

コンマ圏

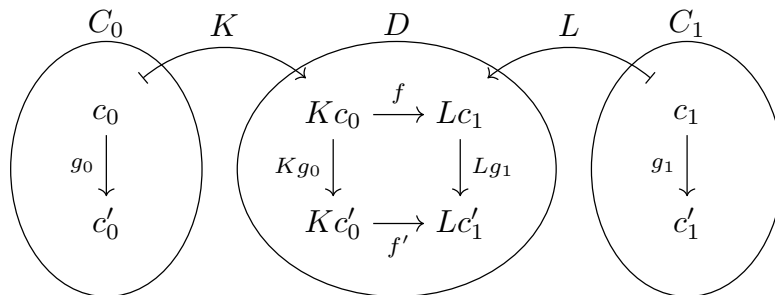
alg-d

http://alg-d.com/math/kan_extension/

2021年4月29日

定義. C_0, C_1, D を圏, $K: C_0 \rightarrow D, L: C_1 \rightarrow D$ を関手とする. 以下のようにして定まる圏をコンマ圏 (comma category) といい, $K \downarrow L$ と書く*¹.

- $K \downarrow L$ の対象は組 $\langle c_0, c_1, f \rangle$ であり以下を満たすものである.
 - (1) c_0 は C_0 の対象である.
 - (2) c_1 は C_1 の対象である.
 - (3) $f: Kc_0 \rightarrow Lc_1$ は D の射である.
- $K \downarrow L$ の射 $\langle c_0, c_1, f \rangle \rightarrow \langle c'_0, c'_1, f' \rangle$ とは組 $\langle g_0, g_1 \rangle$ であり以下を満たすものである.
 - (1) $g_0: c_0 \rightarrow c'_0$ は C_0 の射である.
 - (2) $g_1: c_1 \rightarrow c'_1$ は C_1 の射である.
 - (3) $Lg_1 \circ f = f' \circ Kg_0$, 即ち以下の図式を可換にする.



例 1. $D = C_0 = C, C_1 = \mathbb{1} = \{*\}$ として $K: C \rightarrow C$ を恒等関手 $\text{id}_C, L: \mathbb{1} \rightarrow C$ を

*¹ コンマ圏が登場した頃は, $K \downarrow L$ を (K, L) とコンマを使った記号で表し, それでコンマ圏と呼ばれていたが, この $(,)$ という記号は他でもよく使い紛らわしい為, 今の記号に変わった, という経緯があるらしい. また $K \downarrow L$ を K/L などと書いている文献もある.

$L(*) = c$ で定まる関手とすれば, $K \downarrow L \cong C/c$ である. つまりコンマ圏はスライス圏の一般化と言える. \square

例 2. $D := \mathbb{1}$ として, $K: C_0 \rightarrow \mathbb{1}$, $L: C_1 \rightarrow \mathbb{1}$ を一意に定まる関手とすれば, コンマ圏は $K \downarrow L \cong C_0 \times C_1$ である. \square

例 3. 圏 C について $\text{id}_C \downarrow \text{id}_C \cong C^2$ である. \square

例 4. $F: \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Set}$ を $x \in \mathbf{Set}$ に対して $F(x) := x \times x$ で定まる関手とする. このとき $\mathbf{Graph} := \text{id}_{\mathbf{Set}} \downarrow F$ を有向グラフの圏という. (通常の有向グラフの定義を知っている人は, この定義が通常の定義と一致していることはすぐ分かるであろう.) \square

例 5. C を圏として $P \in \widehat{C}$ を取る. P を関手 $\mathbb{1} \rightarrow \widehat{C}$ とみなしたとき, コンマ圏 $y \downarrow P$ を P の要素の圏 (category of elements) という. 記号では $\text{el}(P)$, $\int_C P$ などで表すことがある.

