

# 随伴関手定理

alg-d

[http://alg-d.com/math/kan\\_extension/](http://alg-d.com/math/kan_extension/)

2021年6月15日

左随伴関手は余極限と交換するのであった。では逆に、余極限と交換する関手は左随伴になるのだろうか？ ある条件の下であればこれが成り立つ、という定理が随伴関手定理である。これを理解する上で重要なのが「随伴は Kan 拡張である」という事実 (定理 2) である。

定義.  $F: C \rightarrow D$ ,  $E: C \rightarrow U$  を関手として左 Kan 拡張  $F^\dagger E$  が存在するとする.  $F^\dagger E$  が任意の関手  $H: U \rightarrow V$  と交換するとき,  $F^\dagger E$  は絶対左 Kan 拡張であるという.

定義から明らかに次が成り立つ.

命題 1.  $F: C \rightarrow D$ ,  $E: C \rightarrow U$ ,  $L: D \rightarrow U$  を関手,  $\eta: E \Rightarrow L \circ F$  を自然変換とする.

$$\begin{array}{ccc}
 D & & \\
 \uparrow F & \searrow L & \\
 C & \xrightarrow{E} & U
 \end{array}
 \quad \eta \uparrow \uparrow$$

このとき  $\langle L, \eta \rangle$  が  $F$  に沿った  $E$  の絶対左 Kan 拡張である

$\iff$  任意の圏  $V$  と関手  $K: D \rightarrow V$ ,  $H: U \rightarrow V$ , 自然変換  $\theta: HE \Rightarrow KF$  に対して, ある自然変換  $\tau: HL \Rightarrow K$  が一意に存在して, 次の等式が成り立つ.

$$\begin{array}{ccc}
 D & \xrightarrow{K} & V \\
 \uparrow F & \searrow L & \uparrow H \\
 C & \xrightarrow{E} & U
 \end{array}
 \quad \begin{array}{c} \tau \uparrow \uparrow \\ \vdots \\ \eta \uparrow \uparrow \end{array}
 \quad = \quad
 \begin{array}{ccc}
 D & \xrightarrow{K} & V \\
 \uparrow F & \searrow \theta & \uparrow H \\
 C & \xrightarrow{E} & U
 \end{array}$$

□

定理 2.  $F: C \rightarrow D$  を関手とするとき以下の条件は同値である.

- (1)  $F$  は右随伴を持つ.
- (2)  $F$  に沿った  $\text{id}_C$  の絶対左 Kan 拡張  $\langle F^\dagger \text{id}_C, \eta \rangle$  が存在する.
- (3)  $F$  に沿った  $\text{id}_C$  の左 Kan 拡張  $\langle F^\dagger \text{id}_C, \eta \rangle$  が存在し,  $F$  が左 Kan 拡張  $F^\dagger \text{id}_C$  と交換する.

$$\begin{array}{ccc}
 D & & D \\
 \uparrow F & \searrow^{F \circ (F^\dagger \text{id}_C)} & \uparrow F \\
 C & \xrightarrow{\text{id}_C} C \xrightarrow{F} D & C \xrightarrow{\text{id}_C} C \xrightarrow{F} D \\
 \eta \Uparrow & \nearrow^{F^\dagger \text{id}_C} & \Uparrow^{F\eta} \\
 & \text{id} \Uparrow & 
 \end{array} =$$

またこのとき  $F \dashv F^\dagger \text{id}_C$  であり  $\eta$  がその unit である.

証明. (1  $\implies$  2)  $F \dashv G: C \rightarrow D$  を随伴として, その unit を  $\eta$ , counit を  $\varepsilon$  とする. 任意の圏  $X$  と関手  $K: C \rightarrow X$ ,  $H: D \rightarrow X$ , 自然変換  $\theta: K \Rightarrow HF$  を取る.

$$\tau := \begin{array}{ccccc}
 D & \xrightarrow{\text{id}_D} & D & \xrightarrow{H} & X \\
 \downarrow G & & \uparrow F & \theta \Uparrow & \uparrow K \\
 & \varepsilon \Uparrow & & & \\
 C & \xrightarrow{\text{id}_C} & C & \xrightarrow{\text{id}_C} & C
 \end{array}$$

と定義すれば

$$\begin{array}{ccccc}
 D & \xrightarrow{H} & X & & \\
 \uparrow F & \searrow^{\tau \Uparrow} & \uparrow K & & \\
 C & \xrightarrow{\text{id}_C} & C & \xrightarrow{\text{id}_C} & C \\
 \eta \Uparrow & & \uparrow F & \theta \Uparrow & \uparrow K \\
 & \varepsilon \Uparrow & & & \\
 D & \xrightarrow{\text{id}_D} & D & \xrightarrow{H} & X \\
 & \downarrow G & & & \\
 C & \xrightarrow{\text{id}_C} & C & \xrightarrow{\text{id}_C} & C
 \end{array} =$$

である. 逆に  $\tau$  が

$$\begin{array}{ccc}
 D & \xrightarrow{H} & X \\
 \uparrow F & \searrow^{\tau \Uparrow} & \uparrow K \\
 C & \xrightarrow{\text{id}_C} & C \\
 \eta \Uparrow & & \uparrow F \\
 & \varepsilon \Uparrow & \\
 D & \xrightarrow{H} & X \\
 & \downarrow G & \\
 C & \xrightarrow{\text{id}_C} & C
 \end{array} =$$

を満たせば

$$\begin{array}{ccc}
 D & \xrightarrow{H} & X \\
 \searrow G & \Uparrow \tau & \Uparrow K \\
 & & C
 \end{array}
 =
 \begin{array}{ccccc}
 D & \xrightarrow{\text{id}_D} & D & \xrightarrow{H} & X \\
 \searrow G & \Uparrow \varepsilon & \Uparrow F & \Uparrow \tau & \Uparrow K \\
 & & C & \xrightarrow{\eta} & G \\
 & & & \Uparrow & \\
 & & C & \xrightarrow{\text{id}_C} & C
 \end{array}
 =
 \begin{array}{ccccc}
 D & \xrightarrow{\text{id}_D} & D & \xrightarrow{H} & X \\
 \searrow G & \Uparrow \varepsilon & \Uparrow F & \Uparrow \theta & \Uparrow K \\
 & & C & \xrightarrow{\text{id}_C} & C
 \end{array}$$

