エンド

alg-d
http://alg-d.com/math/kan_extension/

2022 年 3 月 6 日

C, D を圏，$F, G\colon C \to D$ を関手とする．自然変換 $\theta\colon F \Rightarrow G$ とは，次の図式を可換にする射の族 $\{\theta_a\colon Fa \to Ga\}_{a\in C}$ であった．

$$\begin{tikzcd} a \arrow[d, "f"] & Fa \arrow[r, "\theta_a"] \arrow[d, "Ff"'] & Ga \arrow[d, "Gf"] \\ b & Fb \arrow[r, "\theta_b"'] & Gb \end{tikzcd}$$

$1 = \{*\}$ を一元集合とすれば，射の族 $\theta = \{\theta_a\colon Fa \to Ga\}_{a\in C}$ を与えることと，写像の族 $\sigma = \{\sigma_a\colon 1 \to \mathrm{Hom}_D(Fa, Ga)\}_{a\in C}$ を与えることは同じことである．θ が自然変換であるための条件を σ に翻訳すれば，自然変換とは任意の $f\colon a \to b$ に対して図式

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{Hom}_D(Fa, Ga) \arrow[dr, "Gf\circ-"] & \\ 1 \arrow[ur, "\sigma_a"] \arrow[dr, "\sigma_b"'] & & \mathrm{Hom}_D(Fa, Gb) \\ & \mathrm{Hom}_D(Fb, Gb) \arrow[ur, "-\circ Ff"'] & \end{tikzcd}$$

を可換にする σ のことだと言える．

定義． C, D を圏，$T\colon C^{\mathrm{op}} \times C \to D$ を関手とする．$x \in D$ から T への wedge とは，D の射の族 $\sigma = \{\sigma_a\colon x \to T(a, a)\}_{a\in C}$ であって，C の任意の射 $f\colon a \to b$ に対して次の図

式が可換となるものである．

$$\begin{tikzcd}
& T(a,a) \arrow[dr, "T(\mathrm{id}_a,f)"] & \\
x \arrow[ur, "\sigma_a"] \arrow[dr, "\sigma_b"'] & & T(a,b) \\
& T(b,b) \arrow[ur, "T(f,\mathrm{id}_b)"'] &
\end{tikzcd}$$

σ が x から T への wedge であることを記号で $\sigma\colon x \overset{\cdot\cdot}{\to} T$ と書くことにする．

定義. C, D を圏，$T\colon C^{\mathrm{op}} \times C \to D$ を関手とする．T から $x \in D$ への cowedge とは，D の射の族 $\sigma = \{\sigma_a\colon T(a,a) \to x\}_{a\in C}$ であって，C の任意の射 $f\colon a \to b$ に対して次の図式が可換となるものである．

$$\begin{tikzcd}
& T(a,a) \arrow[dr, "\sigma_a"] & \\
T(b,a) \arrow[ur, "T(f,\mathrm{id}_a)"] \arrow[dr, "T(\mathrm{id}_b,f)"'] & & x \\
& T(b,b) \arrow[ur, "\sigma_b"'] &
\end{tikzcd}$$

σ が T から x への cowedge であることを記号で $T \overset{\cdot\cdot}{\to} x$ と書くことにする．

例 1. $1 \in \mathbf{Set}$ から $\mathrm{Hom}_D(F-, G-)$ への wedge が自然変換 $F \Rightarrow G$ である． □

定義. C, D を圏，$T\colon C^{\mathrm{op}} \times C \to D$ を関手とする．T のエンドとは組 $\langle e, \lambda\rangle$ で以下を満たすものである．

(1) $e \in D$ は対象である．
(2) $\lambda\colon e \overset{\cdot\cdot}{\to} T$ は wedge である．
(3) $\sigma\colon x \overset{\cdot\cdot}{\to} T$ を wedge とするとき，射 $p\colon x \to e$ が一意に存在して，$a \in C$ に対して $\lambda_a \circ p = \sigma_a$ となる．

$$\begin{tikzcd}
& & T(a,a) \arrow[dr, "T(\mathrm{id}_a,f)"] & \\
x \arrow[urr, bend left, "\sigma_a"] \arrow[r, dashed, "p"'] \arrow[drr, bend right, "\sigma_b"'] & e \arrow[ur, "\lambda_a"'] \arrow[dr, "\lambda_b"] & & T(a,b) \\
& & T(b,b) \arrow[ur, "T(f,\mathrm{id}_b)"'] &
\end{tikzcd}$$