コンマ圏 $y \downarrow P$ の対象は, 対象 $c \in C$, $* \in \mathbb{1}$ と自然変換 $\theta: y(c) \Rightarrow P$ の三つ組であるが, 米田の補題から $\theta: y(c) \Rightarrow P$ は元 $x \in Pc$ と同一視することができる. よって

$$\text{Ob}(y \downarrow P) = \{\langle c, x \rangle \mid c \in \text{Ob}(C), x \in Pc\}$$

とみなすことが出来る. このとき $y \downarrow P$ の射 $\langle c, x \rangle \rightarrow \langle c', x' \rangle$ は $f: c \rightarrow c'$ で $Pf(x) = x'$ となるものである.

次に関手 $1: \mathbb{1} \rightarrow \mathbf{Set}$ を $1(*) := \mathbb{1}$ で定める. 今度は P を関手 $C^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$ とみなす. するとコンマ圏 $1 \downarrow P$ の対象は $* \in \mathbb{1}$, $c \in C^{\text{op}}$, $f: \mathbb{1} \rightarrow Pc$ の三つ組であるから

$$\text{Ob}(1 \downarrow P) = \{\langle c, x \rangle \mid c \in \text{Ob}(C), x \in Pc\} = \text{Ob}(y \downarrow P)$$

とみなせる. 一方で $1 \downarrow P$ の射 $\langle c, x \rangle \rightarrow \langle c', x' \rangle$ は C^{op} の射 $f: c \rightarrow c'$ (即ち C の射 $f: c' \rightarrow c$) であって $Pf(x) = x'$ となるものである. 従って $(1 \downarrow P)^{\text{op}} \cong y \downarrow P$ となることが分かる. \square

命題 6. $(K \downarrow L)^{\text{op}} = L^{\text{op}} \downarrow K^{\text{op}}$ である.

証明. $(K \downarrow L)^{\text{op}}$ の射 $\langle c_0, c_1, f \rangle \rightarrow \langle c'_0, c'_1, f' \rangle$ とは $\langle g_0, g_1 \rangle$ であって次を可換にするもの

である.

$$\begin{array}{ccccc}
 & & Kc_0 & \xrightarrow{f} & Lc_1 & & c_1 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 g_0 & \uparrow & & & & & g_1 \\
 & & Kc'_0 & \xrightarrow{f'} & Lc'_1 & & c'_1 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 & & & & & &
 \end{array}$$

一方 $L^{\text{op}} \downarrow K^{\text{op}}$ の射 $\langle c_1, c_0, f \rangle \rightarrow \langle c'_1, c'_0, f' \rangle$ とは $\langle g_1, g_0 \rangle$ であって次を可換にするものである.

$$\begin{array}{ccccc}
 & & Lc_1 & \xleftarrow{f} & Kc_0 & & c_0 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 g_1 & \uparrow & & & & & g_0 \\
 & & Lc'_1 & \xleftarrow{f'} & Kc'_0 & & c'_0 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 & & & & & &
 \end{array}$$

よって $(K \downarrow L)^{\text{op}} = L^{\text{op}} \downarrow K^{\text{op}}$ が分かる. □

C_0, C_1, D を圏, $K: C_0 \rightarrow D, L: C_1 \rightarrow D$ を関手とする. コンマ圏 $K \downarrow L$ を考えると, 関手 $P_0: K \downarrow L \rightarrow C_0, P_1: K \downarrow L \rightarrow C_1$ と自然変換 $\theta: K \circ P_0 \Rightarrow L \circ P_1$ が以下のよりに定まる.

$$\begin{array}{ccc}
 C_1 & \xrightarrow{L} & D \\
 P_1 \uparrow & \swarrow \theta & \uparrow K \\
 K \downarrow L & \xrightarrow{P_0} & C_0
 \end{array}$$

- $\langle c_0, c_1, f \rangle \in \text{Ob}(K \downarrow L)$ に対して $P_0 \langle c_0, c_1, f \rangle := c_0, \langle g_0, g_1 \rangle \in \text{Mor}(K \downarrow L)$ に対して $P_0 \langle g_0, g_1 \rangle := g_0$.
- $\langle c_0, c_1, f \rangle \in \text{Ob}(K \downarrow L)$ に対して $P_1 \langle c_0, c_1, f \rangle := c_1, \langle g_0, g_1 \rangle \in \text{Mor}(K \downarrow L)$ に対して $P_1 \langle g_0, g_1 \rangle := g_1$.
- $\langle c_0, c_1, f \rangle \in \text{Ob}(K \downarrow L)$ に対して $\theta_{\langle c_0, c_1, f \rangle} := f$.

