

双対

alg-d

http://alg-d.com/math/kan_extension/

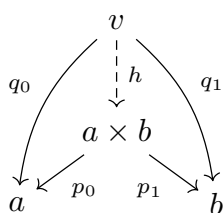
2019年11月21日

圏論における概念に対して、射の向きを逆にして得られる概念を双対概念という。

1 余極限

圏 C の対象 $a, b \in C$ に対して、 a と b の直積とは三つ組 $\langle a \times b, p_0, p_1 \rangle$ であって以下の条件を満たすものであった。

- (1) $a \times b$ は C の対象である。
- (2) $p_0: a \times b \rightarrow a$, $p_1: a \times b \rightarrow b$ は C の射である。
- (3) 三つ組 $\langle v, q_0, q_1 \rangle$ が同じ条件を満たすならば、射 $h: v \rightarrow a \times b$ が一意に存在して $q_0 = p_0 \circ h$, $q_1 = p_1 \circ h$ となる。

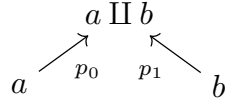


この定義における射の向きを全て逆にしたものが「直積の双対概念」である。これを余直積^{*1}と呼ぶ。(双対概念は頭に「余」(英語では co) を付けて表すことが多い。)つまり余直積の定義は次のようになる。

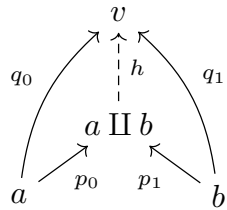
定義. 圏 C の対象 $a, b \in C$ の余直積 (coproduct) とは、三つ組 $\langle a \amalg b, p_0, p_1 \rangle$ であって以下の条件を満たすものである。

^{*1} 直和 (direct sum) と呼ぶこともあるが、直和は別の意味で使われる場合がある為、余直積と呼んだ方が良いと思う。

- (1) $a \amalg b$ は C の対象である。
 (2) $p_0: a \rightarrow a \amalg b$, $p_1: b \rightarrow a \amalg b$ は C の射である。



- (3) $\langle v, q_0, q_1 \rangle$ が同じ条件 (即ち, v が対象で $q_0: a \rightarrow v$, $q_1: b \rightarrow v$ が射となる) を満たすならば, 射 $h: a \amalg b \rightarrow v$ が一意に存在して $q_0 = h \circ p_0$, $q_1 = h \circ p_1$ となる。即ち次の図式が可換である。



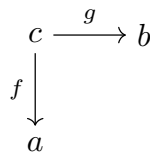
つまり圏 C における a と b の余直積とは, 圏 C^{op} における a と b の直積である。終対象, pullback, equalizer についても同様に双対を考えることができ, それを始対象, pushout, coequalizer と呼ぶ。定義を書き下すと以下のようなになる。

定義. 対象 $u \in C$ が始対象 (initial object)

\iff 任意の $v \in C$ に対して射 $u \rightarrow v$ が一意に存在する。

始対象は記号 0 で表すことが多い。

定義. C を圏, $a, b, c \in C$ を対象, $f: c \rightarrow a$, $g: c \rightarrow b$ を射とする。



f と g の pushout とは, 三つ組 $\langle a \amalg_c b, p_0, p_1 \rangle$ であって以下の条件を満たすものである。

- (1) $a \amalg_c b$ は C の対象である。
 (2) $p_0: a \rightarrow a \amalg_c b$, $p_1: b \rightarrow a \amalg_c b$ は C の射で, $p_0 \circ f = p_1 \circ g$ を満たす (即ち次の

図式が可換である).

$$\begin{array}{ccc}
 c & \xrightarrow{g} & b \\
 f \downarrow & & \downarrow p_1 \\
 a & \xrightarrow{p_0} & a \amalg_c b
 \end{array}$$

- (3) $\langle v, q_0, q_1 \rangle$ が同じ条件 (即ち, v が対象で $q_0: a \rightarrow v, q_1: b \rightarrow v$ が射で, $q_0 \circ f = q_1 \circ g$ となる) を満たすならば, 射 $h: a \amalg_c b \rightarrow v$ が一意に存在して $q_0 = h \circ p_0, q_1 = h \circ p_1$ となる. 即ち次の図式が可換である.

$$\begin{array}{ccc}
 c & \xrightarrow{g} & b \\
 f \downarrow & & \downarrow p_1 \\
 a & \xrightarrow{p_0} & a \amalg_c b \\
 & \searrow q_0 & \downarrow h \\
 & & v
 \end{array}$$

定義. C を圏, $a, b \in C$ を対象, $f, g: a \rightarrow b$ を射とする. f と g の coequalizer とは, 組 $\langle u, e \rangle$ であって以下の条件を満たすものである.