となるから、このような  $\tau$  は一意である。故に  $\langle F^\dagger \text{id}_C, \eta \rangle$  は絶対左 Kan 拡張である。

(2  $\implies$  3) 明らか。

(3  $\implies$  1)  $G := F^\dagger \text{id}_C$  と置く。絶対性から左 Kan 拡張  $F^\dagger F = F \circ (F^\dagger \text{id}_C) = FG$  も存在する。  $F^\dagger F$  の普遍性により  $\varepsilon: FG \Rightarrow \text{id}_D$  が一意に存在して  $\varepsilon_F \circ F\eta = \text{id}_F$  が成り立つ。

$$\begin{array}{ccc}
 D & \xrightarrow{\text{id}_D} & D \\
 \uparrow F & \searrow \varepsilon & \uparrow F \\
 C & \xrightarrow{\eta} & G \\
 & \Uparrow \eta & \Uparrow G \\
 & & C \\
 & & \xrightarrow{\text{id}_C}
 \end{array}
 =
 \begin{array}{ccc}
 D & \xrightarrow{\text{id}_D} & D \\
 \uparrow F & \Uparrow \text{id}_F & \uparrow F \\
 C & \xrightarrow{\text{id}_C} & C
 \end{array}$$

故に後は  $G\varepsilon \circ \eta_G = \text{id}_G$  を示せばよい。その為には、左 Kan 拡張  $\langle G, \eta \rangle$  の普遍性から

$$\begin{array}{ccc}
 D & \xrightarrow{\text{id}_D} & D \\
 \uparrow F & \searrow \varepsilon & \uparrow F \\
 C & \xrightarrow{\eta} & G \\
 & \Uparrow \eta & \Uparrow G \\
 & & C \\
 & & \xrightarrow{\text{id}_C}
 \end{array}
 =
 \begin{array}{ccc}
 D & \xrightarrow{\text{id}_D} & D \\
 \uparrow F & \searrow \text{id}_G & \uparrow F \\
 C & \xrightarrow{\eta} & G \\
 & \Uparrow \eta & \Uparrow G \\
 & & C \\
 & & \xrightarrow{\text{id}_C}
 \end{array}$$

を示せばよいが、それは明らか。 □

この定理の具体例として、終対象を考えると次の系を得る。

**系 3.** 圏  $C$  が終対象  $1$  を持つ  $\iff \text{colim}(\text{id}_C)$  が存在する。

また、このとき  $\text{colim}(\text{id}_C) \cong 1$  が成り立つ。

**証明.** 終対象  $1$  とは対角関手  $\Delta: C \rightarrow C^0 \cong 1$  の右随伴である。

$$\begin{array}{ccc}
 1 & & \\
 \uparrow \Delta & \searrow 1 & \\
 C & \xrightarrow{\text{id}_C} & C
 \end{array}$$

( $\implies$ ) 終対象 1, 即ち  $\Delta$  の右随伴が存在するから, 定理 2 により左 Kan 拡張  $\Delta^\dagger \text{id}_C$  が存在する. ところで  $\Delta^\dagger \cong \text{colim}$  だったから  $\text{colim}(\text{id}_C)$  が存在することが分かり, また  $\text{colim}(\text{id}_C) \cong 1$  も分かる.

( $\impliedby$ ) 定理 2 により  $\Delta$  が  $\Delta^\dagger \text{id}_C \cong \text{colim}(\text{id}_C)$  と交換することを示せばよいが, それは明らか.  $\square$

$\Delta^\dagger \cong \text{colim}$  が絶対左 Kan 拡張であることから, 次の命題が分かる.

**命題 4.**  $J$  が終対象 1 を持てば, 関手  $F: J \rightarrow C$  の余極限は存在し  $\text{colim } F \cong F(1)$ .

**証明.** 系 3 で見た通り  $\Delta^\dagger \text{id}_J = 1$  であり, これは絶対左 Kan 拡張である.

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{1} & & \mathbb{1} \\
 \Delta \uparrow & \searrow 1 & \Delta \uparrow \\
 J & \xrightarrow{\text{id}_J} J & \xrightarrow{F} C \\
 & \uparrow \uparrow & \uparrow \uparrow \\
 & & F(1)
 \end{array}$$

よって  $\text{colim } F \cong \Delta^\dagger F \cong F \circ (\Delta^\dagger \text{id}_J) \cong F(1)$  である.  $\square$

**命題 5.**  $P \in \widehat{C}$  が表現可能  $\iff$  コンマ圏  $y \downarrow P$  が終対象を持つ.

**証明.** ( $\implies$ )  $P = y(c)$  とする.  $y \downarrow P = y \downarrow y(c) = \{ \langle d, \theta \mid d \in C, \theta: y(d) \Rightarrow y(c) \rangle \}$  で,  $y$  は忠実充満なので  $y \downarrow P \cong \text{id}_C \downarrow c$  が分かる. よって終対象  $\text{id}_c: c \rightarrow c$  が存在する.

( $\impliedby$ ) コンマ圏  $y \downarrow P$  が終対象  $\langle c, \theta \rangle$  を持つとすれば, 各点左 Kan 拡張  $y^\dagger y \cong \text{id}$  と命題 4 により  $P \cong \text{colim}(y \downarrow P \rightarrow C \xrightarrow{y} \widehat{C}) \cong y(c)$  である.  $\square$

終対象におけるこの性質を一般化したものが終関手である (例 9 も参照).

