

随伴関手定理

alg-d

http://alg-d.com/math/kan_extension/

2018年9月22日

左随伴関手は余極限と交換するのであった。では逆に、余極限と交換する関手は左随伴になるのだろうか？ ある条件の下であればこれが成り立つ、という定理が随伴関手定理である。これを理解する上で重要なのが「随伴は Kan 拡張である」という事実 (定理 2) である。

定義. $F: C \rightarrow D$, $E: C \rightarrow U$ を関手として左 Kan 拡張 $F^\dagger E$ が存在するとする. $F^\dagger E$ が任意の関手 $H: U \rightarrow V$ と交換するとき, $F^\dagger E$ は絶対左 Kan 拡張であるという.

定義から明らかに次が成り立つ.

命題 1. $F: C \rightarrow D$, $E: C \rightarrow U$, $L: D \rightarrow U$ を関手, $\eta: E \Rightarrow L \circ F$ を自然変換とする.

$$\begin{array}{ccc}
 D & & \\
 \uparrow F & \searrow L & \\
 C & \xrightarrow{E} & U
 \end{array}
 \quad \eta \Uparrow$$

このとき $\langle L, \eta \rangle$ が F に沿った E の絶対左 Kan 拡張である

\iff 任意の圏 V と関手 $K: D \rightarrow V$, $H: U \rightarrow V$, 自然変換 $\theta: HE \Rightarrow KF$ に対して, ある自然変換 $\tau: HL \Rightarrow K$ が一意に存在して, 次の等式が成り立つ.

$$\begin{array}{ccc}
 D & \xrightarrow{K} & V \\
 \uparrow F & \searrow L & \uparrow H \\
 C & \xrightarrow{E} & U
 \end{array}
 \quad \eta \Uparrow \quad \tau \Uparrow
 \quad = \quad
 \begin{array}{ccc}
 D & \xrightarrow{K} & V \\
 \uparrow F & \theta \Uparrow & \uparrow H \\
 C & \xrightarrow{E} & U
 \end{array}$$

□

定理 2. $F: C \rightarrow D$ を関手とするとき以下の条件は同値である.

- (1) F は右随伴を持つ.
- (2) F に沿った id_C の絶対左 Kan 拡張 $\langle F^\dagger \text{id}_C, \eta \rangle$ が存在する.
- (3) F に沿った id_C の左 Kan 拡張 $\langle F^\dagger \text{id}_C, \eta \rangle$ が存在し, F が左 Kan 拡張 $F^\dagger \text{id}_C$ と交換する.

$$\begin{array}{ccc}
 D & & D \\
 \uparrow F & \searrow^{F \circ (F^\dagger \text{id}_C)} & \uparrow F \\
 C & \xrightarrow{\text{id}_C} C \xrightarrow{F} D & C \xrightarrow{\text{id}_C} C \xrightarrow{F} D \\
 \eta \uparrow \uparrow & \nearrow^{F^\dagger \text{id}_C} & \uparrow F \eta \\
 & \text{id} \nearrow &
 \end{array} =$$

またこのとき $F \dashv F^\dagger \text{id}_C$ であり η がその unit である.

証明. (1 \implies 2) $F \dashv G: C \rightarrow D$ を随伴として, その unit を η , counit を ε とする. 任意の圏 X と関手 $K: C \rightarrow X, H: D \rightarrow X$, 自然変換 $\theta: K \Rightarrow HF$ を取る.

$$\tau := \begin{array}{ccccc}
 D & \xrightarrow{\text{id}_D} & D & \xrightarrow{H} & X \\
 \downarrow G & & \uparrow F & \theta \uparrow & \uparrow K \\
 & \varepsilon \uparrow \uparrow & & & \\
 C & \xrightarrow{\text{id}_C} & C & \xrightarrow{\text{id}_C} & C
 \end{array}$$

と定義すれば

$$\begin{array}{ccccc}
 D & \xrightarrow{H} & X & & \\
 \uparrow F & \searrow^{\tau} & \uparrow K & & \\
 C & \xrightarrow{\text{id}_C} & C & \xrightarrow{\text{id}_C} & C \\
 \eta \uparrow \uparrow & & \varepsilon \uparrow \uparrow & & \\
 & G \nearrow & & &
 \end{array} =
 \begin{array}{ccccc}
 D & \xrightarrow{\text{id}_D} & D & \xrightarrow{H} & X \\
 \uparrow F & \searrow^{\varepsilon} & \uparrow F & \theta \uparrow & \uparrow K \\
 C & \xrightarrow{\text{id}_C} & C & \xrightarrow{\text{id}_C} & C
 \end{array} =
 \begin{array}{ccccc}
 D & \xrightarrow{H} & X & & \\
 \uparrow F & \searrow^{\theta} & \uparrow K & & \\
 C & \xrightarrow{\text{id}_C} & C & \xrightarrow{\text{id}_C} & C
 \end{array}$$

である. 逆に τ が

$$\begin{array}{ccccc}
 D & \xrightarrow{H} & X & & \\
 \uparrow F & \searrow^{\tau} & \uparrow K & & \\
 C & \xrightarrow{\text{id}_C} & C & \xrightarrow{\text{id}_C} & C \\
 \eta \uparrow \uparrow & & \varepsilon \uparrow \uparrow & & \\
 & G \nearrow & & &
 \end{array} =
 \begin{array}{ccccc}
 D & \xrightarrow{H} & X & & \\
 \uparrow F & \searrow^{\theta} & \uparrow K & & \\
 C & \xrightarrow{\text{id}_C} & C & \xrightarrow{\text{id}_C} & C
 \end{array}$$

