\rho"] \arrow[ddr, "\gamma"'] \arrow[dddd, "F_{ab}\otimes\widetilde{\theta}_b"'] & \mathcal{C}(a,b) \arrow[uu, "\lambda^{-1}"] \arrow[ur, "G_{ab}"] \arrow[dr, "F_{ab}"'] \arrow[dd, "\lambda^{-1}"'] & & \mathcal{D}(Fa,Gb) \\
 & & \mathcal{D}(Fa,Fb) \arrow[ur, "\theta_b\circ-"'] \arrow[dd, "\lambda^{-1}"'] & \\
 & I\otimes\mathcal{C}(a,b) \arrow[dr, "\mathrm{id}\otimes F_{ab}"'] & & \\
 & & I\otimes\mathcal{D}(Fa,Fb) \arrow[d, "\widetilde{\theta}_b\otimes\mathrm{id}"'] & \\
\mathcal{D}(Fa,Fb)\otimes\mathcal{D}(Fb,Gb) \arrow[rr, "\gamma"'] & & \mathcal{D}(Fb,Gb)\otimes\mathcal{D}(Fa,Fb) \arrow[uuuur, "m"'] &
\end{tikzcd}
$$

$(\Longleftarrow)$ 上記の図式から明らか． $\square$

定理 46. $c \in \mathcal{C}$ に対して $y(a) := \mathcal{C}(-,a)$ と定めると，この y は V-関手 $y\colon \mathcal{C} \longrightarrow \widehat{\mathcal{C}}$ を与える．y を米田埋込と呼ぶ．

証明. $\mathcal{C}(c,-)_{ab}\colon \mathcal{C}(a,b) \longrightarrow [\mathcal{C}(c,a),\mathcal{C}(c,b)]$ は c について自然であった (命題 40)．よってエンドの普遍性により射

$$
y_{ab}\colon \mathcal{C}(a,b) \longrightarrow \int_{c\in\mathcal{C}^{\mathrm{op}}} [\mathcal{C}(c,a),\mathcal{C}(c,b)] = \widehat{\mathcal{C}}(y(a),y(b))
$$

が得られる．これが V-関手 $y\colon \mathcal{C} \longrightarrow \widehat{\mathcal{C}}$ を与えることを示す．その為にまず次の図式が可換であることを示す．

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{C}(b,c)\otimes\mathcal{C}(a,b) \arrow[r, "m"] \arrow[d, "y\otimes y"'] & \mathcal{C}(a,c) \arrow[d, "y"] \\
\widehat{\mathcal{C}}(y(b),y(c))\otimes\widehat{\mathcal{C}}(y(a),y(b)) \arrow[r, "m"'] & \widehat{\mathcal{C}}(y(a),y(c))
\end{tikzcd}
$$

$y\circ m$ は $s \in \mathcal{C}$ について自然な射

$$
\mathcal{C}(b,c)\otimes\mathcal{C}(a,b) \xrightarrow{m} \mathcal{C}(a,c) \xrightarrow{\mathcal{C}(s,-)} [\mathcal{C}(s,a),\mathcal{C}(s,c)]
$$

からエンドの普遍性で得られる射である．一方，$m \circ (y \otimes y)$ は $s \in \mathcal{C}$ について自然な射

$$\mathcal{C}(b,c) \otimes \mathcal{C}(a,b) \xrightarrow{\mathcal{C}(s,-)\otimes\mathcal{C}(s,-)} [\mathcal{C}(s,b),\mathcal{C}(s,c)] \otimes [\mathcal{C}(s,a),\mathcal{C}(s,b)] \xrightarrow{m} [\mathcal{C}(s,a),\mathcal{C}(s,c)]$$

からエンドの普遍性で得られる射である．$\mathcal{C}(s,-)$ が V-関手であるから，次の図式は可換である．

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}(b,c) \otimes \mathcal{C}(a,b) \arrow[r, "m"] \arrow[d, "\mathcal{C}(s,-)\otimes\mathcal{C}(s,-)"'] & \mathcal{C}(a,c) \arrow[d, "\mathcal{C}(s,-)"] \\
{[\mathcal{C}(s,b),\mathcal{C}(s,c)] \otimes [\mathcal{C}(s,a),\mathcal{C}(s,b)]} \arrow[r, "m"'] & {[\mathcal{C}(s,a),\mathcal{C}(s,c)]}
\end{tikzcd}$$

よってエンドの普遍性から $y \circ m = m \circ (y \otimes y)$ が分かる．

後は次の図式が可換であることを示せばよい．

$$\begin{tikzcd}
I \arrow[r, "j_a"] \arrow[dr, "j_{y(a)}"'] & \mathcal{C}(a,a) \arrow[d, "y_{aa}"] \\
& \widehat{\mathcal{C}}(y(a),y(a))
\end{tikzcd}$$

これも

$$\begin{tikzcd}
I \arrow[r, "j_a"] \arrow[dr, "j_{\mathcal{C}(s,a)}"'] & \mathcal{C}(a,a) \arrow[d, "\mathcal{C}(s,-)"] \\
& {[\mathcal{C}(s,a),\mathcal{C}(s,a)]}
\end{tikzcd}$$

が可換であることから，エンドの普遍性により分かる． □

命題 47. $T\colon \mathcal{A}^{\mathrm{op}} \otimes \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{C}$ を V-関手として，任意の $b \in \mathcal{B}$ に対してエンド $\displaystyle\int_{a\in\mathcal{A}} T(a,a,b)$ が存在するとする．このとき V-関手 $F\colon \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{C}$ で $Fb = \displaystyle\int_{a\in\mathcal{A}} T(a,a,b)$ を満たすものが一意に存在する．

証明. □

このF を $\displaystyle\int_{a\in\mathcal{A}} T(a,a,-)$ で表す．

補題 48. $\mathcal{C}$ を小 V-豊穣圏，$G\colon \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathcal{V}$ を V-関手とする．このとき $c \in \mathcal{C}$ に対して全単射 $\mathrm{Hom}_{U(\widehat{\mathcal{C}})}(y(c),G) \cong \mathrm{Hom}_V(I,Gc)$ が成り立つ．

証明. $\theta\colon y(c) \Longrightarrow G$ を V-自然変換とする．このとき $\theta_c\colon \mathcal{C}(c,c) \longrightarrow Gc$ である．よって $f(\theta) := \theta_c \circ j_c\colon I \longrightarrow Gc$ が定義できる．逆に $f\colon I \longrightarrow Gc$ と $a \in \mathcal{C}$ に対して V の射 $\theta(f)_a$ を $\mathcal{C}(a,c) \xrightarrow{G_{ca}} [Gc, Ga] \xrightarrow{[f,\mathrm{id}]} [I, Ga] \xrightarrow{i^{-1}} Ga$ により定めれば，これは V-自然変換 $\theta(f)\colon y(c) \Longrightarrow G$ となる．これらの対応が互いに逆であることを示せばよい．

まず $f\colon I \longrightarrow Gc$ とする．V-関手の条件 $G(j_c) = j_{Gc}$ に注意すると

$$f(\theta(f)) = \theta(f)_c \circ j_c = (i^{-1} \circ [f, \mathrm{id}] \circ G_{cc}) \circ j_c = i^{-1} \circ [f, \mathrm{id}] \circ j_{Gc}$$

だから $[f, \mathrm{id}] \circ j_{Gc} = i \circ f$ を示せばよい．それは

$$\begin{tikzcd}
I \otimes Gc \arrow[rr, "\lambda"] & & Gc \arrow[d, "\mathrm{id}"] \\
I \otimes I \arrow[u, "\mathrm{id}\otimes f"] \arrow[d, "f\otimes\mathrm{id}"'] \arrow[r, "\lambda=\rho"] & I \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "f"'] & Gc \\
Gc \otimes I \arrow[rr, "\rho"'] & & Gc \arrow[u, "\mathrm{id}"']
\end{tikzcd}$$

が可換であるから，随伴により

$$\begin{tikzcd}
I \arrow[r, "j_{Gc}"] & {[Gc, Gc]} \arrow[d, "{[f,\mathrm{id}]}"] \\
I \arrow[u, "\mathrm{id}"] \arrow[d, "f"'] & {[I, Gc]} \\
Gc \arrow[r, "i"'] & {[I, Gc]} \arrow[u, "{[\mathrm{id},\mathrm{id}]}"']
\end{tikzcd}$$

が可換となり $[f, \mathrm{id}] \circ j_{Gc} = i \circ f$ である．

次に $\theta\colon y(c) \Longrightarrow G$ に対して $\theta(f(\theta)) = \theta$ を示す．その為に次の図式を考える．

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}(a,c) \arrow[r, "{\mathcal{C}(-,c)_{ca}}"] \arrow[d, "G_{ca}"'] \arrow[dr, phantom, "(\theta)"] & {[\mathcal{C}(c,c), \mathcal{C}(a,c)]} \arrow[r, "{[j_c,\mathrm{id}]}"] \arrow[d, "{[\mathrm{id},\theta_a]}"] \arrow[dr, phantom, "(*)"] & {[I, \mathcal{C}(a,c)]} \arrow[r, "i^{-1}"] \arrow[d, "{[\mathrm{id},\theta_a]}"] \arrow[dr, phantom, "(*)"] & \mathcal{C}(a,c) \arrow[d, "\theta_a"] \\
{[Gc, Ga]} \arrow[r, "{[\theta_c,\mathrm{id}]}"'] & {[\mathcal{C}(c,c), Ga]} \arrow[r, "{[j_c,\mathrm{id}]}"'] & {[I, Ga]} \arrow[r, "i^{-1}"'] & Ga
\end{tikzcd}$$

