

圏の構成例

alg-d

http://alg-d.com/math/kan_extension/

2018年9月10日

例えば群の場合では、群 G, H が与えられたときに新しい群 $G \times H$ を構成することができた。ここでは圏が与えられたときに、新しい圏を構成する方法をいくつか紹介する。

定義. 圏 C, D の直積 $C \times D$ を以下のように定義する。

- 対象は「 C の対象と D の対象の組」である。即ち $\text{Ob}(C \times D) := \text{Ob}(C) \times \text{Ob}(D)$ となる。
- $\langle c, d \rangle$ から $\langle c', d' \rangle$ への射は成分ごとの射の組 $\langle f: c \rightarrow c', g: d \rightarrow d' \rangle$ である。つまり $\text{Hom}_{C \times D}(\langle c, d \rangle, \langle c', d' \rangle) := \text{Hom}_C(c, c') \times \text{Hom}_D(d, d')$ となる。
- 射の合成は成分ごとに行う。即ち $\langle g, g' \rangle \circ \langle f, f' \rangle := \langle g \circ f, g' \circ f' \rangle$ となる。
- $\langle c, d \rangle$ の恒等射は $\text{id}_{\langle c, d \rangle} := \langle \text{id}_c, \text{id}_d \rangle$ である。

この $C \times D$ が圏の定義を満たすことは殆ど明らかであろう。

例 1. 集合 X, Y を離散圏と見なして圏の直積 $X \times Y$ を考えると、 X, Y の射は id しかないから、 $X \times Y$ の射も id のみになる。従って $X \times Y$ も離散圏である。 $\text{Ob}(X \times Y) = \text{Ob}(X) \times \text{Ob}(Y)$ だったから、圏の直積 $X \times Y$ は直積集合 $X \times Y$ を離散圏とみなしたものである。□

例 2. モノイド M, N を圏とみなして圏の直積 $M \times N$ を考えると

$$\text{Ob}(M \times N) = \text{Ob}(M) \times \text{Ob}(N) = \{*\} \times \{*\} = \{(*, *)\}$$

だから $M \times N$ もモノイドとなる。圏の直積の定義から

$$\text{Hom}_{M \times N}(\langle *, * \rangle, \langle *, * \rangle) = \text{Hom}_M(*, *) \times \text{Hom}_N(*, *) = M \times N$$

となるので、圏の直積 $M \times N$ はモノイドとしての直積 $M \times N$ を圏とみなしたものであ

る。特に、群 G, H の圏としての直積は、直積群 $G \times H$ を圏とみなしたものである。 \square

例 3. 圏 $\mathbf{2} = \{0 \xrightarrow{f} 1\}$ を考える。直積 $\mathbf{2} \times \mathbf{2}$ は 4 個の対象 $\langle 0, 0 \rangle, \langle 0, 1 \rangle, \langle 1, 0 \rangle, \langle 1, 1 \rangle$ を持つ。 $\mathbf{2}$ の射の数は 3 個だから、 $\mathbf{2} \times \mathbf{2}$ の射は 9 個である。対象が 4 個だから、9 個の射のうち 4 個は恒等射である。残りの 5 個の射を図示すると次のようになる。

$$\begin{array}{ccc}
 \langle 0, 0 \rangle & \xrightarrow{\langle \text{id}_0, f \rangle} & \langle 0, 1 \rangle \\
 \langle f, \text{id}_0 \rangle \downarrow & \searrow \langle f, f \rangle & \downarrow \langle f, \text{id}_1 \rangle \\
 \langle 1, 0 \rangle & \xrightarrow{\langle \text{id}_1, f \rangle} & \langle 1, 1 \rangle
 \end{array}$$

\square

集合などの直積では標準的な射影が与えられるが、圏の直積でも同様に「射影」を与える関手を定義することができる。圏 C, D に対して関手 $P: C \times D \rightarrow C$ を次のように定義する。

- 対象 $\langle c, d \rangle \in C \times D$ に対して $P(\langle c, d \rangle) := c$ とする。
- 射 $\langle f, g \rangle: \langle c, d \rangle \rightarrow \langle c', d' \rangle$ に対して $P(\langle f, g \rangle) := f$ とする。

P が関手となることは明らかであろう。これが C への射影である。 D への射影も同様に定義できる。

定義. 圏 C, D の直和 $C \amalg D$ を以下のように定義する。

- $\text{Ob}(C \amalg D) := \text{Ob}(C) \sqcup \text{Ob}(D)$ (非交和) である。
- a から b への射は以下のように定める:

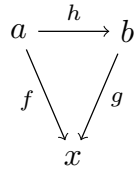
$$\text{Hom}_{C \amalg D}(a, b) := \begin{cases} \text{Hom}_C(a, b) & (a, b \in C \text{ のとき}) \\ \text{Hom}_D(a, b) & (a, b \in D \text{ のとき}) \\ \emptyset & (\text{それ以外の場合}) \end{cases}$$

- 射の合成は C, D の合成で行う。
- 恒等射は C, D の恒等射である。

例 4. 集合 X, Y を離散圏と見なしたときの圏の直和 $X \amalg Y$ は X と Y の非交和 $X \sqcup Y$ である。 \square

定義. C を圏, $x \in C$ を対象とする。スライス圏 (slice category もしくは over category) C/x を以下のように定義する。

- 対象は C の射 $f: a \rightarrow x$ である.
- $f: a \rightarrow x$ から $g: b \rightarrow x$ への射は, $g \circ h = f$ となるような射 $h: a \rightarrow b$ である.

