双対

alg-d
http://alg-d.com/math/kan_extension/

2018 年 5 月 10 日

圏論における概念に対して，射の向きを逆にして得られる概念を双対概念という．

1　余極限

圏 C の対象 $a, b \in C$ に対して，a と b の直積とは三つ組 $\langle a \times b, p_0, p_1 \rangle$ であって以下の条件を満たすものであった．

(1) $a \times b$ は C の対象である．
(2) $p_0 \colon a \times b \to a$，$p_1 \colon a \times b \to b$ は C の射である．
(3) 三つ組 $\langle v, q_0, q_1 \rangle$ が同じ条件を満たすならば，射 $h \colon v \to a \times b$ が一意に存在して $q_0 = p_0 \circ h$，$q_1 = p_1 \circ h$ となる．

$$\begin{tikzcd}
& v \arrow[ddl, bend right, "q_0"'] \arrow[d, dashed, "h"] \arrow[ddr, bend left, "q_1"] & \\
& a \times b \arrow[dl, "p_0"'] \arrow[dr, "p_1"] & \\
a & & b
\end{tikzcd}$$

この定義における射の向きを全て逆にしたものが「直積の双対概念」である．これを余直積[*1]と呼ぶ．(双対概念は頭に「余」(英語では co) を付けて表すことが多い．) つまり余直積の定義は次のようになる．

定義. 圏 C の対象 $a, b \in C$ の余直積 (coproduct) とは，三つ組 $\langle a \amalg b, p_0, p_1 \rangle$ であって以下の条件を満たすものである．

[*1] 直和 (direct sum) と呼ぶこともあるが，直和は別の意味で使われる場合がある為，余直積と呼んだ方が良いと思う．

(1) $a \amalg b$ は C の対象である．

(2) $p_0\colon a \to a \amalg b$，$p_1\colon b \to a \amalg b$ は C の射である．

$$\begin{tikzcd} & a \amalg b & \\ a \arrow[ur, "p_0"'] & & b \arrow[ul, "p_1"] \end{tikzcd}$$

(3) $\langle v, q_0, q_1 \rangle$ が同じ条件 (即ち，v が対象で $q_0\colon a \to v$，$q_1\colon b \to v$ が射となる) を満たすならば，射 $h\colon a \amalg b \to v$ が一意に存在して $q_0 = p_0 \circ h$，$q_1 = p_1 \circ h$ となる．即ち次の図式が可換である．

$$\begin{tikzcd} & v & \\ & a \amalg b \arrow[u, dashed, "h"] & \\ a \arrow[ur, "p_0"'] \arrow[uur, bend left, "q_0"] & & b \arrow[ul, "p_1"] \arrow[uul, bend right, "q_1"'] \end{tikzcd}$$

つまり圏 C における a と b の余直積とは，圏 C^{op} における a と b の直積である．終対象，pullback，equalizer についても同様に双対を考えることができて，それを始対象，pushout，coequalizer と呼ぶ．定義を書き下すと以下のようになる．

定義． 対象 $u \in C$ が始対象 (initial object)
$\iff$ 任意の $v \in C$ に対して射 $u \to v$ が一意に存在する．

始対象は記号 0 で表すことが多い．

定義． C を圏，$a, b, c \in C$ を対象，$f\colon c \to a$，$g\colon c \to b$ を射とする．

$$\begin{tikzcd} c \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & b \\ a & \end{tikzcd}$$

f と g の pushout とは，三つ組 $\langle a \amalg_c b, p_0, p_1 \rangle$ であって以下の条件を満たすものである．

(1) $a \amalg_c b$ は C の対象である．

(2) $p_0\colon a \to a \amalg_c b$，$p_1\colon b \to a \amalg_c b$ は C の射で，$p_0 \circ f = p_1 \circ g$ を満たす (即ち次の

図式が可換である).

$$\begin{tikzcd} c \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & b \arrow[d, "p_1"'] \\ a \arrow[r, "p_0"] & a \amalg_c b \end{tikzcd}$$

(3) $\langle v, q_0, q_1 \rangle$ が同じ条件 (即ち, v が対象で $q_0 \colon a \to v$, $q_1 \colon b \to v$ が射で, $q_0 \circ f = q_1 \circ g$ となる) を満たすならば, 射 $h \colon a \amalg_c b \to v$ が一意に存在して $q_0 = h \circ p_0$, $q_1 = h \circ p_1$ となる．即ち次の図式が可換である.

$$\begin{tikzcd} c \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & b \arrow[d, "p_1"'] \arrow[ddr, bend left, "q_1"] & \\ a \arrow[r, "p_0"] \arrow[drr, bend right, "q_0"'] & a \amalg_c b \arrow[dr, dashed, "h"'] & \\ & & v \end{tikzcd}$$

定義. C を圏，$a, b \in C$ を対象，$f, g \colon a \to b$ を射とする．f と g の coequalizer とは，組 $\langle u, e \rangle$ であって以下の条件を満たすものである.