θ が V-自然変換だから (θ) は可換である．$(*)$ も明らかに可換である．この図式で射を左回りに合成すると $i^{-1} \circ [j_c, \mathrm{id}] \circ [\theta_c, \mathrm{id}] \circ G_{ca} = i^{-1} \circ [f(\theta), \mathrm{id}] \circ G_{ca} = \theta(f(\theta))_a$ である．

故に右回りが θ_a になること，つまり上側の射の合成が id になることを示せばよい．それは次の図式が可換だから分かる．

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}(a,c) \arrow[r, "\mathcal{C}(-,c)_{ca}"] \arrow[d, "\rho^{-1}"'] & {[\mathcal{C}(c,c),\mathcal{C}(a,c)]} \arrow[d, "\rho^{-1}"] \arrow[ddr, "{[j_c,\mathrm{id}]}"] & \\
\mathcal{C}(a,c)\otimes I \arrow[r, "\mathcal{C}(-,c)_{ca}\otimes\mathrm{id}"] \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes\widetilde{j_c}"'] & {[\mathcal{C}(c,c),\mathcal{C}(a,c)]\otimes I} \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes\widetilde{j_c}"] & \\
\mathcal{C}(a,c)\otimes[I,\mathcal{C}(c,c)] \arrow[r, "\mathcal{C}(-,c)_{ca}\otimes\mathrm{id}"'] \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes i^{-1}"'] & {[\mathcal{C}(c,c),\mathcal{C}(a,c)]\otimes[I,\mathcal{C}(c,c)]} \arrow[r, "m"'] \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes i^{-1}"] & {[I,\mathcal{C}(a,c)]} \arrow[ddl, "i^{-1}"] \\
\mathcal{C}(a,c)\otimes\mathcal{C}(c,c) \arrow[r, "\mathcal{C}(-,c)_{ca}\otimes\mathrm{id}"'] \arrow[d, "\gamma"'] & {[\mathcal{C}(c,c),\mathcal{C}(a,c)]\otimes\mathcal{C}(c,c)} \arrow[d, "\mathrm{ev}"] & \\
\mathcal{C}(c,c)\otimes\mathcal{C}(a,c) \arrow[r, "m"'] & \mathcal{C}(a,c) &
\end{tikzcd} \tag{33}$$

□

定理 49 (米田の補題)**.** $\mathcal{C}$ を V-豊穣圏，$F\colon \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathcal{V}$ を V-関手とする．このとき $a\in\mathcal{C}$ に対して V での同型 $\widehat{\mathcal{C}}(y(a),F)\cong Fa$ が成り立つ．

証明. 定義により $\widehat{\mathcal{C}}(y(a),F)=[\mathcal{C}^{\mathrm{op}},\mathcal{V}](y(a),F)=\displaystyle\int_{c\in\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}[\mathcal{C}(c,a),Fc]$ である．故に Fa が $[\mathcal{C}(-,a),F\Box]$ のエンドであることを示せばよい．

$c\in\mathcal{C}$ に対して，V の射 $F_{ac}\colon \mathcal{C}(c,a)\longrightarrow[Fa,Fc]$ に対応する射を $\lambda_c\colon Fa\longrightarrow[\mathcal{C}(c,a),Fc]$ とする．これは c について自然である．

$\sigma_c\colon x\xrightarrow{V}[\mathcal{C}(c,a),Fc]$ が c について自然とする．

$$\begin{aligned}\sigma_c\in\mathrm{Hom}_V(x,\mathcal{V}(\mathcal{C}(c,a),Fc)) &\cong \mathrm{Hom}_V(x\otimes\mathcal{C}(c,a),Fc)\\ &\cong \mathrm{Hom}_V(\mathcal{C}(c,a),\mathcal{V}(x,Fc))\end{aligned}$$

である．これにより σ を V-自然変換 $\sigma\colon y(a)\Longrightarrow[x,F-]$ とみなすことができる．補題 48 より，ある $f\colon I\longrightarrow[x,Fa]$ が一意に存在して $\sigma=\theta(f)$ と書ける．これに対応する V の射を $\widetilde{f}\colon x\longrightarrow Fa$ とする．$\theta(f)$ の定義より次の図式が可換となる．

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}(c,a) \arrow[r, "\sigma_c"] \arrow[d, "{[x,F-]}"'] & {[x,Fc]} \\
{[[x,Fa],[x,Fc]]} \arrow[r, "{[f,\mathrm{id}]}"'] & {[I,[x,Fc]]} \arrow[u, "i^{-1}"']
\end{tikzcd}$$

よって $\lambda_c \circ f = \sigma_c$ である．故に Fa が $[\mathcal{C}(-,a), F\square]$ のエンドである． $\square$

例 50. 単位的環 R を 1 点 $\mathbf{Ab}$-category とみなしたとき，$\widehat{R} = \mathbf{Mod}_R$ (右 R 加群の圏) とみなせる．

$\because$) $F\colon R^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Ab}$ を $\mathbf{Ab}$-関手とする．このとき $M := F(*)$ はアーベル群であり，$r \in R$ の M への右作用が $Fr\colon M \longrightarrow M$ により定まり，M は右 R 加群となる．逆に M を右 R 加群とすれば，$\mathbf{Ab}$-関手 $R^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Ab}$ が定まることも分かる．

$F, G\colon R^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Ab}$ を $\mathbf{Ab}$-関手として V-自然変換 $\theta\colon F \Longrightarrow G$ を考える．即ち射 $\theta_*\colon 1 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ab}}(F(*), G(*))$ である．これは R 準同型とみなせる．逆に R 準同型から V-自然変換が定まる．

以上の対応により $\widehat{R} = \mathbf{Mod}_R$ とみなせる．

同様にして $R \longrightarrow \mathbf{Ab}$ は左 R 加群であり，$R \otimes S^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Ab}$ は左 R 右 S 加群である．

$y\colon R \longrightarrow \widehat{R}$ を米田埋込とすれば $y(*) \in \widehat{R}$ は右 R 加群 R である．よって $M \in \widehat{R}$ とすれば米田の補題により $\widehat{R}(y(*), M) \cong M(*)$ である．これは言い換えると $\mathrm{Hom}_R(R, M) \cong M$ である．

次に $M\colon R^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Ab}$，$N\colon R \longrightarrow \mathbf{Ab}$ を $\mathbf{Ab}$-関手とする．即ち M は右 R-加群で N は左 R-加群である．このとき $\mathbf{Ab}$-関手 $T = M \otimes N\colon R^{\mathrm{op}} \otimes R \longrightarrow \mathbf{Ab}$ が $T(*,*) := M \otimes_{\mathbb{Z}} N$，$T(r,s) := Mr \otimes_{\mathbb{Z}} Ns$ により定まる．$\displaystyle\int^{*\in R} T(*,*) = M \otimes_R N$ である．それを示すため，まず写像 $f\colon M \times N \longrightarrow M \otimes_R N$ を $f(m,n) := m \otimes_R n$ で定める．これは双線型である．

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\otimes"'] & M \otimes_R N \\ M \otimes_{\mathbb{Z}} N \arrow[ur, dashed, "\lambda_*"'] & \end{tikzcd}$$

よってテンソル積の普遍性により準同型 $\lambda_*\colon M \otimes_{\mathbb{Z}} N \longrightarrow M \otimes_R N$ が得られる．$m \in M$，$n \in N, r \in R$ に対して $\lambda_* \circ T(\mathrm{id}, r)(m \otimes_{\mathbb{Z}} n) = m \otimes_R rn$, $\lambda_* \circ T(r, \mathrm{id})(m \otimes_{\mathbb{Z}} n) = mr \otimes_R n$ となる．従って $\lambda_* \circ T(\mathrm{id}, r) = \lambda_* \circ T(r, \mathrm{id})$ である．よって $\lambda\colon T \stackrel{\cdot\cdot}{\longrightarrow} M \otimes_R N$ は wedge である．

$\sigma\colon T \stackrel{\cdot\cdot}{\longrightarrow} X$ を wedge とする．$m \in M, n \in N, r \in R$ に対して $\sigma_* \circ T(\mathrm{id}, r)(m \otimes_{\mathbb{Z}} n) = \sigma_*(m \otimes_{\mathbb{Z}} rn)$，$\sigma_* \circ T(r, \mathrm{id})(m \otimes_{\mathbb{Z}} n) = \sigma_*(mr \otimes_{\mathbb{Z}} n)$ なので $\sigma_*(m \otimes_{\mathbb{Z}} rn) = \sigma_*(mr \otimes_{\mathbb{Z}} n)$ である．故に $f\colon M \otimes_R N \longrightarrow X$ を $f(m \otimes_R n) := \sigma_*(m \otimes_{\mathbb{Z}} n)$ で定めれば $f \circ \lambda_* = \sigma_*$ となる．またこのような f は明らかに一意である．以上により $M \otimes_R N = \displaystyle\int^{*\in R} T(*,*)$

である． □

定義． V-関手 $F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ が忠実充満
$\Longleftrightarrow$ 各対象 $a, b \in \mathcal{C}$ に対して，V の射 $F_{ab}\colon \mathcal{C}(a,b) \longrightarrow \mathcal{D}(Fa, Fb)$ が同型射．

定義． V-豊穣圏 $\mathcal{C}$ の対象 $a, b \in \mathcal{C}$ が同型
$\Longleftrightarrow$ underlying category $U(\mathcal{C})$ の対象として同型

系 51． 米田埋込 $y\colon \mathcal{C} \longrightarrow \widehat{\mathcal{C}}$ は忠実充満である． □