を満たせば

$$\begin{array}{ccc}
 D & \xrightarrow{H} & X \\
 \searrow G & \Uparrow \tau & \uparrow K \\
 & & C
 \end{array}
 =
 \begin{array}{ccccc}
 D & \xrightarrow{\text{id}_D} & D & \xrightarrow{H} & X \\
 \searrow G & \Uparrow \varepsilon & \uparrow F & \searrow \tau & \uparrow K \\
 & & C & \xrightarrow{\eta} & G \\
 & & & \uparrow \eta & \\
 & & C & \xrightarrow{\text{id}_C} & C
 \end{array}
 =
 \begin{array}{ccccc}
 D & \xrightarrow{\text{id}_D} & D & \xrightarrow{H} & X \\
 \searrow G & \Uparrow \varepsilon & \uparrow F & \Uparrow \theta & \uparrow K \\
 & & C & \xrightarrow{\text{id}_C} & C
 \end{array}$$

となるから、このような τ は一意である。故に $\langle F^\dagger \text{id}_C, \eta \rangle$ は絶対左 Kan 拡張である。

(2 \implies 3) 明らか。

(3 \implies 1) $G := F^\dagger \text{id}_C$ と置く。絶対性から左 Kan 拡張 $F^\dagger F = F \circ (F^\dagger \text{id}_C) = FG$ も存在する。 $F^\dagger F$ の普遍性により $\varepsilon: FG \Rightarrow \text{id}_D$ が一意に存在して $\varepsilon_F \circ F\eta = \text{id}_F$ が成り立つ。

$$\begin{array}{ccc}
 D & \xrightarrow{\text{id}_D} & D \\
 \uparrow F & \searrow \varepsilon & \uparrow F \\
 C & \xrightarrow{\text{id}_C} & C \\
 & \Uparrow \eta & \Uparrow G
 \end{array}
 =
 \begin{array}{ccc}
 D & \xrightarrow{\text{id}_D} & D \\
 \uparrow F & \Uparrow \text{id}_F & \uparrow F \\
 C & \xrightarrow{\text{id}_C} & C
 \end{array}$$

故に後は $G\varepsilon \circ \eta_G = \text{id}_G$ を示せばよい。その為には、左 Kan 拡張 $\langle G, \eta \rangle$ の普遍性から

$$\begin{array}{ccc}
 D & \xrightarrow{\text{id}_D} & D \\
 \uparrow F & \searrow \varepsilon & \uparrow F \\
 C & \xrightarrow{\text{id}_C} & C \\
 & \Uparrow \eta & \Uparrow G
 \end{array}
 =
 \begin{array}{ccc}
 D & \xrightarrow{\text{id}_D} & D \\
 \uparrow F & \searrow \text{id}_G & \uparrow G \\
 C & \xrightarrow{\text{id}_C} & C
 \end{array}$$

を示せばよいが、それは明らか。 □

この定理の具体例として、終対象を考えると次の系を得る。

系 3. 圏 C が終対象 1 を持つ $\iff \text{colim}(\text{id}_C)$ が存在する。

また、このとき $\text{colim}(\text{id}_C) \cong 1$ が成り立つ。

証明. 終対象 1 とは対角関手 $\Delta: C \rightarrow C^0 = \mathbf{1}$ の右随伴である。

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbf{1} & & \\
 \Delta \uparrow & \searrow 1 & \\
 C & \xrightarrow{\text{id}_C} & C
 \end{array}$$

(\implies) 終対象 1 , 即ち Δ の右随伴が存在するから, 定理 2 により左 Kan 拡張 $\Delta^\dagger \text{id}_C$ が存在する. ところで $\Delta^\dagger \cong \text{colim}$ だったから $\text{colim}(\text{id}_C)$ が存在することが分かり, また $\text{colim}(\text{id}_C) \cong 1$ も分かる.

(\impliedby) 定理 2 により Δ が $\Delta^\dagger \text{id}_C \cong \text{colim}(\text{id}_C)$ と交換することを示せばよいが, それは明らか. \square

$\Delta^\dagger \cong \text{colim}$ が絶対左 Kan 拡張であることから, 次の命題が分かる.

命題 4. I が終対象 1 を持てば, 関手 $F: I \rightarrow C$ の余極限は存在し $\text{colim } F \cong F(1)$.

証明. 系 3 で見た通り $\Delta^\dagger \text{id}_I = 1$ であり, これは絶対左 Kan 拡張である.

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbf{1} & & \mathbf{1} \\
 \Delta \uparrow & \searrow 1 & \Delta \uparrow \\
 I & \xrightarrow{\text{id}_I} I & \xrightarrow{F} C \\
 & \uparrow \uparrow & \uparrow \uparrow \\
 & & I \xrightarrow{F} C
 \end{array}$$

よって $\text{colim } F \cong \Delta^\dagger F \cong F \circ (\Delta^\dagger \text{id}_I) \cong F(1)$ である. \square

命題 5. $P \in \widehat{C}$ が表現可能 \iff コンマ圏 $y \downarrow P$ が終対象を持つ.

証明. (\implies) $P = y(c)$ とする. $y \downarrow P = y \downarrow y(c) = \{ \langle d, \theta \rangle \mid d \in C, \theta: y(d) \Rightarrow y(c) \}$ で, y は忠実充満なので $y \downarrow P = \text{id}_C \downarrow c$ が分かる. よって終対象 $\text{id}_c: c \rightarrow c$ が存在する.

