随伴関手定理

alg-d
http://alg-d.com/math/kan_extension/

2016 年 8 月 22 日

定義. $F\colon C \longrightarrow D$, $E\colon C \longrightarrow U$ を関手として左 Kan 拡張 $F^\dagger E$ が存在して，$F^\dagger E$ が任意の関手 $H\colon U \longrightarrow V$ と交換するとき，$F^\dagger E$ は絶対左 Kan 拡張であるという．

定義から明らかに次が成り立つ．

命題 1. $F\colon C \longrightarrow D$, $E\colon C \longrightarrow U$, $L\colon D \longrightarrow U$ を関手，$\eta\colon E \Longrightarrow L \circ F$ を自然変換とする．

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[dr, "L"] & \\
C \arrow[u, "F"] \arrow[r, "E"'] \arrow[ur, phantom, "\eta\Uparrow"] & U
\end{tikzcd}$$

このとき $\langle L, \eta\rangle$ が F に沿った E の絶対左 Kan 拡張である
$\Longleftrightarrow$ 任意の圏 V と関手 $K\colon D \longrightarrow V$, $H\colon U \longrightarrow V$，自然変換 $\theta\colon HE \Longrightarrow KF$ に対して，ある自然変換 $\tau\colon HL \Longrightarrow K$ が一意に存在して，次の等式が成り立つ．

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[r, "K"] \arrow[dr, "L"] & V \arrow[d, phantom, "\tau\Uparrow", dashed] \\
C \arrow[u, "F"] \arrow[r, "E"'] \arrow[ur, phantom, "\eta\Uparrow"] & U \arrow[u, "H"']
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
D \arrow[r, "K"] & V \\
C \arrow[u, "F"] \arrow[r, "E"'] \arrow[ur, phantom, "\theta\Uparrow"] & U \arrow[u, "H"']
\end{tikzcd}$$

□

定理 2. $F\colon C \longrightarrow D$ を関手とするとき以下の条件は同値である．

(1) F は右随伴を持つ．

(2) 絶対左 Kan 拡張 $\langle F^\dagger \mathrm{id}_C, \eta\rangle$ が存在する．

(3) F に沿った id_C の左 Kan 拡張 $\langle F^\dagger \mathrm{id}_C, \eta\rangle$ が存在し，F が左 Kan 拡張 $F^\dagger \mathrm{id}_C$ と交換する．

$$
\begin{tikzcd}
D \arrow[dr, "F^\dagger \mathrm{id}_C"] \arrow[drr, "F\circ(F^\dagger \mathrm{id}_C)"] & & \\
C \arrow[u, "F"] \arrow[r, "\mathrm{id}_C"'] \arrow[ur, phantom, "\eta\Uparrow"] & C \arrow[r, "F"'] \arrow[ur, phantom, "\Uparrow\mathrm{id}"] & D
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
D \arrow[drr, "F^\dagger F"] & & \\
C \arrow[u, "F"] \arrow[r, "\mathrm{id}_C"'] \arrow[ur, phantom, "\Uparrow"] & C \arrow[r, "F"'] & D
\end{tikzcd}
$$

またこのとき $F \dashv F^\dagger \mathrm{id}_C$ であり η がその unit である．

証明. ($1 \Longrightarrow 2$) $F \dashv G$ を随伴として，その unit を η，counit を ε とする．任意の圏 X と関手 $K\colon C \longrightarrow X$，$H\colon D \longrightarrow X$，自然変換 $\theta\colon K \Longrightarrow HF$ を取る．

$$
\tau \quad := \quad
\begin{tikzcd}
D \arrow[r, "\mathrm{id}_D"] \arrow[dr, "G"'] \arrow[r, phantom, shift right=4ex, "\varepsilon\Uparrow"] & D \arrow[r, "H"] & X \\
& C \arrow[u, "F"'] \arrow[r, "\mathrm{id}_C"'] \arrow[ur, phantom, "\theta\Uparrow"] & C \arrow[u, "K"']
\end{tikzcd}
$$

と定義すれば

$$
\begin{tikzcd}
D \arrow[r, "H"] \arrow[dr, "G"] & X \\
C \arrow[u, "F"] \arrow[r, "\mathrm{id}_C"'] \arrow[ur, phantom, shift left=2ex, "\tau\Uparrow"] \arrow[ur, phantom, shift right=2ex, "\eta\Uparrow"] & C \arrow[u, "K"']
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
D \arrow[r, "\mathrm{id}_D"] \arrow[dr, "G"] & D \arrow[r, "H"] & X \\
C \arrow[u, "F"] \arrow[r, "\mathrm{id}_C"'] \arrow[ur, phantom, shift left=2ex, "\varepsilon\Uparrow"] \arrow[ur, phantom, shift right=2ex, "\eta\Uparrow"] & C \arrow[u, "F"'] \arrow[r, "\mathrm{id}_C"'] \arrow[ur, phantom, "\theta\Uparrow"] & C \arrow[u, "K"']
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
D \arrow[r, "H"] & X \\
C \arrow[u, "F"] \arrow[r, "\mathrm{id}_C"'] \arrow[ur, phantom, "\theta\Uparrow"] & C \arrow[u, "K"']
\end{tikzcd}
$$

