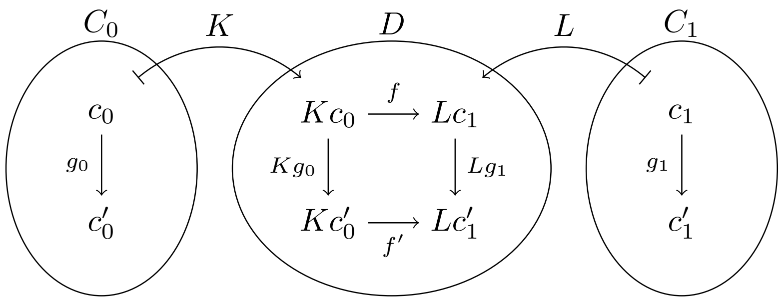
コンマ圏

alg-d
http://alg-d.com/math/kan_extension/

2018 年 8 月 10 日

定義. C_0, C_1, D を圏，$K\colon C_0 \to D$，$L\colon C_1 \to D$ を関手とする．以下のようにして定まる圏をコンマ圏といい，$K \downarrow L$ と書く[*1]．

- $K \downarrow L$ の対象は組 $\langle c_0, c_1, f\rangle$ であり以下を満たすものである．
  (1) c_0 は C_0 の対象である．
  (2) c_1 は C_1 の対象である．
  (3) $f\colon Kc_0 \to Lc_1$ は D の射である．
- $K \downarrow L$ の射 $\langle c_0, c_1, f\rangle \to \langle c_0', c_1', f'\rangle$ とは組 $\langle g_0, g_1\rangle$ であり以下を満たすものである．
  (1) $g_0\colon c_0 \to c_0'$ は C_0 の射である．
  (2) $g_1\colon c_1 \to c_1'$ は C_1 の射である．
  (3) $Lg_1 \circ f = f' \circ Kg_0$，即ち以下の図式を可換にする．



例 1. $D = C_0 = C$，$C_1 = \mathbf{1} = \{*\}$ として $K\colon C \to C$ を恒等関手 id_C，$L\colon \mathbf{1} \to C$ を

[*1] コンマ圏が登場した頃は，$K \downarrow L$ を (K, L) とコンマを使った記号で表し，それでコンマ圏と呼ばれていたが，この (,) という記号は他でもよく使い紛らわしい為，今の記号に変わった，という経緯があるらしい．また $K \downarrow L$ を K/L などと書いている文献もある．

$L(*) = c$ で定まる関手とすれば，コンマ圏 $K\downarrow L$ はスライス圏 C/c と同型である． $\square$

例 2. $D := \mathbf{1}$ として，$K\colon C_0 \to \mathbf{1}$，$L\colon C_1 \to \mathbf{1}$ を一意に定まる関手とすれば，コンマ圏 $K\downarrow L$ は圏の直積 $C_0 \times C_1$ と同型である． $\square$

例 3. 圏 C について $\mathrm{id}_C \downarrow \mathrm{id}_C$ は arrow category と同型である． $\square$

例 4. $F\colon \mathbf{Set} \to \mathbf{Set}$ を $x \in \mathbf{Set}$ に対して $F(x) := x \times x$ で定まる関手とする．このとき $\mathbf{Graph} := \mathrm{id}_{\mathbf{Set}} \downarrow F$ を有向グラフの圏という．(通常の有向グラフの定義を知っている人は，この定義が通常の定義と一致していることはすぐ分かるであろう．) $\square$

例 5. C を圏として $P \in \widehat{C}$ を取る．P を関手 $\mathbf{1} \to \widehat{C}$ と見なしたとき，コンマ圏 $y\downarrow P$ を P の要素の圏 (category of elements) という．記号では $\mathrm{el}(P)$，$\displaystyle\int_C P$ などで表すことがある．

