随伴関手定理

alg-d
http://alg-d.com/math/kan_extension/

2021 年 6 月 15 日

左随伴関手は余極限と交換するのであった．では逆に，余極限と交換する関手は左随伴になるのだろうか? ある条件の下であればこれが成り立つ，という定理が随伴関手定理である．これを理解する上で重要なのが「随伴は Kan 拡張である」という事実 (定理 2) である．

定義. $F\colon C \to D,\ E\colon C \to U$ を関手として左 Kan 拡張 $F^\dagger E$ が存在するとする．$F^\dagger E$ が任意の関手 $H\colon U \to V$ と交換するとき，$F^\dagger E$ は絶対左 Kan 拡張であるという．

定義から明らかに次が成り立つ．

命題 1. $F\colon C \to D,\ E\colon C \to U,\ L\colon D \to U$ を関手，$\eta\colon E \Rightarrow L \circ F$ を自然変換とする．

$$\begin{tikzcd} D \arrow[dr, "L"] & \\ C \arrow[u, "F"] \arrow[r, "E"'] \arrow[ur, phantom, "\eta\Uparrow"] & U \end{tikzcd}$$

このとき $\langle L, \eta\rangle$ が F に沿った E の絶対左 Kan 拡張である
$\iff$ 任意の圏 V と関手 $K\colon D \to V,\ H\colon U \to V$，自然変換 $\theta\colon HE \Rightarrow KF$ に対して，ある自然変換 $\tau\colon HL \Rightarrow K$ が一意に存在して，次の等式が成り立つ．

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "K"] \arrow[dr, "L"] & V \\ C \arrow[u, "F"] \arrow[r, "E"'] \arrow[ur, phantom, "\eta\Uparrow"] & U \arrow[u, "H"'] \arrow[ul, phantom, "\tau\Uparrow"] \end{tikzcd} \quad = \quad \begin{tikzcd} D \arrow[r, "K"] & V \\ C \arrow[u, "F"] \arrow[r, "E"'] \arrow[ur, phantom, "\theta\Uparrow"] & U \arrow[u, "H"'] \end{tikzcd}$$

□

定理 2. $F\colon C \to D$ を関手とするとき以下の条件は同値である．

(1) F は右随伴を持つ．

(2) F に沿った id_C の絶対左 Kan 拡張 $\langle F^\dagger \mathrm{id}_C, \eta\rangle$ が存在する．

(3) F に沿った id_C の左 Kan 拡張 $\langle F^\dagger \mathrm{id}_C, \eta\rangle$ が存在し，F が左 Kan 拡張 $F^\dagger \mathrm{id}_C$ と交換する．

$$
\begin{tikzcd}
D \arrow[dr, "F^\dagger \mathrm{id}_C"'] \arrow[drr, "F\circ(F^\dagger \mathrm{id}_C)"] & & \\
C \arrow[u, "F"] \arrow[r, "\mathrm{id}_C"'] \arrow[u, phantom, shift left=4ex, "\eta\Uparrow"] & C \arrow[r, "F"'] \arrow[r, phantom, shift left=3ex, "\Uparrow\mathrm{id}"] & D
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
D \arrow[drr, "F\circ(F^\dagger \mathrm{id}_C)\cong F^\dagger F"] & & \\
C \arrow[u, "F"] \arrow[r, "\mathrm{id}_C"'] \arrow[ur, phantom, "\Uparrow F\eta"] & C \arrow[r, "F"'] & D
\end{tikzcd}
$$

またこのとき $F \dashv F^\dagger \mathrm{id}_C$ であり η がその unit である．

証明． $(1 \Longrightarrow 2)$ $F \dashv G\colon C \to D$ を随伴として，その unit を η，counit を ε とする．任意の圏 X と関手 $K\colon C \to X$，$H\colon D \to X$，自然変換 $\theta\colon K \Rightarrow HF$ を取る．

$$
\tau \quad := \quad
\begin{tikzcd}
D \arrow[r, "\mathrm{id}_D"] \arrow[dr, "G"'] \arrow[r, phantom, shift right=3ex, "\varepsilon\Uparrow"] & D \arrow[r, "H"] \arrow[dr, phantom, "\theta\Uparrow"] & X \\
 & C \arrow[u, "F"] \arrow[r, "\mathrm{id}_C"'] & C \arrow[u, "K"']
\end{tikzcd}
$$

と定義すれば

$$
\begin{tikzcd}
D \arrow[r, "H"] \arrow[dr, "G"] \arrow[r, phantom, shift right=3ex, "\tau\Uparrow"] & X \\
C \arrow[u, "F"] \arrow[r, "\mathrm{id}_C"'] \arrow[r, phantom, shift left=3ex, "\eta\Uparrow"] & C \arrow[u, "K"']
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
D \arrow[r, "\mathrm{id}_D"] \arrow[dr, "G"] \arrow[r, phantom, shift right=3ex, "\varepsilon\Uparrow"] & D \arrow[r, "H"] \arrow[dr, phantom, "\theta\Uparrow"] & X \\
C \arrow[u, "F"] \arrow[r, "\mathrm{id}_C"'] \arrow[r, phantom, shift left=3ex, "\eta\Uparrow"] & C \arrow[u, "F"] \arrow[r, "\mathrm{id}_C"'] & C \arrow[u, "K"']
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
D \arrow[r, "H"] \arrow[dr, phantom, "\theta\Uparrow"] & X \\
C \arrow[u, "F"] \arrow[r, "\mathrm{id}_C"'] & C \arrow[u, "K"']
\end{tikzcd}
$$

である．逆に τ が

$$
\begin{tikzcd}
D \arrow[r, "H"] \arrow[dr, "G"] \arrow[r, phantom, shift right=3ex, "\tau\Uparrow"] & X \\
C \arrow[u, "F"] \arrow[r, "\mathrm{id}_C"'] \arrow[r, phantom, shift left=3ex, "\eta\Uparrow"] & C \arrow[u, "K"']
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
D \arrow[r, "H"] \arrow[dr, phantom, "\theta\Uparrow"] & X \\
C \arrow[u, "F"] \arrow[r, "\mathrm{id}_C"'] & C \arrow[u, "K"']
\end{tikzcd}
$$