このとき e を $\displaystyle\int_{a\in C} T(a,a)$ で表す．

双対的にコエンド $\displaystyle\int^{a\in C} T(a,a)$ も定義される．

例 2. C, D を圏，$F, G\colon C \to D$ を関手とする．$\displaystyle\int_{a\in C} \mathrm{Hom}_D(Fa, Ga) \cong \mathrm{Hom}_{D^C}(F, G)$ である．(つまり，射 $Fa \to Ga$ を積み重ねると自然変換 $F \Rightarrow G$ になるということであり，まさしく積分であろう．)

証明. $\lambda_a\colon \mathrm{Hom}(F,G) \to \mathrm{Hom}(Fa, Ga)$ を $\lambda_a(\alpha) := \alpha_a$ で定めれば，λ は wedge である．

$\sigma\colon x \stackrel{..}{\to} \mathrm{Hom}_D(F-, G-)$ を任意に取る．$a \in C$ に対して $\sigma_a\colon x \to \mathrm{Hom}(Fa, Ga)$ だから，$u \in x$ に対して $\sigma_a(u) \in \mathrm{Hom}(Fa, Ga)$ である．これにより自然変換 $\sigma_-(u)\colon F \Rightarrow G$ が定まるから，写像 $p\colon x \to \mathrm{Hom}(F, G)$ が $p(u) := \sigma_-(u)$ により得られる．このとき $\lambda_a \circ p = \sigma_a$ である．明らかにこのような p は一意に定まるから，$\displaystyle\int_{a\in C} \mathrm{Hom}_D(Fa, Ga) \cong \mathrm{Hom}_{D^C}(F, G)$ が分かった． $\square$

3 変数の関手 $T\colon C^{\mathrm{op}} \times C \times X \to D$ を考える．$x \in X$ を固定すれば 2 変数の関手 $T(-,-,x)\colon C^{\mathrm{op}} \times C \to D$ が得られるから，エンド $\int_a T(a,a,x)$ を考えることができる．任意の $x \in X$ に対してこのエンド $\int_a T(a,a,x)$ が存在したとすれば，対応 $X \ni x \mapsto \int_a T(a,a,x) \in D$ を考えることができる．

命題 3. C, D, X を圏，$T\colon C^{\mathrm{op}} \times C \times X \to D$ を関手とする．任意の $x \in X$ に対してエンド $\langle \int_a T(a,a,x), \lambda^x \rangle$ が存在すると仮定する．C の射 $f\colon a \to b$ と $x \in X$ に対して $\alpha^f_x := T(\mathrm{id}_a, f, \mathrm{id}_x) \circ \lambda^x$ とおく．

$$\begin{tikzcd}
 & T(a,a,x) \arrow[dr, "{T(\mathrm{id}_a, f, \mathrm{id}_x)}"] & \\
\int_a T(a,a,x) \arrow[ur, "\lambda^x_a"] \arrow[rr, dashed, "\alpha^f_x"] \arrow[dr, "\lambda^x_b"'] & & T(a,b,x) \\
 & T(b,b,x) \arrow[ur, "{T(f, \mathrm{id}_b, \mathrm{id}_x)}"'] &
\end{tikzcd}$$

このとき関手 $F\colon X \to D$ が一意に存在して，以下を満たす．

(1) $x \in X$ に対して $F(x) = \displaystyle\int_{a\in C} T(a,a,x)$.

(2) $f\colon a \to b$ に対して，$\alpha^f_x\colon Fx \to T(a,b,x)$ が自然変換 $F \Rightarrow T(a,b,-)$ を定める．

証明. X の射 $k\colon x \to z$ を考える．まず $f\colon a \to b$ に対して

$$
\begin{tikzcd}
\int_a T(a,a,x) \arrow[r, "\lambda_a^x"] \arrow[d, "\lambda_b^x"'] & T(a,a,x) \arrow[d, "T(\mathrm{id}_a, f, \mathrm{id}_x)"] \\
T(b,b,x) \arrow[r, "T(f, \mathrm{id}_b, \mathrm{id}_x)"'] & T(a,b,x)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\int_a T(a,a,z) \arrow[r, "\lambda_a^z"] \arrow[d, "\lambda_b^z"'] & T(a,a,z) \arrow[d, "T(\mathrm{id}_a, f, \mathrm{id}_z)"] \\
T(b,b,z) \arrow[r, "T(f, \mathrm{id}_b, \mathrm{id}_z)"'] & T(a,b,z)
\end{tikzcd}
$$

