

# 圏の構成例

alg-d

[http://alg-d.com/math/kan\\_extension/](http://alg-d.com/math/kan_extension/)

2017年9月2日

例えば群の場合では、群  $G, H$  が与えられたときに新しい群  $G \times H$  を構成することができた。ここでは圏が与えられたときに、新しい圏を構成する方法をいくつか紹介する。

定義. 圏  $C, D$  の直積  $C \times D$  を以下のように定義する。

- 対象は「 $C$  の対象と  $D$  の対象の組」である。即ち  $\text{Ob}(C \times D) := \text{Ob}(C) \times \text{Ob}(D)$  となる。
- $\langle c, d \rangle$  から  $\langle c', d' \rangle$  への射は成分ごとの射の組  $\langle f: c \rightarrow c', g: d \rightarrow d' \rangle$  である。即ち  $\text{Hom}_{C \times D}(\langle c, d \rangle, \langle c', d' \rangle) := \text{Hom}_C(c, c') \times \text{Hom}_D(d, d')$  となる。
- 射の合成は成分ごとに行う。即ち  $\langle g, g' \rangle \circ \langle f, f' \rangle := \langle g \circ f, g' \circ f' \rangle$  となる。
- $\langle c, d \rangle$  の恒等射は  $\text{id}_{\langle c, d \rangle} := \langle \text{id}_c, \text{id}_d \rangle$  である。

この  $C \times D$  が圏の定義を満たすことは殆ど明らかであろう。

例 1. 集合  $X, Y$  を離散圏と見なして圏の直積  $X \times Y$  を考えると、 $X, Y$  の射は  $\text{id}$  しかないから、 $X \times Y$  の射も  $\text{id}$  のみになる。従って  $X \times Y$  も離散圏である。 $\text{Ob}(X \times Y) = \text{Ob}(X) \times \text{Ob}(Y)$  だったから、圏の直積  $X \times Y$  は直積集合  $X \times Y$  を離散圏とみなしたものである。□

例 2. モノイド  $M, N$  を圏とみなして圏の直積  $M \times N$  を考えると

$$\text{Ob}(M \times N) = \text{Ob}(M) \times \text{Ob}(N) = \{*\} \times \{*\} = \{(*, *)\}$$

だから  $M \times N$  もモノイドとなる。圏の直積の定義から

$$\text{Hom}_{M \times N}(\langle *, * \rangle, \langle *, * \rangle) = \text{Hom}_M(*, *) \times \text{Hom}_N(*, *) = M \times N$$

となるので、圏の直積  $M \times N$  はモノイドとしての直積  $M \times N$  を圏とみなしたものであ

る。特に，群  $G, H$  の圏としての直積は，直積群  $G \times H$  を圏とみなしたものである。□

例 3. 圏  $\mathbf{2} = \{0 \xrightarrow{f} 1\}$  を考える。直積  $\mathbf{2} \times \mathbf{2}$  は 4 個の対象  $\langle 0, 0 \rangle, \langle 0, 1 \rangle, \langle 1, 0 \rangle, \langle 1, 1 \rangle$  を持つ。 $\mathbf{2}$  の射の数は 3 個だから， $\mathbf{2} \times \mathbf{2}$  は 9 個である。そのうちの恒等射 4 個を除いて図示すると次のようになる。

$$\begin{array}{ccc}
 \langle 0, 0 \rangle & \xrightarrow{\langle \text{id}_0, f \rangle} & \langle 0, 1 \rangle \\
 \langle f, \text{id}_0 \rangle \downarrow & \searrow \langle f, f \rangle & \downarrow \langle f, \text{id}_1 \rangle \\
 \langle 1, 0 \rangle & \xrightarrow{\langle \text{id}_1, f \rangle} & \langle 1, 1 \rangle
 \end{array}$$

□

定義. 圏  $C, D$  の直和  $C \amalg D$  を以下のように定義する。

- $\text{Ob}(C \amalg D) := \text{Ob}(C) \sqcup \text{Ob}(D)$  (非交和) である。
- $a$  から  $b$  への射は以下のように定める:

$$\text{Hom}_{C \amalg D}(a, b) := \begin{cases} \text{Hom}_C(a, b) & (a, b \in C \text{ のとき}) \\ \text{Hom}_D(a, b) & (a, b \in D \text{ のとき}) \\ \emptyset & (\text{それ以外の場合}) \end{cases}$$

- 射の合成は  $C, D$  の合成で行う。
- 恒等射は  $C, D$  の恒等射である。

例 4. 集合  $X, Y$  を離散圏と見なしてときの圏の直和  $X \amalg Y$  は  $X$  と  $Y$  の非交和  $X \sqcup Y$  である。□