を満たせば

$$
\begin{tikzcd}
D \arrow[r, "H"] \arrow[dr, "G"'] & X \\
& C \arrow[u, "K"'] \arrow[ul, phantom, "\tau\Uparrow"]
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
D \arrow[r, "\mathrm{id}_D"] \arrow[dr, "G"'] & D \arrow[r, "H"] \arrow[dr, "G"] & X \\
& C \arrow[u, "F"'] \arrow[r, "\mathrm{id}_C"'] \arrow[ul, phantom, "\varepsilon\Uparrow"] \arrow[u, phantom, shift left=6, "\eta\Uparrow"] & C \arrow[u, "K"'] \arrow[ul, phantom, "\tau\Uparrow"]
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
D \arrow[r, "\mathrm{id}_D"] \arrow[dr, "G"'] & D \arrow[r, "H"] & X \\
& C \arrow[u, "F"'] \arrow[r, "\mathrm{id}_C"'] \arrow[ul, phantom, "\varepsilon\Uparrow"] \arrow[ur, phantom, "\theta\Uparrow"] & C \arrow[u, "K"']
\end{tikzcd}
$$

となるから，このような τ は一意である．故に $\langle F^\dagger \mathrm{id}_C, \eta\rangle$ は絶対左 Kan 拡張である．

$(2 \Longrightarrow 3)$ 明らか．

$(3 \Longrightarrow 1)$ $G := F^\dagger \mathrm{id}_C$ と置く．絶対性から左 Kan 拡張 $F^\dagger F = F \circ (F^\dagger \mathrm{id}_C) = FG$ も存在する．$F^\dagger F$ の普遍性により $\varepsilon\colon FG \Rightarrow \mathrm{id}_D$ が一意に存在して $\varepsilon_F \circ F\eta = \mathrm{id}_F$ が成り立つ．

$$
\begin{tikzcd}
D \arrow[r, "\mathrm{id}_D"] \arrow[dr, "G"] & D \\
C \arrow[u, "F"] \arrow[r, "\mathrm{id}_C"'] \arrow[ur, phantom, "\eta\Uparrow\quad\varepsilon\Uparrow"] & C \arrow[u, "F"']
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
D \arrow[r, "\mathrm{id}_D"] & D \\
C \arrow[u, "F"] \arrow[r, "\mathrm{id}_C"'] \arrow[ur, phantom, "\mathrm{id}_F\Uparrow"] & C \arrow[u, "F"']
\end{tikzcd}
$$

故に後は $G\varepsilon \circ \eta_G = \mathrm{id}_G$ を示せばよい．その為には，左 Kan 拡張 $\langle G, \eta\rangle$ の普遍性から

$$
\begin{tikzcd}
D \arrow[r, "\mathrm{id}_D"] \arrow[dr, "G"] & D \arrow[dr, "G"] & \\
C \arrow[u, "F"] \arrow[r, "\mathrm{id}_C"'] \arrow[ur, phantom, "\eta\Uparrow\quad\varepsilon\Uparrow"] & C \arrow[u, "F"] \arrow[r, "\mathrm{id}_C"'] \arrow[u, phantom, shift left=8, "\Uparrow\eta"] & C
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
D \arrow[r, "\mathrm{id}_D"] \arrow[dr, "G"] & D \arrow[dr, "G"] & \\
C \arrow[u, "F"] \arrow[r, "\mathrm{id}_C"'] \arrow[u, phantom, shift left=6, "\eta\Uparrow"] & C \arrow[r, "\mathrm{id}_C"'] \arrow[u, phantom, "\Uparrow\mathrm{id}_G"] & C
\end{tikzcd}
$$

を示せばよいが，それは明らか． $\square$

この定理の具体例として，終対象を考えると次の系を得る．

系 3. 圏 C が終対象 1 を持つ $\Longleftrightarrow$ $\mathrm{colim}(\mathrm{id}_C)$ が存在する．
また，このとき $\mathrm{colim}(\mathrm{id}_C) \cong 1$ が成り立つ．

証明. 終対象 1 とは対角関手 $\Delta\colon C \to C^{\mathbb{0}} \cong \mathbb{1}$ の右随伴である．

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{1} \arrow[dr, "1"] & \\
C \arrow[u, "\Delta"] \arrow[r, "\mathrm{id}_C"'] \arrow[ur, phantom, "\Uparrow"] & C
\end{tikzcd}
$$

($\Longrightarrow$) 終対象 1，即ち Δ の右随伴が存在するから，定理 2 により左 Kan 拡張 $\Delta^\dagger \mathrm{id}_C$ が存在する．ところで $\Delta^\dagger \cong \mathrm{colim}$ だったから $\mathrm{colim}(\mathrm{id}_C)$ が存在することが分かり，また $\mathrm{colim}(\mathrm{id}_C) \cong 1$ も分かる．

($\Longleftarrow$) 定理 2 により Δ が $\Delta^\dagger \mathrm{id}_C \cong \mathrm{colim}(\mathrm{id}_C)$ と交換することを示せばよいが，それは明らか． □

$\Delta^\dagger \cong \mathrm{colim}$ が絶対左 Kan 拡張であることから，次の命題が分かる．

命題 4. J が終対象 1 を持てば，関手 $F\colon J \to C$ の余極限は存在し $\mathrm{colim}\, F \cong F(1)$．

証明. 系 3 で見た通り $\Delta^\dagger \mathrm{id}_J = 1$ であり，これは絶対左 Kan 拡張である．

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{1} \arrow[dr, "1"] & & \\
J \arrow[u, "\Delta"] \arrow[r, "\mathrm{id}_I"'] \arrow[r, phantom, shift left=3, "\Uparrow"] & J \arrow[r, "F"'] & C
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathbb{1} \arrow[dr, "F(1)"] & \\
J \arrow[u, "\Delta"] \arrow[r, "F"'] \arrow[r, phantom, shift left=3, "\Uparrow"] & C
\end{tikzcd}
$$