系 52． $y(a) \cong y(b)$ ならば $a \cong b$ である．

証明． y が忠実充満だから underlying functor $U(y)$ も忠実充満であり，従って conservative である． □

定義． V-関手 $F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{V}$ が表現可能
$\Longleftrightarrow$ ある $a \in \mathcal{C}$ と V-自然同型 $F \cong \mathcal{C}(a, -)$ が存在する．

このとき a は F を表現するという．系 52 により，表現可能 V-関手を表現する対象は同型を除いて一意である．

定理 53． $T\colon \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \otimes \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{V}$ を V-関手として，各 $c \in \mathcal{C}$ に対して $T(c, -)$ が表現可能であるとする．このときある V-関手 $F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ が存在して $\mathcal{D}(Fc, -) \cong T(c, -)$ となる．更にこれは c に関して自然である．

証明． $c \in \mathcal{C}$ に対して $T(c, -)$ を表現する対象を Fc とし，V-自然同型 $\theta_c\colon \mathcal{D}(Fc, -) \longrightarrow T(c, -)$ を取る．即ち $d \in \mathcal{D}$ に対して $(\theta_c)_d\colon \mathcal{D}(Fc, d) \longrightarrow T(c, d)$ は V の同型射である．また補題 48 により，ある $\eta_c\colon I \longrightarrow T(c, Fc)$ が存在して $\theta_c = \theta(\eta_c)$ と書ける．

※ ここでもし F_{ab} をうまく定義することで F が V-関手になったとすると

$$(\theta_c)_d = \left(\mathcal{D}(Fc, d) \xrightarrow{T(c,-)} [T(c, Fc), T(c, d)] \xrightarrow{[\eta_c, \mathrm{id}]} [I, T(c, d)] \xrightarrow{i^{-1}} T(c, d)\right)$$

だから，これが $c \in \mathcal{C}$ について自然になる為には命題 34，36，37 により，$\eta_c\colon I \longrightarrow$

$T(c, Fc)$ が c について自然になればよい．即ち次の図式が可換になればよい．

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathcal{D}(Fa,Fb) \arrow[r, "{T(a,-)}"] & {[T(a,Fa),T(a,Fb)]} \arrow[dr, "{[\eta_a,\mathrm{id}]}"] & \\
\mathcal{C}(a,b) \arrow[ur, "F_{ab}"] \arrow[drr, "{T(-,Fb)}"'] & & & {[I,T(a,Fb)]} \\
 & & {[T(b,Fb),T(a,Fb)]} \arrow[ur, "{[\eta_b,\mathrm{id}]}"'] &
\end{tikzcd}
$$

$a, b \in \mathcal{C}$ に対して V の射 F_{ab} を合成

$$
\begin{aligned}
\mathcal{C}(a,b) &\xrightarrow{T(-,Fb)_{ab}} [T(b,Fb),T(a,Fb)] \xrightarrow{[\eta_b,\mathrm{id}]} [I,T(a,Fb)] \\
&\xrightarrow{i^{-1}} T(a,Fb) \xrightarrow{(\theta_a)_{Fb}^{-1}} \mathcal{D}(Fa,Fb)
\end{aligned}
$$

により定める．このとき次の図式が可換である．

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathcal{D}(Fa,Fb) \arrow[r, "{T(a,-)}"] \arrow[dr, "(\theta_a)_{Fb}"'] & {[T(a,Fa),T(a,Fb)]} \arrow[dr, "{[\eta_a,\mathrm{id}]}"] \arrow[d, phantom, "(**)"] & \\
\mathcal{C}(a,b) \arrow[ur, "F_{ab}"] \arrow[drr, "{T(-,Fb)}"'] & & T(a,Fb) \arrow[r, "i"'] \arrow[d, phantom, "(*)"] & {[I,T(a,Fb)]} \\
 & & {[T(b,Fb),T(a,Fb)]} \arrow[ur, "{[\eta_b,\mathrm{id}]}"'] &
\end{tikzcd}
$$

(但し $(*)$ は F_{ab} の定義により可換である．$(**)$ は $\theta(f)$ の定義 (補題 48 の証明) により可換である．) これにより F は V-関手 $\mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ となる．

∵) まず次の図式が可換である．(但し $k := i^{-1} \circ [\eta_b, \mathrm{id}] \circ T(-, Fb)$ と置いた．)

$$
\begin{tikzcd}
 & & {[\mathcal{C}(a',b),\mathcal{C}(a,b)]} \arrow[dr, "{[\mathrm{id},k]}"] & & \\
 & & & {[\mathcal{C}(a',b),T(a,Fb)]} \arrow[dr, "{[\mathrm{id},(\theta_a)^{-1}_{Fb}]}"] & \\
\mathcal{C}(a,a') \arrow[uurr, "{\mathcal{C}(-,b)}"] \arrow[rr, "{T(-,Fb)}"] \arrow[dr, "F_{aa'}"'] & & {[T(a',Fb),T(a,Fb)]} \arrow[ur, "{[k,\mathrm{id}]}"] \arrow[dr, "{[\mathrm{id},(\theta_a)^{-1}_{Fb}]}"'] & & {[\mathcal{C}(a',b),\mathcal{D}(Fa,Fb)]} \\
 & \mathcal{D}(Fa,Fa') \arrow[dr, "{\mathcal{D}(-,Fb)}"'] & & {[T(a',Fb),\mathcal{D}(Fa,Fb)]} \arrow[ur, "{[k,\mathrm{id}]}"'] & \\
 & & {[\mathcal{D}(Fa',Fb),\mathcal{D}(Fa,Fb)]} \arrow[ur, "{[(\theta_{a'})^{-1}_{Fb},\mathrm{id}]}"'] & &
\end{tikzcd}
$$

定義より $(\theta_a)^{-1}_{Fb} \circ k = F_{ab}$ だから，図式を整理して次の図式を得る．

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{C}(a,a') \arrow[r, "{\mathcal{C}(-,b)}"] & {[\mathcal{C}(a',b),\mathcal{C}(a,b)]} \arrow[d, "{[\mathrm{id},F_{ab}]}"] \\
\mathcal{C}(a,a') \arrow[u, "\mathrm{id}"] \arrow[d, "F_{aa'}"'] & {[\mathcal{C}(a',b),\mathcal{D}(Fa,Fb)]} \\
\mathcal{C}(Fa,Fa') \arrow[r, "{\mathcal{D}(-,Fb)}"'] & {[\mathcal{D}(Fa',Fb),\mathcal{D}(Fa,Fb)]} \arrow[u, "{[F_{a'b},\mathrm{id}]}"']
\end{tikzcd}
$$

随伴を考えることで，次の図式の一番外側が可換であることが分かる．

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{C}(a,a') \otimes \mathcal{C}(a',b) \arrow[r, "\gamma"] \arrow[dr, phantom, "(*)"] & \mathcal{D}(a',b) \otimes \mathcal{D}(a,a') \arrow[r, "m"] & \mathcal{C}(a,b) \arrow[d, "F_{ab}"] \\
\mathcal{C}(a,a') \otimes \mathcal{C}(a',b) \arrow[u, "\mathrm{id}\otimes\mathrm{id}"] \arrow[r, "\gamma"'] \arrow[d, "F_{aa'}\otimes F_{a'b}"'] \arrow[dr, phantom, "(*)"] & \mathcal{D}(a',b) \otimes \mathcal{D}(a,a') \arrow[u, "\mathrm{id}\otimes\mathrm{id}"] \arrow[d, "F_{a'b}\otimes F_{ab}"'] \arrow[r, phantom, "(m)"] & \mathcal{D}(Fa,Fb) \\
\mathcal{C}(Fa,Fa') \otimes \mathcal{D}(Fa',Fb) \arrow[r, "\gamma"'] & \mathcal{D}(Fa',Fb) \otimes \mathcal{D}(Fa,Fa') \arrow[r, "m"'] & \mathcal{D}(Fa,Fb) \arrow[u, "\mathrm{id}"']
\end{tikzcd}
$$

$(*)$ の部分は明らかに可換で，γ が同型だから，(m) の部分も可換である．また次の

図式も明らかに可換である．

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathcal{C}(a,a) \arrow[d, "T(-,Fa)"] \arrow[dddd, bend left=60, "F"] \\
I \arrow[ur, bend left, "j_a"] \arrow[r, "j_{T(a,Fa)}"'] \arrow[dddr, bend right, "j_{Fa}"'] & {[T(a,Fa),T(a,Fa)]} \arrow[d, "{[\eta_a,\mathrm{id}]}"] \\
 & {[I,T(a,Fa)]} \arrow[d, "i^{-1}"] \\
 & T(a,Fa) \arrow[d, "(\theta_a)_{Fa}^{-1}"] \\
 & \mathcal{D}(Fa,Fa) \arrow[uuu, bend left=60, "T(a,-)"]
\end{tikzcd}
$$

故に F は V-関手である．

このとき $\theta_c\colon \mathcal{D}(Fc,-) \Longrightarrow T(c,-)$ は V-自然同型であり，F_{ab} の定義からこれは $c \in \mathcal{C}$ について自然である． $\square$

定義. $x \in \mathcal{V}$，$a \in \mathcal{C}$ を対象とする．

(1) V-関手 $\mathcal{V}(x, \mathcal{C}(a,-))$ が表現可能なとき，これを表現する対象を copower object (もしくは tensor object) といい $x \odot a$ で表す．即ち $\mathcal{C}(x \odot a, b) \cong \mathcal{V}(x, \mathcal{C}(a,b))$．