(\impliedby) コンマ圏 $y \downarrow P$ が終対象 $\langle c, \theta \rangle$ を持つとすれば, 各点左 Kan 拡張 $y^\dagger y \cong \text{id}$ と命題 4 により $P = \text{colim}(y \downarrow P \rightarrow C \xrightarrow{y} \widehat{C}) = y(c)$ である. \square

終対象におけるこの性質を一般化したものが終関手である (例 9 も参照).

定義. 関手 $K: I \rightarrow J$ が終関手 (final functor^{*1})

$\iff C$ を圏, $F: J \rightarrow C$ を関手とする. もし余極限 $\text{colim } FK$ が存在すれば $\text{colim } F$ も存在し, 普遍性から得られる射 $\text{colim } FK \rightarrow \text{colim } F$ が同型を与える.

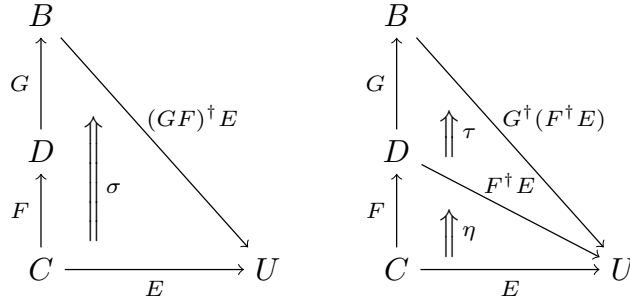
補題 6. $F: C \rightarrow D, E: C \rightarrow U$ で, 左 Kan 拡張 $\langle F^\dagger E, \eta \rangle$ が存在すると仮定する.

$$\begin{array}{ccc}
 D & & \\
 F \uparrow & \searrow F^\dagger E & \\
 C & \xrightarrow{E} U & \\
 & \uparrow \eta &
 \end{array}$$

^{*1} cofinal functor と呼ぶ場合もある.

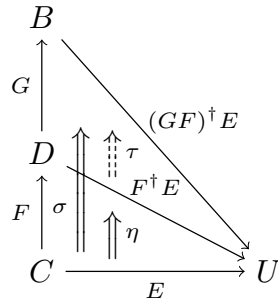
このとき $G: D \rightarrow B$ に対して

左 Kan 拡張 $\langle (GF)^\dagger E, \sigma \rangle$ が存在する \iff 左 Kan 拡張 $\langle G^\dagger(F^\dagger E), \tau \rangle$ が存在する.

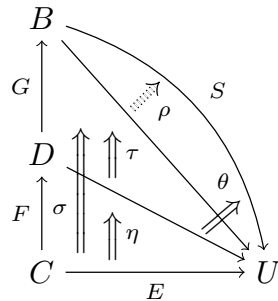


更に, これらが存在するとき $(GF)^\dagger E = G^\dagger(F^\dagger E)$, $\sigma = \tau_F \circ \eta$ である.

証明. (\implies) 左 Kan 拡張 $\langle (GF)^\dagger E, \sigma \rangle$ が存在するとする. $\langle F^\dagger E, \eta \rangle$ の普遍性により $\tau: F^\dagger E \Rightarrow (GF)^\dagger E \circ G$ が存在して, $\sigma = \tau_F \circ \eta$ となる.

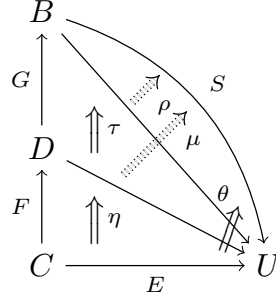


$\langle (GF)^\dagger E, \tau \rangle$ が G に沿った $F^\dagger E$ の左 Kan 拡張であることを示せばよい. 任意の関手 $S: B \rightarrow U$ と $\theta: F^\dagger E \Rightarrow SG$ を取る.



$(GF)^\dagger E$ の普遍性から, $\rho: (GF)^\dagger E \Rightarrow S$ が一意に存在して $\rho_{GF} \circ \sigma = \theta_F \circ \eta$ となる. $\sigma = \tau_F \circ \eta$ だったから $\rho_{GF} \circ \tau_F \circ \eta = \theta_F \circ \eta$ である. よって左 Kan 拡張 $F^\dagger E$ の普遍性から $\rho_G \circ \tau = \theta$ となる. 従って $\langle (GF)^\dagger E, \tau \rangle$ が G に沿った $F^\dagger E$ の左 Kan 拡張である.

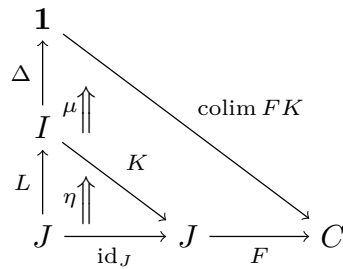
(\Leftarrow) 左 Kan 拡張 $\langle G^\dagger(F^\dagger E), \tau \rangle$ が存在するとする. $\langle G^\dagger(F^\dagger E), \tau_F \circ \eta \rangle$ が GF に沿った E の左 Kan 拡張であることを示せばよい. 任意の関手 $S: B \rightarrow U$ と $\theta: E \Rightarrow SGF$ を取る.



$F^\dagger E$ の普遍性から $\mu: F^\dagger E \Rightarrow SG$ が一意に存在して $\mu_F \circ \eta = \theta$ となる. よって $G^\dagger(F^\dagger E)$ の普遍性から $\rho: G^\dagger(F^\dagger E) \Rightarrow S$ が一意に存在して $\rho_G \circ \tau = \mu$ となる. このとき $\rho_{GF} \circ (\tau_F \circ \eta) = \theta$ である. 従って $\langle G^\dagger(F^\dagger E), \tau_F \circ \eta \rangle$ が GF に沿った E の左 Kan 拡張である. \square

命題 7. 右随伴関手は終関手である. (よって右随伴の例として終対象を考えれば命題 4 が得られる.)