(1) u は C の対象である.

(2) $e \colon b \to u$ は C の射で，$e \circ f = e \circ g$ を満たす.

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & b \arrow[r, "e"] & u \end{tikzcd}$$

(3) $\langle v, e' \rangle$ が同じ条件 (即ち，v が対象で $e' \colon b \to v$ が射で，$e' \circ f = e' \circ g$ となる) を満たすならば，射 $h \colon u \to v$ が一意に存在して $e' = h \circ e$ となる.

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & b \arrow[r, "e"] \arrow[dr, "e'"'] & u \arrow[d, dashed, "h"] \\ & & v \end{tikzcd}$$

余直積などの定義は，射の向きを逆にしただけなので，直積などと同様の定理が成り立つことが分かる (証明における射の向きを逆にすればよい)．例えば

命題 1. C を圏，$a, b \in C$ を対象とする．$\langle u, p_0, p_1 \rangle$，$\langle v, q_0, q_1 \rangle$ を a と b の余直積とする．このとき同型 $u \cong v$ が成り立つ. $\square$

命題 2. 図式

$$\begin{array}{ccccc} a & \longrightarrow & b & \longrightarrow & c \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ x & \longrightarrow & y & \longrightarrow & z \end{array}$$

において左の四角が pushout を与えているとする．このとき

$$\text{右の四角が pushout を与える} \iff \text{外側の四角が pushout を与える}$$

□

命題 3. 圏 C が余直積と coequalizer を持つとき，pushout を持つ． □

例 4. 集合の圏 **Set** の場合，余直積とは非交和のことである．つまり $X, Y \in \mathbf{Set}$ に対して $X \amalg Y := (X \times \{0\}) \cup (Y \times \{1\})$ として，$p_0 \colon X \to X \amalg Y$，$p_1 \colon Y \to X \amalg Y$ を標準埋込とすれば $\langle X \amalg Y, p_0, p_1 \rangle$ が X と Y の余直積である．

また $f, g \colon X \to Y$ を写像としたとき，f と g の coequalizer は次で与えられる．まず Y 上の二項関係 R を $R := \{\langle f(x), y(x) \rangle \mid x \in X\} \subset Y \times Y$ により定義し，R を含む最小の同値関係を $\sim$ とする．このとき標準全射 $Y \to Y/{\sim}$ が f と g の coequalizer である．

□

例 5. 群の圏 **Grp** における余直積は群の自由積である． □

例 6. アーベル群の圏 **Ab** における余直積はアーベル群の直和である． □

例 7. 位相空間の圏 **Top** における余直積は位相空間の直和である． □

※ **Grp**, **Ab**, **Top** などの場合，どれも直積は「集合としての直積 (= **Set** での直積)」に構造を入れたもの，になっていた．一方，余直積は「集合としての非交和 (= **Set** での余直積)」に構造を入れたもの，には (**Top** を除いて) なっていない．双対なのにこのような違いがあるのは一見不思議であるが，実は第一章で登場する随伴関手を使って理解することができる．(忘却関手が左随伴関手/右随伴関手を持つか，が関係している．)

2　モノ射・エピ射

双対の例として，ここではモノ射・エピ射を取り上げる．

定義. 射 $f\colon a \to b$ がモノ射 (monomorphism)
$\iff c \in C$ を対象，$g, h\colon c \to a$ を射とするとき，$f \circ g = f \circ h$ ならば $g = h$ である．

$$c \overset{g}{\underset{h}{\rightrightarrows}} a \xrightarrow{f} b$$

定義. 射 $f\colon a \to b$ がエピ射 (epimorphism)
$\iff c \in C$ を対象，$g, h\colon b \to c$ を射とするとき，$g \circ f = h \circ f$ ならば $g = h$ である．

$$a \xrightarrow{f} b \overset{g}{\underset{h}{\rightrightarrows}} c$$

モノ射とエピ射は互いに双対である．

例 8. **Set** におけるモノ射とは単射であり，エピ射とは全射である． □

この例から，モノ射は単射を，エピ射は全射を一般化したような概念だと思うことができる．但し，圏によってはモノ射が単射，エピ射が全射であるとは限らないので注意が必要である．