である．逆に τ が

$$
\begin{tikzcd}
D \arrow[r, "H"] \arrow[dr, "G"] & X \\
C \arrow[u, "F"] \arrow[r, "\mathrm{id}_C"'] \arrow[ur, phantom, shift left=2ex, "\tau\Uparrow"] \arrow[ur, phantom, shift right=2ex, "\eta\Uparrow"] & C \arrow[u, "K"']
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
D \arrow[r, "H"] & X \\
C \arrow[u, "F"] \arrow[r, "\mathrm{id}_C"'] \arrow[ur, phantom, "\theta\Uparrow"] & C \arrow[u, "K"']
\end{tikzcd}
$$

を満たせば

$$
\begin{tikzcd}
D \arrow[r, "H"] \arrow[dr, "G"'] & X \\
& C \arrow[u, "K"'] \arrow[ul, phantom, near end, "\tau\Uparrow"]
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
D \arrow[r, "\mathrm{id}_D"] \arrow[dr, "G"'] & D \arrow[r, "H"] \arrow[dr, "G"] & D \\
& C \arrow[u, "F"] \arrow[r, "\mathrm{id}_C"'] \arrow[ul, phantom, near end, "\varepsilon\Uparrow"] \arrow[ur, phantom, near start, "\eta\Uparrow"] & C \arrow[u, "K"'] \arrow[ul, phantom, near end, "\tau\Uparrow"]
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
D \arrow[r, "\mathrm{id}_D"] \arrow[dr, "G"'] & D \arrow[r, "H"] & X \\
& C \arrow[u, "F"] \arrow[r, "\mathrm{id}_C"'] \arrow[ul, phantom, near end, "\varepsilon\Uparrow"] \arrow[ur, phantom, "\theta\Uparrow"] & C \arrow[u, "K"']
\end{tikzcd}
$$

となるから，このような τ は一意である．故に $\langle F^{\dagger}\mathrm{id}_C, \eta\rangle$ は絶対左 Kan 拡張である．

(2 $\Longrightarrow$ 3) 明らか.

(3 $\Longrightarrow$ 1) $G := F^{\dagger}\mathrm{id}_C$ と置く．これの絶対性から左 Kan 拡張 $F^{\dagger}F = F\circ F^{\dagger}\mathrm{id}_C = FG$ も存在する．$F^{\dagger}F$ の普遍性により $\varepsilon\colon FG \Longrightarrow \mathrm{id}_D$ が一意に存在して $\varepsilon_F \circ F\eta = \mathrm{id}_F$ が成り立つ.

$$
\begin{tikzcd}
D \arrow[r, "\mathrm{id}_D"] \arrow[dr, "G"] & D \\
C \arrow[u, "F"] \arrow[r, "\mathrm{id}_C"'] \arrow[ur, phantom, near start, "\eta\Uparrow"] & C \arrow[u, "F"'] \arrow[ul, phantom, near end, "\varepsilon\Uparrow"]
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
D \arrow[r, "\mathrm{id}_D"] & D \\
C \arrow[u, "F"] \arrow[r, "\mathrm{id}_C"'] \arrow[ur, phantom, "\mathrm{id}_F\Uparrow"] & C \arrow[u, "F"']
\end{tikzcd}
$$

故に後は $G\varepsilon \circ \eta_G = \mathrm{id}_G$ を示せばよい．その為には，左 Kan 拡張 $\langle G, \eta\rangle$ の普遍性から

$$
\begin{tikzcd}
D \arrow[r, "\mathrm{id}_D"] \arrow[dr, "G"] & D \arrow[dr, "G"] & \\
C \arrow[u, "F"] \arrow[r, "\mathrm{id}_C"'] \arrow[ur, phantom, near start, "\eta\Uparrow"] & C \arrow[u, "F"] \arrow[r, "\mathrm{id}_C"'] \arrow[ul, phantom, near end, "\varepsilon\Uparrow"] \arrow[ur, phantom, near start, "\Uparrow\eta"] & C
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
D \arrow[r, "\mathrm{id}_D"] \arrow[dr, "G"] & D \arrow[dr, "G"] & \\
C \arrow[u, "F"] \arrow[r, "\mathrm{id}_C"'] \arrow[ur, phantom, near start, "\eta\Uparrow"] & C \arrow[r, "\mathrm{id}_C"'] \arrow[u, phantom, "\Uparrow\mathrm{id}_G"] & C
\end{tikzcd}
$$

を示せばよいが，それは明らか. $\square$

系 3. 圏 C に対して

$$C \text{ が終対象 } 1 \text{ を持つ} \Longleftrightarrow \mathrm{colim}(\mathrm{id}_C) \text{ が存在する．}$$

また，このとき $\mathrm{colim}(\mathrm{id}_C) \cong 1$ が成り立つ.