- (1) u は C の対象である.
- (2) $e: b \rightarrow u$ は C の射で, $e \circ f = e \circ g$ を満たす.

$$a \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{array} b \xrightarrow{e} u$$

- (3) $\langle v, e' \rangle$ が同じ条件 (即ち, v が対象で $e': b \rightarrow v$ が射で, $e' \circ f = e' \circ g$ となる) を満たすならば, 射 $h: u \rightarrow v$ が一意に存在して $e' = h \circ e$ となる.

$$\begin{array}{ccc}
 a \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{array} b & \xrightarrow{e} & u \\
 & \searrow e' & \downarrow h \\
 & & v
 \end{array}$$

余直積などの定義は, 射の向きを逆にしただけなので, 直積などと同様の定理が成り立つことが分かる (証明における射の向きを逆にすればよい). 例えば

命題 1. C を圏, $a, b \in C$ を対象とする. $\langle u, p_0, p_1 \rangle, \langle v, q_0, q_1 \rangle$ を a と b の余直積とする. このとき同型 $u \cong v$ が成り立つ. □

命題 2. 図式

$$\begin{array}{ccccc} a & \longrightarrow & b & \longrightarrow & c \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ x & \longrightarrow & y & \longrightarrow & z \end{array}$$

において左の四角が pushout を与えているとする. このとき

右の四角が pushout を与える \iff 外側の四角が pushout を与える

□

命題 3. 圏 C が余直積と coequalizer を持つとき, pushout を持つ.

□

例 4. 集合の圏 \mathbf{Set} の場合, 余直積とは非交和のことである. つまり $X, Y \in \mathbf{Set}$ に対して $X \amalg Y := (X \times \{0\}) \cup (Y \times \{1\})$ として, $p_0: X \rightarrow X \amalg Y$, $p_1: Y \rightarrow X \amalg Y$ を標準埋込とすれば $\langle X \amalg Y, p_0, p_1 \rangle$ が X と Y の余直積である.

また $f, g: X \rightarrow Y$ を写像としたとき, f と g の coequalizer は次で与えられる. まず Y 上の二項関係 R を $R := \{ \langle f(x), g(x) \rangle \mid x \in X \} \subset Y \times Y$ により定義し, R を含む最小の同値関係を \sim とする. このとき標準全射 $Y \rightarrow Y/\sim$ が f と g の coequalizer である.

□

例 5. 群の圏 \mathbf{Grp} における余直積は群の自由積 (free product) であり, pushout は融合積 (amalgamated product) である.

□

例 6. アーベル群の圏 \mathbf{Ab} における余直積はアーベル群の直和である.

□

例 7. 位相空間の圏 \mathbf{Top} における余直積は位相空間の直和である.

□

※ \mathbf{Grp} , \mathbf{Ab} , \mathbf{Top} などの場合, どれも直積は「集合としての直積 (= \mathbf{Set} での直積)」に構造を入れたもの, になっていた. 一方, 余直積は「集合としての非交和 (= \mathbf{Set} での余直積)」に構造を入れたもの, には (\mathbf{Top} を除いて) っていない. 双対なのにこのような違いがあるのは一見不思議であるが, 実は第一章で登場する随伴関手を使って理解することができる. (忘却関手が左随伴関手/右随伴関手を持つか, が関係している.)

2 モノ射・エピ射

双対の例として, ここではモノ射・エピ射を取り上げる.

定義. 射 $f: a \rightarrow b$ がモノ射 (monomorphism)

$\iff c \in C$ を対象, $g, h: c \rightarrow a$ を射とするとき, $f \circ g = f \circ h$ ならば $g = h$ である.

$$c \begin{array}{c} \xrightarrow{g} \\ \xrightarrow{h} \end{array} a \xrightarrow{f} b$$

定義. 射 $f: a \rightarrow b$ がエピ射 (epimorphism)

$\iff c \in C$ を対象, $g, h: b \rightarrow c$ を射とするとき, $g \circ f = h \circ f$ ならば $g = h$ である.

$$a \xrightarrow{f} b \begin{array}{c} \xrightarrow{g} \\ \xrightarrow{h} \end{array} c$$

モノ射とエピ射は互いに双対である.

例 8. **Set** におけるモノ射とは単射であり, エピ射とは全射である. □

この例から, モノ射は単射を, エピ射は全射を一般化したような概念だと思えることができる. 但し, 圏によってはモノ射が単射, エピ射が全射であるとは限らないので注意が必要である.