定義.  $C$  を圏， $x \in C$  を対象とする。スライス圏  $C/x$  を以下のように定義する。

- 対象は  $C$  の射  $f: a \rightarrow x$  である。
- $f: a \rightarrow x$  から  $g: b \rightarrow x$  への射は， $g \circ h = f$  となるような射  $h: a \rightarrow b$  である。

$$\begin{array}{ccc}
 a & \xrightarrow{h} & b \\
 f \searrow & & \nearrow g \\
 & x &
 \end{array}$$

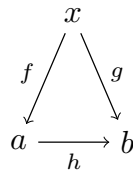
- 射の合成は  $C$  の合成で行う。

- 恒等射は  $C$  の恒等射である .

スライス圏と同じような方法でコスライス圏を得ることができる .

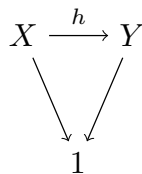
定義.  $C$  を圏 ,  $x \in C$  を対象とする . コスライス圏  $x/C$  を以下のように定義する .

- 対象は  $C$  の射  $f: x \rightarrow a$  である .
- $f: x \rightarrow a$  から  $g: x \rightarrow b$  への射は ,  $h \circ f = g$  となるような射  $h: a \rightarrow b$  である .



- 射の合成は  $C$  の合成で行う .
- 恒等射は  $C$  の恒等射である .

例 5.  $1 \in \text{Set}$  を一元集合として  $\text{Set}/1$  を考える . 集合  $X$  に対して写像  $f: X \rightarrow 1$  はただ一つしかない . よって  $\text{Ob}(\text{Set}/1) = \text{Ob}(\text{Set})$  と見なしてよい .  $X, Y \in \text{Ob}(\text{Set}) = \text{Ob}(\text{Set}/1)$  を取ると , 任意の  $h: X \rightarrow Y$  に対して次の図式は可換である .



よって任意の  $h: X \rightarrow Y$  が  $\text{Set}/1$  の射となる . 以上により  $\text{Set}/1 = \text{Set}$  と見なせることが分かる . 同様にして  $\emptyset/\text{Set} = \text{Set}$  である . □

例 6.  $\text{CRing}$  を単位的可換環と環準同型がなす圏として  $k \in \text{CRing}$  を取るとき , コスライス圏  $k/\text{CRing}$  は  $k$ -代数の圏である . □

例 7.  $1 \in \text{Top}$  を 1 点空間としたとき , コスライス圏  $1/\text{Top}$  は基点付き位相空間の圏  $\text{Top}_*$  である . □

定義.  $C, D$  を圏とする .  $C$  が  $D$  の部分圏 (subcategory) であるとは ,  $\text{Ob}(C) \subset \text{Ob}(D)$  ,  $\text{Mor}(C) \subset \text{Mor}(D)$  であって ,  $C$  におけるドメイン , コドメイン , 合成 , 恒等射が  $D$  におけるそれと一致していることをいう . 記号では  $C \subset D$  と書く

定義. 部分圏  $C \subset D$  が充満部分圏 (full subcategory) であるとは, 任意の  $a, b \in C$  に対して  $\text{Hom}_C(a, b) = \text{Hom}_D(a, b)$  となることをいう.

例 8. 写像の合成を射の合成とすることで, 以下のような圏  $A, B, C$  を定めることができる.

- 集合を対象, 単射を射とする圏を  $A$  とする.
- 有限集合を対象, 写像を射とする圏を  $B$  とする.
- 有限集合を対象, 単射を射とする圏を  $C$  とする.

このとき  $C \subset A \subset \text{Set}$ ,  $C \subset B \subset \text{Set}$  は部分圏である. 更に  $C \subset A$  と  $B \subset \text{Set}$  は充満部分圏になっている. □

例 9.  $\text{Ab} \subset \text{Grp}$  は充満部分圏である. □

例 10. 集合を離散圏とみなした時, 部分圏とは部分集合のことである. またこの場合, 部分圏は常に充満部分圏となる. □

例 11.  $G$  を群,  $H \subset G$  を部分群として  $G, H$  を圏とみなせば  $H \subset G$  は部分圏である. 逆に  $C \subset G$  を部分圏とすると  $C$  はモノイドではあるが群であるとは限らない. □

例 12. 圏  $C$  に対して集まり  $X \subset \text{Ob}(C)$  が与えられたとき, 部分圏  $D \subset C$  を

- $\text{Ob}(D) := X$  とする.
- $a, b \in X$  に対して  $\text{Hom}_D(a, b) := \text{Hom}_C(a, b)$  とする.

により定義することができる. これは明らかに充満部分圏である. □