証明. 終対象とは対角関手 $\Delta\colon C \longrightarrow C^{\mathbf{0}} = \mathbf{1}$ の右随伴である.

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{1} \arrow[dr, "1"] & \\
C \arrow[u, "\Delta"] \arrow[r, "\mathrm{id}_C"'] \arrow[ur, phantom, "\Uparrow"] & C
\end{tikzcd}
$$

($\Longrightarrow$) 終対象 1，即ち Δ の右随伴が存在するから，定理 2 により左 Kan 拡張 $\Delta^\dagger \mathrm{id}_C$ が存在する．ところで $\Delta^\dagger = \mathrm{colim}$ だったから $\mathrm{colim}(\mathrm{id}_C)$ が存在することが分かる．

($\Longleftarrow$) 定理 2 により Δ が $\mathrm{colim}(\mathrm{id}_C)$ と交換することを示せばよいが，それは明らか．

$\mathrm{colim}(\mathrm{id}_C) \cong 1$ も明らかである． □

定義. 関手 $K\colon I \longrightarrow J$ が final
$\Longleftrightarrow$ C を圏，$F\colon J \longrightarrow C$ を関手とする．余極限 $\mathrm{colim}\, F$，$\mathrm{colim}\, FK$ のどちらかが存在すればもう片方も存在し，普遍性から得られる射 $\mathrm{colim}\, FK \longrightarrow \mathrm{colim}\, F$ が同型を与える．

定義. C を圏，$a, b \in C$ を対象とする．a と b を結ぶ zigzag とは

$$a \to c_0 \leftarrow c_1 \to \cdots \leftarrow c_{n-1} \to c_n \leftarrow b$$

の形の図式のことをいう．

定義. 圏 C が連結 $\Longleftrightarrow$ $C \neq \mathbf{0}$ で，任意の対象 $a, b \in C$ を結ぶ zigzag が存在する．

命題 4. 関手 $K\colon I \longrightarrow J$ が final $\Longleftrightarrow$ 任意の $j \in J$ に対して $j{\downarrow}K$ が連結.

証明. ($\Longrightarrow$) $j \in J$ とする．$F := \mathrm{Hom}_J(j, -)\colon J \longrightarrow \mathbf{Set}$ とすれば，K が final だから $\mathrm{colim}\, FK \cong \mathrm{colim}\, F \cong 1$ である．$\mathrm{colim}\, FK \cong \left(\coprod_{i \in I} FKi\right)/{\sim}$ だから，ある $i \in I$ に対して $FKi \neq \emptyset$ でなければならない．即ち $\mathrm{Hom}_J(j, Ki) \neq \emptyset$ だから $j{\downarrow}K \neq \mathbf{0}$ が分かる．

また，$\mathrm{colim}\, FK \cong \mathrm{colim}\, F \cong 1$ となるためには任意の $f \in FKi_0$，$g \in FKi_1$ に対して $f \sim g$ とならなければならない．よって $j{\downarrow}K$ が連結となることが分かる．

($\Longleftarrow$) C を圏，$F\colon J \longrightarrow C$ を関手として余極限 $\mu\colon FK \Longrightarrow \Delta(\mathrm{colim}\, FK)$ が存在するとする．$i \in I$ に対して $\mu_i\colon FKi \longrightarrow \mathrm{colim}\, FK$ は C の射である．$j \in J$ を取る．$j{\downarrow}K \neq \mathbf{0}$ だから，ある対象 $\langle i, f\rangle \in j{\downarrow}K$ が存在する．この i と f を使って $\tau_j := \mu_i \circ Ff\colon Fj \longrightarrow \mathrm{colim}\, FK$ と定める．

$$i \qquad\qquad j \xrightarrow{f} Ki \qquad Fj \xrightarrow{Ff} FKi \xrightarrow{\mu_i} \mathrm{colim}\, FK$$

この τ_j は well-defined である．

$\because$) $\langle i, f\rangle, \langle i', f'\rangle \in j{\downarrow}K$ に対して $\mu_i \circ Ff = \mu_{i'} \circ Ff'$ を示せばよい．$j{\downarrow}K$ が連結だから zigzag $\langle i, f\rangle \to \langle i_0, f_0\rangle \leftarrow \langle i_1, f_1\rangle \to \cdots \to \langle i_n, f_n\rangle \leftarrow \langle i', f'\rangle$ が存在する．