よって $\mathrm{colim}\, F \cong \Delta^\dagger F \cong F \circ (\Delta^\dagger \mathrm{id}_J) \cong F(1)$ である． □

命題 5. $P \in \widehat{C}$ が表現可能 $\Longleftrightarrow$ コンマ圏 $y \downarrow P$ が終対象を持つ．

証明. ($\Longrightarrow$) $P = y(c)$ とする．$y \downarrow P = y \downarrow y(c) = \{\langle d, \theta \rangle \mid d \in C,\ \theta\colon y(d) \Rightarrow y(c)\}$ で，y は忠実充満なので $y \downarrow P \cong \mathrm{id}_C \downarrow c$ が分かる．よって終対象 $\mathrm{id}_c\colon c \to c$ が存在する．

($\Longleftarrow$) コンマ圏 $y \downarrow P$ が終対象 $\langle c, \theta \rangle$ を持つとすれば，各点左 Kan 拡張 $y^\dagger y \cong \mathrm{id}$ と命題 4 により $P \cong \mathrm{colim}(y \downarrow P \to C \xrightarrow{y} \widehat{C}) \cong y(c)$ である． □

終対象におけるこの性質を一般化したものが終関手である (例 9 も参照)．

定義. 関手 $K\colon I \to J$ が終関手 (final functor[*1])
$\Longleftrightarrow$ C を圏，$F\colon J \to C$ を関手とする．もし余極限 $\mathrm{colim}\, FK$ が存在すれば $\mathrm{colim}\, F$ も存在し，普遍性から得られる射 $\mathrm{colim}\, FK \to \mathrm{colim}\, F$ が同型を与える．

補題 6. $F\colon C \to D$，$E\colon C \to U$ で，左 Kan 拡張 $\langle F^\dagger E, \eta \rangle$ が存在すると仮定する．

$$
\begin{tikzcd}
D \arrow[dr, "F^\dagger E"] & \\
C \arrow[u, "F"] \arrow[r, "E"'] \arrow[r, phantom, shift left=3, "\eta\Uparrow"] & U
\end{tikzcd}
$$

[*1] cofinal functor と呼ぶ場合もある．

このとき $G\colon D \to B$ に対して

$$\text{左 Kan 拡張 } \langle (GF)^\dagger E, \sigma\rangle \text{ が存在する} \iff \text{左 Kan 拡張 } \langle G^\dagger(F^\dagger E), \tau\rangle \text{ が存在する.}$$

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[ddr, "(GF)^\dagger E"] & \\
D \arrow[u, "G"] \arrow[dr, phantom, "\Uparrow\sigma"] & \\
C \arrow[u, "F"] \arrow[r, "E"'] & U
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
B \arrow[ddr, "G^\dagger(F^\dagger E)"] & \\
D \arrow[u, "G"] \arrow[dr, "F^\dagger E"] \arrow[ur, phantom, "\Uparrow\tau"] & \\
C \arrow[u, "F"] \arrow[r, "E"'] \arrow[ur, phantom, "\Uparrow\eta"] & U
\end{tikzcd}$$

更に，これらが存在するとき $(GF)^\dagger E = G^\dagger(F^\dagger E)$，$\sigma = \tau_F \circ \eta$ である．

証明. ($\Longrightarrow$) 左 Kan 拡張 $\langle (GF)^\dagger E, \sigma\rangle$ が存在するとする．$\langle F^\dagger E, \eta\rangle$ の普遍性により $\tau\colon F^\dagger E \Rightarrow (GF)^\dagger E \circ G$ が存在して，$\sigma = \tau_F \circ \eta$ となる．

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[ddr, "(GF)^\dagger E"] & \\
D \arrow[u, "G"] \arrow[dr, "F^\dagger E"] \arrow[ur, phantom, "\Uparrow\tau"] \arrow[d, phantom, "\Uparrow\sigma"] & \\
C \arrow[u, "F"] \arrow[r, "E"'] \arrow[ur, phantom, "\Uparrow\eta"] & U
\end{tikzcd}$$

$\langle (GF)^\dagger E, \tau\rangle$ が G に沿った $F^\dagger E$ の左 Kan 拡張であることを示せばよい．任意の関手 $S\colon B \to U$ と $\theta\colon F^\dagger E \Rightarrow SG$ を取る．

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[ddr, "(GF)^\dagger E"] \arrow[ddr, bend left, "S"] & \\
D \arrow[u, "G"] \arrow[dr, "F^\dagger E"] \arrow[ur, phantom, "\Uparrow\tau"] \arrow[d, phantom, "\Uparrow\sigma"] & \\
C \arrow[u, "F"] \arrow[r, "E"'] \arrow[ur, phantom, "\Uparrow\eta"] & U
\end{tikzcd}$$

$(GF)^\dagger E$ の普遍性から，$\rho\colon (GF)^\dagger E \Rightarrow S$ が一意に存在して $\rho_{GF} \circ \sigma = \theta_F \circ \eta$ となる．$\sigma = \tau_F \circ \eta$ だったから $\rho_{GF} \circ \tau_F \circ \eta = \theta_F \circ \eta$ である．よって左 Kan 拡張 $F^\dagger E$ の普遍性から $\rho_G \circ \tau = \theta$ となる．従って $\langle (GF)^\dagger E, \tau\rangle$ が G に沿った $F^\dagger E$ の左 Kan 拡張である．

($\Longleftarrow$) 左 Kan 拡張 $\langle G^\dagger(F^\dagger E), \tau\rangle$ が存在するとする．$\langle G^\dagger(F^\dagger E), \tau_F \circ \eta\rangle$ が GF に沿った E の左 Kan 拡張であることを示せばよい．任意の関手 $S\colon B \to U$ と $\theta\colon E \Rightarrow SGF$ を取る．

$$
\begin{tikzcd}
B \arrow[ddr, bend left, "S"] \arrow[ddr] & \\
D \arrow[u, "G"] \arrow[dr] \arrow[r, phantom, "\Uparrow\tau"] & \\
C \arrow[u, "F"] \arrow[r, "E"'] \arrow[r, phantom, "\Uparrow\eta", shift left=3] & U
\end{tikzcd}
$$