証明. $L \dashv K: J \rightarrow I$ を随伴, $F: J \rightarrow C$ を関手とする. FK の余極限 $\langle \operatorname{colim} FK, \mu \rangle$ が存在したとすると, この $\langle \operatorname{colim} FK, \mu \rangle$ は Δ に沿った FK の左 Kan 拡張である. 一方 $K \cong L^\dagger \operatorname{id}_C$ は絶対左 Kan 拡張であるから, 次の図式全体は $\Delta = \Delta \circ L$ に沿った $F = F \circ \operatorname{id}_C$ の左 Kan 拡張を与える (補題 6).



それは $\operatorname{colim} F$ であったから, 普遍性から得られる射 $\operatorname{colim} FK \rightarrow \operatorname{colim} F$ が同型となることが分かる. \square

終関手は圏の連結性を使って特徴付けることができる (命題 8).

定義. C を圏, $a, b \in C$ を対象とする. a と b を結ぶ zigzag とは

$$a \rightarrow c_0 \leftarrow c_1 \rightarrow \cdots \leftarrow c_{n-1} \rightarrow c_n \leftarrow b$$

の形の図式のことをいう。

定義. 圏 C が連結 $\iff C \neq \mathbf{0}$ で, 任意の対象 $a, b \in C$ を結ぶ zigzag が存在する.

命題 8. 関手 $K: I \rightarrow J$ が終関手 \iff 任意の $j \in J$ に対して $j \downarrow K$ が連結.

証明. (\implies) $j \in J$ とする. $F := \text{Hom}_J(j, -): J \rightarrow \mathbf{Set}$ と定義すると, 今 K が終関手だから $\text{colim } FK \cong \text{colim } F$ である. $\text{colim } F \cong 1$ となる.

$\therefore a \in \mathbf{Set}$ について自然に

$$\text{Hom}_{\mathbf{Set}}(\text{colim } F, a) \cong \text{Hom}_{\mathbf{Set}^J}(F, \Delta a) \cong \Delta a(j) = a \cong \text{Hom}_{\mathbf{Set}}(1, a)$$

だから米田の補題により $\text{colim } F \cong 1$ である.

よって, $\text{colim } FK \cong \left(\coprod_{i \in I} FK_i \right) / \sim$ だから, ある $i \in I$ に対して $FK_i \neq \emptyset$ でなければならない. 即ち $\text{Hom}_J(j, Ki) \neq \emptyset$ だから $j \downarrow K \neq \mathbf{0}$ が分かる.

また, $\text{colim } FK \cong \text{colim } F \cong 1$ となるためには任意の $f \in FK_{i_0}$, $g \in FK_{i_1}$ に対して $f \sim g$ とならなければならない. よって $j \downarrow K$ が連結となることが分かる.

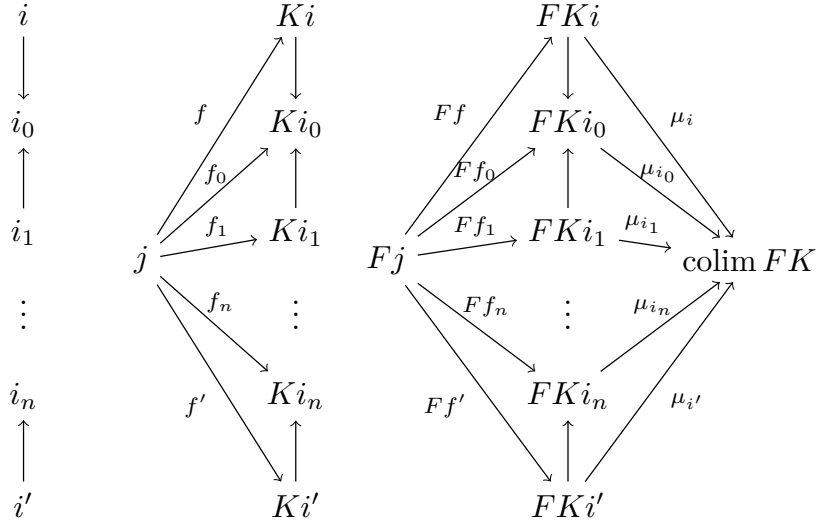
(\impliedby) C を圏, $F: J \rightarrow C$ を関手として FK の余極限 $\langle \text{colim } FK, \mu \rangle$ が存在するとする. $i \in I$ に対して $\mu_i: FK_i \rightarrow \text{colim } FK$ は C の射である. $j \in J$ を取る. $j \downarrow K \neq \mathbf{0}$ だから, ある対象 $\langle i, f \rangle \in j \downarrow K$ が存在する. この i と f を使って $\tau_j := \mu_i \circ Ff: Fj \rightarrow \text{colim } FK$ と定める.

$$i \quad j \xrightarrow{f} Ki \quad Fj \xrightarrow{Ff} FK_i \xrightarrow{\mu_i} \text{colim } FK$$

この τ_j は well-defined である.

$\therefore \langle i, f \rangle, \langle i', f' \rangle \in j \downarrow K$ に対して $\mu_i \circ Ff = \mu_{i'} \circ Ff'$ を示せばよい. $j \downarrow K$ が連結だから zigzag $\langle i, f \rangle \rightarrow \langle i_0, f_0 \rangle \leftarrow \langle i_1, f_1 \rangle \rightarrow \cdots \rightarrow \langle i_n, f_n \rangle \leftarrow \langle i', f' \rangle$ が存在する.