このとき次の図式は可換である．

$$
\begin{tikzcd}
i \arrow[d] & & Ki \arrow[d] & & FKi \arrow[d] \arrow[ddr, "\mu_i"] & \\
i_0 & & Ki_0 & & FKi_0 \arrow[dr, "\mu_{i_0}"] & \\
i_1 \arrow[u] & j \arrow[uur, "f"] \arrow[ur, "f_0"] \arrow[r, "f_1"] \arrow[ddr, "f_n"] \arrow[dddr, "f'"'] & Ki_1 \arrow[u] & Fj \arrow[uur, "Ff"] \arrow[ur, "Ff_0"] \arrow[r, "Ff_1"] \arrow[ddr, "Ff_n"] \arrow[dddr, "Ff'"'] & FKi_1 \arrow[u] \arrow[r, "\mu_{i_1}"] & \operatorname{colim} FK \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & \\
i_n & & Ki_n & & FKi_n \arrow[uur, "\mu_{i_n}"] & \\
i' \arrow[u] & & Ki' \arrow[u] & & FKi' \arrow[u] \arrow[uuur, "\mu_{i'}"'] &
\end{tikzcd}
$$

故に $\mu_i \circ Ff = \mu_{i'} \circ Ff'$ である．

この τ_j は自然変換 $\tau\colon F \Longrightarrow \Delta(\operatorname{colim} FK)$ を定める．

$\because$) $s\colon j \longrightarrow j'$ とする．$\langle i, f\rangle \in j{\downarrow}K$，$\langle i', f'\rangle \in j'{\downarrow}K$ を取れば $\tau_j = \mu_i \circ Ff$，$\tau_{j'} = \mu_{i'} \circ Ff'$ となる．

$$
\begin{tikzcd}
i & j \arrow[r, "f"] \arrow[d, "s"] & Ki & Fj \arrow[r, "Ff"] \arrow[d, "Fs"] & FKi \arrow[dr, "\mu_i"] & \\
 & & & & & \operatorname{colim} FK \\
i' & j' \arrow[r, "f'"] & Ki' & Fj' \arrow[r, "Ff'"] & FKi' \arrow[ur, "\mu_{i'}"'] &
\end{tikzcd}
$$

このとき well-defined の証明と同様に連結性から $\mu_i \circ Ff = \mu_{i'} \circ Ff' \circ Fs$ となることが分かる．故に τ は自然変換である．

この τ が F から Δ への普遍射であることを示せばよい．その為に $c \in C$ を対象，$\theta\colon F \Longrightarrow \Delta c$ を自然変換とする．このとき $\theta_K\colon FK \Longrightarrow \Delta c$ は自然変換である．故に $\operatorname{colim} FK$ の普遍性から射 $h\colon \operatorname{colim} FK \longrightarrow c$ が存在し $(\Delta h) \circ \tau = \theta$ となる．また $\operatorname{colim} FK$ の普遍性から h の一意性も分かり，τ は F から Δ への普遍射である． $\square$

系 5. I が終対象 1 を持てば，関手 $F\colon I \longrightarrow C$ の余極限は存在し $\operatorname{colim} F \cong F1$ となる．

証明. 関手 $K\colon \mathbf{1} \longrightarrow I$ を $K(*) := 1$ で定める．任意の $i \in I$ に対して $i{\downarrow}K = \mathbf{1}$ だから K は final である．$\operatorname{colim} FK = F1$ が存在するから，前定理により $\operatorname{colim} F \cong F1$ であ

る． $\square$

定理 6 (General Adjoint Functor Theorem)**.** C, D を圏, C は余完備で関手 $F\colon C \longrightarrow D$ は余連続であるとする．更に，任意の $d \in D$ に対してある集合 $S \subset \mathrm{Ob}(F{\downarrow}d)$ が存在して次を満たすとする (この条件を solution set condition と呼ぶ):

$$\text{任意の } \langle c, f\rangle \in F{\downarrow}d \text{ に対してある } \langle s, k\rangle \in S \text{ と射 } \langle c, f\rangle \longrightarrow \langle s, k\rangle \text{ が存在する}$$

$$\begin{tikzcd}
 & Fs \arrow[dr, "k"] & \\
Fc \arrow[ur, dashed] \arrow[rr, "f"] & & d \\
 & Fs' \arrow[ur, "k'"'] &
\end{tikzcd}$$

このとき F は右随伴を持つ．

証明. 各 $d \in D$ に対して $\mathrm{colim}(F{\downarrow}d \xrightarrow{\pi} C)$ が存在することを示せばよい．

$\because$) この余極限 $\mathrm{colim}(F{\downarrow}d \to C) = \mathrm{colim}(F{\downarrow}d \to C \xrightarrow{\mathrm{id}_C} C)$ が存在したとする．