$F^\dagger E$ の普遍性から $\mu\colon F^\dagger E \Rightarrow SG$ が一意に存在して $\mu_F \circ \eta = \theta$ となる．よって $G^\dagger(F^\dagger E)$ の普遍性から $\rho\colon G^\dagger(F^\dagger E) \Rightarrow S$ が一意に存在して $\rho_G \circ \tau = \mu$ となる．このとき $\rho_{GF} \circ (\tau_F \circ \eta) = \theta$ である．従って $\langle G^\dagger(F^\dagger E), \tau_F \circ \eta\rangle$ が GF に沿った E の左 Kan 拡張である． $\square$

命題 7. 右随伴関手は終関手である．(よって右随伴の例として終対象を考えれば命題 4 が得られる．)

証明. $L \dashv K\colon J \to I$ を随伴，$F\colon J \to C$ を関手とする．FK の余極限 $\langle \operatorname{colim} FK, \mu\rangle$ が存在したとすると，この $\langle \operatorname{colim} FK, \mu\rangle$ は Δ に沿った FK の左 Kan 拡張である．一方 $K \cong L^\dagger \mathrm{id}_C$ は絶対左 Kan 拡張であるから，次の図式全体は $\Delta = \Delta \circ L$ に沿った $F = F \circ \mathrm{id}_C$ の左 Kan 拡張を与える (補題 6).

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{1} \arrow[ddrr, "\operatorname{colim} FK"] & & \\
I \arrow[u, "\Delta"] \arrow[dr, "K"] \arrow[r, phantom, "\mu\Uparrow", shift left=3] & & \\
J \arrow[u, "L"] \arrow[r, "\mathrm{id}_J"'] \arrow[r, phantom, "\eta\Uparrow", shift left=3] & J \arrow[r, "F"'] & C
\end{tikzcd}
$$

それは $\operatorname{colim} F$ であったから，普遍性から得られる射 $\operatorname{colim} FK \to \operatorname{colim} F$ が同型となることが分かる． $\square$

終関手は圏の連結性を使って特徴付けることができる (命題 8).

定義. C を圏，$a, b \in C$ を対象とする．a と b を結ぶ zigzag とは

$$a \to c_0 \leftarrow c_1 \to \cdots \leftarrow c_{n-1} \to c_n \leftarrow b$$

の形の図式のことをいう．

定義. 圏 C が連結 $\iff C \neq \mathbb{0}$ で，任意の対象 $a, b \in C$ を結ぶ zigzag が存在する．

命題 8. 関手 $K\colon I \to J$ が終関手 $\iff$ 任意の $j \in J$ に対して $j \downarrow K$ が連結.

証明. $(\Longrightarrow)$ $j \in J$ とする．$F := \mathrm{Hom}_J(j, -)\colon J \to \mathbf{Set}$ と定義すると，今 K が終関手だから $\operatorname{colim} FK \cong \operatorname{colim} F$ である．$\operatorname{colim} F \cong 1$ となる．

> $\because$) $a \in \mathbf{Set}$ について自然に
>
> $$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(\operatorname{colim} F, a) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}^J}(F, \Delta a) \cong \Delta a(j) = a \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(1, a)$$
>
> だから米田の補題により $\operatorname{colim} F \cong 1$ である．

よって，$\operatorname{colim} FK \cong \left(\coprod_{i \in I} FKi\right)/\sim$ だから，ある $i \in I$ に対して $FKi \neq \emptyset$ でなければならない．即ち $\mathrm{Hom}_J(j, Ki) \neq \emptyset$ だから $j \downarrow K \neq \mathbb{0}$ が分かる．

また，$\operatorname{colim} FK \cong \operatorname{colim} F \cong 1$ となるためには任意の $f \in FKi_0$，$g \in FKi_1$ に対して $f \sim g$ とならなければならない．よって $j \downarrow K$ が連結となることが分かる．

$(\Longleftarrow)$ C を圏, $F\colon J \to C$ を関手として FK の余極限 $\langle \operatorname{colim} FK, \mu \rangle$ が存在するとする．$i \in I$ に対して $\mu_i\colon FKi \to \operatorname{colim} FK$ は C の射である．$j \in J$ を取る．$j{\downarrow}K \neq \mathbb{0}$ だから，ある対象 $\langle i, f \rangle \in j{\downarrow}K$ が存在する．この i と f を使って $\tau_j := \mu_i \circ Ff\colon Fj \to \operatorname{colim} FK$ と定める．

$$i \qquad\qquad j \xrightarrow{f} Ki \qquad Fj \xrightarrow{Ff} FKi \xrightarrow{\mu_i} \operatorname{colim} FK$$

この τ_j は well-defined である．

> $\because$) $\langle i, f \rangle, \langle i', f' \rangle \in j \downarrow K$ に対して $\mu_i \circ Ff = \mu_{i'} \circ Ff'$ を示せばよい．$j \downarrow K$ が連結だから zigzag $\langle i, f \rangle \to \langle i_0, f_0 \rangle \leftarrow \langle i_1, f_1 \rangle \to \cdots \to \langle i_n, f_n \rangle \leftarrow \langle i', f' \rangle$ が存在する．

このとき次の図式は可換である．

$$
\begin{tikzcd}
i \arrow[d] & & Ki \arrow[d] & & FKi \arrow[d] \arrow[ddr, "\mu_i"] & \\
i_0 & & Ki_0 & & FKi_0 \arrow[dr, "\mu_{i_0}"] & \\
i_1 \arrow[u] & j \arrow[uur, "f"] \arrow[ur, "f_0"] \arrow[r, "f_1"] \arrow[ddr, "f_n"] \arrow[dddr, "f'"'] & Ki_1 \arrow[u] & Fj \arrow[uur, "Ff"] \arrow[ur, "Ff_0"] \arrow[r, "Ff_1"] \arrow[ddr, "Ff_n"] \arrow[dddr, "Ff'"'] & FKi_1 \arrow[u] \arrow[r, "\mu_{i_1}"] & \operatorname{colim} FK \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & \\
i_n & & Ki_n & & FKi_n \arrow[uur, "\mu_{i_n}"] & \\
i' \arrow[u] & & Ki' \arrow[u] & & FKi' \arrow[u] \arrow[uuur, "\mu_{i'}"'] &
\end{tikzcd}
$$