コンマ圏 $y\downarrow P$ の対象は，対象 $c \in C$，$* \in \mathbf{1}$ と自然変換 $\theta\colon y(c) \Rightarrow P$ の三つ組であるが，米田の補題から $\theta\colon y(c) \Rightarrow P$ は元 $x \in Pc$ と同一視することができる．よって $\mathrm{Ob}(y\downarrow P) = \{\langle c, x\rangle \mid c \in \mathrm{Ob}(C),\ x \in Pc\}$ とみなすことが出来る．射 $\langle c, x\rangle \to \langle c', x'\rangle$ は $f\colon c \to c'$ で $Pf(x') = x$ となるものである．

関手 $1\colon \mathbf{1} \to \mathbf{Set}$ を $1(*) := 1$ で定める．コンマ圏 $1\downarrow P$ の対象は $* \in \mathbf{1}$，$c \in C^{\mathrm{op}}$，$f\colon * \to Pc$ の三つ組であるから $\mathrm{Ob}(1\downarrow P) = \{\langle c, x\rangle \mid c \in \mathrm{Ob}(C),\ x \in Pc\} = \mathrm{Ob}(y\downarrow P)$ とみなせる．一方で射 $\langle c, x\rangle \to \langle c', x'\rangle$ は C^{op} の射 $f\colon c \to c'$，即ち C の射 $f\colon c' \to c$ で $Pf(x) = x'$ となるものである．従って $(1\downarrow P)^{\mathrm{op}} = y\downarrow P$ となることが分かる． $\square$

命題 6. $(K\downarrow L)^{\mathrm{op}} = L^{\mathrm{op}} \downarrow K^{\mathrm{op}}$ である．

証明. $(K\downarrow L)^{\mathrm{op}}$ の射 $\langle c_0, c_1, f\rangle \to \langle c_0', c_1', f'\rangle$ とは $\langle g_0, g_1\rangle$ であって次を可換にするものである．

$$
\begin{tikzcd}
c_0 & & Kc_0 \arrow[r, "f"] & Lc_1 & & c_1 \\
c_0' \arrow[u, "g_0"] & & Kc_0' \arrow[u, "Kg_0"] \arrow[r, "f'"'] & Lc_1' \arrow[u, "Lg_1"'] & & c_1' \arrow[u, "g_1"]
\end{tikzcd}
$$

一方 $L^{\mathrm{op}} \downarrow K^{\mathrm{op}}$ の射 $\langle c_1, c_0, f\rangle \to \langle c_1', c_0', f'\rangle$ とは $\langle g_1, g_0\rangle$ であって次を可換にするもの

である．

$$
\begin{tikzcd}
c_1 & Lc_1 & Kc_0 \arrow[l, "f"'] & c_0 \\
c'_1 \arrow[u, "g_1"] & Lc'_1 \arrow[u, "Lg_1"] & Kc'_0 \arrow[l, "f'"] \arrow[u, "Kg_0"'] & c'_0 \arrow[u, "g_0"]
\end{tikzcd}
$$

よって $(K \downarrow L)^{\mathrm{op}} = L^{\mathrm{op}} \downarrow K^{\mathrm{op}}$ が分かる． □

C_0, C_1, D を圏，$K\colon C_0 \to D$，$L\colon C_1 \to D$ を関手とする．コンマ圏 $K \downarrow L$ を考えると，関手 $P_0\colon K \downarrow L \to C_0$，$P_1\colon K \downarrow L \to C_1$ と自然変換 $\theta\colon K \circ P_0 \Rightarrow L \circ P_1$ が以下のように定まる．

$$
\begin{tikzcd}
C_1 \arrow[r, "L"] & D \\
K \downarrow L \arrow[u, "P_1"] \arrow[r, "P_0"'] \arrow[ur, phantom, "\Nwarrow\theta"] & C_0 \arrow[u, "K"']
\end{tikzcd}
$$

- $\langle c_0, c_1, f\rangle \in \mathrm{Ob}(K \downarrow L)$ に対して $P_0\langle c_0, c_1, f\rangle := c_0$，$\langle g_0, g_1\rangle \in \mathrm{Mor}(K \downarrow L)$ に対して $P_0\langle g_0, g_1\rangle := g_0$．
- $\langle c_0, c_1, f\rangle \in \mathrm{Ob}(K \downarrow L)$ に対して $P_1\langle c_0, c_1, f\rangle := c_1$，$\langle g_0, g_1\rangle \in \mathrm{Mor}(K \downarrow L)$ に対して $P_1\langle g_0, g_1\rangle := g_1$．
- $\langle c_0, c_1, f\rangle \in \mathrm{Ob}(K \downarrow L)$ に対して $\theta_{\langle c_0, c_1, f\rangle} := f$．