(2) V-関手 $\mathcal{V}(x, \mathcal{C}(-,a))$ が表現可能なとき，これを表現する対象を power object (もしくは cotensor object) といい $x \pitchfork a$ で表す．即ち $\mathcal{C}(b, x \pitchfork a) \cong \mathcal{V}(x, \mathcal{C}(b,a))$．

定義. $\mathcal{C}$ を V-豊穣圏とする．

(1) $\mathcal{C}$ が copower を持つ $\Longleftrightarrow$ 任意の $x \in \mathcal{V}$，$a \in \mathcal{C}$ に対して $x \odot a$ が存在する．

(2) $\mathcal{C}$ が power を持つ $\Longleftrightarrow$ 任意の $x \in \mathcal{V}$，$a \in \mathcal{C}$ に対して $x \pitchfork a$ が存在する．

例 54. $\mathcal{V} = \mathbf{Set}$ の場合，圏 C と $a, b \in C$，$x \in \mathbf{Set}$ に対して $x \odot a \cong \coprod_{i \in x} a$，$x \pitchfork a \cong \prod_{i \in x} a$ である．

証明. b について自然に

$$
\begin{aligned}
\mathbf{Set}(x, C(a,b)) &\cong \prod_{i \in x} C(a,b) \cong C\Big(\coprod_{i \in x} a, b\Big), \\
\mathbf{Set}(x, C(b,a)) &\cong \prod_{i \in x} C(b,a) \cong C\Big(b, \prod_{i \in x} a\Big).
\end{aligned}
$$

$\square$

例 55. $\mathcal{C} = \mathcal{V}$ の場合を考える．$\mathcal{V}(x, \mathcal{V}(y, z)) \cong \mathcal{V}(y, \mathcal{V}(x, z))$ だった．この同型を与える射を $\theta_x \colon \mathcal{V}(x, \mathcal{V}(y, z)) \longrightarrow \mathcal{V}(y, \mathcal{V}(x, z))$ とするとこれは $x \in \mathcal{V}$ について自然である．よって $x \pitchfork z = \mathcal{V}(x, z) = [x, z]$ である．同様にして $x \odot y = x \otimes y$ が分かる．以上により $\mathcal{V}$ は power，copower を持つ． $\square$

任意の $x \in \mathcal{V}$，$a \in \mathcal{C}$ に対して copower $x \odot a$ が存在するとき，定理 53 を適用すれば，copower が V-関手 $\odot \colon \mathcal{V} \otimes \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ を定めることが分かる．同様にして power は V-関手 $\pitchfork \colon \mathcal{V}^{\mathrm{op}} \otimes \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ を定める．

5 Kan 拡張

定義. $\mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{M}$ を V-豊穣圏，$F \colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$，$E \colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{M}$ を V-関手とする．F に沿った E の左 Kan 拡張とは組 $\langle F^\dagger E, \eta \rangle$ であって，以下の条件を満たすものである．

(1) $F^\dagger E$ は V-関手 $\mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{M}$，$\eta$ は V-自然変換 $E \Longrightarrow F^\dagger E \circ F$ である．

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{D} \arrow[rd, "F^\dagger E"] & \\
\mathcal{C} \arrow[u, "F"] \arrow[r, "E"'] \arrow[ur, phantom, "\eta\Uparrow"] & \mathcal{M}
\end{tikzcd}
$$

(2) 他に V-関手 $S \colon \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{M}$ と V-自然変換 $\theta \colon E \Longrightarrow S \circ F$ が存在したとき，V-自然変換 $\tau \colon F^\dagger E \Longrightarrow S$ が一意に存在して $\theta = \tau_F \circ \eta$ となる．

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{D} \arrow[rd, "F^\dagger E"] \arrow[rd, bend left=40, "S"] \arrow[rd, phantom, bend left=20, "\tau"] & \\
\mathcal{C} \arrow[u, "F"] \arrow[r, "E"'] \arrow[ur, phantom, "\eta\Uparrow"] & \mathcal{M}
\end{tikzcd}
$$

同様にして，F に沿った E の右 Kan 拡張 $\langle F^\ddagger E, \eta \rangle$ が V-自然変換の向きを逆にして得られる．

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{D} \arrow[rd, "F^\ddagger E"] \arrow[rd, bend left=40, "S"] \arrow[rd, phantom, bend left=20, "\tau"] & \\
\mathcal{C} \arrow[u, "F"] \arrow[r, "E"'] \arrow[ur, phantom, "\eta\Downarrow"] & \mathcal{M}
\end{tikzcd}
$$

定義により，次が分かる．

命題 56. 左 Kan 拡張 $F^\dagger E$ が存在する
$\iff$ 任意の $S\colon \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{M}$ に対して全単射

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Hom}_{\mathrm{Fun}(\mathcal{D},\mathcal{M})}(F^\dagger E, S) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Hom}_{\mathrm{Fun}(\mathcal{C},\mathcal{M})}(E, SF) \\
\Uplus & & \Uplus \\
\tau & \longmapsto & \tau_F \circ \eta
\end{array}$$

が存在する. □

より強い条件

$$[\mathcal{D},\mathcal{M}](F^\dagger E, S) \cong [\mathcal{C},\mathcal{M}](E, SF)$$

は, 左 Kan 拡張 $F^\dagger E$ が存在したとしても, 一般には成り立たない. しかし, $\mathcal{M}$ が power を持てばこれが成り立つ. 即ち

定理 57. $F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$, $E\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{M}$, $S\colon \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{M}$ を V-関手とする. 左 Kan 拡張 $F^\dagger E$ が存在し, $\mathcal{M}$ が power を持つとする. このとき

$$[\mathcal{D},\mathcal{M}](F^\dagger E, S) \cong [\mathcal{C},\mathcal{M}](E, SF).$$

証明. まず $[\mathcal{C},\mathcal{M}]$ が power を持つ事を示す. $x \in \mathcal{V}$, $K, L \in [\mathcal{C},\mathcal{M}]$ に対して

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}(x, [\mathcal{C},\mathcal{M}](K, L)) &\cong \mathcal{V}\left(x, \int_{c\in\mathcal{C}} \mathcal{M}(Kc, Lc)\right) \\
&\cong \int_{c\in\mathcal{C}} \mathcal{V}(x, \mathcal{M}(Kc, Lc)) \\
&\cong \int_{c\in\mathcal{C}} \mathcal{M}(Kc, x \pitchfork (Lc)) \\
&\cong [\mathcal{C},\mathcal{M}](K-, x \pitchfork (L-))
\end{aligned}$$

である. 故に power $x \pitchfork L$ が存在する. よって

$$[\mathcal{D},\mathcal{M}](F^\dagger E, x \pitchfork S) \cong \mathcal{V}(x, [\mathcal{D},\mathcal{M}](F^\dagger E, S))$$

$$[\mathcal{C},\mathcal{M}](E, x \pitchfork SF) \cong \mathcal{V}(x, [\mathcal{C},\mathcal{M}](E, SF))$$

が成り立つ. よって

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Fun}(\mathcal{D},\mathcal{M})}(F^\dagger E, x \pitchfork S) \cong \mathrm{Hom}_V(x, [\mathcal{D},\mathcal{M}](F^\dagger E, S))$$

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Fun}(\mathcal{C},\mathcal{M})}(E, x \pitchfork SF) \cong \mathrm{Hom}_V(x, [\mathcal{C},\mathcal{M}](E, SF))$$

が成り立つ．命題 56 より

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Fun}(\mathcal{D},\mathcal{M})}(F^\dagger E, x \pitchfork S) \cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{Fun}(\mathcal{C},\mathcal{M})}(E, x \pitchfork SF)$$

が成り立つから $\mathrm{Hom}_V(x, [\mathcal{D},\mathcal{M}](F^\dagger E, S)) \cong \mathrm{Hom}_V(x, [\mathcal{D},\mathcal{M}](E, S\circ F))$ である．よって (圏 V での) 米田の補題により $[\mathcal{D},\mathcal{M}](F^\dagger E, S) \cong [\mathcal{D},\mathcal{M}](E, SF))$ を得る． □

通常の圏の場合の各点左 Kan 拡張の特徴づけに倣って次の定義をする．

定義. $\mathcal{C},\mathcal{D},\mathcal{M}$ を V-豊穣圏，$F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$，$E\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{M}$，$T\colon \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{M}$ を V-関手とする．T が F に沿った E の各点左 Kan 拡張とは，$d \in \mathcal{D}$，$m \in \mathcal{M}$ に対して自然な同型

$$\mathcal{M}(Td, m) \cong \widehat{\mathcal{C}}(\mathcal{D}(F-, d), \mathcal{M}(E-, m))$$

が成り立つことをいう．

定理 58. 各点左 Kan 拡張は左 Kan 拡張である．

証明. 任意の $S\colon \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{M}$ に対して

$$\begin{aligned}
[\mathcal{D},\mathcal{M}](T,S) &= \int_{d\in\mathcal{D}} \mathcal{M}(Td, Sd) \\
&= \int_{d\in\mathcal{D}} \widehat{\mathcal{C}}(\mathcal{D}(F-, d), \mathcal{M}(E-, Sd)) \\
&= \int_{d\in\mathcal{D}} \int_{c\in\mathcal{C}^{\mathrm{op}}} \mathcal{V}(\mathcal{D}(Fc, d), \mathcal{M}(Ec, Sd)) \\
&= \int_{c\in\mathcal{C}^{\mathrm{op}}} \int_{d\in\mathcal{D}} \mathcal{V}(\mathcal{D}(Fc, d), \mathcal{M}(Ec, Sd)) \\
&= \int_{c\in\mathcal{C}^{\mathrm{op}}} [\mathcal{D},\mathcal{V}](\mathcal{D}(Fc, -), \mathcal{M}(Ec, S-)) \\
&= \int_{c\in\mathcal{C}} \mathcal{M}(Ec, SFc) \\
&= [\mathcal{C},\mathcal{M}](E, SF)
\end{aligned}$$

