エンド

alg-d
http://alg-d.com/math/kan_extension/

2016 年 8 月 22 日

C, D を圏，$F, G\colon C \longrightarrow D$ を関手とする．自然変換 $\theta\colon F \Longrightarrow G$ とは，次の図式を可換にする射の族 $\{\theta_a\colon Fa \longrightarrow Ga\}_{a \in C}$ であった．

$$\begin{tikzcd} a \arrow[d, "f"] & Fa \arrow[r, "\theta_a"] \arrow[d, "Ff"'] & Ga \arrow[d, "Gf"] \\ b & Fb \arrow[r, "\theta_b"'] & Gb \end{tikzcd}$$

$1 = \{0\}$ を一元集合とすれば，射の族 $\theta = \{\theta_a\colon Fa \longrightarrow Ga\}_{a \in C}$ を与えることと，写像の族 $\sigma = \{\sigma_a\colon 1 \longrightarrow \mathrm{Hom}_D(Fa, Ga)\}_{a \in C}$ を与えることは同じことである．θ が自然変換であるための条件を σ に翻訳すれば，自然変換とは任意の $f\colon a \longrightarrow b$ に対して図式

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{Hom}_D(Fa, Ga) \arrow[dr, "Gf\circ-"] & \\ 1 \arrow[ur, "\sigma_a"] \arrow[dr, "\sigma_b"'] & & \mathrm{Hom}_D(Fa, Gb) \\ & \mathrm{Hom}_D(Fb, Gb) \arrow[ur, "-\circ Ff"'] & \end{tikzcd}$$

を可換にする σ のことだと言える．

定義. C, D を圏，$T\colon C^{\mathrm{op}} \times C \longrightarrow D$ を関手とする．$x \in D$ から T への wedge とは，D の射の族 $\sigma = \{\sigma_a\colon x \longrightarrow T(a, a)\}_{a \in C}$ であって，C の任意の射 $f\colon a \longrightarrow b$ に対して次の

図式が可換となるものである．

$$
\begin{tikzcd}
 & T(a,a) \arrow[dr, "T(\mathrm{id}_a, f)"] & \\
x \arrow[ur, "\sigma_a"] \arrow[dr, "\sigma_b"'] & & T(a,b) \\
 & T(b,b) \arrow[ur, "T(f, \mathrm{id}_b)"'] &
\end{tikzcd}
$$

σ が x から T への wedge であることを記号で $\sigma\colon x \overset{\cdot\cdot}{\longrightarrow} T$ と書くことにする．また双対的に，T から x への cowedge $T \overset{\cdot\cdot}{\longrightarrow} x$ も定義される．

例 1. $1 \in \mathbf{Set}$ から $\mathrm{Hom}_D(F-, G-)$ への wedge が自然変換 $F \Longrightarrow G$ である． $\square$

定義. C, D を圏，$T\colon C^{\mathrm{op}} \times C \longrightarrow D$ を関手とする．T のエンドとは組 $\langle e, \lambda \rangle$ で以下を満たすものである．

(1) $e \in D$ は対象である．
(2) $\lambda\colon e \overset{\cdot\cdot}{\longrightarrow} T$ は wedge である．
(3) $\sigma\colon x \overset{\cdot\cdot}{\longrightarrow} T$ を wedge とするとき，射 $p\colon x \longrightarrow e$ が一意に存在して，$a \in C$ に対して $\lambda_a \circ p = \sigma_a$ となる．

$$
\begin{tikzcd}
 & & T(a,a) \arrow[dr, "T(\mathrm{id}_a, f)"] & \\
x \arrow[r, dashed, "p"'] \arrow[urr, bend left, "\sigma_a"] \arrow[drr, bend right, "\sigma_b"'] & e \arrow[ur, "\lambda_a"'] \arrow[dr, "\lambda_b"] & & T(a,b) \\
 & & T(b,b) \arrow[ur, "T(f, \mathrm{id}_b)"'] &
\end{tikzcd}
$$