は可換である．また，k と T から D の射

$$T(\mathrm{id}_a, \mathrm{id}_a, k)\colon T(a,a,x) \to T(a,a,z)$$

等が得られるから，先の図式と組み合わせて次の実線による図式が得られる．

$$
\begin{tikzcd}
& \int_a T(a,a,z) \arrow[rr, "\lambda_a^z"] \arrow[dd] & & T(a,a,z) \arrow[dd, "T(\mathrm{id}_a, f, \mathrm{id}_z)"] \\
\int_a T(a,a,x) \arrow[ur, dashed, "Fk"] \arrow[rr, crossing over] \arrow[dd, "\lambda_b^x"'] & & T(a,a,x) \arrow[ur] & \\
& T(b,b,z) \arrow[rr] & & T(a,b,z) \\
T(b,b,x) \arrow[ur] \arrow[rr, "T(f, \mathrm{id}_b, \mathrm{id}_x)"'] & & T(a,b,x) \arrow[ur, "T(\mathrm{id}_a, \mathrm{id}_b, k)"'] \arrow[from=uu, crossing over] &
\end{tikzcd}
$$

これの実線部分は全て可換であるから，エンド $\int_a T(a,a,z)$ の普遍性により点線の射 $Fk\colon \int_a T(a,a,x) \to \int_a T(a,a,z)$ が得られる．このとき明らかに F は関手である．また明らかに $\alpha^f\colon F \Rightarrow T(a,b,-)$ は自然変換である．エンドの普遍性から，このような F は明らかに一意である． $\square$

4 変数の関手 $T\colon C^{\mathrm{op}} \times C \times X^{\mathrm{op}} \times X \to D$ を考える．C に関してエンドを取ることで関手 $\displaystyle\int_{a \in C} T(a,a,-,-)\colon X^{\mathrm{op}} \times X \to D$ が得られるから，これのエンド

$$\int_{x \in X} \int_{a \in C} T(a,a,x,x)$$

を考えることができる．一方，同型 $C^{\mathrm{op}} \times C \times X^{\mathrm{op}} \times X \cong (C \times X)^{\mathrm{op}} \times (C \times X)$ により $T\colon (C \times X)^{\mathrm{op}} \times (C \times X) \to D$ とみなせば，エンド

$$\int_{\langle a,x \rangle \in C \times X} T(a,a,x,x)$$

も考えることができる．

定理 4 (Fubini の定理)**.** $T\colon C^{\mathrm{op}}\times C\times X^{\mathrm{op}}\times X\to D$ を関手として，任意の $x,z\in X$ に対してエンド $\displaystyle\int_{a\in C}T(a,a,x,z)$ が存在すると仮定する．このとき

$$\int_{\langle a,x\rangle\in C\times X}T(a,a,x,x)\cong\int_{x\in X}\int_{a\in C}T(a,a,x,x).$$

但しこの式は，片方が存在するならばもう片方も存在して同型となることを表す．

証明. 命題 3 で示したように，X の任意の射 $x\to z$ に対して次が可換である，

$$\begin{tikzcd}
\int_a T(a,a,x,x) \arrow[r] \arrow[d] & \int_a T(a,a,x,z) \arrow[d] \\
T(a,b,x,x) \arrow[r] & T(a,b,x,z)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\int_a T(a,a,z,z) \arrow[r] \arrow[d] & \int_a T(a,a,x,z) \arrow[d] \\
T(a,b,z,z) \arrow[r] & T(a,b,x,z)
\end{tikzcd}$$

また C の射 $a\to b$ に対して次が可換である．

$$\begin{tikzcd}
 & \int_a T(a,a,x,x) \arrow[dl] \arrow[d] \\
T(a,a,x,x) \arrow[r] & T(a,b,x,x)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & \int_a T(a,a,x,x) \arrow[dl] \arrow[d] \\
T(b,b,x,x) \arrow[r] & T(a,b,x,x)
\end{tikzcd}$$

これらを組み合わせて，次の可換図式を得る．

$$\begin{tikzcd}
 & & & & T(b,b,z,z) \arrow[dd] \\
 & & & \int_a T(a,a,z,z) \arrow[ur] \arrow[dr] \arrow[dd] & \\
 & & & & T(a,b,z,z) \arrow[dd] \\
 & \int_a T(a,a,x,x) \arrow[rr] \arrow[dl] \arrow[dr] & & \int_a T(a,a,x,z) \arrow[dr] & \\
T(a,a,x,x) \arrow[rr] & & T(a,b,x,x) \arrow[rr] & & T(a,b,x,z)
\end{tikzcd}$$