**定義.** 関手  $K: I \rightarrow J$  が終関手 (final functor<sup>\*1</sup>)

$\iff C$  を圏,  $F: J \rightarrow C$  を関手とする. もし余極限  $\text{colim } FK$  が存在すれば  $\text{colim } F$  も存在し, 普遍性から得られる射  $\text{colim } FK \rightarrow \text{colim } F$  が同型を与える.

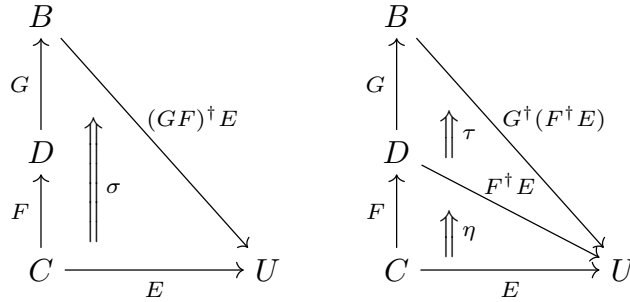
**補題 6.**  $F: C \rightarrow D, E: C \rightarrow U$  で, 左 Kan 拡張  $\langle F^\dagger E, \eta \rangle$  が存在すると仮定する.

$$\begin{array}{ccc}
 D & & \\
 F \uparrow & \searrow F^\dagger E & \\
 C & \xrightarrow{E} U & \\
 & \uparrow \eta &
 \end{array}$$

<sup>\*1</sup> cofinal functor と呼ぶ場合もある.

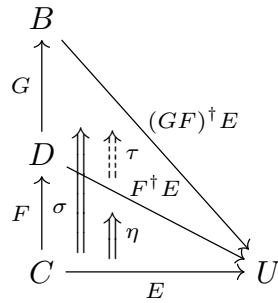
このとき  $G: D \rightarrow B$  に対して

左 Kan 拡張  $\langle (GF)^\dagger E, \sigma \rangle$  が存在する  $\iff$  左 Kan 拡張  $\langle G^\dagger(F^\dagger E), \tau \rangle$  が存在する.

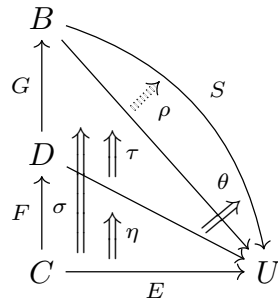


更に, これらが存在するとき  $(GF)^\dagger E = G^\dagger(F^\dagger E)$ ,  $\sigma = \tau_F \circ \eta$  である.

証明.  $(\implies)$  左 Kan 拡張  $\langle (GF)^\dagger E, \sigma \rangle$  が存在するとする.  $\langle F^\dagger E, \eta \rangle$  の普遍性により  $\tau: F^\dagger E \Rightarrow (GF)^\dagger E \circ G$  が存在して,  $\sigma = \tau_F \circ \eta$  となる.

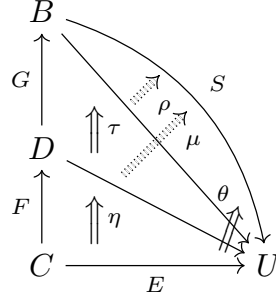


$\langle (GF)^\dagger E, \tau \rangle$  が  $G$  に沿った  $F^\dagger E$  の左 Kan 拡張であることを示せばよい. 任意の関手  $S: B \rightarrow U$  と  $\theta: F^\dagger E \Rightarrow SG$  を取る.



$(GF)^\dagger E$  の普遍性から,  $\rho: (GF)^\dagger E \Rightarrow S$  が一意に存在して  $\rho_{GF} \circ \sigma = \theta_F \circ \eta$  となる.  $\sigma = \tau_F \circ \eta$  だったから  $\rho_{GF} \circ \tau_F \circ \eta = \theta_F \circ \eta$  である. よって左 Kan 拡張  $F^\dagger E$  の普遍性から  $\rho_G \circ \tau = \theta$  となる. 従って  $\langle (GF)^\dagger E, \tau \rangle$  が  $G$  に沿った  $F^\dagger E$  の左 Kan 拡張である.

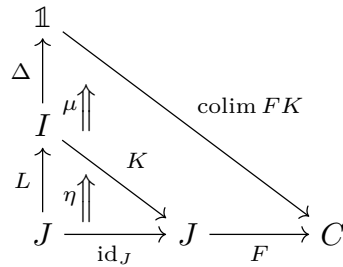
( $\Leftarrow$ ) 左 Kan 拡張  $\langle G^\dagger(F^\dagger E), \tau \rangle$  が存在するとする.  $\langle G^\dagger(F^\dagger E), \tau_F \circ \eta \rangle$  が  $GF$  に沿った  $E$  の左 Kan 拡張であることを示せばよい. 任意の関手  $S: B \rightarrow U$  と  $\theta: E \Rightarrow SGF$  を取る.



$F^\dagger E$  の普遍性から  $\mu: F^\dagger E \Rightarrow SG$  が一意に存在して  $\mu_F \circ \eta = \theta$  となる. よって  $G^\dagger(F^\dagger E)$  の普遍性から  $\rho: G^\dagger(F^\dagger E) \Rightarrow S$  が一意に存在して  $\rho_G \circ \tau = \mu$  となる. このとき  $\rho_{GF} \circ (\tau_F \circ \eta) = \theta$  である. 従って  $\langle G^\dagger(F^\dagger E), \tau_F \circ \eta \rangle$  が  $GF$  に沿った  $E$  の左 Kan 拡張である.  $\square$

命題 7. 右随伴関手は終関手である. (よって右随伴の例として終対象を考えれば命題 4 が得られる.)

証明.  $L \dashv K: J \rightarrow I$  を随伴,  $F: J \rightarrow C$  を関手とする.  $FK$  の余極限  $\langle \text{colim } FK, \mu \rangle$  が存在したとすると, この  $\langle \text{colim } FK, \mu \rangle$  は  $\Delta$  に沿った  $FK$  の左 Kan 拡張である. 一方  $K \cong L^\dagger \text{id}_C$  は絶対左 Kan 拡張であるから, 次の図式全体は  $\Delta = \Delta \circ L$  に沿った  $F = F \circ \text{id}_C$  の左 Kan 拡張を与える (補題 6).