このとき e を $\displaystyle\int_{a \in C} T(a,a)$ で表す．

双対的にコエンド $\displaystyle\int^{a \in C} T(a,a)$ も定義される．

例 2. C, D を圏，$F, G\colon C \longrightarrow D$ を関手とする．$\displaystyle\int_{a \in C} \mathrm{Hom}_D(Fa, Ga) = \mathrm{Hom}_{D^C}(F, G)$ である．(つまり，射 $Fa \longrightarrow Ga$ を積み重ねると自然変換 $F \Longrightarrow G$ になるということであり，まさしく積分であろう．)

証明. $\lambda_a\colon \mathrm{Hom}(F,G) \longrightarrow \mathrm{Hom}(Fa,Ga)$ を $\lambda_a(\alpha) := \alpha_a$ で定めれば，λ は wedge である．

$\sigma\colon x \xrightarrow{\cdot\cdot} \mathrm{Hom}_D(F-,G-)$ を任意に取る．$a \in C$ に対して $\sigma_a\colon x \longrightarrow \mathrm{Hom}(Fa,Ga)$ だから，$u \in x$ に対して $\sigma_a(u) \in \mathrm{Hom}(Fa,Ga)$ である．これにより自然変換 $\sigma_-(u)\colon F \Longrightarrow G$ が定まるから，写像 $p\colon x \longrightarrow \mathrm{Hom}(F,G)$ が $p(u) := \sigma_-(u)$ により得られる．このとき $\lambda_a \circ p = \sigma_a$ である．明らかにこのような p は一意に定まるから，$\displaystyle\int_{a\in C} \mathrm{Hom}_D(F-,G-) = \mathrm{Hom}_{D^C}(F,G)$ が分かった． $\square$

3 変数の関手 $T\colon C^{\mathrm{op}} \times C \times X \longrightarrow D$ を考える．$x \in X$ を固定すれば 2 変数の関手 $T(-,-,x)\colon C^{\mathrm{op}} \times C \longrightarrow D$ が得られるから，エンド $\int_a T(a,a,x)$ を考えることができる．任意の $x \in X$ に対してこのエンド $\int_a T(a,a,x)$ が存在したとすれば，対応 $X \ni x \longmapsto \int_a T(a,a,x) \in D$ を考えることができる．

命題 3. $T\colon C^{\mathrm{op}}\times C\times X \longrightarrow D$ を関手とする．任意の $x \in X$ に対してエンド $\int_a T(a,a,x)$ が存在すると仮定する．このとき関手 $F\colon X \longrightarrow D$ が一意に存在して，以下を満たす．

(1) $x \in X$ に対して $F(x) = \displaystyle\int_{a\in C} T(a,a,x)$.
(2) $a,b \in C$ に対して，標準的な射 $Fx \longrightarrow T(a,b,x)$ が自然変換 $F \Longrightarrow T(a,b,-)$ を定める．

証明. X の射 $k\colon x \longrightarrow z$ を考える．まず x と z に対して，エンドによる可換図式

$$\begin{array}{ccc} \int_a T(a,a,x) & \longrightarrow & T(a,a,x) \\ \downarrow & & \downarrow \\ T(b,b,x) & \longrightarrow & T(a,b,x) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \int_a T(a,a,z) & \longrightarrow & T(a,a,z) \\ \downarrow & & \downarrow \\ T(b,b,z) & \longrightarrow & T(a,b,z) \end{array}$$

が得られる．また，k と T から D の射

$$T(\mathrm{id}_a,\mathrm{id}_a,k)\colon T(a,a,x) \longrightarrow T(a,a,z)$$

等が得られるから，先の図式と組み合わせて次の実線による図式が得られる．

$$\begin{tikzcd}
 & \int_a T(a,a,z) \arrow[rr] \arrow[dd] & & T(a,a,z) \arrow[dd] \\
\int_a T(a,a,x) \arrow[rr] \arrow[dd] \arrow[ur, dashed] & & T(a,a,x) \arrow[ur] \arrow[dd] & \\
 & T(b,b,z) \arrow[rr] & & T(a,b,z) \\
T(b,b,x) \arrow[rr] \arrow[ur] & & T(a,b,x) \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