コンマ圏の重要な性質は，この $\langle K \downarrow L, P_0, P_1, \theta\rangle$ がある種の普遍性を持つ事である．

命題 7. C_0, C_1, D を圏，$K\colon C_0 \to D$，$L\colon C_1 \to D$ を関手として，上記のように関手 $P_0\colon K \downarrow L \to C_0$，$P_1\colon K \downarrow L \to C_1$ と自然変換 $\theta\colon K \circ P_0 \Rightarrow L \circ P_1$ を定める．このとき，別の組 $\langle X, Q_0, Q_1, \rho\rangle$ が同じ条件，即ち

- X は圏である．
- $Q_0\colon X \to C_0$ は関手である．
- $Q_1\colon X \to C_1$ は関手である．
- $\rho\colon K \circ Q_0 \Rightarrow L \circ Q_1$ は自然変換である．

$$
\begin{tikzcd}
C_1 \arrow[r, "L"] & D \\
X \arrow[u, "Q_1"] \arrow[r, "Q_0"'] \arrow[ur, phantom, "\Nwarrow\rho"] & C_0 \arrow[u, "K"']
\end{tikzcd}
$$

を満たすならば，関手 $H\colon X \to K\downarrow L$ が一意に存在して以下を満たす．

(1) $P_0 \circ H = Q_0$，$P_1 \circ H = Q_1$ である．
(2) 次の自然変換の等式が成り立つ．

$$
\begin{tikzcd}
 & C_1 \arrow[r, "L"] & D \\
 & K\downarrow L \arrow[u, "P_1"] \arrow[r, "P_0"'] \arrow[ur, phantom, "\Nwarrow\theta"] & C_0 \arrow[u, "K"'] \\
X \arrow[uur, bend left, "Q_1"] \arrow[urr, bend right, "Q_0"'] \arrow[ur, dashed, "H"'] & &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
 & C_1 \arrow[r, "L"] & D \\
 & \arrow[ur, phantom, "\Nwarrow\rho"] & C_0 \arrow[u, "K"'] \\
X \arrow[uur, bend left, "Q_1"] \arrow[urr, bend right, "Q_0"'] & &
\end{tikzcd}
$$

証明. $Q_0\colon X \to C_0$，$Q_1\colon X \to C_1$ を関手，$\rho\colon K \circ Q_0 \Rightarrow L \circ Q_1$ を自然変換とする．関手 $H\colon X \to K\downarrow L$ を

- 対象 $x \in X$ に対して $H(x) := \langle Q_0(x), Q_1(x), \rho_x \rangle$．
- 射 $f \in X$ に対して $H(f) := \langle Q_0(f), Q_1(f) \rangle$．

で定める．このとき明らかに条件 (1)(2) を満たす．またこの条件を満たす H は明らかにこれしかない． □

例 8. $F, G\colon C \to D$ を関手とするとき，自然変換 $\theta\colon F \Rightarrow G$ と関手 $H\colon C \to F\downarrow G$ は一対一に対応する (次の図式を参照)．

$$
\begin{tikzcd}
 & C \arrow[r, "G"] & D \\
 & F\downarrow G \arrow[u, "P_1"] \arrow[r, "P_0"'] \arrow[ur, phantom, "\Nwarrow"] & C \arrow[u, "F"'] \\
C \arrow[uur, bend left, "\mathrm{id}"] \arrow[urr, bend right, "\mathrm{id}"'] \arrow[ur, dashed, "H"'] & &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
 & C \arrow[r, "G"] & D \\
 & \arrow[ur, phantom, "\Nwarrow\theta"] & C \arrow[u, "F"'] \\
C \arrow[uur, bend left, "\mathrm{id}"] \arrow[urr, bend right, "\mathrm{id}"'] & &
\end{tikzcd}
$$

□