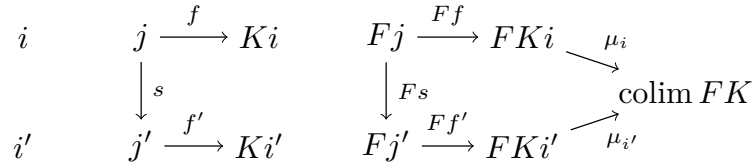
このとき次の図式は可換である.



故に $\mu_i \circ Ff = \mu_{i'} \circ Ff'$ である.

この τ_j は自然変換 $\tau: F \Rightarrow \Delta(\text{colim } FK)$ を定める.

\therefore) $s: j \rightarrow j'$ とする. $\langle i, f \rangle \in j \downarrow K$, $\langle i', f' \rangle \in j' \downarrow K$ を任意に取れば $\tau_j = \mu_i \circ Ff$, $\tau_{j'} = \mu_{i'} \circ Ff'$ となる.



このとき well-defined の証明と同様に連結性から $\mu_i \circ Ff = \mu_{i'} \circ Ff' \circ Fs$ となることが分かる. 故に τ は自然変換である.

この τ が F から Δ への普遍射を与えることを示せばよい. その為に $a \in C$ を対象, $\theta: F \Rightarrow \Delta a$ を自然変換とする. このとき $\theta_K: FK \Rightarrow \Delta a$ は自然変換である. 故に余極限 $\langle \text{colim } FK, \mu \rangle$ の普遍性から射 $h: \text{colim } FK \rightarrow a$ が存在して, $i \in I$ に対して

$h \circ \mu_i = \theta_{Ki}$ となる.

$$\begin{array}{ccc}
 i & FK_i & \\
 \downarrow t & \downarrow Ft & \nearrow \mu_i \\
 i' & FK_{i'} & \text{colim } FK \xrightarrow{h} a \\
 & \nearrow \mu_{i'} & \searrow \theta_{Ki'} \\
 & & \theta_{Ki}
 \end{array}$$

よって τ の定義と θ_i の自然性から $h \circ \tau_i = h \circ \mu_i \circ Ff = \theta_{Ki} \circ Ff = \theta_i$ が分かる.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & \theta_i & & \\
 & & & & \downarrow & & \\
 i & & j \xrightarrow{f} Ki & & Fj \xrightarrow{Ff} FK_i & \xrightarrow{\mu_i} & \text{colim } FK \xrightarrow{h} a \\
 & & & & \nearrow \theta_{Ki} & & \uparrow \theta_i
 \end{array}$$

また $\text{colim } FK$ の普遍性から h の一意性も分かり、 τ は F から Δ への普遍射である. \square

例 9. 圏 C の対象 $c \in C$ に対して関手 $K: \mathbf{1} \rightarrow C$ を $K(*) := c$ により定める. このとき $c \in C$ が終対象 $\iff K$ が終関手である.

証明. (\implies) $a \in C$ を終対象とすると、任意の $a \in C$ に対して $a \downarrow K = \mathbf{1}$ が連結だから命題 8 により K は終関手である.

(\impliedby) K を終関手とする. 任意の対象 $a \in C$ に対して、 K の定義より $a \downarrow K$ は離散圏であり $a \downarrow K = \text{Hom}_C(a, c)$ となる. K が終関手だから $a \downarrow K$ は連結なので $\text{Hom}_C(a, c) = 1$ しかあり得ない. よって a から c への射は一つであり、 c は終対象である. \square

さて、いよいよ本題の随伴関手定理を示していく.

定理 10 (General Adjoint Functor Theorem). C, D を圏、 C は余完備で関手 $F: C \rightarrow D$ は余連続であるとする. 更に、任意の $d \in D$ に対してある集合 $S \subset \text{Ob}(F \downarrow d)$ が存在して次を満たすとする (この条件を解集合条件 (solution set condition) と呼ぶ).

任意の $\langle c, f \rangle \in F \downarrow d$ に対してある $\langle s, k \rangle \in S$ と射 $\langle c, f \rangle \rightarrow \langle s, k \rangle$ が存在する

$$\begin{array}{ccc}
 & Fs & \\
 & \nearrow k & \\
 Fc & \xrightarrow{f} & d \\
 & \searrow k' & \\
 & Fs' &
 \end{array}$$

このとき F は右随伴を持つ.

証明. 各 $d \in D$ に対して $\text{colim}(F \downarrow d \xrightarrow{P_0} C)$ が存在することを示せばよい.

∴) 余極限 $\text{colim}(F \downarrow d \xrightarrow{P_0} C) = \text{colim}(F \downarrow d \xrightarrow{P_0} C \xrightarrow{\text{id}_C} C)$ が存在したとする.

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbf{1} & \xrightarrow{d} & D \\
 \uparrow & \swarrow & \uparrow F \\
 F \downarrow d & \xrightarrow{P_0} & C \xrightarrow{\text{id}_C} C
 \end{array}$$

このとき各点左 Kan 拡張 $F^\dagger \text{id}_C$ が存在する. 今 F が余連続だから, F は各点左 Kan 拡張 $F^\dagger \text{id}_C$ と交換する. 従って定理 2 により F は右随伴を持つ.