これの実線は全て可換であるから，エンド $\int_a T(a,a,z)$ の普遍性により点線の射 $Fk\colon \int_a T(a,a,x) \longrightarrow \int_a T(a,a,z)$ が得られる．このとき明らかに F は関手である．また

$$\begin{tikzcd}
\int_a T(a,a,x) \arrow[r] \arrow[d] & T(a,a,x) \arrow[d] \\
T(b,b,x) \arrow[r] & T(a,b,x)
\end{tikzcd}$$

から得られる射 $F(x) = \int_a T(a,a,x) \longrightarrow T(a,b,x)$ を α_x とすれば，明らかに $\alpha\colon F \Longrightarrow T(a,b,-)$ は自然変換である． $\square$

4 変数の関手 $T\colon C^{\mathrm{op}} \times C \times X^{\mathrm{op}} \times X \longrightarrow D$ を考える．C に関してエンドを取ることで関手 $\displaystyle\int_{a\in C} T(a,a,-,-)\colon X^{\mathrm{op}} \times X \longrightarrow D$ が得られるから，これのエンド

$$\int_{x\in X} \int_{a\in C} T(a,a,x,x)$$

を考えることができる．一方，同型 $C^{\mathrm{op}} \times C \times X^{\mathrm{op}} \times X \cong (C\times X)^{\mathrm{op}} \times (C \times X)$ により $T\colon (C\times X)^{\mathrm{op}} \times (C\times X) \longrightarrow D$ とみなせば，エンド

$$\int_{\langle a,x\rangle \in C\times X} T(a,a,x,x)$$

も考えることができる．

定理 4 (Fubini の定理)**.** $T\colon C^{\mathrm{op}} \times C \times X^{\mathrm{op}} \times X \longrightarrow D$ を関手として，任意の $x,z \in X$ に対してエンド $\displaystyle\int_{a\in C} T(a,a,x,z)$ が存在すると仮定する．このとき

$$\int_{\langle a,x\rangle \in C\times X} T(a,a,x,x) \cong \int_{x\in X} \int_{a\in C} T(a,a,x,x).$$

但しこの式は，片方が存在するならばもう片方も存在して同型となることを表す．

証明．命題 3 で示したように，X の任意の射 $x \longrightarrow z$ に対して次が可換である，

$$
\begin{tikzcd}
\int_a T(a,a,x,x) \arrow[r] \arrow[d] & \int_a T(a,a,x,z) \arrow[d] \\
T(a,b,x,x) \arrow[r] & T(a,b,x,z)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\int_a T(a,a,z,z) \arrow[r] \arrow[d] & \int_a T(a,a,x,z) \arrow[d] \\
T(a,b,z,z) \arrow[r] & T(a,b,x,z)
\end{tikzcd}
$$

また C の射 $a \longrightarrow b$ に対して次が可換である．

$$
\begin{tikzcd}
 & \int_a T(a,a,x,x) \arrow[dl] \arrow[d] \\
T(a,a,x,x) \arrow[r] & T(a,b,x,x)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & \int_a T(a,a,x,x) \arrow[dl] \arrow[d] \\
T(b,b,x,x) \arrow[r] & T(a,b,x,x)
\end{tikzcd}
$$

これらを組み合わせて，次の可換図式を得る．

$$
\begin{tikzcd}
 & & & T(b,b,z,z) \arrow[dd] \\
 & & \int_a T(a,a,z,z) \arrow[ur] \arrow[dr] \arrow[dd] & \\
 & & & T(a,b,z,z) \arrow[dd] \\
 & \int_a T(a,a,x,x) \arrow[r] \arrow[dl] \arrow[dr] & \int_a T(a,a,x,z) \arrow[dr] & \\
T(a,a,x,x) \arrow[rr] & & T(a,b,x,x) \arrow[r] & T(a,b,x,z)
\end{tikzcd}
$$

よって x に関する wedge $d \overset{..}{\longrightarrow} \int_a T(a,a,x,x)$ が与えられた時，$\langle a,x\rangle$ に関する wedge $d \overset{..}{\longrightarrow} T(a,a,x,x)$ が得られる．