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{1} \arrow[r, "d"] & D & \\
F{\downarrow}d \arrow[u] \arrow[r, "\pi"'] \arrow[ur, phantom, "\Nwarrow"] & C \arrow[u, "F"'] \arrow[r, "\mathrm{id}_C"'] & C
\end{tikzcd}$$

このとき各点左 Kan 拡張 $F^{\dagger}\mathrm{id}_C$ が存在し，$F^{\dagger}\mathrm{id}_C(d) = \mathrm{colim}(F{\downarrow}d \to C \xrightarrow{\mathrm{id}_C} C)$ である．今 F が余連続だから，F は各点左 Kan 拡張 $F^{\dagger}\mathrm{id}_C$ と交換する．従って定理 2 により F は右随伴を持つ．

$d \in D$ とする．solution set condition を満たす集合 $S \subset \mathrm{Ob}(F{\downarrow}d)$ を取る．$S \subset F{\downarrow}d$ を充満部分圏とみなす．$K\colon S \longrightarrow F{\downarrow}d$ を包含関手とすれば，S が small で C は余完備だから，余極限 $\mathrm{colim}(S \xrightarrow{K} F{\downarrow}d \xrightarrow{\pi} C)$ が存在する．故に K が final であることを示せば $\mathrm{colim}(F{\downarrow}d \xrightarrow{\pi} C) \cong \mathrm{colim}(S \xrightarrow{K} F{\downarrow}d \xrightarrow{\pi} C)$ の存在が分かる．

$\langle c, f\rangle \in F{\downarrow}d$ とする．$\langle c, f\rangle{\downarrow}K$ が連結であることを示せばよい．S の取り方から明らかに $\langle c, f\rangle{\downarrow}K \neq \mathbf{0}$ である．$\langle\langle s_0, k_0\rangle, g_0\rangle, \langle\langle s_1, k_1\rangle, g_1\rangle \in \langle c, f\rangle{\downarrow}K$ とする．即ち

$g_0 \colon \langle c, f\rangle \longrightarrow \langle s_0, k_0\rangle$，$g_1 \colon \langle c, f\rangle \longrightarrow \langle s_1, k_1\rangle$ である．

$$\begin{tikzcd}
 & s_0 \\
c \arrow[ur, "g_0"] \arrow[dr, "g_1"'] & \\
 & s_1
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & Fs_0 \arrow[dr, bend left, "k_0"] & \\
Fc \arrow[ur, "Fg_0"] \arrow[dr, "Fg_1"'] \arrow[rr, "f"] & & d \\
 & Fs_1 \arrow[ur, bend right, "k_1"'] &
\end{tikzcd}$$

C が余完備だから，左の図式の pushout p が存在する．また F が余連続だから，Fp も pushout である．

$$\begin{tikzcd}
 & s_0 \arrow[dr] & \\
c \arrow[ur, "g_0"] \arrow[dr, "g_1"'] & & p \\
 & s_1 \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & Fs_0 \arrow[dr] \arrow[drr, bend left, "k_0"] & & \\
Fc \arrow[ur, "Fg_0"] \arrow[dr, "Fg_1"'] & & Fp & d \\
 & Fs_1 \arrow[ur] \arrow[urr, bend right, "k_1"'] & &
\end{tikzcd}$$

よって pushout の普遍性により，射 $Fp \longrightarrow d$ が一意に伸びる．

$$\begin{tikzcd}
 & Fs_0 \arrow[dr] \arrow[drr, bend left, "k_0"] & & \\
Fc \arrow[ur, "Fg_0"] \arrow[dr, "Fg_1"'] & & Fp \arrow[r, dashed] & d \\
 & Fs_1 \arrow[ur] \arrow[urr, bend right, "k_1"'] & &
\end{tikzcd}$$

S の性質により，この射 $Fp \longrightarrow d$ はある $\langle s_2, k_2\rangle \in S$ を使って $Fp \to Fs_2 \xrightarrow{k_2} d$ と書ける．

$$\begin{tikzcd}
 & Fs_0 \arrow[dr] \arrow[drrr, bend left, "k_0"] & & & \\
Fc \arrow[ur, "Fg_0"] \arrow[dr, "Fg_1"'] & & Fp \arrow[r] & Fs_2 \arrow[r, "k_2"] & d \\
 & Fs_1 \arrow[ur] \arrow[urrr, bend right, "k_1"'] & & &
\end{tikzcd}$$

このとき次の図式を得る．

$$
\begin{tikzcd}
& s_0 \arrow[dr] & \\
c \arrow[ur, "g_0"] \arrow[dr, "g_1"'] & & s_2 \\
& s_1 \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& Fs_0 \arrow[dr] \arrow[drr, bend left, "k_0"] & & \\
Fc \arrow[ur, "Fg_0"] \arrow[dr, "Fg_1"'] & & Fs_2 \arrow[r, "k_2"] & d \\
& Fs_1 \arrow[ur] \arrow[urr, bend right, "k_1"'] & &
\end{tikzcd}
$$