コンマ圏の重要な性質は, この $\langle K \downarrow L, P_0, P_1, \theta \rangle$ がある種の普遍性を持つ事である*2.

命題 7. C_0, C_1, D を圏, $K: C_0 \rightarrow D, L: C_1 \rightarrow D$ を関手として, 上記のように関手 $P_0: K \downarrow L \rightarrow C_0, P_1: K \downarrow L \rightarrow C_1$ と自然変換 $\theta: K \circ P_0 \Rightarrow L \circ P_1$ を定める. このとき, 別の組 $\langle X, Q_0, Q_1, \rho \rangle$ が同じ条件, 即ち

*2 コンマ圏が満たすべき「正しい」普遍性については第3章で述べる. 詳しくはコンマ対象を参照.

- X は圏である.
- $Q_0: X \rightarrow C_0$ は関手である.
- $Q_1: X \rightarrow C_1$ は関手である.
- $\rho: K \circ Q_0 \Rightarrow L \circ Q_1$ は自然変換である.

$$\begin{array}{ccc} C_1 & \xrightarrow{L} & D \\ Q_1 \uparrow & \rho \Downarrow & \uparrow K \\ X & \xrightarrow{Q_0} & C_0 \end{array}$$

を満たすならば, 関手 $H: X \rightarrow K \downarrow L$ が一意に存在して以下を満たす.

- (1) $P_0 \circ H = Q_0, P_1 \circ H = Q_1$ である.
- (2) 次の自然変換の等式が成り立つ.

$$\begin{array}{ccc} & C_1 \xrightarrow{L} D & \\ & \uparrow \quad \theta \Downarrow \quad \uparrow K & \\ Q_1 \nearrow & & \\ & K \downarrow L \xrightarrow{P_0} C_0 & \\ \dashrightarrow H & & \\ X \searrow & & \\ & Q_0 & \end{array} = \begin{array}{ccc} & C_1 \xrightarrow{L} D & \\ & \uparrow \quad \rho \Downarrow \quad \uparrow K & \\ Q_1 \nearrow & & \\ & & C_0 \\ X \searrow & & \\ & Q_0 & \end{array}$$

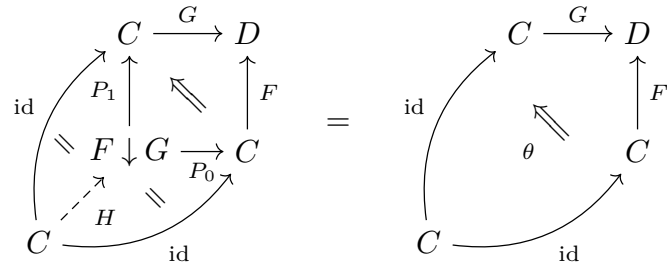
証明. $Q_0: X \rightarrow C_0, Q_1: X \rightarrow C_1$ を関手, $\rho: K \circ Q_0 \Rightarrow L \circ Q_1$ を自然変換とする. 関手 $H: X \rightarrow K \downarrow L$ を

- 対象 $x \in X$ に対して $H(x) := \langle Q_0(x), Q_1(x), \rho_x \rangle$.
- 射 $f \in X$ に対して $H(f) := \langle Q_0(f), Q_1(f) \rangle$.

で定める. このとき明らかに条件 (1)(2) を満たす. またこの条件を満たす H は明らかにこれしかない. □

例 8. $F, G: C \rightarrow D$ を関手とするとき, 自然変換 $\theta: F \Rightarrow G$ と関手 $H: C \rightarrow F \downarrow G$ は一

対一に対応する (次の図式を参照).



□