逆に $\langle a,x\rangle$ に関する wedge $d \overset{..}{\longrightarrow} T(a,a,x,x)$ が与えられたとする．このとき $x \in X$ を固定すれば $a,b \in C$ に関する wedge $d \overset{..}{\longrightarrow} T(a,b,x,x)$ が得られる．従ってエンドの

普遍性により次の点線の射が得られる．

$$
\begin{tikzcd}
d \arrow[rrr] \arrow[drr, dashed] \arrow[dddr, dashed] \arrow[dddd] & & & T(b,b,z,z) \arrow[dd] \\
 & & \int_a T(a,a,z,z) \arrow[ur] \arrow[dr] \arrow[dd] & \\
 & & & T(a,b,z,z) \arrow[dd] \\
 & \int_a T(a,a,x,x) \arrow[r] \arrow[dl] \arrow[dr] & \int_a T(a,a,x,z) \arrow[dr] & \\
T(a,a,x,x) \arrow[rr] & & T(a,b,x,x) \arrow[r] & T(a,b,x,z)
\end{tikzcd}
$$

これにより x に関する wedge $d \xrightarrow{\cdot\cdot} \int_a T(a,a,x,x)$ が得られる．

以上の対応により

$$\int_{\langle a,x\rangle\in C\times X} T(a,a,x,x) \cong \int_{x\in X}\int_{a\in C} T(a,a,x,x).$$

が得られることが分かる． □

特に，各エンドが存在するという仮定の下で，積分の順序交換

$$\int_{x\in X}\int_{a\in C} T(a,a,x,x) \cong \int_{a\in C}\int_{x\in X} T(a,a,x,x)$$

が成り立つ．

エンドの定義から分かるように，エンドは以下のように極限で書くことが出来る．二つの直積

$$d := \prod_{c\in\mathrm{Ob}(C)} T(a,a), \quad d' := \prod_{f\in\mathrm{Mor}(C)} T(\mathrm{dom}(f),\mathrm{cod}(f))$$

を考え，

$$T(\mathrm{id},f)\colon T(\mathrm{dom}(f),\mathrm{dom}(f)) \longrightarrow T(\mathrm{dom}(f),\mathrm{cod}(f))$$

により得られる射を $s\colon d \longrightarrow d'$,

$$T(f,\mathrm{id})\colon T(\mathrm{cod}(f),\mathrm{cod}(f)) \longrightarrow T(\mathrm{dom}(f),\mathrm{cod}(f))$$

により得られる射を $t\colon d \longrightarrow d'$ とする．このときエンド $\int_a T(a,a)$ は $s,t\colon d \longrightarrow d'$ の equalizer である．故に

定理 5. C が小圏で，D が完備ならば，$T\colon C^{\mathrm{op}}\times C \longrightarrow D$ のエンド $\int_a T(a,a)\in D$ が存在する． $\square$

定理 6. 連続な関手はエンドと交換する．即ち，$F\colon D\longrightarrow X$ を連続関手で，$T\colon C^{\mathrm{op}}\times C\longrightarrow D$ のエンド $\int_a T(a,a)$ が存在するとすれば $F(\int_a T(a,a))\cong\int_a F(T(a,a))$． $\square$

系 7. $\mathrm{Hom}_D(d,\int_c T(c,c))\cong\int_c \mathrm{Hom}_D(d,T(c,c))$ $\square$

D^{op} で考えれば $\mathrm{Hom}_D(\int^c T(c,c),d)\cong\int_c \mathrm{Hom}_D(T(c,c),d)$ も分かる．

エンドは極限で書けたが，逆に極限はエンドで書くことが出来る．$F\colon J\longrightarrow C$ を関手としたとき，$F(j,k):=F(k)$ とすることで F を $F\colon J^{\mathrm{op}}\times J\longrightarrow C$ とみなすことができる．(即ち，射影 $\pi_2\colon J^{\mathrm{op}}\times J\longrightarrow J$ との合成 $F\circ\pi_2$ を考えるのである．) このとき自然変換 $\theta\colon \Delta a\Longrightarrow F$ は可換図式

$$\begin{tikzcd}
 & F(j) \arrow[dr, "F(\mathrm{id},f)=Ff"] & \\
a \arrow[ur, "\theta_j"] \arrow[dr, "\theta_k"'] & & F(k) \\
 & F(k) \arrow[ur, "F(f,\mathrm{id})=\mathrm{id}"'] &
\end{tikzcd}$$