よって x に関する wedge $d\overset{\cdot\cdot}{\to}\int_a T(a,a,x,x)$ が与えられた時，$\langle a,x\rangle$ に関する wedge $d\overset{\cdot\cdot}{\to}T(a,a,x,x)$ が得られる．

逆に $\langle a,x\rangle$ に関する wedge $d\overset{\cdot\cdot}{\to}T(a,a,x,x)$ が与えられたとする．このとき $x\in X$ を固定すれば $a,b\in C$ に関する wedge $d\overset{\cdot\cdot}{\to}T(a,b,x,x)$ が得られる．従ってエンドの普遍

性により次の点線の射が得られる．

$$\begin{tikzcd}
d \arrow[rrr] \arrow[drr, dashed] \arrow[dddr, dashed] \arrow[dddd] & & & T(b,b,z,z) \arrow[dd] \\
& & \int_a T(a,a,z,z) \arrow[ur] \arrow[dr] \arrow[dd] & \\
& & & T(a,b,z,z) \arrow[dd] \\
& \int_a T(a,a,x,x) \arrow[r] \arrow[dl] \arrow[d] & \int_a T(a,a,x,z) \arrow[dr] & \\
T(a,a,x,x) \arrow[r] & T(a,b,x,x) \arrow[rr] & & T(a,b,x,z)
\end{tikzcd}$$

これにより x に関する wedge $d \overset{..}{\to} \int_a T(a,a,x,x)$ が得られる．

以上の対応により

$$\int_{\langle a,x\rangle \in C\times X} T(a,a,x,x) \cong \int_{x\in X}\int_{a\in C} T(a,a,x,x).$$

が得られることが分かる． □

特に，各エンドが存在するという仮定の下で，積分の順序交換

$$\int_{x\in X}\int_{a\in C} T(a,a,x,x) \cong \int_{a\in C}\int_{x\in X} T(a,a,x,x)$$

が成り立つ．

エンドの定義から分かるように，エンドは以下のように極限で書くことが出来る．二つの直積

$$d := \prod_{a\in \mathrm{Ob}(C)} T(a,a), \quad d' := \prod_{f\in \mathrm{Mor}(C)} T(\mathrm{dom}(f), \mathrm{cod}(f))$$

を考え，

$$T(\mathrm{id}, f)\colon T(\mathrm{dom}(f), \mathrm{dom}(f)) \to T(\mathrm{dom}(f), \mathrm{cod}(f))$$

により得られる射を $s\colon d\to d'$,

$$T(f, \mathrm{id})\colon T(\mathrm{cod}(f), \mathrm{cod}(f)) \to T(\mathrm{dom}(f), \mathrm{cod}(f))$$

により得られる射を $t\colon d\to d'$ とする．このときエンド $\int_a T(a,a)$ は $s,t\colon d\to d'$ の equalizer である．故に

定理 5. C が小圏で，D が完備ならば，$T\colon C^{\mathrm{op}}\times C\to D$ のエンド $\int_a T(a,a)\in D$ が存在する． $\square$

定理 6. 連続な関手はエンドと交換する．即ち，$F\colon D\to X$ を連続関手で，$T\colon C^{\mathrm{op}}\times C\to D$ のエンド $\int_a T(a,a)$ が存在するとすれば $F(\int_a T(a,a))\cong\int_a F(T(a,a))$. $\square$

系 7. $\mathrm{Hom}_D(d,\int_c T(c,c))\cong\int_c \mathrm{Hom}_D(d,T(c,c))$ $\square$

D^{op} で考えれば $\mathrm{Hom}_D(\int^c T(c,c),d)\cong\int_c \mathrm{Hom}_D(T(c,c),d)$ も分かる．

エンドは極限で書けたが，逆に極限はエンドで書くことが出来る．$F\colon J\to C$ を関手としたとき，$F(j,k):=F(k)$ とすることで F を $F\colon J^{\mathrm{op}}\times J\to C$ とみなすことができる．(即ち，射影 $P_2\colon J^{\mathrm{op}}\times J\to J$ との合成 $F\circ P_2$ を考えるのである．）このとき自然変換 $\theta\colon\Delta a\Rightarrow F$ は可換図式

$$\begin{tikzcd}
 & F(j) \arrow[dr, "F(\mathrm{id},f)=Ff"] & \\
a \arrow[ur, "\theta_j"] \arrow[dr, "\theta_k"'] & & F(k) \\
 & F(k) \arrow[ur, "F(f,\mathrm{id})=\mathrm{id}"'] &
\end{tikzcd}$$