それは  $\text{colim } F$  であったから, 普遍性から得られる射  $\text{colim } FK \rightarrow \text{colim } F$  が同型となることが分かる.  $\square$

終関手は圏の連結性を使って特徴付けることができる (命題 8).

定義.  $C$  を圏,  $a, b \in C$  を対象とする.  $a$  と  $b$  を結ぶ zigzag とは

$$a \rightarrow c_0 \leftarrow c_1 \rightarrow \cdots \leftarrow c_{n-1} \rightarrow c_n \leftarrow b$$

の形の図式のことをいう。

定義. 圏  $C$  が連結  $\iff C \neq \mathbf{0}$  で, 任意の対象  $a, b \in C$  を結ぶ zigzag が存在する.

命題 8. 関手  $K: I \rightarrow J$  が終関手  $\iff$  任意の  $j \in J$  に対して  $j \downarrow K$  が連結.

証明. ( $\implies$ )  $j \in J$  とする.  $F := \text{Hom}_J(j, -): J \rightarrow \mathbf{Set}$  と定義すると, 今  $K$  が終関手だから  $\text{colim } FK \cong \text{colim } F$  である.  $\text{colim } F \cong 1$  となる.

$\therefore$ )  $a \in \mathbf{Set}$  について自然に

$$\text{Hom}_{\mathbf{Set}}(\text{colim } F, a) \cong \text{Hom}_{\mathbf{Set}^J}(F, \Delta a) \cong \Delta a(j) = a \cong \text{Hom}_{\mathbf{Set}}(1, a)$$

だから米田の補題により  $\text{colim } F \cong 1$  である.

よって,  $\text{colim } FK \cong \left( \coprod_{i \in I} FK_i \right) / \sim$  だから, ある  $i \in I$  に対して  $FK_i \neq \emptyset$  でなければならない. 即ち  $\text{Hom}_J(j, Ki) \neq \emptyset$  だから  $j \downarrow K \neq \mathbf{0}$  が分かる.

また,  $\text{colim } FK \cong \text{colim } F \cong 1$  となるためには任意の  $f \in FK_{i_0}$ ,  $g \in FK_{i_1}$  に対して  $f \sim g$  とならなければならない. よって  $j \downarrow K$  が連結となることが分かる.

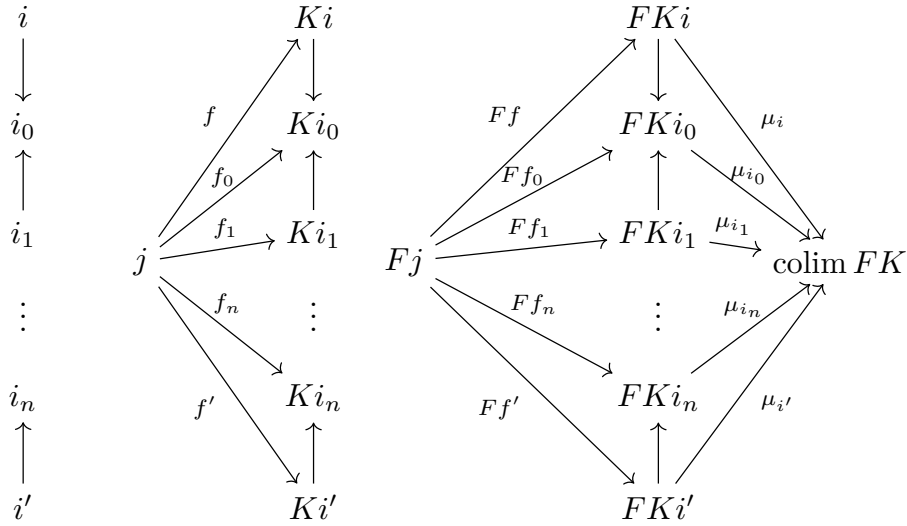
( $\impliedby$ )  $C$  を圏,  $F: J \rightarrow C$  を関手として  $FK$  の余極限  $\langle \text{colim } FK, \mu \rangle$  が存在するとする.  $i \in I$  に対して  $\mu_i: FK_i \rightarrow \text{colim } FK$  は  $C$  の射である.  $j \in J$  を取る.  $j \downarrow K \neq \mathbf{0}$  だから, ある対象  $\langle i, f \rangle \in j \downarrow K$  が存在する. この  $i$  と  $f$  を使って  $\tau_j := \mu_i \circ Ff: Fj \rightarrow \text{colim } FK$  と定める.

$$i \quad j \xrightarrow{f} Ki \quad Fj \xrightarrow{Ff} FK_i \xrightarrow{\mu_i} \text{colim } FK$$

この  $\tau_j$  は well-defined である.

$\therefore$ )  $\langle i, f \rangle, \langle i', f' \rangle \in j \downarrow K$  に対して  $\mu_i \circ Ff = \mu_{i'} \circ Ff'$  を示せばよい.  $j \downarrow K$  が連結だから zigzag  $\langle i, f \rangle \rightarrow \langle i_0, f_0 \rangle \leftarrow \langle i_1, f_1 \rangle \rightarrow \cdots \rightarrow \langle i_n, f_n \rangle \leftarrow \langle i', f' \rangle$  が存在する.

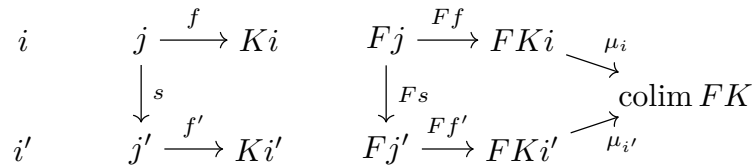
このとき次の図式は可換である.



故に  $\mu_i \circ Ff = \mu_{i'} \circ Ff'$  である.

この  $\tau_j$  は自然変換  $\tau: F \Rightarrow \Delta(\text{colim } FK)$  を定める.

