コンマ圏

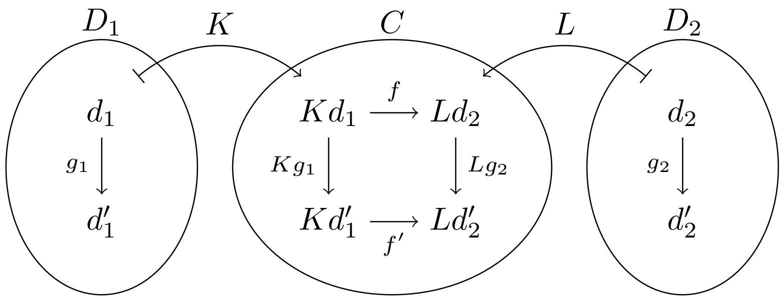
alg-d

http://alg-d.com/math/kan_extension/

2016 年 9 月 12 日

定義． C, D_1, D_2 を圏，$K\colon D_1 \longrightarrow C$，$L\colon D_2 \longrightarrow C$ を関手とする．以下のようにして定まる圏をコンマ圏といい，$K\downarrow L$ と書く．

- $K\downarrow L$ の対象は組 $\langle d_1, d_2, f\rangle$ であり以下を満たすものである．
  (1) d_1 は D_1 の対象である．
  (2) d_2 は D_2 の対象である．
  (3) $f\colon Kd_1 \longrightarrow Ld_2$ は C の射である．
- $K\downarrow L$ の射 $\langle d_1, d_2, f\rangle \longrightarrow \langle d'_1, d'_2, f'\rangle$ とは組 $\langle g_1, g_2\rangle$ であり以下を満たすものである．
  (1) $g_1\colon d_1 \longrightarrow d'_1$ は D_1 の射である．
  (2) $g_2\colon d_2 \longrightarrow d'_2$ は D_2 の射である．
  (3) $Lg_2 \circ f = f' \circ Kg_1$，即ち以下の図式を可換にする．



例 1． $D_1 = C$，$D_2 = \mathbf{1} = \{*\}$ として $K\colon C \longrightarrow C$ を恒等関手 id_C，$L\colon \mathbf{1} \longrightarrow C$ を $L(*) = c$ で定まる関手とすれば，コンマ圏 $K\downarrow L$ はスライス圏 C/c である． □

例 2． 圏 C について $\mathrm{id}_C\downarrow\mathrm{id}_C$ は arrow category となる．即ち $\mathrm{id}_C\downarrow\mathrm{id}_C = C^{\mathbf{2}}$． □

例 3. C を圏として $P \in \widehat{C}$ を取る．P を関手 $\mathbf{1} \longrightarrow \widehat{C}$ と見なしたとき，コンマ圏 $y{\downarrow}P$ を P の要素の圏 (category of elements) という．記号では $\mathrm{el}(P)$，$\displaystyle\int_C P$ などで表すことがある．

コンマ圏 $y{\downarrow}P$ の対象は，対象 $c \in C$，$* \in \mathbf{1}$ と自然変換 $\theta\colon y(c) \Longrightarrow P$ の三つ組であるが，米田の補題から $\theta\colon y(c) \Longrightarrow P$ は元 $x \in Pc$ と同一視することができる．よって $\mathrm{Ob}(y{\downarrow}P) = \{\langle c, x\rangle \mid c \in \mathrm{Ob}(C),\ x \in Pc\}$ とみなすことが出来る．射 $\langle c, x\rangle \longrightarrow \langle c', x'\rangle$ は $f\colon c \longrightarrow c'$ で $Pf(x') = x$ となるものである．

関手 $1\colon \mathbf{1} \longrightarrow \mathbf{Set}$ を $1(*) := 1$ で定める．コンマ圏 $1{\downarrow}P$ の対象は $* \in \mathbf{1}$，$c \in C^{\mathrm{op}}$，$f\colon * \longrightarrow Pc$ の三つ組であるから $\mathrm{Ob}(1{\downarrow}P) = \{\langle c, x\rangle \mid c \in \mathrm{Ob}(C),\ x \in Pc\} = \mathrm{Ob}(y{\downarrow}P)$ とみなせる．一方で射 $\langle c, x\rangle \longrightarrow \langle c', x'\rangle$ は C^{op} の射 $f\colon c \longrightarrow c'$，即ち C の射 $f\colon c' \longrightarrow c$ で $Pf(x) = x'$ となるものである．従って $(1{\downarrow}P)^{\mathrm{op}} = y{\downarrow}P$ となることが分かる． □