この図式は可換である．故に $\langle c,f\rangle{\downarrow}K$ が連結であることが分かる． $\square$

補題 7. C,D,U を圏で U は co-wellpowered で余完備，$F\colon C\longrightarrow D$，$S,T\colon C\longrightarrow U$ を関手，$\varphi\colon S\Longrightarrow T$ をエピな自然変換とする．このとき Kan 拡張 $F^\dagger S$ が存在するならば $F^\dagger T$ も存在する．

$$
\begin{tikzcd}
D \arrow[dr, "F^\dagger S"] & \\
C \arrow[u, "F"] \arrow[r, bend left, "S"] \arrow[r, bend right, "T"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\varphi"] \arrow[u, phantom, shift left=3, "\eta\Uparrow"] & U
\end{tikzcd}
$$

証明. $d\in D$ に対して $\operatorname{colim}(F{\downarrow}d\xrightarrow{\pi}C\xrightarrow{T}U)$ が存在することを示せばよい．

各点 Kan 拡張により $F^\dagger S(d)=\operatorname{colim}(F{\downarrow}d\xrightarrow{\pi}C\xrightarrow{S}U)$ である．$\langle c,f\rangle\in F{\downarrow}d$ に対して，標準的な射を $\sigma_{\langle c,f\rangle}\colon Sc\longrightarrow F^\dagger S(d)$ と書く．これと自然変換 $\varphi\colon S\Longrightarrow T$ を合わせて，次の可換図式を得る．

$$
\begin{tikzcd}
& F^\dagger S(d) & & \\
F^\dagger S(d) \arrow[ur, "\mathrm{id}"] & & & \\
& Sc_j \arrow[uu, "\sigma_{\langle c_j,f_j\rangle}"'] \arrow[rr, "\varphi_{c_j}"] & & Tc_j \\
Sc_i \arrow[uu, "\sigma_{\langle c_i,f_i\rangle}"] \arrow[ur] \arrow[rr, "\varphi_{c_i}"'] & & Tc_i \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
$$

今 U は余完備だから，次の図式のように pushout を取ることができる．また，pushout

の普遍性から点線の射が延びる．

$$
\begin{tikzcd}
& F^\dagger S(d) \arrow[rr, "m_j"] & & u_j \\
F^\dagger S(d) \arrow[ur, "\mathrm{id}"] \arrow[rr, "m_i"] & & u_i \arrow[ur, dashed] & \\
& Sc_j \arrow[uu] \arrow[rr, "\varphi_{c_j}"] & & Tc_j \arrow[uu] \\
Sc_i \arrow[uu] \arrow[ur] \arrow[rr, "\varphi_{c_i}"'] & & Tc_i \arrow[uu] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
$$

仮定から φ_{c_i} はエピ射で，エピ射の pushout はエピ射だから，m_i もエピ射である．U が co-wellpowered だから，m_i たちの余極限 v を取ることができる．

$$
\begin{tikzcd}
& F^\dagger S(d) \arrow[rr] & & u_j \arrow[dr] & \\
F^\dagger S(d) \arrow[ur] \arrow[rr] & & u_i \arrow[ur] \arrow[rr] & & v \\
& Sc_j \arrow[uu] \arrow[rr, "\varphi_{c_j}"] & & Tc_j \arrow[uu] & \\
Sc_i \arrow[uu] \arrow[ur] \arrow[rr, "\varphi_{c_i}"'] & & Tc_i \arrow[uu] \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}
$$

$v = \mathrm{colim}(F{\downarrow}d \xrightarrow{\pi} C \xrightarrow{T} U)$ であることを示そう．その為に任意の $\theta\colon T \circ \pi \Longrightarrow \Delta w$ を取る．

$$
\begin{tikzcd}
& & & & & w \\
& F^\dagger S(d) \arrow[rr] \arrow[urrrr, dashed] & & u_j \arrow[dr] \arrow[urr, dashed] & & \\
F^\dagger S(d) \arrow[ur] \arrow[rr] & & u_i \arrow[ur] \arrow[rr] \arrow[uurrr, dashed] & & v \arrow[uur, dashed] & \\
& Sc_j \arrow[uu] \arrow[rr, "\varphi_{c_j}"] & & Tc_j \arrow[uu] \arrow[uuurr, bend right, "\theta_{\langle c_j, f_j \rangle}"'] & & \\
Sc_i \arrow[uu] \arrow[ur] \arrow[rr, "\varphi_{c_i}"'] & & Tc_i \arrow[uu] \arrow[ur] \arrow[uuuurrr, bend right, "\theta_{\langle c_i, f_i \rangle}"'] & & &
\end{tikzcd}
$$