例 9. 例えば **CRing** を単位的可換環と環準同型がなす圏として，包含写像 $i\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ を考える．環順同型 $f\colon \mathbb{Q} \to R$ は $f(1)$ の値で定まるから，i はエピ射であることが分かる．しかし i は全射ではない． □

命題 10. $f\colon a \to b$，$g\colon b \to c$ を射とする．

(1) f, g が共にモノ射ならば $g \circ f$ もモノ射である．
(2) $g \circ f$ がモノ射ならば f もモノ射である．
(3) f, g が共にエピ射ならば $g \circ f$ もエピ射である．
(4) $g \circ f$ がエピ射ならば g もエピ射である．

証明. 3, 4 は双対なので，1, 2 を示せばよい．
(1) f, g をモノ射とする．$h, k\colon d \to a$ を $(g \circ f) \circ h = (g \circ f) \circ k$ となるように取る．

$$d \overset{h}{\underset{k}{\rightrightarrows}} a \xrightarrow{f} b \xrightarrow{g} c$$

すると $g \circ (f \circ h) = g \circ (f \circ k)$ だから，g がモノ射であることより $f \circ h = f \circ k$ である．よって f がモノ射であることから $h = k$ となる．故に $g \circ f$ はモノ射である．

(2) $g \circ f$ がモノ射だとする．$h, k\colon d \to a$ を $f \circ h = f \circ k$ となるように取る．

$$d \underset{k}{\overset{h}{\rightrightarrows}} a \xrightarrow{f} b \xrightarrow{g} c$$

このとき $g \circ f \circ h = g \circ f \circ k$ だから，$g \circ f$ がモノ射であることより $h = k$ である． □

命題 11. 同型射はモノ射かつエピ射である．

証明. 双対を考えればよいから，同型射がモノ射であることのみ示せばよい．

$f\colon a \to b$ を同型射，$f^{-1}\colon b \to a$ をその逆射とする．対象 $c \in C$ と射 $g, h\colon c \to a$ を $f \circ g = f \circ h$ となるように取る．

$$c \underset{h}{\overset{g}{\rightrightarrows}} a \underset{f^{-1}}{\overset{f}{\rightleftarrows}} b$$

このとき $g = g \circ f \circ f^{-1} = h \circ f \circ f^{-1} = h$ である． □

例 12. モノ射かつエピ射ならば同型射，は一般には成り立たない[*2]．例えば先の例で出てきた **CRing** における射 $i\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ はモノ射かつエピ射であるが，同型射ではない． □

命題 13. 圏 C が終対象 1 を持つとき，任意の射 $f\colon 1 \to a$ はモノ射である．

証明. $b \in C$ を対象としたとき，射 $b \to 1$ はただ一つしかないから明らか． □

命題 14. 射 $f\colon a \to b$ がモノ射 $\iff$ 次の図式が pullback を与える．

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "\mathrm{id}_a"] \arrow[d, "\mathrm{id}_a"'] & a \arrow[d, "f"] \\ a \arrow[r, "f"'] & b \end{tikzcd}$$

証明. ($\Longrightarrow$) $f\colon a \to b$ をモノ射とする．任意の $x \in C$ と $q_0, q_1\colon x \to a$ で $f \circ q_0 = f \circ q_1$

[*2] これが成り立つ圏は balanced であるという．

となるものを取る．

$$\begin{tikzcd}
x \arrow[dr, dashed, "h"] \arrow[drr, bend left, "q_1"] \arrow[ddr, bend right, "q_0"'] & & \\
& a \arrow[r, "\mathrm{id}_a"'] \arrow[d, "\mathrm{id}_a"] & a \arrow[d, "f"] \\
& a \arrow[r, "f"'] & b
\end{tikzcd}$$

f がモノ射だから $q_0 = q_1$ である．よって $h = q_0$ と取れば図式が可換になる．また明らかにこのような h は一意である．故にこの図式が pullback となることが分かった．

($\Longleftarrow$) 次の図式で右下の四角が pullback を与えるとする．$g, h\colon x \to a$ が $f \circ g = f \circ h$ を満たすとする．

$$\begin{tikzcd}
x \arrow[dr, dashed, "k"] \arrow[drr, bend left, "h"] \arrow[ddr, bend right, "g"'] & & \\
& a \arrow[r, "\mathrm{id}_a"'] \arrow[d, "\mathrm{id}_a"] & a \arrow[d, "f"] \\
& a \arrow[r, "f"'] & b
\end{tikzcd}$$

このとき pullback の普遍性から，点線の射 $k\colon x \to a$ が存在して図式が可換となる．従って $g = k = h$ となり，f はモノ射である． $\square$