であるから $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Fun}(\mathcal{D},\mathcal{M})}(T, S) \cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{Fun}(\mathcal{C},\mathcal{M})}(E, SF)$ が成り立つ． □

$\mathcal{M}$ が power を持つ場合は逆も成り立つ．

定理 59. $\mathcal{M}$ が power を持つとする．左 Kan 拡張 $F^\dagger E$ が存在すれば任意の $d \in \mathcal{D}$ と $m \in \mathcal{M}$ に対して

$$\mathcal{M}(F^\dagger E(d), m) \cong \widehat{\mathcal{C}}(\mathcal{D}(F-, d), \mathcal{M}(E-, m))$$

である．

証明. $\mathcal{M}$ が power を持つから，V-関手 $S\colon \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{M}$ に対して

$$[\mathcal{D},\mathcal{M}](F^{\dagger}E,S) \cong [\mathcal{C},\mathcal{M}](E,SF)$$

が成り立つ．$S := \mathcal{D}(-,d) \pitchfork m$ と置けば

$$\begin{aligned}
(\text{左辺}) &\cong [\mathcal{D},\mathcal{M}](F^{\dagger}E,\mathcal{D}(-,d) \pitchfork m)\\
&\cong \int_{e\in\mathcal{D}} \mathcal{M}(F^{\dagger}E(e),\mathcal{D}(e,d) \pitchfork m)\\
&\cong \int_{e\in\mathcal{D}^{\mathrm{op}}} \mathcal{V}(\mathcal{D}(e,d),\mathcal{M}(F^{\dagger}E(e),m))\\
&\cong [\mathcal{D}^{\mathrm{op}},\mathcal{V}](\mathcal{D}(-,d),\mathcal{M}(F^{\dagger}E(-),m))\\
&\cong \mathcal{M}(F^{\dagger}E(d),m)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\text{右辺}) &\cong [\mathcal{C},\mathcal{M}](E,\mathcal{D}(F-,d) \pitchfork m)\\
&\cong \int_{c\in\mathcal{C}} \mathcal{M}(Ec,\mathcal{D}(Fc,d) \pitchfork m)\\
&\cong \int_{c\in\mathcal{C}^{\mathrm{op}}} \mathcal{V}(\mathcal{D}(Fc,d),\mathcal{M}(Ec,m))\\
&\cong [\mathcal{C}^{\mathrm{op}},V](\mathcal{D}(F-,d),\mathcal{M}(E-,m))
\end{aligned}$$

だから $\mathcal{M}(F^{\dagger}E(d),m) \cong \widehat{\mathcal{C}}(\mathcal{D}(F-,d),\mathcal{M}(E-,m))$ である． □

系 60. $F^{\dagger}y(d) \cong \mathcal{D}(F-,d)$，特に $y^{\dagger}y \cong \mathrm{id}$ である． □

定理 61. 任意の $d \in \mathcal{D}$ に対して $\displaystyle\int^{c\in\mathcal{C}} \mathcal{D}(Fc,d) \odot Ec$ が存在するならば各点左 Kan 拡張 $F^{\dagger}E$ も存在し

$$F^{\dagger}E(d) \cong \int^{c\in\mathcal{C}} \mathcal{D}(Fc,d) \odot Ec$$

である．

証明. $L(d) := \displaystyle\int^c \mathcal{D}(Fc, d) \odot Ec$ と置く．$d \in \mathcal{D}, m \in \mathcal{M}$ に対して

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}(Ld, m) &= \mathcal{M}\left(\int^c \mathcal{D}(Fc, d) \odot Ec, m\right) \\
&\cong \int_c \mathcal{M}(\mathcal{D}(Fc, d) \odot Ec, m) \\
&\cong \int_c \mathcal{V}(\mathcal{D}(Fc, d), \mathcal{M}(Ec, m)) \\
&\cong \widehat{\mathcal{C}}(\mathcal{D}(F-, d), \mathcal{M}(E-, m))
\end{aligned}$$

であるから L は F に沿った E の各点左 Kan 拡張である． □

6 極限

V-豊穣圏においても極限，余極限を考えたい．しかし一般の V-豊穣圏の場合，Δ が自然に定義できないため，Δ の左随伴，右随伴として定義することはできない．なので，どのように定義すべきかを考える必要がある．

普通，どのような考えで定義するのかよく分からないが，ここでは「余極限による各点左 Kan 拡張ができる」ように定義することを考える．通常の圏では

$$\mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}(F-, d), \mathrm{Hom}(E-, u)) \cong \mathrm{Hom}(F{\downarrow}d \to C \to U, \Delta u)$$

だったから，$F^\dagger E$ が各点左 Kan 拡張であるとすると

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}(F^\dagger E(d), u) &\cong \mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}(F-, d), \mathrm{Hom}(E-, u)) \\
&\cong \mathrm{Hom}(F{\downarrow}d \to C \to U, \Delta u)
\end{aligned}$$

より $F^\dagger E(d) \cong \mathrm{colim}(F{\downarrow}d \to C \to U)$ となるのである．

そこで

定義. $\mathcal{C}, \mathcal{J}$ を V-豊穣圏，$F\colon \mathcal{J} \longrightarrow \mathcal{C}$ と $W\colon \mathcal{J} \longrightarrow \mathcal{V}$ を V-関手とする．V-関手 $c \longmapsto [\mathcal{J}, \mathcal{V}](W-, \mathcal{C}(c, F-))$ が表現可能なとき，これを表現する対象を weighted limit といい，$\lim^W F$ と書く．即ち $\mathcal{C}(c, \lim^W F) \cong [\mathcal{J}, \mathcal{V}](W-, \mathcal{C}(c, F-))$ である．また $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ での weighted limit を weighted colimit という．これは言い換えると以下のようになる: $F\colon \mathcal{J} \longrightarrow \mathcal{C}$ と $W\colon \mathcal{J}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathcal{V}$ を V-関手とする．V-関手 $c \longmapsto \widehat{\mathcal{J}}(W-, \mathcal{C}(F-, c))$ が表

現可能なとき，これを表現する対象を weighted colimit といい，$\operatorname{colim}^W F$ と書く．即ち $\mathcal{C}(\operatorname{colim}^W F, c) \cong \widehat{\mathcal{J}}(W-, \mathcal{C}(F-, c))$ である．*1

以下，weighted limit を単に極限，weighted colimit を単に余極限という．

例 62. $\mathcal{M}(F^\dagger E(d), m) \cong \widehat{\mathcal{C}}(\mathcal{D}(F-, d), \mathcal{M}(E-, m))$ のとき $F^\dagger E(d) \cong \operatorname{colim}^{\mathcal{D}(F-,d)} E$ である． □

例 63. 米田の補題により $\lim^{\mathcal{J}(j,-)} F = Fj$，$\operatorname{colim}^{y(j)} F = Fj$ である． □

例 64. $\mathcal{C} = \mathcal{V}$ の場合，$x \in \mathcal{V}$ に対して

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}(x, [\mathcal{J}, \mathcal{V}](W, F)) &\cong \mathcal{V}\left(x, \int_j \mathcal{V}(Wj, Fj)\right) \\
&\cong \int_j \mathcal{V}(x, \mathcal{V}(Wj, Fj)) \\
&\cong \int_j \mathcal{V}(Wj, \mathcal{V}(x, Fj)) \\
&\cong [\mathcal{J}, \mathcal{V}](W-, \mathcal{V}(x, F-))
\end{aligned}$$

だから $\lim^W F \cong [\mathcal{J}, \mathcal{V}](W, F)$ である．よって一般の V-豊穣圏 $\mathcal{C}$ において

$$\mathcal{C}(c, \lim^W F) \cong [\mathcal{J}, \mathcal{V}](W-, \mathcal{C}(c, F-)) \cong \lim^W(\mathcal{C}(c, F-))$$
$$\mathcal{C}(\operatorname{colim}^W F, c) \cong [\mathcal{J}^{\mathrm{op}}, \mathcal{V}](W-, \mathcal{C}(F-, c)) \cong \lim^W(\mathcal{C}(F-, c))$$

が成り立つ．また $F\colon \mathcal{J} \longrightarrow \mathcal{V}$，$W\colon \mathcal{J}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathcal{V}$ に対して

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}(\operatorname{colim}^W F, x) &\cong \widehat{\mathcal{J}}(W-, \mathcal{V}(F-, x)) \\
&\cong \int_{j \in \mathcal{J}^{\mathrm{op}}} \mathcal{V}(Wj, \mathcal{V}(Fj, x)) \\
&\cong \int_{j \in \mathcal{J}} \mathcal{V}(Fj, \mathcal{V}(Wj, x)) \\
&\cong [\mathcal{J}, \mathcal{V}](F-, \mathcal{V}(W-, x))
\end{aligned}$$

だから $\operatorname{colim}^W F \cong \operatorname{colim}^F W$ である． □

定理 65. $F\colon \mathcal{J}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathcal{V}$，$G\colon \mathcal{J} \longrightarrow \widehat{\mathcal{C}}$，$H\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ を V-関手とする．$\operatorname{colim}^F G \in \widehat{\mathcal{C}}$ が存在し，各 $j \in \mathcal{J}$ に対して $\operatorname{colim}^{Gj} H \in \mathcal{D}$ が存在するとする．このとき

$$\operatorname{colim}^F(\operatorname{colim}^{G-} H) \cong \operatorname{colim}^{\operatorname{colim}^F G} H.$$