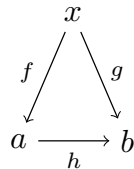


- 射の合成は C の合成で行う.
- 恒等射は C の恒等射である.

スライス圏と同じような方法でコスライス圏を得ることができる.

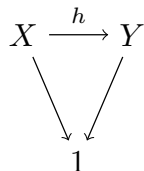
定義. C を圏, $x \in C$ を対象とする. コスライス圏 (coslice category もしくは under category) x/C を以下のように定義する.

- 対象は C の射 $f: x \rightarrow a$ である.
- $f: x \rightarrow a$ から $g: x \rightarrow b$ への射は, $h \circ f = g$ となるような射 $h: a \rightarrow b$ である.



- 射の合成は C の合成で行う.
- 恒等射は C の恒等射である.

例 5. $1 \in \mathbf{Set}$ を一元集合として $\mathbf{Set}/1$ を考える. 集合 X に対して写像 $f: X \rightarrow 1$ はただ一つしかない. よって $\text{Ob}(\mathbf{Set}/1) = \text{Ob}(\mathbf{Set})$ と見なしてよい. $X, Y \in \text{Ob}(\mathbf{Set}) = \text{Ob}(\mathbf{Set}/1)$ を取ると, 任意の $h: X \rightarrow Y$ に対して次の図式は可換である.



よって任意の $h: X \rightarrow Y$ が $\mathbf{Set}/1$ の射となる. 以上により $\mathbf{Set}/1 = \mathbf{Set}$ と見なせることが分かる. 同様にして $\emptyset/\mathbf{Set} = \mathbf{Set}$ である. \square

例 6. \mathbf{CRing} を単位的可換環と環準同型がなす圏として $k \in \mathbf{CRing}$ を取るとき、コスライス圏 k/\mathbf{CRing} は k -代数の圏である。□

例 7. $1 \in \mathbf{Top}$ を 1 点空間としたとき、コスライス圏 $1/\mathbf{Top}$ は基点付き位相空間の圏 \mathbf{Top}_* である。□

定義. C, D を圏とする. C が D の部分圏 (subcategory) であるとは, $\text{Ob}(C) \subset \text{Ob}(D)$, $\text{Mor}(C) \subset \text{Mor}(D)$ であって, C におけるドメイン, コドメイン, 合成, 恒等射が D におけるそれと一致していることをいう. 記号では $C \subset D$ と書く

定義. 部分圏 $C \subset D$ が充満部分圏 (full subcategory) であるとは, 任意の $a, b \in C$ に対して $\text{Hom}_C(a, b) = \text{Hom}_D(a, b)$ となることをいう.

例 8. 写像の合成を射の合成とすることで, 以下のような圏 $\mathbf{Inj}, \mathbf{FinSet}, \mathbf{FinInj}$ を定めることができる.

- 集合を対象, 単射を射とする圏を \mathbf{Inj} とする.
- 有限集合を対象, 写像を射とする圏を \mathbf{FinSet} とする.
- 有限集合を対象, 単射を射とする圏を \mathbf{FinInj} とする.

このように定義したとき $\mathbf{FinInj} \subset \mathbf{Inj} \subset \mathbf{Set}$ と $\mathbf{FinInj} \subset \mathbf{FinSet} \subset \mathbf{Set}$ は部分圏である. 更に $\mathbf{FinInj} \subset \mathbf{Inj}$ と $\mathbf{FinSet} \subset \mathbf{Set}$ は充満部分圏になっている。□

例 9. $\mathbf{Ab} \subset \mathbf{Grp}$ は充満部分圏である。□

例 10. 集合を離散圏とみなした時, 部分圏とは部分集合のことである. またこの場合, 部分圏は常に充満部分圏となる。□

例 11. G を群, $H \subsetneq G$ を真の部分群として G, H を圏とみなせば $H \subset G$ は部分圏であるが充満部分圏ではない. また逆に $C \subset G$ を部分圏で $C \neq \mathbf{0}$ とすると, C はモノイドではあるが群であるとは限らない。□

例 12. 圏 C に対して集まり $X \subset \text{Ob}(C)$ が与えられたとき, 部分圏 $D \subset C$ を

- $\text{Ob}(D) := X$ とする.
- $a, b \in X$ に対して $\text{Hom}_D(a, b) := \text{Hom}_C(a, b)$ とする.

により定義することができる. これは明らかに充満部分圏である。□