$d \in D$ とする. 解集合条件を満たす集合 $S \subset \text{Ob}(F \downarrow d)$ を取り, $S \subset F \downarrow d$ を充満部分圏とみなす. $K: S \rightarrow F \downarrow d$ を包含関手とすれば, S が small で C は余完備だから, 余極限 $\text{colim}(S \xrightarrow{K} F \downarrow d \xrightarrow{P_0} C)$ が存在する. 従って, 後は K が終関手であることを示せば $\text{colim}(F \downarrow d \xrightarrow{P_0} C)$ の存在が分かる.

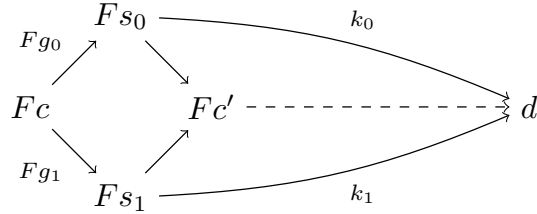
$\langle c, f \rangle \in F \downarrow d$ とする. $\langle c, f \rangle \downarrow K$ が連結であることを示せばよい. まず, 解集合条件から明らかに $\langle c, f \rangle \downarrow K \neq \mathbf{0}$ である. 次に $\langle \langle s_0, k_0 \rangle, g_0 \rangle, \langle \langle s_1, k_1 \rangle, g_1 \rangle \in \langle c, f \rangle \downarrow K$ とする. 即ち $g_0: \langle c, f \rangle \rightarrow \langle s_0, k_0 \rangle$, $g_1: \langle c, f \rangle \rightarrow \langle s_1, k_1 \rangle$ である.

$$\begin{array}{ccc}
 & s_0 & \\
 g_0 \nearrow & & \\
 c & & \\
 g_1 \searrow & & \\
 & s_1 & \\
 & F s_0 & \xrightarrow{k_0} \\
 F g_0 \nearrow & & \\
 F c & \xrightarrow{f} & d \\
 F g_1 \searrow & & \\
 & F s_1 & \xrightarrow{k_1}
 \end{array}$$

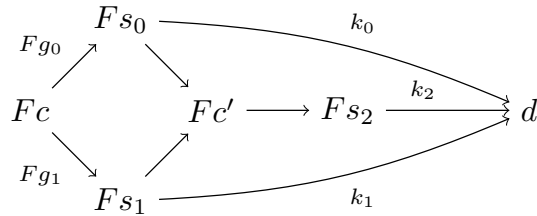
C が余完備だから, 左の図式の pushout c' が存在する. また F が余連続だから, $F c'$ も pushout である.

$$\begin{array}{ccc}
 & s_0 & \\
 g_0 \nearrow & & \\
 c & & c' \\
 g_1 \searrow & & \\
 & s_1 & \\
 & F s_0 & \xrightarrow{k_0} \\
 F g_0 \nearrow & & \\
 F c & \xrightarrow{f} & F c' \\
 F g_1 \searrow & & \\
 & F s_1 & \xrightarrow{k_1}
 \end{array}$$

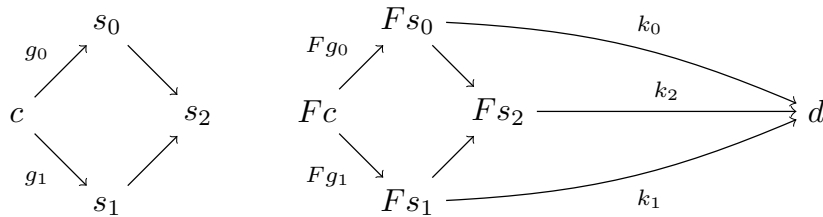
よって pushout の普遍性により, 射 $Fc' \rightarrow d$ が一意に伸びる.



解集合条件により, この射 $Fc' \rightarrow d$ はある $\langle s_2, k_2 \rangle \in S$ を使って $Fc' \rightarrow Fs_2 \xrightarrow{k_2} d$ と書ける.

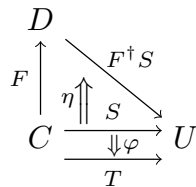


このとき次の図式を得る.



この図式は可換である. 故に $\langle c, f \rangle \downarrow K$ が連結であることが分かる. □

補題 11. C, D, U を圏で U は well-copowered かつ余完備とする. $F: C \rightarrow D$, $S, T: C \rightarrow U$ を関手, $\varphi: S \Rightarrow T$ をエピな自然変換とする. このとき Kan 拡張 $F^\dagger S$ が存在するならば $F^\dagger T$ も存在する.



証明. $d \in D$ に対して $\text{colim}(F \downarrow d \xrightarrow{P_0} C \xrightarrow{T} U)$ が存在することを示せばよい.

各点 Kan 拡張により $F^\dagger S(d) = \text{colim}(F \downarrow d \xrightarrow{P_0} C \xrightarrow{S} U)$ である. $\langle c, f \rangle \in F \downarrow d$ に対して, 標準的な射を $\sigma_{\langle c, f \rangle}: Sc \rightarrow F^\dagger S(d)$ と書く. これと自然変換 $\varphi: S \Rightarrow T$ を合わせ

て、次の可換図式を得る.

$$\begin{array}{ccccc}
 & & F^\dagger S(d) & & \\
 & \text{id} \nearrow & \uparrow & & \\
 & F^\dagger S(d) & \sigma_{\langle c_j, f_j \rangle} & & \\
 \sigma_{\langle c_i, f_i \rangle} \uparrow & & Sc_j & \xrightarrow{\varphi_{c_j}} & Tc_j \\
 & \nearrow & \uparrow & & \nearrow \\
 Sc_i & \xrightarrow{\varphi_{c_i}} & Tc_i & &
 \end{array}$$

今 U は余完備だから、次の図式のように pushout を取ることができる. また, pushout の普遍性から点線の射が延びる.