*1 [1] 等では weighted limit を $\{W, F\}$，weighted colimit を $W \star F$ で表している．

但し，この式は，どちらか一方が存在すればもう一方も存在して同型となることを意味する．

証明. $d \in \mathcal{D}$ に対して自然に

$$\begin{aligned}\mathcal{D}(\operatorname{colim}^{F}(\operatorname{colim}^{G-} H), d) &\cong \widehat{\mathcal{J}}(F-, \mathcal{D}(\operatorname{colim}^{G-} H, d)) \\ &\cong \widehat{\mathcal{J}}(F-, \widehat{\mathcal{C}}((G-)\square, \mathcal{D}(H\square, d))) \\ &\cong \widehat{\mathcal{C}}(\operatorname{colim}^{F} G, \mathcal{D}(H\square, d)) \\ &\cong \mathcal{D}(\operatorname{colim}^{\operatorname{colim}^{F} G} H, d).\end{aligned}$$

□

例 66. $V = \mathbf{Set}$ の場合．$F\colon J \longrightarrow C$，$W\colon J^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Set}$ を関手とする．W は表現可能関手の余極限で書けるので，$W \cong \operatorname{colim}_{i\in I} \operatorname{Hom}_J(-, a_i)$ と書けば

$$\begin{aligned}\operatorname{colim}^{W} F &\cong \operatorname{colim}^{\operatorname{colim}_{i\in I} \operatorname{Hom}_J(-,a_i)} F \\ &\cong \operatorname*{colim}_{i\in I} \operatorname{colim}^{\operatorname{Hom}_J(-,a_i)} F \\ &\cong \operatorname*{colim}_{i\in I} F a_i\end{aligned}$$

である．即ち $V = \mathbf{Set}$ の場合は任意の weighted colimit が通常の余極限に書き直せる．

□

例 67. もし $\displaystyle\int_c T(c,c)$ が存在すれば

$$\begin{aligned}\mathcal{D}\left(d, \int_c T(c,c)\right) &\cong \int_{c\in\mathcal{C}} \mathcal{D}(d, T(c,c)) \\ &\cong \int_{c\in\mathcal{C}} [\mathcal{C}^{\mathrm{op}}, \mathcal{V}](y(c), \mathcal{D}(d, T(-,c))) \\ &\cong \int_{c\in\mathcal{C}} \int_{c'\in\mathcal{C}^{\mathrm{op}}} \mathcal{V}(\mathcal{C}(c',c), \mathcal{D}(d, T(c',c))) \\ &\cong \int_{\langle c',c\rangle\in\mathcal{C}^{\mathrm{op}}\otimes\mathcal{C}} \mathcal{V}(\mathcal{C}(c',c), \mathcal{D}(d, T(c',c))) \\ &\cong [\mathcal{C}^{\mathrm{op}}\otimes\mathcal{C}, \mathcal{V}](\mathcal{C}(-,\square), \mathcal{D}(d, T(-,\square))).\end{aligned}$$

故に $\displaystyle\int_c T(c,c) = \lim^{\mathcal{C}} T$ である．同様にして $\displaystyle\int^c T(c,c) = \operatorname{colim}^{\mathcal{C}} T$ となる． □

定義. (1) V-豊穣圏 $\mathcal{C}$ が V-完備

$\Longleftrightarrow$ 任意の小 V-豊穣圏 $\mathcal{J}$ と V-関手 $F\colon \mathcal{J} \longrightarrow \mathcal{C}$ と $W\colon \mathcal{J} \longrightarrow \mathcal{V}$ に対して，極限 $\lim^{W} F$ が存在する．

(2) V-豊穣圏 $\mathcal{C}$ が V-余完備
$\iff$ 任意の小 V-豊穣圏 $\mathcal{J}$ と V-関手 $F\colon \mathcal{J} \longrightarrow \mathcal{C}$ と $W\colon \mathcal{J}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathcal{V}$ に対して，余極限 $\operatorname{colim}^W F$ が存在する．

定理 68. V-豊穣圏 $\mathcal{M}$ が V-余完備
$\iff$ $\mathcal{C},\mathcal{D}$ を V-豊穣圏，$F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$，$E\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{M}$ を V-関手とするとき，$\mathcal{C}$ が small ならば各点左 Kan 拡張 $F^\dagger E\colon \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{M}$ が存在する．

証明. ($\Longrightarrow$) $d \in \mathcal{D}$ に対して $W_d\colon \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathcal{V}$ を $W_d := \mathcal{D}(F-, d)$ で定める．$\mathcal{C}$ が small だから $\operatorname{colim}^{W_d} E \in \mathcal{M}$ が存在し，$\mathcal{M}(\operatorname{colim}^{W_d} E, m) \cong \widehat{\mathcal{C}}(\mathcal{D}(F-,d), \mathcal{M}(E-,m))$ が成り立つ．故に $F^\dagger E$ は存在し，$F^\dagger E(d) = \operatorname{colim}^{W_d} E$ である．

($\Longleftarrow$) $\mathcal{J}$ を小 V-豊穣圏，$T\colon \mathcal{J} \longrightarrow \mathcal{M}$，$W\colon \mathcal{J}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathcal{V}$ を V-関手とする．米田埋込 $y\colon \mathcal{J} \longrightarrow \widehat{\mathcal{J}}$ を考える．仮定により各点 Kan 拡張 $y^\dagger T$ が存在する．このとき $m \in \mathcal{M}$ に対して

$$\mathcal{M}(y^\dagger T(W), m) = \widehat{\mathcal{J}}(\widehat{\mathcal{J}}(y-, W), \mathcal{M}(T-, m)) = \widehat{\mathcal{J}}(W, \mathcal{M}(T-, m))$$

である．故に $\operatorname{colim}^W T \cong y^\dagger T(W)$ が存在する． □

定理 69. 左随伴は余極限と交換する．

証明. $F \dashv G\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$，$T\colon \mathcal{J} \longrightarrow \mathcal{C}$，$W\colon \mathcal{J} \longrightarrow \mathcal{V}$ とする．

$$\begin{aligned}\mathcal{D}(F \operatorname{colim}^W T, d) &\cong \mathcal{C}(\operatorname{colim}^W T, Gd)\\ &\cong [\mathcal{J}^{\mathrm{op}}, \mathcal{V}](W-, \mathcal{C}(T-, Gd))\\ &\cong [\mathcal{J}^{\mathrm{op}}, \mathcal{V}](W-, \mathcal{D}(FT-, d)).\end{aligned}$$

よって $F \operatorname{colim}^W T \cong \operatorname{colim}^W (FT)$ である． □

定理 70. $\mathcal{C},\mathcal{D},\mathcal{M},\mathcal{N}$ を V-豊穣圏で $\mathcal{C}$ は small で $\mathcal{M},\mathcal{N}$ は V-余完備とする．$F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$，$E\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{M}$，$K\colon \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{N}$ を V-関手とする．K が余連続ならば $K \circ (F^\dagger E) = F^\dagger(K \circ E)$ である．(即ち，余連続関手は左 Kan 拡張と交換する．)

$$\begin{tikzcd}
\widehat{\mathcal{C}} \arrow[dr, "F^\dagger E"'] \arrow[drr, "F^\dagger(K\circ E)"] & & \\
\mathcal{C} \arrow[u, "F"] \arrow[r, "E"'] & \mathcal{M} \arrow[r, "K"'] & \mathcal{N}
\end{tikzcd}$$

証明. $\mathcal{M},\mathcal{N}$ が余完備だから，余極限による各点左 Kan 拡張を使えば

$$K\circ(F^{\dagger}E)(d)=K(\operatorname{colim}^{W_d}E)=\operatorname{colim}^{W_d}K\circ E=F^{\dagger}(K\circ E)(d)$$

となる． □

系 71. 左随伴は左 Kan 拡張と交換する．

証明. 左随伴は余連続だから，定理 70 より従う． □

定理 72. $\mathcal{C},\mathcal{D},\mathcal{J}$ を V-豊穣圏，$F\colon\mathcal{J}^{\mathrm{op}}\longrightarrow[\mathcal{C},\mathcal{D}]$，$W\colon\mathcal{J}\longrightarrow\mathcal{V}$ を V-関手とする．各 $c\in\mathcal{C}$ に対して関手 $F_c:=\mathrm{ev}_c\circ F$ と定める．各 $c\in\mathcal{C}$ に対して余極限 $\operatorname{colim}^W F_c$ が存在するとする．このとき余極限 $\operatorname{colim}^W F\in[\mathcal{C},\mathcal{D}]$ が存在し，$(\operatorname{colim}^W F)(c)=\operatorname{colim}^W F_c$ である．即ち，関手圏の余極限は各点ごとに計算できる．