このとき $\theta\circ\varphi\colon S\circ\pi \Longrightarrow \Delta w$ が得られるから，普遍性により $F^\dagger S(d)\longrightarrow w$ が一意に延びる．よって pushout の普遍性から $u_i\longrightarrow w$ が一意に延びる．よって v の普遍性から $v\longrightarrow w$ が一意に延びる．以上により $v=\operatorname{colim}(F{\downarrow}d\xrightarrow{\pi}C\xrightarrow{T}U)$ である． $\square$

定理 8 (Special Adjoint Functor Theorem)**.** C,D が圏で，C は余完備，co-wellpowered で，small generating set S を持つとする．このとき関手 $F\colon C\longrightarrow D$ に対して
F が余連続 $\Longleftrightarrow$ F が右随伴を持つ．

証明. ($\Longleftarrow$) 明らか．

($\Longrightarrow$) Kan 拡張 $F^\dagger\mathrm{id}_C$ が存在することを示せばよい．

generating set $S\subset C$ を充満部分圏とみなし，$i\colon S\longrightarrow C$ を包含関手とする．S が small で C が余完備だから Kan 拡張 $i^\dagger i$，$(F\circ i)^\dagger i$ が存在する．

$$
\begin{tikzcd}
D \arrow[ddr, "(F\circ i)^\dagger i"] & \\
C \arrow[u, "F"] \arrow[dr, "i^\dagger i"] & \\
S \arrow[u, "i"] \arrow[r, "i"'] \arrow[ur, phantom, "\Uparrow\eta"] & C
\end{tikzcd}
$$

故に $F^\dagger(i^\dagger i)$ も存在して，$F^\dagger(i^\dagger i)=(F\circ i)^\dagger i$ が成り立つ．また $\mathrm{id}_C\colon C\longrightarrow C$ を考えれば，Kan 拡張の普遍性により $\varphi\colon i^\dagger i\Longrightarrow\mathrm{id}_C$ が一意に取れる．

$$
\begin{tikzcd}
C \arrow[dr, "i^\dagger i"] \arrow[dr, bend left=50, "\mathrm{id}_C"] & \\
S \arrow[u, "i"] \arrow[r, "i"'] \arrow[ur, phantom, "\eta\Uparrow"] & C
\end{tikzcd}
$$

φ はエピ射である．

∵) $c\in C$ に対して $\varphi_c\colon i^\dagger i(c)\longrightarrow c$ がエピ射であることを示せばよい．各点 Kan 拡張の構成を思い出せば，φ_c は $i^\dagger i(c)=\operatorname{colim}(i{\downarrow}c\to S\to C)=\operatorname*{colim}_{\langle c,f\rangle\in i\downarrow c} c$ の普遍性

から定まる射である．

$$
\begin{tikzcd}
 & c_j \arrow[dl, "f_j"'] \arrow[dd] \\
c & \\
 & c_k \arrow[ul, "f_k"]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
c_j \arrow[dr] \arrow[dd] \arrow[drr, bend left, "f_j"] & & \\
 & i^\dagger i(c) \arrow[r, dashed, "\varphi_c"] & c \\
c_k \arrow[ur] \arrow[urr, bend right, "f_k"'] & &
\end{tikzcd}
$$

$u, v\colon c \longrightarrow d$ を射で，$u \neq v$ とする．S が generating set だったから，ある $s \in S$ と $g\colon s \longrightarrow c$ が存在して $u \circ g \neq v \circ g$ となる．このとき $\langle s, g\rangle \in i{\downarrow}c$ である．

$$
\begin{tikzcd}
c_j \arrow[dr] \arrow[dd] \arrow[drr, bend left, "f_j"] & & & \\
 & i^\dagger i(c) \arrow[r, "\varphi_c"] & c \arrow[r, shift left, "u"] \arrow[r, shift right, "v"'] & d \\
c_k \arrow[ur] \arrow[urr, bend right, "f_k"'] & & &
\end{tikzcd}
$$

よって $u \circ \varphi_c \neq v \circ \varphi_c$ でなければならない．故に φ_c はエピ射である．

$$
\begin{tikzcd}
D \arrow[dr, "F^\dagger(i^\dagger i)"] & \\
C \arrow[u, "F"] \arrow[r, bend left=15, "i^\dagger i"] \arrow[r, bend right=15, "\mathrm{id}_C"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\varphi"] \arrow[ur, phantom, "\eta\Uparrow"] & C
\end{tikzcd}
$$

よって補題 7 により $F^\dagger\mathrm{id}_C$ が存在する． $\square$

双対的に，以下の定理も成り立つ．(証明は同様である．)