故に $\mu_i \circ Ff = \mu_{i'} \circ Ff'$ である．

この τ_j は自然変換 $\tau\colon F \Rightarrow \Delta(\operatorname{colim} FK)$ を定める．

$\because$) $s\colon j \to j'$ とする．$\langle i, f\rangle \in j{\downarrow}K$，$\langle i', f'\rangle \in j'{\downarrow}K$ を任意に取れば $\tau_j = \mu_i \circ Ff$，$\tau_{j'} = \mu_{i'} \circ Ff'$ となる．

$$
\begin{tikzcd}
i & j \arrow[r, "f"] \arrow[dd, "s"] & Ki & Fj \arrow[r, "Ff"] \arrow[dd, "Fs"] & FKi \arrow[dr, "\mu_i"] & \\
 & & & & & \operatorname{colim} FK \\
i' & j' \arrow[r, "f'"] & Ki' & Fj' \arrow[r, "Ff'"] & FKi' \arrow[ur, "\mu_{i'}"'] &
\end{tikzcd}
$$

このとき well-defined の証明と同様に連結性から $\mu_i \circ Ff = \mu_{i'} \circ Ff' \circ Fs$ となることが分かる．故に τ は自然変換である．

この τ が F から Δ への普遍射を与えることを示せばよい．その為に $a \in C$ を対象，$\theta\colon F \Rightarrow \Delta a$ を自然変換とする．このとき $\theta_K\colon FK \Rightarrow \Delta a$ は自然変換である．故に余極限 $\langle \operatorname{colim} FK, \mu\rangle$ の普遍性から射 $h\colon \operatorname{colim} FK \to a$ が存在して，$i \in I$ に対して

$h \circ \mu_i = \theta_{Ki}$ となる.

$$
\begin{tikzcd}
i \arrow[dd, "t"'] & FKi \arrow[dd, "Ft"'] \arrow[dr, "\mu_i"] \arrow[drr, bend left, "\theta_{Ki}"] & & \\
& & \operatorname{colim} FK \arrow[r, dashed, "h"] & a \\
i' & FKi' \arrow[ur, "\mu_{i'}"'] \arrow[urr, bend right, "\theta_{Ki'}"'] & &
\end{tikzcd}
$$

よって τ の定義と θ_j の自然性から $h \circ \tau_j = h \circ \mu_i \circ Ff = \theta_{Ki} \circ Ff = \theta_j$ が分かる.

$$
\begin{tikzcd}
i & j \arrow[r, "f"] & Ki & Fj \arrow[r, "Ff"] \arrow[rrr, rounded corners, to path={-- ([yshift=4ex]\tikztostart.north) -| (\tikztotarget)}, "\theta_j"] & FKi \arrow[dr, "\mu_i"] \arrow[drr, bend left, "\theta_{Ki}"] & & \\
& & & & & \operatorname{colim} FK \arrow[r, "h"] & a
\end{tikzcd}
$$

また $\operatorname{colim} FK$ の普遍性から h の一意性も分かり, τ は F から Δ への普遍射である. $\square$

例 9. 圏 C の対象 $c \in C$ に対して関手 $K\colon \mathbb{1} \to C$ を $K(*) := c$ により定めると

$$c \in C \text{ が終対象} \iff K \text{ が終関手}$$

証明. ($\Longrightarrow$) $a \in C$ を終対象とすると, 任意の $a \in C$ に対して $a \downarrow K = \mathbb{1}$ が連結だから命題 8 により K は終関手である.

($\Longleftarrow$) K を終関手とする. 任意の対象 $a \in C$ に対して, K の定義より $a{\downarrow}K$ は離散圏であり $a{\downarrow}K = \operatorname{Hom}_C(a, c)$ となる. K が終関手だから $a{\downarrow}K$ は連結なので $\operatorname{Hom}_C(a, c) = 1$ しかあり得ない. よって a から c への射は唯一つであり, c は終対象である. $\square$

さて, いよいよ本題の随伴関手定理を示していく.

定理 10 (General Adjoint Functor Theorem)**.** C, D を圏, C は余完備で関手 $F\colon C \to D$ は余連続であるとする. 更に, 任意の $d \in D$ に対してある集合 $S \subset \mathrm{Ob}(F \downarrow d)$ が存在して次を満たすとする (この条件を解集合条件 (solution set condition) と呼ぶ).

$$\text{任意の } \langle c, f\rangle \in F \downarrow d \text{ に対してある } \langle s, k\rangle \in S \text{ と射 } \langle c, f\rangle \to \langle s, k\rangle \text{ が存在する}$$

$$
\begin{tikzcd}
 & Fs \arrow[dr, "k"] & \\
Fc \arrow[ur, dashed] \arrow[rr, "f"] & & d \\
 & Fs' \arrow[ur, "k'"'] &
\end{tikzcd}
$$

このとき F は右随伴を持つ.

証明. 各 $d \in D$ に対して $\operatorname{colim}(F \downarrow d \xrightarrow{P_0} C)$ が存在することを示せばよい.

$\because$) 余極限 $\operatorname{colim}(F \downarrow d \xrightarrow{P_0} C) = \operatorname{colim}(F \downarrow d \xrightarrow{P_0} C \xrightarrow{\mathrm{id}_C} C)$ が存在したとする.

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{1} \arrow[r, "d"] & D & \\
F \downarrow d \arrow[u] \arrow[r, "P_0"'] \arrow[ur, phantom, "\Nwarrow"] & C \arrow[u, "F"'] \arrow[r, "\mathrm{id}_C"'] & C
\end{tikzcd}
$$

このとき各点左 Kan 拡張 $F^{\dagger}\mathrm{id}_C$ が存在する. 今 F が余連続だから, F は各点左 Kan 拡張 $F^{\dagger}\mathrm{id}_C$ と交換する. 従って定理 2 により F は右随伴を持つ.