例 9. 例えば **CRing** を単位的可換環と環準同型がなす圏として, **CRing** の射として包含写像 $i: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$ を考える. 環準同型 $f: \mathbb{Q} \rightarrow R$ は $f(1)$ の値で定まるから, i はエピ射であることが分かる. しかし i は全射ではない. □

命題 10. $f: a \rightarrow b, g: b \rightarrow c$ を射とする.

- (1) f, g が共にモノ射ならば $g \circ f$ もモノ射である.
- (2) $g \circ f$ がモノ射ならば f もモノ射である.
- (3) f, g が共にエピ射ならば $g \circ f$ もエピ射である.
- (4) $g \circ f$ がエピ射ならば g もエピ射である.

証明. 3, 4 は双対なので, 1, 2 を示せばよい.

(1) f, g をモノ射とする. $h, k: d \rightarrow a$ を $(g \circ f) \circ h = (g \circ f) \circ k$ となるように取る.

$$d \begin{array}{c} \xrightarrow{h} \\ \xrightarrow{k} \end{array} a \xrightarrow{f} b \xrightarrow{g} c$$

すると $g \circ (f \circ h) = g \circ (f \circ k)$ だから, g がモノ射であることより $f \circ h = f \circ k$ である. よって f がモノ射であることから $h = k$ となる. 故に $g \circ f$ はモノ射である.

(2) $g \circ f$ がモノ射だとする. $h, k: d \rightarrow a$ を $f \circ h = f \circ k$ となるように取る.

$$d \begin{array}{c} \xrightarrow{h} \\ \xrightarrow{k} \end{array} a \xrightarrow{f} b \xrightarrow{g} c$$

このとき $g \circ f \circ h = g \circ f \circ k$ だから, $g \circ f$ がモノ射であることより $h = k$ である. \square

命題 11. 同型射はモノ射かつエピ射である.

証明. 双対を考えればよいから, 同型射 $f: a \rightarrow b$ がモノ射であることを示せばよい. そのために対象 $c \in C$ と射 $g, h: c \rightarrow a$ を $f \circ g = f \circ h$ となるように取る. $f^{-1}: b \rightarrow a$ を f の逆射とする.

$$c \begin{array}{c} \xrightarrow{g} \\ \xrightarrow{h} \end{array} a \begin{array}{c} \xleftarrow{f} \\ \xleftarrow{f^{-1}} \end{array} b$$

このとき $g = f^{-1} \circ f \circ g = f^{-1} \circ f \circ h = h$ である. 故に f はモノ射である. \square

例 12. モノ射かつエピ射ならば同型射, は一般には成り立たない*2. 例えば例 9 で出てきた **CRing** における射 $i: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$ はモノ射かつエピ射であるが, 同型射ではない. \square

命題 13. 圏 C が終対象 1 を持つとき, 任意の射 $f: 1 \rightarrow a$ はモノ射である.

証明. $b \in C$ を対象としたとき, 射 $b \rightarrow 1$ はただ一つしかないから明らか. \square

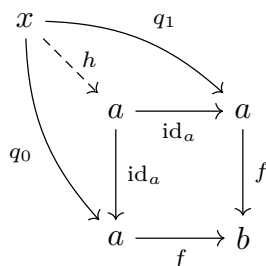
命題 14. 射 $f: a \rightarrow b$ がモノ射 \iff 次の図式が pullback を与える.

$$\begin{array}{ccc} a & \xrightarrow{\text{id}_a} & a \\ \text{id}_a \downarrow & & \downarrow f \\ a & \xrightarrow{f} & b \end{array}$$

証明. (\implies) $f: a \rightarrow b$ をモノ射とする. 任意の $x \in C$ と $q_0, q_1: x \rightarrow a$ で $f \circ q_0 = f \circ q_1$

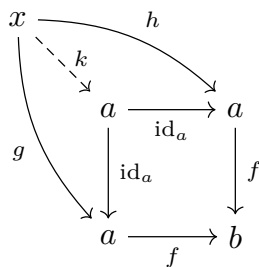
*2 これが成り立つ圏は balanced であるという.

となるものを取る.



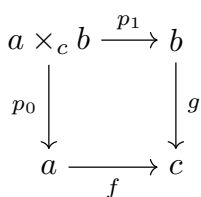
f がモノ射だから $q_0 = q_1$ である. よって $h = q_0$ と取れば図式が可換になる. また明らかにこのような h は一意である. 故にこの図式が pullback となることが分かった.

(\Leftarrow) 次の図式で右下の四角が pullback を与えるとする. $g, h: x \rightarrow a$ が $f \circ g = f \circ h$ を満たすとする.