を与える．よって $\displaystyle\int_{j\in J} F(j)=\lim F$ である．

定義. C を圏として，$a\in C$ と $x\in\mathbf{Set}$ を取る．

(1) x から $\mathrm{Hom}_C(a,-)$ への普遍射を $v\longrightarrow \mathrm{Hom}_C(a,c)$ とするとき，c を copower object (もしくは tensor object) といい $x\odot a$ で表す．
(2) x から $\mathrm{Hom}_C(-,a)$ への普遍射を $v\longrightarrow \mathrm{Hom}_C(c,a)$ とするとき，c を power object (もしくは cotensor object) といい $x\pitchfork a$ で表す．

普遍射の性質により

$$\mathrm{Hom}_C(x\odot a,b)\cong\mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(x,\mathrm{Hom}_C(a,b))$$
$$\mathrm{Hom}_C(b,x\pitchfork a)\cong\mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(x,\mathrm{Hom}_C(b,a))$$

である．また各 $a\in C$，$x\in\mathbf{Set}$ に対して $x\odot a$，$x\pitchfork a$ が存在すればこれらは関手 $\odot\colon\mathbf{Set}\times C\longrightarrow C$，$\pitchfork\colon\mathbf{Set}^{\mathrm{op}}\times C\longrightarrow C$ を定め $-\odot a\dashv\mathrm{Hom}_C(a,-)\colon\mathbf{Set}\longrightarrow C$，$-\pitchfork a\dashv\mathrm{Hom}_C(-,a)\colon\mathbf{Set}^{\mathrm{op}}\longrightarrow C$ となる．

例 8. $C = \mathbf{Set}$ の場合 $x \odot a = x \times a$, $x \pitchfork a = a^x$ である. □

定理 9. C, D, U を圏, $F\colon C \longrightarrow D$, $E\colon C \longrightarrow U$ を関手とし, 各 $d \in D$ に対して copower $\mathrm{Hom}_D(Fc, d) \odot Ec$ が存在するとする. このとき Kan 拡張 $F^\dagger E$ が存在して $F^\dagger E(d) \cong \int^{c \in C} \mathrm{Hom}_D(Fc, d) \odot Ec$ が成り立つ.

証明. $L(d) := \int^{c \in C} \mathrm{Hom}_D(Fc, d) \odot Ec$ と置く. $S\colon D \longrightarrow U$ に対して自然に

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_{U^D}(L, S) &\cong \int_{d \in D} \mathrm{Hom}_U(Ld, Sd) \\
&= \int_{d \in D} \mathrm{Hom}_U\Big(\int^{c \in C} \mathrm{Hom}_D(Fc, d) \odot Ec, Sd\Big) \\
&\cong \int_{d \in D} \int_{c \in C} \mathrm{Hom}_U(\mathrm{Hom}_D(Fc, d) \odot Ec, Sd) \\
&\cong \int_{d \in D} \int_{c \in C} \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(\mathrm{Hom}_D(Fc, d), \mathrm{Hom}_U(Ec, Sd)) \\
&\cong \int_{c \in C} \int_{d \in D} \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(\mathrm{Hom}_D(Fc, d), \mathrm{Hom}_U(Ec, Sd)) \\
&\cong \int_{c \in C} \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}^D}(\mathrm{Hom}_D(Fc, -), \mathrm{Hom}_U(Ec, S-)) \\
&\cong \int_{c \in C} \mathrm{Hom}_U(Ec, SFc) \\
&\cong \mathrm{Hom}_{U^C}(E, SF)
\end{aligned}$$

であるから $L \cong F^\dagger E$ である. □

双対的に, $F^\ddagger E(d) \cong \int_{c \in C} \mathrm{Hom}_D(d, Fc) \pitchfork Ec$ である.