$d \in D$ とする. 解集合条件を満たす集合 $S \subset \mathrm{Ob}(F \downarrow d)$ を取り, $S \subset F \downarrow d$ を充満部分圏とみなす. $K \colon S \to F \downarrow d$ を包含関手とすれば, S が small で C は余完備だから, 余極限 $\operatorname{colim}(S \xrightarrow{K} F \downarrow d \xrightarrow{P_0} C)$ が存在する. 従って, 後は K が終関手であることを示せば $\operatorname{colim}(F \downarrow d \xrightarrow{P_0} C)$ の存在が分かる.

$\langle c, f \rangle \in F \downarrow d$ とする. $\langle c, f \rangle \downarrow K$ が連結であることを示せばよい. まず, 解集合条件から明らかに $\langle c, f \rangle \downarrow K \neq \mathbb{0}$ である. 次に $\langle \langle s_0, k_0 \rangle, g_0 \rangle, \langle \langle s_1, k_1 \rangle, g_1 \rangle \in \langle c, f \rangle \downarrow K$ とする. 即ち $g_0 \colon \langle c, f \rangle \to \langle s_0, k_0 \rangle$, $g_1 \colon \langle c, f \rangle \to \langle s_1, k_1 \rangle$ である.

$$
\begin{tikzcd}
 & s_0 \\
c \arrow[ur, "g_0"] \arrow[dr, "g_1"'] & \\
 & s_1
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & Fs_0 \arrow[dr, bend left, "k_0"] & \\
Fc \arrow[ur, "Fg_0"] \arrow[dr, "Fg_1"'] \arrow[rr, "f"] & & d \\
 & Fs_1 \arrow[ur, bend right, "k_1"'] &
\end{tikzcd}
$$

C が余完備だから, 左の図式の pushout c' が存在する. また F が余連続だから, Fc' も

pushout である．

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & s_0 \arrow[dr] & \\
c \arrow[ur, "g_0"] \arrow[dr, "g_1"'] & & c' \\
 & s_1 \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & Fs_0 \arrow[dr] \arrow[rrr, bend left, "k_0"] & & & d \\
Fc \arrow[ur, "Fg_0"] \arrow[dr, "Fg_1"'] & & Fc' & & \\
 & Fs_1 \arrow[ur] \arrow[rrruu, bend right, "k_1"'] & & &
\end{tikzcd}
$$

よって pushout の普遍性により，射 $Fc' \to d$ が一意に伸びる．

$$
\begin{tikzcd}
 & Fs_0 \arrow[dr] \arrow[drr, bend left, "k_0"] & & \\
Fc \arrow[ur, "Fg_0"] \arrow[dr, "Fg_1"'] & & Fc' \arrow[r, dashed] & d \\
 & Fs_1 \arrow[ur] \arrow[urr, bend right, "k_1"'] & &
\end{tikzcd}
$$

解集合条件により，この射 $Fc' \to d$ はある $\langle s_2, k_2 \rangle \in S$ を使って $Fc' \to Fs_2 \xrightarrow{k_2} d$ と書ける．

$$
\begin{tikzcd}
 & Fs_0 \arrow[dr] \arrow[drrr, bend left, "k_0"] & & & \\
Fc \arrow[ur, "Fg_0"] \arrow[dr, "Fg_1"'] & & Fc' \arrow[r] & Fs_2 \arrow[r, "k_2"] & d \\
 & Fs_1 \arrow[ur] \arrow[urrr, bend right, "k_1"'] & & &
\end{tikzcd}
$$

このとき次の図式を得る．

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & s_0 \arrow[dr] & \\
c \arrow[ur, "g_0"] \arrow[dr, "g_1"'] & & s_2 \\
 & s_1 \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & Fs_0 \arrow[dr] \arrow[drr, bend left, "k_0"] & & \\
Fc \arrow[ur, "Fg_0"] \arrow[dr, "Fg_1"'] & & Fs_2 \arrow[r, "k_2"] & d \\
 & Fs_1 \arrow[ur] \arrow[urr, bend right, "k_1"'] & &
\end{tikzcd}
$$

この図式は可換である．故に $\langle c, f \rangle \downarrow K$ が連結であることが分かる． □

補題 11. C, D, U を圏で U は well-copowered かつ余完備とする．$F\colon C \to D$, $S, T\colon C \to U$ を関手，$\varphi\colon S \Rightarrow T$ をエピな自然変換とする．このとき Kan 拡張 $F^\dagger S$ が

存在するならば $F^\dagger T$ も存在する．

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[drr, "F^\dagger S"] & & \\
C \arrow[u, "F"] \arrow[rr, "S"] \arrow[rr, bend right, "T"'] \arrow[rr, phantom, shift left=2, "\eta\Uparrow"] \arrow[rr, phantom, shift right=2, "\Downarrow\varphi"] & & U
\end{tikzcd}$$

証明. $d \in D$ に対して $\mathrm{colim}(F \downarrow d \xrightarrow{P_0} C \xrightarrow{T} U)$ が存在することを示せばよい．

各点 Kan 拡張により $F^\dagger S(d) \cong \mathrm{colim}(F \downarrow d \xrightarrow{P_0} C \xrightarrow{S} U)$ である．$\langle c, f\rangle \in F \downarrow d$ に対して，標準的な射を $\sigma_{\langle c,f\rangle}\colon Sc \to F^\dagger S(d)$ と書く．これと自然変換 $\varphi\colon S \Rightarrow T$ を合わせて，次の可換図式を得る．

$$\begin{tikzcd}
 & F^\dagger S(d) & & \\
F^\dagger S(d) \arrow[ur, "\mathrm{id}"] & & & \\
 & Sc_j \arrow[uu, "\sigma_{\langle c_j, f_j\rangle}"'] \arrow[rr, "\varphi_{c_j}"] & & Tc_j \\
Sc_i \arrow[uu, "\sigma_{\langle c_i, f_i\rangle}"] \arrow[ur] \arrow[rr, "\varphi_{c_i}"'] & & Tc_i \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