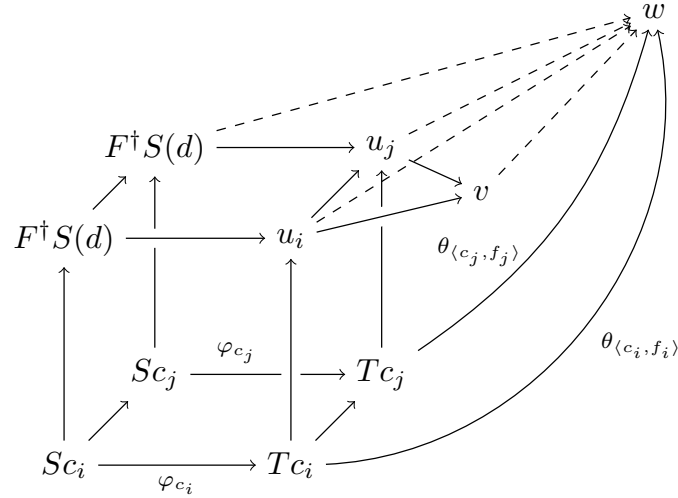
$$\begin{array}{ccccc}
 & & F^\dagger S(d) & \xrightarrow{m_j} & u_j \\
 & \text{id} \nearrow & \uparrow & & \nearrow \\
 & F^\dagger S(d) & \xrightarrow{m_i} & u_i & \\
 \uparrow & & \downarrow & & \uparrow \\
 & & Sc_j & \xrightarrow{\varphi_{c_j}} & Tc_j \\
 \uparrow & \nearrow & \uparrow & & \nearrow \\
 Sc_i & \xrightarrow{\varphi_{c_i}} & Tc_i & &
 \end{array}$$

仮定から φ_{c_i} はエピ射で, エピ射の pushout はエピ射だから, m_i もエピ射である. U が well-copowered かつ余完備だから, m_i たちの余極限 v を取ることができる.

$$\begin{array}{ccccc}
 & & F^\dagger S(d) & \xrightarrow{\quad} & u_j \\
 & \nearrow & \uparrow & & \nearrow \\
 & F^\dagger S(d) & \xrightarrow{\quad} & u_i & \nearrow \\
 \uparrow & & \downarrow & & \uparrow \\
 & & Sc_j & \xrightarrow{\varphi_{c_j}} & Tc_j \\
 \uparrow & \nearrow & \uparrow & & \nearrow \\
 Sc_i & \xrightarrow{\varphi_{c_i}} & Tc_i & &
 \end{array}
 \xrightarrow{\quad} v$$

$v = \text{colim}(F \downarrow d \xrightarrow{P_0} C \xrightarrow{T} U)$ であることを示そう. その為に任意の $\theta: TP_0 \Rightarrow \Delta w$ を

取る.



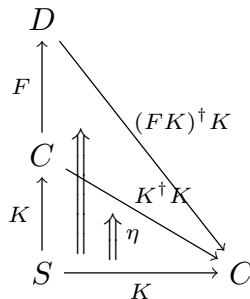
このとき $\theta \circ \varphi: SP_0 \Rightarrow \Delta w$ が得られるから、普遍性により $F^\dagger S(d) \rightarrow w$ が一意に延びる。よって pushout の普遍性から $u_i \rightarrow w$ が一意に延びる。よって v の普遍性から $v \rightarrow w$ が一意に延びる。以上により $v = \text{colim}(F \downarrow d \xrightarrow{P_0} C \xrightarrow{T} U)$ である。 \square

定理 12 (Special Adjoint Functor Theorem). C, D が圏で、 C は余完備, well-copowered で、small generating set S を持つとする。このとき関手 $F: C \rightarrow D$ に対して F が余連続 $\iff F$ が右随伴を持つ。

証明. (\Leftarrow) 明らか.

(\implies) Kan 拡張 $F^\dagger \text{id}_C$ が存在することを示せばよい.

generating set $S \subset C$ を充満部分圏とみなし、 $K: S \rightarrow C$ を包含関手とする。 S が small で C が余完備だから Kan 拡張 $K^\dagger K$, $(FK)^\dagger K$ が存在する。



故に補題 6 より $F^\dagger(K^\dagger K)$ も存在して、 $F^\dagger(K^\dagger K) = (FK)^\dagger K$ が成り立つ。また

$\text{id}_C: C \rightarrow C$ を考えれば, Kan 拡張の普遍性により $\varphi: K^\dagger K \Rightarrow \text{id}_C$ が一意に取れる.

$$\begin{array}{ccc}
 C & \xrightarrow{\text{id}_C} & C \\
 \uparrow K & \searrow \varphi & \\
 S & \xrightarrow{K} & C
 \end{array}
 \quad \eta \uparrow \uparrow K^\dagger K
 \quad = \quad
 \begin{array}{ccc}
 C & \xrightarrow{\text{id}_C} & C \\
 \uparrow K & \text{id}_K \uparrow \uparrow & \\
 S & \xrightarrow{K} & C
 \end{array}$$

φ はエピ射である.