C, D_1, D_2 を圏，$K\colon D_1 \longrightarrow C$，$L\colon D_2 \longrightarrow C$ を関手とする．コンマ圏 $K{\downarrow}L$ を考えると，関手 $\pi_1\colon K{\downarrow}L \longrightarrow D_1$，$\pi_2\colon K{\downarrow}L \longrightarrow D_2$ と自然変換 $\theta\colon K \circ \pi_1 \Longrightarrow L \circ \pi_2$ が以下のように定まる．

$$\begin{tikzcd} D_2 \arrow[r, "L"] & C \\ K{\downarrow}L \arrow[u, "\pi_2"] \arrow[r, "\pi_1"'] \arrow[ur, phantom, "\Nwarrow\theta"] & D_1 \arrow[u, "K"'] \end{tikzcd}$$

- $\langle d_1, d_2, f\rangle \in \mathrm{Ob}(K{\downarrow}L)$ に対して $\pi_1(d_1, d_2, f) := d_1$，$\langle g_1, g_2\rangle \in \mathrm{Mor}(K{\downarrow}L)$ に対して $\pi_1(g_1, g_2) := g_1$．
- $\langle d_1, d_2, f\rangle \in \mathrm{Ob}(K{\downarrow}L)$ に対して $\pi_2(d_1, d_2, f) := d_2$，$\langle g_1, g_2\rangle \in \mathrm{Mor}(K{\downarrow}L)$ に対して $\pi_2(g_1, g_2) := g_2$．
- $\langle d_1, d_2, f\rangle \in \mathrm{Ob}(K{\downarrow}L)$ に対して $\theta_{\langle d_1, d_2, f\rangle} := f$．

コンマ圏の重要な性質は，この $\langle K{\downarrow}L, \pi_1, \pi_2, \theta\rangle$ がある種の普遍性を持つ事である．

命題 4. C, D_1, D_2 を圏，$K\colon D_1 \longrightarrow C$，$L\colon D_2 \longrightarrow C$ を関手として，上記のように $\pi_1\colon K{\downarrow}L \longrightarrow D_1$，$\pi_2\colon K{\downarrow}L \longrightarrow D_2$ と $\theta\colon K \circ \pi_1 \Longrightarrow L \circ \pi_2$ を定める．このとき，別の組 $\langle E, P_1, P_2, \eta\rangle$ が同じ条件，即ち

- E は圏である．
- $P_1\colon E \longrightarrow D_1$ は関手である．

- $P_2 \colon E \longrightarrow D_2$ は関手である．
- $\eta \colon K \circ P_1 \Longrightarrow L \circ P_2$ は自然変換である．

$$
\begin{tikzcd}
D_2 \arrow[r, "L"] & C \\
E \arrow[u, "P_2"] \arrow[r, "P_1"'] \arrow[ur, phantom, "\Nwarrow\eta"] & D_1 \arrow[u, "K"']
\end{tikzcd}
$$

を満たすならば，関手 $H \colon E \longrightarrow K{\downarrow}L$ が一意に存在して以下を満たす．

(1) $\pi_1 \circ H = P_1$，$\pi_2 \circ H = P_2$ である．
(2) 次の自然変換の等式が成り立つ．

$$
\begin{tikzcd}
 & D_2 \arrow[r, "L"] & C \\
 & K{\downarrow}L \arrow[u, "\pi_2"] \arrow[r, "\pi_1"'] \arrow[ur, phantom, "\Nwarrow\theta"] & D_1 \arrow[u, "K"'] \\
E \arrow[uur, bend left, "P_1"] \arrow[ur, dashed, "H"'] \arrow[urr, bend right, "P_1"'] \arrow[ur, phantom, shift left=3, "="] \arrow[ur, phantom, shift right=3, "="] & &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
 & D_2 \arrow[r, "L"] & C \\
 & & D_1 \arrow[u, "K"'] \\
E \arrow[uur, bend left, "P_2"] \arrow[urr, bend right, "P_1"'] \arrow[uurr, phantom, "\Nwarrow\eta"] & &
\end{tikzcd}
$$

証明. $P_1 \colon E \longrightarrow D_1$，$P_2 \colon E \longrightarrow D_2$ を関手，$\eta \colon K \circ P_1 \Longrightarrow L \circ P_2$ を自然変換とする．関手 $H \colon E \longrightarrow K{\downarrow}L$ を

- 対象 $e \in E$ に対して $H(e) := \langle P_1(e), P_2(e), \eta_e \rangle$．
- 射 $f \in E$ に対して $H(f) := \langle P_1(f), P_2(f) \rangle$．

で定める．このとき明らかに条件 (1)(2) を満たす．またこの条件を満たす H は明らかにこれしかない． $\square$