今 U は余完備だから，次の図式のように pushout を取ることができる．また，pushout の普遍性から点線の射が延びる．

$$\begin{tikzcd}
 & F^\dagger S(d) \arrow[rr, "m_j"] & & u_j \\
F^\dagger S(d) \arrow[ur, "\mathrm{id}"] \arrow[rr, "m_i"] & & u_i \arrow[ur, dashed] & \\
 & Sc_j \arrow[uu] \arrow[rr, "\varphi_{c_j}"] & & Tc_j \arrow[uu] \\
Sc_i \arrow[uu] \arrow[ur] \arrow[rr, "\varphi_{c_i}"'] & & Tc_i \arrow[uu] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

仮定から φ_{c_i} はエピ射で，エピ射の pushout はエピ射だから，m_i もエピ射である．U が

well-copowered かつ余完備だから，m_i たちの余極限 v を取ることができる．

$$
\begin{tikzcd}
& F^\dagger S(d) \arrow[rr] & & u_j \arrow[dr] & \\
F^\dagger S(d) \arrow[ur] \arrow[rr] & & u_i \arrow[ur] \arrow[rr] & & v \\
& Sc_j \arrow[uu] \arrow[rr, "\varphi_{c_j}"] & & Tc_j \arrow[uu] & \\
Sc_i \arrow[uu] \arrow[ur] \arrow[rr, "\varphi_{c_i}"'] & & Tc_i \arrow[uu] \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}
$$

$v = \operatorname{colim}(F\downarrow d \xrightarrow{P_0} C \xrightarrow{T} U)$ であることを示そう．その為に任意の $\theta\colon TP_0 \Rightarrow \Delta w$ を取る．

$$
\begin{tikzcd}
& & & & & w \\
& F^\dagger S(d) \arrow[rr] \arrow[urrrr, dashed] & & u_j \arrow[dr] \arrow[urr, dashed] & & \\
F^\dagger S(d) \arrow[ur] \arrow[rr] & & u_i \arrow[ur] \arrow[rr] \arrow[uurrr, dashed] & & v \arrow[uur, dashed] & \\
& Sc_j \arrow[uu] \arrow[rr, "\varphi_{c_j}"] & & Tc_j \arrow[uu] \arrow[uuurr, bend right, "\theta_{\langle c_j, f_j\rangle}"] & & \\
Sc_i \arrow[uu] \arrow[ur] \arrow[rr, "\varphi_{c_i}"'] & & Tc_i \arrow[uu] \arrow[ur] \arrow[uuuurrr, bend right=60, "\theta_{\langle c_i, f_i\rangle}"'] & & &
\end{tikzcd}
$$

このとき $\theta\circ\varphi\colon SP_0 \Rightarrow \Delta w$ が得られるから，普遍性により $F^\dagger S(d) \to w$ が一意に延びる．よって pushout の普遍性から $u_i \to w$ が一意に延びる．よって v の普遍性から $v \to w$ が一意に延びる．以上により $v \cong \operatorname{colim}(F\downarrow d \xrightarrow{P_0} C \xrightarrow{T} U)$ である． □

定理 12 (Special Adjoint Functor Theorem)**.** C, D が圏で, C は余完備, well-copowered で，small generating set S を持つとする．このとき関手 $F\colon C \to D$ に対して

$$F \text{ が余連続} \iff F \text{ が右随伴を持つ.}$$

証明. ($\Longleftarrow$) 明らか.

($\Longrightarrow$) Kan 拡張 $F^\dagger \mathrm{id}_C$ が存在することを示せばよい.

generating set $S \subset C$ を充満部分圏とみなし，$K\colon S \to C$ を包含関手とする．S が small で C が余完備だから Kan 拡張 $K^\dagger K$，$(FK)^\dagger K$ が存在する．

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[ddr, "(FK)^\dagger K"] & \\
C \arrow[u, "F"] \arrow[dr, "K^\dagger K"] \arrow[r, phantom, "\Uparrow"] & \\
S \arrow[u, "K"] \arrow[r, "K"'] \arrow[ur, phantom, "\Uparrow\eta"] & C
\end{tikzcd}$$

故に補題 6 より $F^\dagger(K^\dagger K)$ も存在して，$F^\dagger(K^\dagger K) \cong (FK)^\dagger K$ が成り立つ．また $\mathrm{id}_C\colon C \to C$ を考えれば，Kan 拡張の普遍性により $\varphi\colon K^\dagger K \Rightarrow \mathrm{id}_C$ が一意に取れる．

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[dr, "K^\dagger K"'] \arrow[r, bend left, "\mathrm{id}_C"] \arrow[r, phantom, "\Uparrow\varphi"] & C \\
S \arrow[u, "K"] \arrow[ur, phantom, "\eta\Uparrow"] \arrow[r, "K"'] & C
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
C \arrow[dr, bend left, "\mathrm{id}_C"] & \\
S \arrow[u, "K"] \arrow[ur, phantom, "\mathrm{id}_K\Uparrow"] \arrow[r, "K"'] & C
\end{tikzcd}$$

φ はエピ射である．

∵) $c \in C$ に対して $\varphi_c\colon K^\dagger K(c) \to c$ がエピ射であることを示せばよい．各点 Kan 拡張の構成を思い出せば，φ_c は $K^\dagger K(c) \cong \operatorname{colim}(K \downarrow c \to S \to C) = \operatorname*{colim}_{\langle c,f\rangle \in K\downarrow c} c$ の普遍性から定まる射である．

$$\begin{tikzcd}
 & c_j \arrow[dl, "f_j"'] \arrow[dd] \\
c & \\
 & c_k \arrow[ul, "f_k"]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
c_j \arrow[dr] \arrow[dd] \arrow[drr, bend left, "f_j"] & & \\
 & K^\dagger K(c) \arrow[r, dashed, "\varphi_c"] & c \\
c_k \arrow[ur] \arrow[urr, bend right, "f_k"'] & &
\end{tikzcd}$$

