余米田の補題

alg-d
http://alg-d.com/math/category/

2015 年 3 月 28 日

$P\colon C^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Set}$ を関手とする．米田の補題 $\mathrm{Hom}_{\widehat{C}}(y(c), P) \cong Pc$ は右 Kan 拡張を使って以下のように示すことができる．

右 Kan 拡張 $\mathrm{id}^{\ddagger}_{C}P$ を考える．明らかに $\mathrm{id}^{\ddagger}_{C}P \cong P$ である．

$$\begin{tikzcd}
C^{\mathrm{op}} \arrow[dr, "\mathrm{id}^{\ddagger}_{C}P \cong P"] & \\
C^{\mathrm{op}} \arrow[u, "\mathrm{id}_C"] \arrow[r, "P"'] \arrow[ur, phantom, "\mathrm{id}\Downarrow"] & \mathbf{Set}
\end{tikzcd}$$

一方，$\mathbf{Set}$ は完備だから $\mathrm{id}^{\ddagger}P$ は各点 Kan 拡張で書けるので，$c \in C$，$x \in \mathbf{Set}$ に対して

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(x, \mathrm{id}^{\ddagger}P(c)) \cong \mathrm{Hom}_{\widehat{C}}(\mathrm{Hom}_{C^{\mathrm{op}}}(c, \mathrm{id}-), \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(x, P-))$$

が成り立つ．故に $x = 1$ とすれば

$$\begin{aligned}
Pc &\cong \mathrm{id}^{\ddagger}P(c) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(1, \mathrm{id}^{\ddagger}P(c)) \\
&\cong \mathrm{Hom}_{\widehat{C}}(\mathrm{Hom}_{C^{\mathrm{op}}}(c, -), \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(1, P-)) \\
&\cong \mathrm{Hom}_{\widehat{C}}(\mathrm{Hom}_{C^{\mathrm{op}}}(c, -), P-) \\
&\cong \mathrm{Hom}_{\widehat{C}}(y(c), P-)
\end{aligned}$$

である．故に米田の補題が示された．

ところで，エンドによる右 Kan 拡張の計算 $F^{\ddagger}E = \displaystyle\int_{c \in C} \mathrm{Hom}_D(-, Fc) \pitchfork Ec$ を使え

ば，**Set** においては $x \pitchfork y = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(x, y)$ だから

$$\begin{aligned} P &\cong \mathrm{id}^{\ddagger} P \\ &\cong \int_{c \in C^{\mathrm{op}}} \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(\mathrm{Hom}_{C^{\mathrm{op}}}(-, \mathrm{id}(c)), Pc) \\ &\cong \int_{c \in C^{\mathrm{op}}} \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(\mathrm{Hom}_{C}(c, -), Pc) \\ &\cong \mathrm{Hom}_{\widehat{C}}(y(c), P) \end{aligned}$$

となり，米田の補題が得られる．(但し，エンドによる計算は米田の補題を使って示したので，これは米田の補題の別証明にはならない．）ここで，右 Kan 拡張の代わりに左 Kan 拡張を使えば，次の余米田の補題が得られる．

定理 (余米田の補題)**.** 関手 $P \colon C^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Set}$ に対して

$$P \cong \int^{c \in C^{\mathrm{op}}} y(c) \times Pc$$

証明. $F^{\dagger} E = \displaystyle\int^{c \in C} \mathrm{Hom}_D(Fc, -) \odot Ec$ であり，また **Set** においては $x \odot y = x \times y$ である．よって

$$\begin{aligned} P &\cong \mathrm{id}^{\dagger} P \\ &\cong \int^{c \in C^{\mathrm{op}}} \mathrm{Hom}_{C^{\mathrm{op}}}(\mathrm{id}(c), -) \times Pc \\ &\cong \int^{c \in C^{\mathrm{op}}} y(c) \times Pc \end{aligned}$$

□

もしくは，$y^{\dagger} y \cong \mathrm{id}$ だったから

$$P \cong y^{\dagger} y(P) \cong \int^{c \in C} \mathrm{Hom}_{\widehat{C}}(y(c), P) \times y(c) \cong \int^{c \in C^{\mathrm{op}}} y(c) \times Pc$$

と示すこともできる．