を与える．よって $\displaystyle\int_{j\in J}F(j)=\lim F$ である．

定義. C を圏として，$a\in C$ と $x\in\mathbf{Set}$ を取る．

(1) x から $\mathrm{Hom}_C(a,-)$ への普遍射を $x\to\mathrm{Hom}_C(a,c)$ とするとき，c を copower object (もしくは tensor object) といい $x\odot a$ で表す．
(2) x から $\mathrm{Hom}_C(-,a)$ への普遍射を $x\to\mathrm{Hom}_C(c,a)$ とするとき，c を power object (もしくは cotensor object) といい $x\pitchfork a$ で表す．

普遍射の性質により

$$\mathrm{Hom}_C(x\odot a,b)\cong\mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(x,\mathrm{Hom}_C(a,b))$$
$$\mathrm{Hom}_C(b,x\pitchfork a)\cong\mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(x,\mathrm{Hom}_C(b,a))$$

である．また各対象 $a\in C$，$x\in\mathbf{Set}$ に対して $x\odot a$，$x\pitchfork a$ が存在すれば，これらは関

手 $\odot\colon \mathbf{Set}\times C\to C$，$\pitchfork\colon \mathbf{Set}^{\mathrm{op}}\times C\to C$ を定め，随伴

$$
\begin{aligned}
-\odot a &\dashv \mathrm{Hom}_C(a,-)\colon \mathbf{Set}\to C\\
-\pitchfork a &\dashv \mathrm{Hom}_C(-,a)\colon \mathbf{Set}\to C^{\mathrm{op}}
\end{aligned}
$$

が成り立つ．(「随伴関手」の PDF を参照．)

例 8. $C=\mathbf{Set}$ の場合，$-\times a\dashv \mathrm{Hom}(a,-)\colon \mathbf{Set}\to\mathbf{Set}$ だから $x\odot a\cong x\times a$ である．また $\mathrm{Hom}(-,a)\dashv \mathrm{Hom}(-,a)\colon \mathbf{Set}\to\mathbf{Set}^{\mathrm{op}}$ だから (「Kan 拡張」の PDF を参照) $x\pitchfork a\cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(x,a)=a^x$ である． □

定理 9. C,D,U を圏，$F\colon C\to D$，$E\colon C\to U$ を関手とし，各 $c,c'\in C$，$d\in D$ に対して copower $\mathrm{Hom}_D(Fc,d)\odot Ec'$ が存在するとする．更に各 $d\in D$ に対してコエンド $\displaystyle\int^{c\in C}\mathrm{Hom}_D(Fc,d)\odot Ec$ が存在するとする．このとき Kan 拡張 $F^{\dagger}E$ が存在する．

証明. $L:=\displaystyle\int^{c\in C}\mathrm{Hom}_D(Fc,-)\odot Ec$ と置く．$S\colon D\to U$ に対して自然に

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_{U^D}(L,S) &\cong \int_{d\in D}\mathrm{Hom}_U(Ld,Sd)\\
&= \int_{d\in D}\mathrm{Hom}_U\Big(\int^{c\in C}\mathrm{Hom}_D(Fc,d)\odot Ec,Sd\Big)\\
&\cong \int_{d\in D}\int_{c\in C}\mathrm{Hom}_U(\mathrm{Hom}_D(Fc,d)\odot Ec,Sd)\\
&\cong \int_{d\in D}\int_{c\in C}\mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(\mathrm{Hom}_D(Fc,d),\mathrm{Hom}_U(Ec,Sd))\\
&\cong \int_{c\in C}\int_{d\in D}\mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(\mathrm{Hom}_D(Fc,d),\mathrm{Hom}_U(Ec,Sd))\\
&\cong \int_{c\in C}\mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}^D}(\mathrm{Hom}_D(Fc,-),\mathrm{Hom}_U(Ec,S-))\\
&\cong \int_{c\in C}\mathrm{Hom}_U(Ec,SFc)\\
&\cong \mathrm{Hom}_{U^C}(E,SF)
\end{aligned}
$$

であるから $L\cong F^{\dagger}E$ である． □

双対的に，$F^{\ddagger}E\cong\displaystyle\int_{c\in C}\mathrm{Hom}_D(-,Fc)\pitchfork Ec$ である．