$u, v\colon c \to d$ を射で，$u \neq v$ とする．S が generating set だったから，ある $s \in S$ と

$g\colon s \to c$ が存在して $u \circ g \neq v \circ g$ となる．このとき $\langle s, g\rangle \in K\!\downarrow\! c$ である．

$$
\begin{tikzcd}
c_j \arrow[dd] \arrow[dr] \arrow[drr, bend left, "f_j"] & & & \\
& K^\dagger K(c) \arrow[r, "\varphi_c"] & c \arrow[r, shift left, "u"] \arrow[r, shift right, "v"'] & d \\
c_k \arrow[ur] \arrow[urr, bend right, "f_k"'] & & &
\end{tikzcd}
$$

よって $u \circ \varphi_c \neq v \circ \varphi_c$ でなければならない．故に φ_c はエピ射である．

$$
\begin{tikzcd}
D \arrow[dr, "F^\dagger(K^\dagger K)"] & \\
C \arrow[u, "F"] \arrow[ur, phantom, "\eta\Uparrow"] \arrow[r, shift left=2, "K^\dagger K"] \arrow[r, shift right=2, "\mathrm{id}_C"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\varphi"] & C
\end{tikzcd}
$$

よって補題 11 により $F^\dagger \mathrm{id}_C$ が存在する． □

双対的に，以下の定理も成り立つ．(証明は同様である．)

定理 13. $G\colon D \to C$ を関手とするとき以下の条件は同値である．

(1) G は左随伴を持つ．

(2) G に沿った id_D の右 Kan 拡張 $\langle G^\ddagger \mathrm{id}_D, \varepsilon\rangle$ が存在し，任意の関手 $K\colon D \to X$ が右 Kan 拡張 $G^\ddagger \mathrm{id}_D$ と交換する．

$$
\begin{tikzcd}
C \arrow[dr, "G^\ddagger \mathrm{id}_D"] \arrow[drr, "K\circ(G^\ddagger \mathrm{id}_D)"] & & \\
D \arrow[u, "G"] \arrow[ur, phantom, "\varepsilon\Downarrow"] \arrow[r, "\mathrm{id}_D"'] & D \arrow[ur, phantom, "\Swarrow \mathrm{id}"] \arrow[r, "K"'] & X
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
C \arrow[drr, "G^\ddagger K"] & & \\
D \arrow[u, "G"] \arrow[ur, phantom, "\Downarrow"] \arrow[r, "\mathrm{id}_D"'] & D \arrow[r, "K"'] & X
\end{tikzcd}
$$

(3) G に沿った id_D の右 Kan 拡張 $\langle G^\ddagger \mathrm{id}_D, \varepsilon\rangle$ が存在し，G が右 Kan 拡張 $G^\ddagger \mathrm{id}_D$ と交換する．

またこのとき $G^\ddagger \mathrm{id}_D \dashv G$ であり ε がその counit である． □

定理 14 (General Adjoint Functor Theorem)**.** C, D を圏，D は完備で関手 $G\colon D \to C$ は連続であるとする．更に，任意の $c \in C$ に対してある集合 $S \subset \mathrm{Ob}(c\!\downarrow\! G)$ が存在して次を満たすとする．(この条件を解集合条件と呼ぶ)

任意の $\langle d, f\rangle \in c\downarrow G$ に対してある $\langle s, k\rangle \in S$ と射 $\langle s, k\rangle \to \langle d, f\rangle$ が存在する

$$\begin{tikzcd}
 & Gs \arrow[dr, dashed] & \\
c \arrow[ur, "k"] \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "k'"'] & & Gd \\
 & Gs' &
\end{tikzcd}$$

このとき G は右随伴を持つ. □

定理 15 (Special Adjoint Functor Theorem)**.** C, D が圏で, D は完備, wellpowered で, small cogenerating set S を持つとする. このとき関手 $G\colon D \to C$ に対して

$$G \text{ が連続} \iff G \text{ が左随伴を持つ.}$$

□

また, 関手の表現可能性について次の定理が分かる.

定理 16. D を完備な圏, $G\colon D \to \mathbf{Set}$ を連続な関手で解集合条件を満たすとする. このとき G は表現可能関手である.

証明. General Adjoint Functor Theorem により G は左随伴関手 $F\colon \mathbf{Set} \to D$ を持つ. このとき $d \in D$ と $1 \in \mathbf{Set}$ に対して $\mathrm{Hom}_D(F(1), -) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(1, G-) \cong G$ である. 故に G は表現可能関手である. □

定理 17. D を完備, wellpowered な圏で, small cogenerating set S を持つとする. このとき関手 $G\colon D \to \mathbf{Set}$ に対して以下は同値である.

(1) G が連続である.
(2) G が左随伴を持つ.
(3) G が表現可能関手である.

証明. $1 \iff 2$ は Special Adjoint Functor Theorem である.

$(2 \implies 3)$ G の左随伴関手を $F\colon \mathbf{Set} \to D$ とすれば $1 \in \mathbf{Set}$ に対して

$$\mathrm{Hom}_D(F(1), -) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(1, G-) \cong G$$

である. 故に G は表現可能関手である.

$(3 \implies 1)$ 表現可能関手 $\mathrm{Hom}_D(d, -)$ は連続だから明らか. □

定理 18. C を余完備な圏，D を圏とする．$A \subset C$ を小さい稠密部分圏とするとき

$$\text{関手 } F\colon C \to D \text{ が余連続} \iff F \text{ が右随伴を持つ.}$$

証明. ($\Longleftarrow$) 明らか.

($\Longrightarrow$) Kan 拡張 $F^\dagger \mathrm{id}_C$ が存在することを示せばよい．包含関手 $K\colon A \to C$ が稠密だから $K^\dagger K \cong \mathrm{id}_C$ である．また A が小圏で C が余完備だから $(FK)^\dagger K$ も存在する．

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[ddr, "(FK)^\dagger K"] & \\
C \arrow[u, "F"] \arrow[dr, "\mathrm{id}_C"] & \\
A \arrow[u, "K"] \arrow[r, "K"'] \arrow[uur, phantom, "\Uparrow"] \arrow[ur, phantom, "\Uparrow \mathrm{id}_K"] & C
\end{tikzcd}$$

故に補題 6 より $F^\dagger \mathrm{id}_C$ も存在する． $\square$