$\therefore$   $s: j \rightarrow j'$  とする.  $\langle i, f \rangle \in j \downarrow K$ ,  $\langle i', f' \rangle \in j' \downarrow K$  を任意に取れば  $\tau_j = \mu_i \circ Ff$ ,  $\tau_{j'} = \mu_{i'} \circ Ff'$  となる.



このとき well-defined の証明と同様に連結性から  $\mu_i \circ Ff = \mu_{i'} \circ Ff' \circ Fs$  となることが分かる. 故に  $\tau$  は自然変換である.

この  $\tau$  が  $F$  から  $\Delta$  への普遍射を与えることを示せばよい. その為に  $a \in C$  を対象,  $\theta: F \Rightarrow \Delta a$  を自然変換とする. このとき  $\theta_K: FK \Rightarrow \Delta a$  は自然変換である. 故に余極限  $\langle \text{colim } FK, \mu \rangle$  の普遍性から射  $h: \text{colim } FK \rightarrow a$  が存在して,  $i \in I$  に対して



$h \circ \mu_i = \theta_{Ki}$  となる.

$$\begin{array}{ccc}
 i & FK_i & \\
 \downarrow t & \downarrow Ft & \nearrow \theta_{Ki} \\
 i' & FK_{i'} & \text{colim } FK \xrightarrow{h} a
 \end{array}$$

$\mu_i$  (from  $FK_i$  to  $\text{colim } FK$ ),  $\mu_{i'}$  (from  $FK_{i'}$  to  $\text{colim } FK$ ),  $\theta_{Ki}$  (from  $FK_i$  to  $a$ ),  $\theta_{Ki'}$  (from  $FK_{i'}$  to  $a$ )

よって  $\tau$  の定義と  $\theta_j$  の自然性から  $h \circ \tau_j = h \circ \mu_i \circ Ff = \theta_{Ki} \circ Ff = \theta_j$  が分かる.

$$\begin{array}{ccccccc}
 i & & j & \xrightarrow{f} & Ki & & \\
 & & & & & \uparrow & \theta_j \\
 & & & & & Fj & \xrightarrow{Ff} & FK_i & \xrightarrow{\mu_i} & \text{colim } FK & \xrightarrow{h} & a
 \end{array}$$

また  $\text{colim } FK$  の普遍性から  $h$  の一意性も分かり、 $\tau$  は  $F$  から  $\Delta$  への普遍射である。  $\square$

**例 9.** 圏  $C$  の対象  $c \in C$  に対して関手  $K: \mathbb{1} \rightarrow C$  を  $K(*) := c$  により定めると

$$c \in C \text{ が終対象} \iff K \text{ が終関手}$$

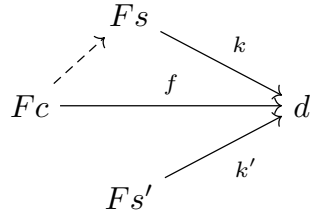
**証明.** ( $\implies$ )  $a \in C$  を終対象とすると、任意の  $a \in C$  に対して  $a \downarrow K = \mathbb{1}$  が連結だから命題 8 により  $K$  は終関手である。

( $\impliedby$ )  $K$  を終関手とする。任意の対象  $a \in C$  に対して、 $K$  の定義より  $a \downarrow K$  は離散圏であり  $a \downarrow K = \text{Hom}_C(a, c)$  となる。 $K$  が終関手だから  $a \downarrow K$  は連結なので  $\text{Hom}_C(a, c) = 1$  しかあり得ない。よって  $a$  から  $c$  への射は唯一つであり、 $c$  は終対象である。  $\square$

さて、いよいよ本題の随伴関手定理を示していく。

**定理 10 (General Adjoint Functor Theorem).**  $C, D$  を圏、 $C$  は余完備で関手  $F: C \rightarrow D$  は余連続であるとする。更に、任意の  $d \in D$  に対してある集合  $S \subset \text{Ob}(F \downarrow d)$  が存在して次を満たすとする (この条件を解集合条件 (solution set condition) と呼ぶ)。

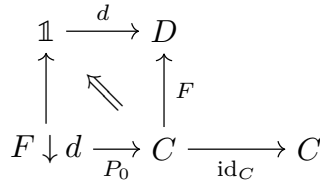
任意の  $\langle c, f \rangle \in F \downarrow d$  に対してある  $\langle s, k \rangle \in S$  と射  $\langle c, f \rangle \rightarrow \langle s, k \rangle$  が存在する



このとき  $F$  は右随伴を持つ.

証明. 各  $d \in D$  に対して  $\text{colim}(F \downarrow d \xrightarrow{P_0} C)$  が存在することを示せばよい.

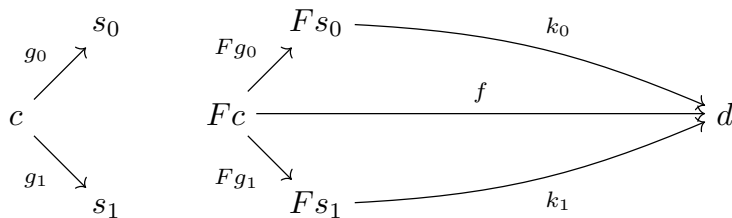
( $\therefore$ ) 余極限  $\text{colim}(F \downarrow d \xrightarrow{P_0} C) = \text{colim}(F \downarrow d \xrightarrow{P_0} C \xrightarrow{\text{id}_C} C)$  が存在したとする.



このとき各点左 Kan 拡張  $F^+ \text{id}_C$  が存在する. 今  $F$  が余連続だから,  $F$  は各点左 Kan 拡張  $F^+ \text{id}_C$  と交換する. 従って定理 2 により  $F$  は右随伴を持つ.