このとき pullback の普遍性から, 点線の射 $k: x \rightarrow a$ が存在して図式が可換となる. 従って $g = k = h$ となり, f はモノ射である. \square

命題 15. $f: a \rightarrow c$ をモノ射で, $g: b \rightarrow c$ を射として, f と g の pullback が存在するとする. 次の図式をその pullback とするとき, p_1 もモノ射である.*³



*³ 一般に pullback において, p_1 を f の (g に沿った) pullback と呼ぶ. よってこの命題は「モノ射の pullback はモノ射」と言い表すことができる.

証明. $x \in C$ を対象, $h, k: x \rightarrow a \times_c b$ を射として $p_1 \circ h = p_1 \circ k$ であるとする.

$$\begin{array}{ccc} x & \begin{array}{c} \xrightarrow{h} \\ \xrightarrow{k} \end{array} & a \times_c b & \xrightarrow{p_1} & b \\ & & \downarrow p_0 & & \downarrow g \\ & & a & \xrightarrow{f} & c \end{array}$$

このとき $f \circ p_0 \circ h = g \circ p_1 \circ h = g \circ p_1 \circ k = f \circ p_0 \circ k$ である. f がモノ射だから $p_0 \circ h = p_0 \circ k$ を得る. よって次の二つの図式は可換である.

$$\begin{array}{ccc} x & \xrightarrow{p_1 \circ h = p_1 \circ k} & b \\ \downarrow p_0 \circ h = p_0 \circ k & \searrow h & \downarrow g \\ a \times_c b & \xrightarrow{p_1} & b \\ \downarrow p_0 & & \downarrow g \\ a & \xrightarrow{f} & c \end{array} \quad \begin{array}{ccc} x & \xrightarrow{p_1 \circ h = p_1 \circ k} & b \\ \downarrow p_0 \circ h = p_0 \circ k & \searrow k & \downarrow g \\ a \times_c b & \xrightarrow{p_1} & b \\ \downarrow p_0 & & \downarrow g \\ a & \xrightarrow{f} & c \end{array}$$

従って pullback の普遍性から $h = k$ が分かる. □

命題 16. 次の図式が equalizer を与えるとする.

$$a \xrightarrow{f} b \begin{array}{c} \xrightarrow{g} \\ \xrightarrow{h} \end{array} c$$

このとき f はモノ射である.

証明. $k, l: d \rightarrow a$ を射として $f \circ k = f \circ l$ であるとする.

$$d \begin{array}{c} \xrightarrow{k} \\ \xrightarrow{l} \end{array} a \xrightarrow{f} b \begin{array}{c} \xrightarrow{g} \\ \xrightarrow{h} \end{array} c$$

このとき $g \circ f \circ k = h \circ f \circ k, g \circ f \circ l = h \circ f \circ l$ である.

$$\begin{array}{ccc} & a & \xrightarrow{f} & b & \begin{array}{c} \xrightarrow{g} \\ \xrightarrow{h} \end{array} & c \\ & \uparrow k & \nearrow f \circ k = f \circ l & & & \\ d & & & & & \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & a & \xrightarrow{f} & b & \begin{array}{c} \xrightarrow{g} \\ \xrightarrow{h} \end{array} & c \\ & \uparrow l & \nearrow f \circ k = f \circ l & & & \\ d & & & & & \end{array}$$

よって equalizer の普遍性から $k = l$ が分かる. □

双対を考えれば次の命題が成り立つことが分かる.

命題 17. 圏 C が始対象 0 を持つとき, 任意の射 $f: a \rightarrow 0$ はエピ射である. □

命題 18. 射 $f: a \rightarrow b$ がエピ射 \iff 次の図式が pushout を与える.

$$\begin{array}{ccc} a & \xrightarrow{f} & b \\ f \downarrow & & \downarrow \text{id}_b \\ b & \xrightarrow{\text{id}_b} & b \end{array}$$

□

命題 19. エピ射の pushout はエピ射である. 即ち, $f: c \rightarrow a$ をエピ射で, $g: c \rightarrow b$ を射として, f と g の pushout が存在するとする. 次の図式をその pushout とするとき, p_1 もエピ射である.

$$\begin{array}{ccc} c & \xrightarrow{g} & b \\ f \downarrow & & \downarrow p_1 \\ a & \xrightarrow{p_0} & a \amalg_c b \end{array}$$

□

命題 20. 次の図式が coequalizer を与えるとする.

$$a \begin{array}{c} \xrightarrow{g} \\ \xrightarrow{h} \end{array} b \xrightarrow{f} c$$

このとき f はエピ射である. □