証明. V-関手 $T\colon\mathcal{C}\longrightarrow\mathcal{D}$ を $Tc:=\operatorname{colim}^W F_c$ で定める．$K\in[\mathcal{C},\mathcal{D}]$ に対して

$$\begin{aligned}
[\mathcal{C},\mathcal{D}](T,K)&=\int_{c\in\mathcal{C}}\mathcal{D}(Tc,Kc)\\
&=\int_{c\in\mathcal{C}}\mathcal{D}(\operatorname{colim}^W F_c,Kc)\\
&=\int_{c\in\mathcal{C}}\widehat{\mathcal{J}}(W-,\mathcal{D}(F_c-,Kc))\\
&=\int_{c\in\mathcal{C}}\int_{j\in\mathcal{J}^{\mathrm{op}}}\mathcal{V}(Wj,\mathcal{D}(F_cj,Kc))\\
&=\int_{c\in\mathcal{C}}\int_{j\in\mathcal{J}^{\mathrm{op}}}\mathcal{V}(Wj,\mathcal{D}(Fj(c),Kc))\\
&=\int_{j\in\mathcal{J}^{\mathrm{op}}}\int_{c\in\mathcal{C}}\mathcal{V}(Wj,\mathcal{D}(Fj(c),Kc))\\
&=\int_{j\in\mathcal{J}^{\mathrm{op}}}\mathcal{V}(Wj,\int_{c\in\mathcal{C}}\mathcal{D}(Fj(c),Kc))\\
&=\int_{j\in\mathcal{J}^{\mathrm{op}}}\mathcal{V}(Wj,[\mathcal{C},\mathcal{D}](Fj,K))\\
&=\widehat{\mathcal{J}}(W-,[\mathcal{C},\mathcal{D}](F-,K))
\end{aligned}$$

だから $T=\operatorname{colim}^W F$ である． □

系 73. $c\in\mathcal{C}$ に対して $\mathrm{ev}_c\colon[\mathcal{C},\mathcal{D}]\longrightarrow\mathcal{D}$ は余連続である．

証明. 命題 72 で示した様に $F\colon\mathcal{J}^{\mathrm{op}}\longrightarrow[\mathcal{C},\mathcal{D}],W\colon\mathcal{J}\longrightarrow\mathcal{V}$ に対して $\mathrm{ev}_c(\operatorname{colim}^W F)=\operatorname{colim}^W(\mathrm{ev}_c\circ F)$ だからである． □

系 74. $\mathcal{C}$ が small で $\mathcal{D}$ が V-余完備ならば $[\mathcal{C}, \mathcal{D}]$ も V-余完備である. $\square$

系 75. $\mathcal{C}$ が small ならば $\widehat{\mathcal{C}}$ は V-余完備である. $\square$

7 普遍随伴

$\mathcal{C}, \mathcal{M}$ を V-豊穣圏で，$\mathcal{C}$ は small，$\mathcal{M}$ は V-余完備とする．

定理 76. $F\colon \widehat{\mathcal{C}} \longrightarrow \mathcal{M}$ が余連続のとき，ある $E\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{M}$ が存在して $F \cong y^\dagger E$ となる．

証明. $E := F \circ y$ とすれば定理 70 により

$$y^\dagger E = y^\dagger (F \circ y) \cong F \circ (y^\dagger y) \cong F \circ \mathrm{id}_{\widehat{\mathcal{C}}} = F$$

となる. $\square$

定理 77. $y\colon \mathcal{C} \longrightarrow \widehat{\mathcal{C}}$ を米田埋込，$F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{M}$ を V-関手とすれば随伴 $y^\dagger F \dashv F^\dagger y$ が成り立つ.

$$\begin{tikzcd}
\widehat{\mathcal{C}} \arrow[dr, shift left=1.5, "y^\dagger F"] \arrow[dr, phantom, "\perp"] & \\
\mathcal{C} \arrow[u, "y"] \arrow[r, "F"'] & \mathcal{M} \arrow[ul, shift left=1.5, "F^\dagger y"]
\end{tikzcd}$$

証明. 定理 59 とその系を使えば，$P \in \widehat{\mathcal{C}}$ と $m \in \mathcal{M}$ に対して

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}(y^\dagger F(P), m) &\cong \widehat{\mathcal{C}}(\widehat{\mathcal{C}}(y-, P), \mathcal{M}(F-, m)) \\
&\cong \widehat{\mathcal{C}}(P, \mathcal{M}(F-, m)) \\
&\cong \widehat{\mathcal{C}}(P, F^\dagger y(m)).
\end{aligned}$$

$\square$

系 78. 余連続な $F\colon \widehat{\mathcal{C}} \longrightarrow \mathcal{M}$ は右随伴を持つ.

証明. F が余連続だから定理 76 により $F \cong y^\dagger E$ と書ける．よって定理 77 より $F \dashv E^\dagger y$ となる. $\square$

系 79. 任意の随伴 $F \dashv G\colon \widehat{\mathcal{C}} \longrightarrow \mathcal{M}$ に対して, ある $E\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{M}$ が存在して $F \cong y^\dagger E$, $G \cong E^\dagger y$ となる.

証明. 左随伴は余連続だから定理 76 により $F \cong y^\dagger E$ と書ける．随伴の一意性と定理 77 から $G \cong E^\dagger y$ である． $\square$

定義. $\mathcal{C}$ を V-豊穣圏とする．

(1) $c \in \mathcal{C}$ が small projective $\Longleftrightarrow \mathcal{C}(c, -) \colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{V}$ が余連続

(2) V-関手 F が conservative $\Longleftrightarrow U(F)$ が conservative

(3) V-関手 F が strongly generating $\Longleftrightarrow F^\dagger y$ が conservative

(4) 集合 $X \subset \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ が strong generator $\Longleftrightarrow$ strongly generating な F により $X = F(\mathrm{Ob}(\mathcal{B}))$ と書ける

定理 80. V-豊穣圏 $\mathcal{C}$ が，小 V-豊穣圏 $\mathcal{A}$ により $\mathcal{C} \cong \widehat{\mathcal{A}}$ と書ける
$\Longleftrightarrow \mathcal{C}$ が V-余完備で，small projective な対象からなる集合 $A \subset \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ が存在して，A が strong generator となる．

証明. $(\Longrightarrow)$ $\mathcal{C} = \widehat{\mathcal{A}}$ としてよい．$\widehat{\mathcal{A}}$ は V-余完備である．米田埋込 $y \colon \mathcal{A} \longrightarrow \widehat{\mathcal{A}}$ により $\mathcal{A} \subset \widehat{\mathcal{A}}$ と見なす．$y(a) \in \widehat{\mathcal{A}}$ は small projective である．

$\because$) $\widehat{\mathcal{A}}(y(a), P) \cong Pa$ だから $\widehat{\mathcal{A}}(y(a), -) \cong \mathrm{ev}_a$ である．ev_a は余連続だったから，$y(a)$ は small projective である．

また，$y^\dagger y = \mathrm{id}_{\mathcal{A}}$ は conservative だから，$y \colon \mathcal{A} \longrightarrow \widehat{\mathcal{A}}$ は strongly generating である．故に $\mathrm{Ob}(\mathcal{A}) \subset \mathrm{Ob}(\widehat{\mathcal{A}})$ は strong generator である．

$(\Longleftarrow)$ 仮定の A を取り，$\mathcal{C}$ の充満部分 V-豊穣圏 $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}$ とみなす．包含関手を $i \colon \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{C}$ と書く．米田埋込 $y \colon \mathcal{A} \longrightarrow \widehat{\mathcal{A}}$ を取れば，定理 77 により随伴 $y^\dagger i \dashv i^\dagger y$ が得られる．

$$\begin{tikzcd}
\widehat{\mathcal{A}} \arrow[dr, shift left=1.5, "y^\dagger i"] & \\
\mathcal{A} \arrow[u, "y"] \arrow[r, "i"'] & \mathcal{C} \arrow[ul, shift left=1.5, "i^\dagger y"] \arrow[ul, phantom, "\perp"]
\end{tikzcd}$$

この随伴が V-同値を与えることを示せばよい．

$a \in A$ が small projective だから，$i^\dagger y$ は余連続である．よって $i^\dagger y \circ (y^\dagger i) \cong y^\dagger(i^\dagger y \circ i) \cong y^\dagger y \cong \mathrm{id}_{\widehat{\mathcal{A}}}$ である．

一方，A が strong generator だから $i^\dagger y$ は conservative である．$c \in \mathcal{C}$ を取る．定理 68 より $i^\dagger y(c) = y^\dagger y(i^\dagger y(c)) = \mathrm{colim}^{i^\dagger y(c)} y$ である．よって $i^\dagger y \circ y^\dagger i \circ i^\dagger y(c) =$

$i^\dagger y \circ y^\dagger i(\operatorname{colim}^{i^\dagger y(c)} y) = \operatorname{colim}^{i^\dagger y(c)}(i^\dagger y \circ y^\dagger i \circ y) = \operatorname{colim}^{i^\dagger y(c)} y = i^\dagger y(c)$ となり $i^\dagger y \circ y^\dagger i \cong \mathrm{id}$ である．

以上により $\mathcal{C} \cong \widehat{\mathcal{A}}$ である． $\square$

例 81. 順序集合 X が集合 A により $X \cong \mathcal{P}(A)$ と書ける
$\iff X$ が余完備で，アトミック

証明. ($\Longrightarrow$) 明らか．

($\Longleftarrow$) 順序集合 X を $\mathbf{2}$-豊穣圏とみなす．アトム $a \in X$ は small projective である．$A := \{x \in X \mid x$ はアトム $\}$ と置き，$i \colon A \longrightarrow X$ を包含関手とする．

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{P}(A) \arrow[dr, shift left, "y^\dagger i"] \arrow[dr, phantom, "\perp"] & \\
A \arrow[u, "y"] \arrow[r, "i"'] & X \arrow[ul, shift left, "i^\dagger y"]
\end{tikzcd}$$

$x \in X$ に対して $i^\dagger y(x) \cong X(i(-), x) = \{a \in A \mid a \leq x\}$ である．よって $i^\dagger y$ は conservative である．X がアトミックだから A は strong generator である．故に定理 80 により $X \cong \mathcal{P}(A)$ と書ける． $\square$