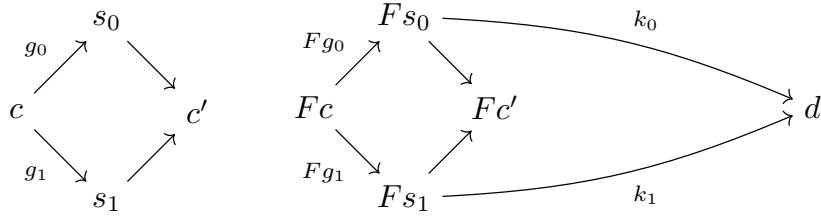
$d \in D$  とする. 解集合条件を満たす集合  $S \subset \text{Ob}(F \downarrow d)$  を取り,  $S \subset F \downarrow d$  を充満部分圏とみなす.  $K: S \rightarrow F \downarrow d$  を包含関手とすれば,  $S$  が small で  $C$  は余完備だから, 余極限  $\text{colim}(S \xrightarrow{K} F \downarrow d \xrightarrow{P_0} C)$  が存在する. 従って, 後は  $K$  が終関手であることを示せば  $\text{colim}(F \downarrow d \xrightarrow{P_0} C)$  の存在が分かる.

$\langle c, f \rangle \in F \downarrow d$  とする.  $\langle c, f \rangle \downarrow K$  が連結であることを示せばよい. まず, 解集合条件から明らかに  $\langle c, f \rangle \downarrow K \neq \emptyset$  である. 次に  $\langle \langle s_0, k_0 \rangle, g_0 \rangle, \langle \langle s_1, k_1 \rangle, g_1 \rangle \in \langle c, f \rangle \downarrow K$  とする. 即ち  $g_0: \langle c, f \rangle \rightarrow \langle s_0, k_0 \rangle$ ,  $g_1: \langle c, f \rangle \rightarrow \langle s_1, k_1 \rangle$  である.

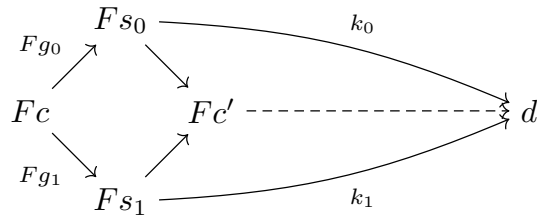


$C$  が余完備だから, 左の図式の pushout  $c'$  が存在する. また  $F$  が余連続だから,  $Fc'$  も

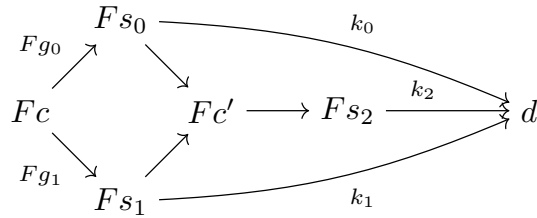
pushout である.



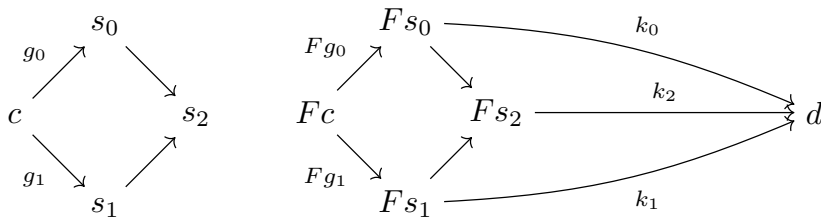
よって pushout の普遍性により, 射  $Fc' \rightarrow d$  が一意に伸びる.



解集合条件により, この射  $Fc' \rightarrow d$  はある  $\langle s_2, k_2 \rangle \in S$  を使って  $Fc' \rightarrow Fs_2 \xrightarrow{k_2} d$  と書ける.



このとき次の図式を得る.



この図式は可換である. 故に  $\langle c, f \rangle \downarrow K$  が連結であることが分かる.  $\square$

**補題 11.**  $C, D, U$  を圏で  $U$  は well-copowered かつ余完備とする.  $F: C \rightarrow D$ ,  $S, T: C \rightarrow U$  を関手,  $\varphi: S \Rightarrow T$  をエピな自然変換とする. このとき Kan 拡張  $F^\dagger S$  が

存在するならば  $F^\dagger T$  も存在する.

$$\begin{array}{ccc}
 D & & \\
 \uparrow F & \searrow F^\dagger S & \\
 C & \xrightarrow{S} & U \\
 & \downarrow \varphi & \\
 & \xrightarrow{T} & 
 \end{array}$$

証明.  $d \in D$  に対して  $\text{colim}(F \downarrow d \xrightarrow{P_0} C \xrightarrow{T} U)$  が存在することを示せばよい.

各点 Kan 拡張により  $F^\dagger S(d) \cong \text{colim}(F \downarrow d \xrightarrow{P_0} C \xrightarrow{S} U)$  である.  $\langle c, f \rangle \in F \downarrow d$  に対して, 標準的な射を  $\sigma_{\langle c, f \rangle}: Sc \rightarrow F^\dagger S(d)$  と書く. これと自然変換  $\varphi: S \Rightarrow T$  を合わせて, 次の可換図式を得る.

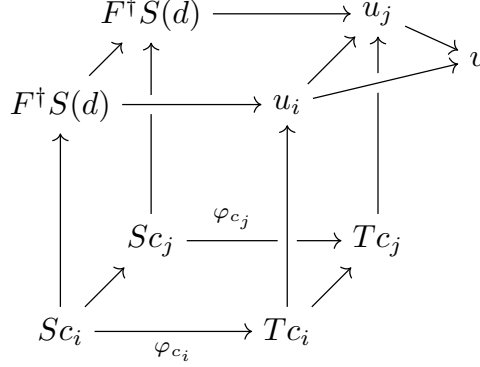
$$\begin{array}{ccc}
 & & F^\dagger S(d) \\
 & \nearrow \text{id} & \uparrow \sigma_{\langle c_j, f_j \rangle} \\
 F^\dagger S(d) & & \\
 \uparrow \sigma_{\langle c_i, f_i \rangle} & & \\
 Sc_j & \xrightarrow{\varphi_{c_j}} & Tc_j \\
 \nearrow & & \nearrow \\
 Sc_i & \xrightarrow{\varphi_{c_i}} & Tc_i
 \end{array}$$

今  $U$  は余完備だから, 次の図式のように pushout を取ることができる. また, pushout の普遍性から点線の射が延びる.