定理 9． $G\colon D \longrightarrow C$ を関手とするとき以下の条件は同値である．

(1) G は左随伴を持つ．

(2) G に沿った id_D の右 Kan 拡張 $\langle G^\ddagger\mathrm{id}_D, \varepsilon\rangle$ が存在し，任意の関手 $K\colon D \longrightarrow X$ が右 Kan 拡張 $G^\ddagger\mathrm{id}_D$ と交換する．

$$
\begin{tikzcd}
C \arrow[dr, "G^\ddagger\mathrm{id}_D"] \arrow[drr, "K\circ(G^\ddagger\mathrm{id}_D)"] & & \\
D \arrow[u, "G"] \arrow[r, "\mathrm{id}_D"'] \arrow[ur, phantom, "\eta\Downarrow"] & D \arrow[r, "K"'] \arrow[ur, phantom, "\Downarrow\mathrm{id}"] & X
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
C \arrow[drr, "G^\ddagger K"] & & \\
D \arrow[u, "G"] \arrow[r, "\mathrm{id}_D"'] \arrow[ur, phantom, "\Downarrow"] & D \arrow[r, "K"'] & X
\end{tikzcd}
$$

(3) G に沿った id_D の右 Kan 拡張 $\langle G^\ddagger \mathrm{id}_D, \varepsilon\rangle$ が存在し，G が右 Kan 拡張 $G^\ddagger \mathrm{id}_D$ と交換する．

またこのとき $G^\ddagger \mathrm{id}_D \dashv G$ であり ε がその counit である． $\square$

定理 10 (General Adjoint Functor Theorem)**.** C, D を圏，D は完備で関手 $G\colon D \longrightarrow C$ は連続であるとする．更に，任意の $c \in C$ に対してある集合 $S \subset \mathrm{Ob}(c{\downarrow}G)$ が存在して次を満たすとする．(この条件を solution set condition と呼ぶ)

任意の $\langle d, f\rangle \in c{\downarrow}G$ に対してある $\langle s, k\rangle \in S$ と射 $\langle s, k\rangle \longrightarrow \langle d, f\rangle$ が存在する

$$\begin{tikzcd}
& Gs \arrow[dr, dashed] & \\
c \arrow[ur, "k"] \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "k'"'] & & Gd \\
& Gs' &
\end{tikzcd}$$

このとき G は右随伴を持つ． $\square$

定理 11 (Special Adjoint Functor Theorem)**.** C, D が圏で，D は完備，wellpowered で，small cogenerating set S を持つとする．このとき関手 $G\colon D \longrightarrow C$ に対して
G が連続 $\iff$ G が左随伴を持つ． $\square$

また，関手の表現可能性について次の定理が分かる．

定理 12. D を完備な圏，$G\colon D \longrightarrow \mathbf{Set}$ を連続な関手で solution set condition を満たすとする．このとき G は表現可能関手である．

証明. General Adjoint Functor Theorem により G は左随伴関手 $F\colon \mathbf{Set} \longrightarrow D$ を持つ．このとき $d \in D$ と $1 \in \mathbf{Set}$ に対して $\mathrm{Hom}_D(F(1), -) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(1, G-) \cong G$ である．故に G は表現可能関手である． $\square$

定理 13. D を完備，wellpowered な圏で，small cogenerating set S を持つとする．このとき関手 $G\colon D \longrightarrow \mathbf{Set}$ に対して以下は同値である．

(1) G が連続である．
(2) G が左随伴を持つ．
(3) G が表現可能関手である．

証明. 1 $\Longleftrightarrow$ 2 は Special Adjoint Functor Theorem である.

(2 $\Longrightarrow$ 3) G の左随伴関手を $F\colon \mathbf{Set} \longrightarrow D$ とすれば $1 \in \mathbf{Set}$ に対して

$$\mathrm{Hom}_D(F(1), -) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(1, G-) \cong G$$

である．故に G は表現可能関手である.

(3 $\Longrightarrow$ 1) 表現可能関手 $\mathrm{Hom}_D(d, -)$ は連続だから明らか. $\square$

定理 14. C を余完備な圏, D を圏とする．$A \subset C$ を小さい稠密部分圏とする．このとき関手 $F\colon C \longrightarrow D$ が余連続 $\Longleftrightarrow$ F が右随伴を持つ.

証明. ($\Longleftarrow$) 明らか.

($\Longrightarrow$) Kan 拡張 $F^\dagger \mathrm{id}_C$ が存在することを示せばよい．包含関手 $i\colon A \longrightarrow C$ が稠密だから $i^\dagger i = \mathrm{id}_C$ である．また A が小圏で C が余完備だから $(F \circ i)^\dagger i$ も存在する.

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[ddrr, "(F\circ i)^\dagger i"] & & \\
C \arrow[u, "F"] \arrow[drr, "\mathrm{id}_C"] \arrow[dr, phantom, "\Uparrow"] & & \\
A \arrow[u, "K"] \arrow[rr, "K"'] \arrow[r, phantom, "\Uparrow\mathrm{id}_K"] & & C
\end{tikzcd}$$

故に $F^\dagger \mathrm{id}_C$ も存在する. $\square$