命題 15. $f\colon a \to c$ をモノ射で，$g\colon b \to c$ を射として，f と g の pullback が存在するとする．次の図式をその pullback とするとき，p_1 もモノ射である．[*3]

$$\begin{tikzcd}
a \times_c b \arrow[r, "p_1"] \arrow[d, "p_0"'] & b \arrow[d, "g"] \\
a \arrow[r, "f"'] & c
\end{tikzcd}$$

*3 一般に pullback において，p_1 を f の (g に沿った) pullback と呼ぶ．よってこの命題は「モノ射の pullback はモノ射」と言い表すことができる．

証明. $x \in C$ を対象，$h, k\colon x \to a \times_c b$ を射として $p_1 \circ h = p_1 \circ k$ であるとする．

$$
\begin{tikzcd}
x \arrow[r, shift left, "h"] \arrow[r, shift right, "k"'] & a \times_c b \arrow[r, "p_1"] \arrow[d, "p_0"'] & b \arrow[d, "g"] \\
& a \arrow[r, "f"'] & c
\end{tikzcd}
$$

このとき $f \circ p_0 \circ h = g \circ p_1 \circ h = g \circ p_1 \circ k = f \circ p_0 \circ k$ である．f がモノ射だから $p_0 \circ h = p_0 \circ k$ を得る．よって次の二つの図式は可換である．

$$
\begin{tikzcd}
x \arrow[dr, "h"] \arrow[drr, bend left, "p_1 \circ h = p_1 \circ k"] \arrow[ddr, bend right, "p_0 \circ h = p_0 \circ k"'] & & \\
& a \times_c b \arrow[r, "p_1"'] \arrow[d, "p_0"] & b \arrow[d, "g"] \\
& a \arrow[r, "f"'] & c
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
x \arrow[dr, "k"] \arrow[drr, bend left, "p_1 \circ h = p_1 \circ k"] \arrow[ddr, bend right, "p_0 \circ h = p_0 \circ k"'] & & \\
& a \times_c b \arrow[r, "p_1"'] \arrow[d, "p_0"] & b \arrow[d, "g"] \\
& a \arrow[r, "f"'] & c
\end{tikzcd}
$$

従って普遍性から $h = k$ が分かる． □

命題 16. 次の図式が equalizer を与えるとする．

$$
\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "f"] & b \arrow[r, shift left, "g"] \arrow[r, shift right, "h"'] & c
\end{tikzcd}
$$

このとき f はモノ射である．

証明. $k, l\colon d \to a$ を射として $f \circ k = f \circ l$ であるとする．

$$
\begin{tikzcd}
d \arrow[r, shift left, "k"] \arrow[r, shift right, "l"'] & a \arrow[r, "f"] & b \arrow[r, shift left, "g"] \arrow[r, shift right, "h"'] & c
\end{tikzcd}
$$

このとき $g \circ f \circ k = h \circ f \circ k$，$g \circ f \circ l = h \circ f \circ l$ である．

$$
\begin{tikzcd}
& a \arrow[r, "f"] & b \arrow[r, shift left, "g"] \arrow[r, shift right, "h"'] & c \\
d \arrow[ur, "k"] \arrow[urr, "f \circ k = f \circ l"'] & & &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& a \arrow[r, "f"] & b \arrow[r, shift left, "g"] \arrow[r, shift right, "h"'] & c \\
d \arrow[ur, "l"] \arrow[urr, "f \circ k = f \circ l"'] & & &
\end{tikzcd}
$$

よって equalizer の普遍性から $k = l$ が分かる． □

双対を考えれば次の命題が成り立つことが分かる．

命題 17. 圏 C が始対象 0 を持つとき，任意の射 $f\colon a \to 0$ はエピ射である． □

命題 18. 射 $f\colon a \to b$ がエピ射 $\Longleftrightarrow$ 次の図式が pushout を与える．

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "f"] \arrow[d, "f"'] & b \arrow[d, "\mathrm{id}_b"] \\ b \arrow[r, "\mathrm{id}_b"'] & b \end{tikzcd}$$

□

命題 19. エピ射の pushout はエピ射である．即ち，$f\colon c \to a$ をエピ射で，$g\colon c \to b$ を射として，f と g の pushout が存在するとする．次の図式をその pushout とするとき，p_1 もエピ射である．

$$\begin{tikzcd} c \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & b \arrow[d, "p_1"] \\ a \arrow[r, "p_0"'] & a \amalg_c b \end{tikzcd}$$

□

命題 20. 次の図式が coequalizer を与えるとする．

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, shift left, "g"] \arrow[r, shift right, "h"'] & b \arrow[r, "f"] & c \end{tikzcd}$$

このとき f はエピ射である． □