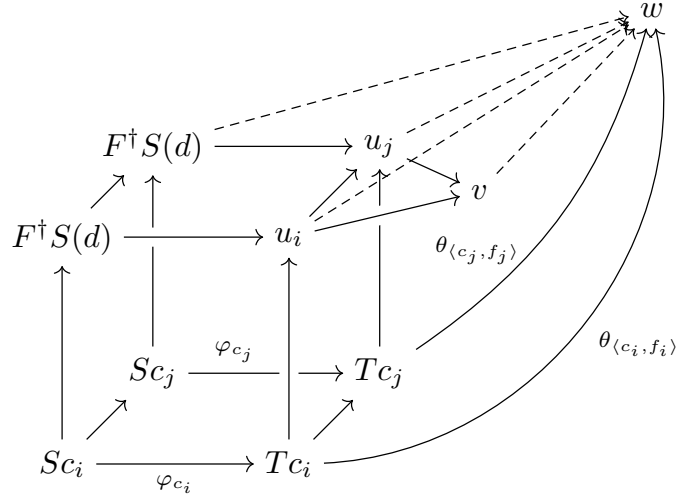
$$\begin{array}{ccccc}
 & & F^\dagger S(d) & \xrightarrow{m_j} & u_j \\
 & \nearrow \text{id} & \uparrow & & \uparrow \\
 F^\dagger S(d) & \xrightarrow{m_i} & u_i & \dashrightarrow & u_j \\
 \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 Sc_j & \xrightarrow{\varphi_{c_j}} & Tc_j & & \\
 \nearrow & & \nearrow & & \\
 Sc_i & \xrightarrow{\varphi_{c_i}} & Tc_i & & 
 \end{array}$$

仮定から  $\varphi_{c_i}$  はエピ射で, エピ射の pushout はエピ射だから,  $m_i$  もエピ射である.  $U$  が

well-copowered かつ余完備だから,  $m_i$  たちの余極限  $v$  を取ることができる.



$v = \text{colim}(F \downarrow d \xrightarrow{P_0} C \xrightarrow{T} U)$  であることを示そう. その為に任意の  $\theta: TP_0 \Rightarrow \Delta w$  を取る.



このとき  $\theta \circ \varphi: SP_0 \Rightarrow \Delta w$  が得られるから, 普遍性により  $F^+S(d) \rightarrow w$  が一意に延びる. よって pushout の普遍性から  $u_i \rightarrow w$  が一意に延びる. よって  $v$  の普遍性から  $v \rightarrow w$  が一意に延びる. 以上により  $v \cong \text{colim}(F \downarrow d \xrightarrow{P_0} C \xrightarrow{T} U)$  である.  $\square$

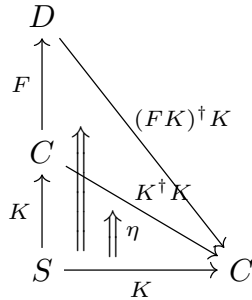
**定理 12 (Special Adjoint Functor Theorem).**  $C, D$  が圏で,  $C$  は余完備, well-copowered で, small generating set  $S$  を持つとする. このとき関手  $F: C \rightarrow D$  に対して

$$F \text{ が余連続} \iff F \text{ が右随伴を持つ.}$$

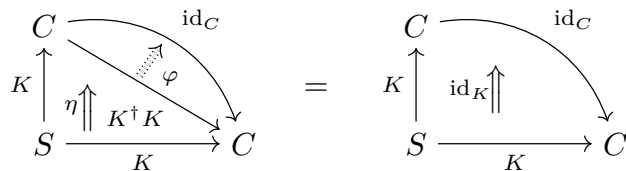
**証明.** ( $\Leftarrow$ ) 明らか.

( $\Rightarrow$ ) Kan 拡張  $F^+ \text{id}_C$  が存在することを示せばよい.

generating set  $S \subset C$  を充満部分圏とみなし,  $K: S \rightarrow C$  を包含関手とする.  $S$  が small で  $C$  が余完備だから Kan 拡張  $K^\dagger K$ ,  $(FK)^\dagger K$  が存在する.

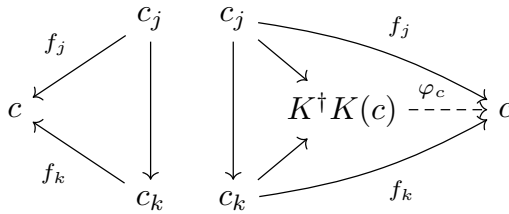


故に補題 6 より  $F^\dagger(K^\dagger K)$  も存在して,  $F^\dagger(K^\dagger K) \cong (FK)^\dagger K$  が成り立つ. また  $\text{id}_C: C \rightarrow C$  を考えれば, Kan 拡張の普遍性により  $\varphi: K^\dagger K \Rightarrow \text{id}_C$  が一意に取れる.



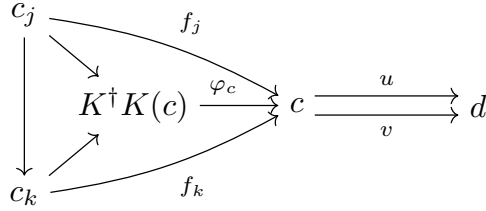
$\varphi$  はエピ射である.

$\therefore c \in C$  に対して  $\varphi_c: K^\dagger K(c) \rightarrow c$  がエピ射であることを示せばよい. 各点 Kan 拡張の構成を思い出せば,  $\varphi_c$  は  $K^\dagger K(c) \cong \text{colim}(K \downarrow c \rightarrow S \rightarrow C) = \text{colim}_{\langle c, f \rangle \in K \downarrow c} c$  の普遍性から定まる射である.