例 82. (X, d) を距離空間，$Y \subset X$ を部分空間とする．$f \colon Y \longrightarrow \mathbb{R}$ を $f \geq 0$ となる Lipschitz 連続関数とし，L を f の Lipschitz 定数とする．(即ち $|f(y_0) - f(y_1)| \leq Ld(y_0, y_1)$ である．) このとき $\widetilde{f} \colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ を $\widetilde{f}(x) := \inf_{y \in Y} (f(y) + Ld(x, y))$ で定めればこれは f の延長で Lipschitz 連続である．

証明. X, Y の距離を $d' := Ld$ に変えた距離空間を X', Y' とする．このとき $f \colon Y' \longrightarrow \mathbb{R}$ は Lipschitz 定数が 1 となる Lipschitz 連続関数である．よって f を $\overline{\mathbb{R}}_+$-関手 $Y' \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ とみなすことができる．$i \colon Y' \longrightarrow X'$ を包含関手として，Kan 拡張 $i^\dagger f \colon X' \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ を考えれば $i^\dagger f \colon X' \longrightarrow \mathbb{R}$ は Lipschitz 連続となる．

$$\begin{tikzcd}
X' \arrow[dr, "i^\dagger f"] & \\
Y' \arrow[u, "i"] \arrow[r, "f"'] \arrow[ur, phantom, "\Uparrow"] & \overline{\mathbb{R}}_+
\end{tikzcd}$$

更に $i^\dagger f(x) = \displaystyle\int^{y \in Y'} X'(i(y), x) \odot f(y) = \inf_{y \in Y} (f(y) + Ld(x, y))$ である． $\square$

定理 83 (Eilenberg-Watts)**.** R, S を単位的環として，$F \dashv G\colon \mathbf{Mod}_R \to \mathbf{Mod}_S$ を $\mathbf{Ab}$-随伴とする．このときある左 R 右 S 加群 P が存在して $F \cong - \otimes_R P$，$G \cong \mathrm{Hom}_S(P, -)$ と書ける．

証明. $\mathbf{Mod}_R = \widehat{R}$ だから，定理 79 によりある $P\colon R \longrightarrow \widehat{S}$ が存在して $F \cong y^\dagger P$，$G \cong P^\dagger y$ となる．

$$\begin{tikzcd}
\widehat{R} \arrow[dr, shift left, "F"] & \\
R \arrow[u, "y"] \arrow[r, "P"'] & \widehat{S} \arrow[ul, shift left, "G"] \arrow[ul, phantom, "\perp"]
\end{tikzcd}$$

このとき P は左 R 右 S 加群であり，$M \in \widehat{R}$，$N \in \widehat{S}$ に対して

$$\begin{aligned}
y^\dagger P(M) &\cong \int^{* \in R} \widehat{R}(y(*), M) \odot P(*) \cong \int^{* \in R} M(*) \odot P(*) \cong M \otimes_R P \\
P^\dagger y(N) &\cong \widehat{S}(P-, N) \cong \mathrm{Hom}_S(P, N)
\end{aligned}$$

となる． □

定義. (通常の) 圏の射 $r\colon a \longrightarrow b$ が retraction $\Longleftrightarrow$ ある $i\colon b \longrightarrow a$ が存在して $r \circ i = \mathrm{id}_b$

補題 84. $\varepsilon\colon F \Longrightarrow G$ が自然変換で，a に対して $\varepsilon_a\colon Fa \longrightarrow Ga$ が同型射であるとする．このとき $r\colon a \longrightarrow b$ が retraction ならば $\varepsilon_b\colon Fb \longrightarrow Gb$ も同型射である．

証明. $\varepsilon\colon F \Longrightarrow G$ が自然変換で，$r \circ i = \mathrm{id}_b$ だから次が可換である．

$$\begin{tikzcd}
& Fa \arrow[rr, shift left, "\varepsilon_a"'] \arrow[dd, "Fr"] & & Ga \arrow[ll, shift left, "\varepsilon_a^{-1}"'] \arrow[dd, "Gr"] \\
Fa \arrow[ur, equal] \arrow[rr, shift left, "\varepsilon_a"'] & & Ga \arrow[ll, shift left, "\varepsilon_a^{-1}"'] \arrow[ur, equal] & \\
& Fb \arrow[rr, "\varepsilon_b"] & & Gb \\
Fb \arrow[uu, "Fi"] \arrow[ur, "\mathrm{id}"] \arrow[rr, "\varepsilon_b"'] & & Gb \arrow[uu, "Gi"] \arrow[ur, "\mathrm{id}"] &
\end{tikzcd}$$

よって $f := Fr \circ \varepsilon_a^{-1} \circ Gi\colon Gb \longrightarrow Fb$ と置けば $f \circ \varepsilon_b = \mathrm{id}_b$，$\varepsilon_b \circ f = \mathrm{id}_b$ である． □

補題 85. $P \in \widehat{R}$ が small projective $\Longleftrightarrow$ P が有限生成射影右 R 加群

証明. ($\Longrightarrow$) P の有限生成部分右 R 加群全体を X とすれば $P = \operatorname*{colim}_{N\in X} N$ と書ける．このとき P が small projective だから $\widehat{R}(P,P) = \widehat{R}(P, \operatorname*{colim}_{N\in X} N) = \operatorname*{colim}_{N\in X} \widehat{R}(P,N)$ である．$\mathrm{id}_P \in \widehat{R}(P,P)$ が存在するから，これに対応する $x \in \widehat{R}(P,N)$ がある $N \in X$ に存在する．このとき $P = N$ となる．よって P は有限生成．また $\widehat{R}(P,-)$ が余連続だから特に全射を保存し，よって P は射影加群である．

($\Longleftarrow$) P を有限生成射影右 R 加群とすれば，P はある R^n の直和因子となる．即ちある M が存在して $R^n = P \oplus M$ と書ける．$\pi\colon R^n \longrightarrow P$ を射影，$i\colon P \longrightarrow R^n$ を包含とすれば $\pi \circ i = \mathrm{id}_P$ である．即ち $\pi\colon R^n \longrightarrow P$ は retraction である．

余極限の普遍性により，自然変換

$$\varepsilon\colon \operatorname*{colim}_{N} \mathrm{Hom}(-,N) \Longrightarrow \mathrm{Hom}(-, \operatorname*{colim}_{N} N)$$

が存在する．ε_{R^n} が同型だから，retraction $\pi\colon R^n \longrightarrow P$ により ε_P も同型である．よって P は small projective である．$\square$

定義. 単位的環 R,S が森田同値 $\Longleftrightarrow$ $\mathbf{Ab}$-同値 $\widehat{R} \cong \widehat{S}$ が成り立つ

定理 86. 単位的環 R,S が森田同値
$\Longleftrightarrow$ 有限生成射影右 S 加群 P が存在して，P が generator かつ環同型 $R \cong \mathrm{Hom}_S(P,P)$ が成り立つ．

証明. ($\Longrightarrow$) $F\colon \widehat{R} \longrightarrow \widehat{S}, G\colon \widehat{S} \longrightarrow \widehat{R}, GF \cong \mathrm{id}_{\widehat{R}}, FG \cong \mathrm{id}_{\widehat{S}}$ を $\mathbf{Ab}$-同値とする．$F \dashv G$ としてよい．このとき $P := F{\circ}y$ と置けば $F \cong y^{\dagger}P \cong -\otimes_R P, G \cong P^{\dagger}y \cong \mathrm{Hom}_S(P,-)$ である．よって $R \cong GF(R) \cong G(R\otimes_R P) \cong G(P) \cong \mathrm{Hom}_S(P,P)$ である．また $R \in \widehat{R}$ が small projective だから $P = F(R) \in \widehat{S}$ も small projective である．故に前補題から P は有限生成射影右 R 加群である．また $R \in \widehat{R}$ は generator だから $P = F(R)$ も generator である．

($\Longleftarrow$) P が有限生成射影右 S 加群だから，P は small projective である．V-関手 $\widehat{S}(P,-)\colon \mathbf{Mod}_S \longrightarrow \mathbf{Ab}$ は conservative である．

$\because$) $\widehat{S}$ の射 $f\colon M \longrightarrow N$ が同型 $\widehat{S}(P,f)\colon \widehat{S}(P,M) \cong \widehat{S}(P,N)$ を与えるとする．$\widehat{S}(P,-)$ は連続だから $\widehat{S}(P, \ker f) \cong \ker \widehat{S}(P,f) = 0$ である．今 P が generator だから $\ker f = 0$ が分かる．また P が small projective だから余連続でもある．従って $\widehat{S}(P, \operatorname{coker} f) \cong \operatorname{coker} \widehat{S}(P,f) = 0$ となり，P が generator だから $\operatorname{coker} f = 0$ である．以上より f は同型である．

従って P は strong generator である．よって，定理 80 の証明から $\widehat{R} \cong \widehat{S}$ となることが分かる． $\square$

例 87. 単位的環 R に対して $M_n(R)$ を R の元を成分とする n 次行列全体がなす単位的環とする．R^n は有限生成射影右 R 加群である．また R^n は generator で，$M_n(R) \cong \mathrm{Hom}(R^n, R^n)$ である．従って $\mathbf{Mod}_{M_n(R)} \cong \mathbf{Mod}_R$ であり，よって R と $M_n(R)$ は森田同値である． $\square$

参考文献

[1] G.M. Kelly, Basic Concepts of Enriched Category Theory, Cambridge University Press, Lecture Notes in Mathematics 64 (1982), `http://tac.mta.ca/tac/reprints/articles/10/tr10abs.html`

[2] F. W. Lawvere, Metric spaces, generalized logic, and closed categories, Rendiconti del Seminario Matematico e Fisico di Milano, 43:135–166, 1973