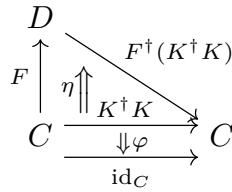


$u, v: c \rightarrow d$  を射で,  $u \neq v$  とする.  $S$  が generating set だったから, ある  $s \in S$  と

$g: s \rightarrow c$  が存在して  $u \circ g \neq v \circ g$  となる. このとき  $\langle s, g \rangle \in K \downarrow c$  である.



よって  $u \circ \varphi_c \neq v \circ \varphi_c$  でなければならない. 故に  $\varphi_c$  はエピソードである.

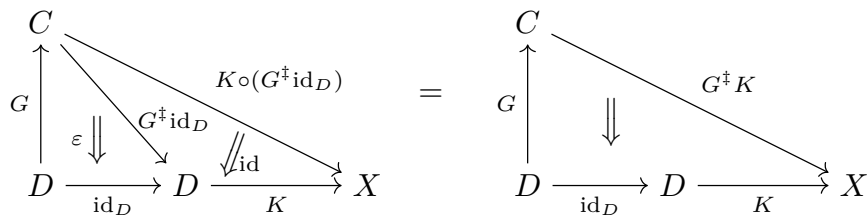


よって補題 11 により  $F^\dagger \text{id}_C$  が存在する. □

双対的に, 以下の定理も成り立つ. (証明は同様である.)

**定理 13.**  $G: D \rightarrow C$  を関手とするとき以下の条件は同値である.

- (1)  $G$  は左随伴を持つ.
- (2)  $G$  に沿った  $\text{id}_D$  の右 Kan 拡張  $\langle G^\ddagger \text{id}_D, \varepsilon \rangle$  が存在し, 任意の関手  $K: D \rightarrow X$  が右 Kan 拡張  $G^\ddagger \text{id}_D$  と交換する.

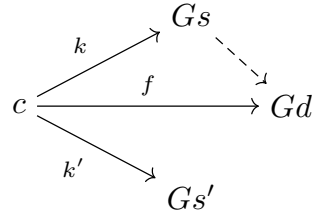


- (3)  $G$  に沿った  $\text{id}_D$  の右 Kan 拡張  $\langle G^\ddagger \text{id}_D, \varepsilon \rangle$  が存在し,  $G$  が右 Kan 拡張  $G^\ddagger \text{id}_D$  と交換する.

またこのとき  $G^\ddagger \text{id}_D \dashv G$  であり  $\varepsilon$  がその counit である. □

**定理 14 (General Adjoint Functor Theorem).**  $C, D$  を圏,  $D$  は完備で関手  $G: D \rightarrow C$  は連続であるとする. 更に, 任意の  $c \in C$  に対してある集合  $S \subset \text{Ob}(c \downarrow G)$  が存在して次を満たすとする. (この条件を解集合条件と呼ぶ)

任意の  $\langle d, f \rangle \in c \downarrow G$  に対してある  $\langle s, k \rangle \in S$  と射  $\langle s, k \rangle \rightarrow \langle d, f \rangle$  が存在する



このとき  $G$  は右随伴を持つ。 □

**定理 15** (Special Adjoint Functor Theorem).  $C, D$  が圏で,  $D$  は完備, wellpowered で, small cogenerating set  $S$  を持つとする. このとき関手  $G: D \rightarrow C$  に対して

$G$  が連続  $\iff G$  が左随伴を持つ.

□

また, 関手の表現可能性について次の定理が分かる.

**定理 16.**  $D$  を完備な圏,  $G: D \rightarrow \mathbf{Set}$  を連続な関手で解集合条件を満たすとする. このとき  $G$  は表現可能関手である.

**証明.** General Adjoint Functor Theorem により  $G$  は左随伴関手  $F: \mathbf{Set} \rightarrow D$  を持つ. このとき  $d \in D$  と  $1 \in \mathbf{Set}$  に対して  $\text{Hom}_D(F(1), -) \cong \text{Hom}_{\mathbf{Set}}(1, G-) \cong G$  である. 故に  $G$  は表現可能関手である. □

**定理 17.**  $D$  を完備, wellpowered な圏で, small cogenerating set  $S$  を持つとする. このとき関手  $G: D \rightarrow \mathbf{Set}$  に対して以下は同値である.

- (1)  $G$  が連続である.
- (2)  $G$  が左随伴を持つ.
- (3)  $G$  が表現可能関手である.

**証明.**  $1 \iff 2$  は Special Adjoint Functor Theorem である.

(2  $\implies$  3)  $G$  の左随伴関手を  $F: \mathbf{Set} \rightarrow D$  とすれば  $1 \in \mathbf{Set}$  に対して

$$\text{Hom}_D(F(1), -) \cong \text{Hom}_{\mathbf{Set}}(1, G-) \cong G$$

である. 故に  $G$  は表現可能関手である.

(3  $\implies$  1) 表現可能関手  $\text{Hom}_D(d, -)$  は連続だから明らか. □

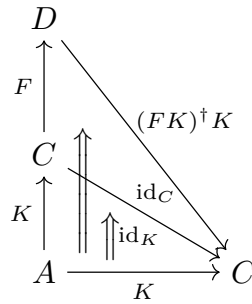


定理 18.  $C$  を余完備な圏,  $D$  を圏とする.  $A \subset C$  を小さい稠密部分圏とするとき

関手  $F: C \rightarrow D$  が余連続  $\iff F$  が右随伴を持つ.

証明. ( $\Leftarrow$ ) 明らか.

( $\Rightarrow$ ) Kan 拡張  $F^\dagger \text{id}_C$  が存在することを示せばよい. 包含関手  $K: A \rightarrow C$  が稠密だから  $K^\dagger K \cong \text{id}_A$  である. また  $A$  が小圏で  $C$  が余完備だから  $(FK)^\dagger K$  も存在する.



故に補題 6 より  $F^\dagger \text{id}_C$  も存在する.

□