$\therefore c \in C$ に対して $\varphi_c: K^\dagger K(c) \rightarrow c$ がエピ射であることを示せばよい. 各点 Kan 拡張の構成を思い出せば, φ_c は $K^\dagger K(c) = \text{colim}(K \downarrow c \rightarrow S \rightarrow C) = \text{colim}_{\langle c, f \rangle \in K \downarrow c} c$ の普遍性から定まる射である.

$$\begin{array}{ccc}
 c_j & & c_j \\
 \swarrow f_j & & \searrow f_j \\
 c & & K^\dagger K(c) \xrightarrow{\varphi_c} c \\
 \swarrow f_k & & \searrow f_k \\
 c_k & & c_k
 \end{array}$$

$u, v: c \rightarrow d$ を射で, $u \neq v$ とする. S が generating set だったから, ある $s \in S$ と $g: s \rightarrow c$ が存在して $u \circ g \neq v \circ g$ となる. このとき $\langle s, g \rangle \in K \downarrow c$ である.

$$\begin{array}{ccc}
 c_j & \xrightarrow{f_j} & c \\
 \downarrow & \searrow & \uparrow \varphi_c \\
 K^\dagger K(c) & \xrightarrow{\varphi_c} & c \\
 \downarrow & \swarrow & \downarrow \\
 c_k & \xrightarrow{f_k} & c
 \end{array}
 \quad \begin{array}{c}
 \xrightarrow{u} \\
 \xrightarrow{v}
 \end{array}
 \rightarrow d$$

よって $u \circ \varphi_c \neq v \circ \varphi_c$ でなければならない. 故に φ_c はエピ射である.

$$\begin{array}{ccc}
 D & & \\
 \uparrow F & \searrow F^\dagger(K^\dagger K) & \\
 C & \xrightarrow{\text{id}_C} & C \\
 \eta \uparrow \uparrow K^\dagger K & \Downarrow \varphi & \\
 & & \text{id}_C
 \end{array}$$

よって補題 11 により $F^\dagger \text{id}_C$ が存在する. □

双対的に, 以下の定理も成り立つ. (証明は同様である.)

定理 13. $G: D \rightarrow C$ を関手とするとき以下の条件は同値である.

- (1) G は左随伴を持つ.
- (2) G に沿った id_D の右 Kan 拡張 $\langle G^\dagger \text{id}_D, \varepsilon \rangle$ が存在し, 任意の関手 $K: D \rightarrow X$ が右 Kan 拡張 $G^\dagger \text{id}_D$ と交換する.

$$\begin{array}{ccc}
 C & & \\
 \uparrow G & \searrow & \\
 D & \xrightarrow{\text{id}_D} & D \xrightarrow{K} X \\
 & \searrow \varepsilon & \swarrow \text{id} \\
 & & D \xrightarrow{K} X
 \end{array}
 \quad = \quad
 \begin{array}{ccc}
 C & & \\
 \uparrow G & \searrow & \\
 D & \xrightarrow{\text{id}_D} & D \xrightarrow{K} X \\
 & \searrow & \swarrow \\
 & & D \xrightarrow{K} X
 \end{array}$$

- (3) G に沿った id_D の右 Kan 拡張 $\langle G^\dagger \text{id}_D, \varepsilon \rangle$ が存在し, G が右 Kan 拡張 $G^\dagger \text{id}_D$ と交換する.

またこのとき $G^\dagger \text{id}_D \dashv G$ であり ε がその counit である. □

定理 14 (General Adjoint Functor Theorem). C, D を圏, D は完備で関手 $G: D \rightarrow C$ は連続であるとする. 更に, 任意の $c \in C$ に対してある集合 $S \subset \text{Ob}(c \downarrow G)$ が存在して次を満たすとする. (この条件を解集合条件と呼ぶ)

任意の $\langle d, f \rangle \in c \downarrow G$ に対してある $\langle s, k \rangle \in S$ と射 $\langle s, k \rangle \rightarrow \langle d, f \rangle$ が存在する

$$\begin{array}{ccc}
 & & Gs \\
 & \nearrow k & \searrow \text{---} \\
 c & \xrightarrow{f} & Gd \\
 & \searrow k' & \swarrow \\
 & & Gs'
 \end{array}$$

このとき G は右随伴を持つ. □

定理 15 (Special Adjoint Functor Theorem). C, D が圏で, D は完備, wellpowered で, small cogenerating set S を持つとする. このとき関手 $G: D \rightarrow C$ に対して G が連続 $\iff G$ が左随伴を持つ. □

また, 関手の表現可能性について次の定理が分かる.

定理 16. D を完備な圏, $G: D \rightarrow \mathbf{Set}$ を連続な関手で解集合条件を満たすとする. このとき G は表現可能関手である.

証明. General Adjoint Functor Theorem により G は左随伴関手 $F: \mathbf{Set} \rightarrow D$ を持つ. このとき $d \in D$ と $1 \in \mathbf{Set}$ に対して $\mathrm{Hom}_D(F(1), -) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(1, G-) \cong G$ である. 故に G は表現可能関手である. \square

定理 17. D を完備, wellpowered な圏で, small cogenerating set S を持つとする. このとき関手 $G: D \rightarrow \mathbf{Set}$ に対して以下は同値である.

- (1) G が連続である.
- (2) G が左随伴を持つ.
- (3) G が表現可能関手である.

証明. $1 \iff 2$ は Special Adjoint Functor Theorem である.

(2 \implies 3) G の左随伴関手を $F: \mathbf{Set} \rightarrow D$ とすれば $1 \in \mathbf{Set}$ に対して

$$\mathrm{Hom}_D(F(1), -) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(1, G-) \cong G$$

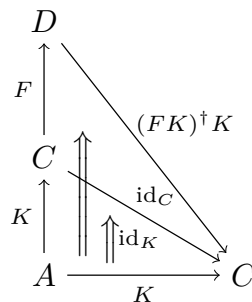
である. 故に G は表現可能関手である.

(3 \implies 1) 表現可能関手 $\mathrm{Hom}_D(d, -)$ は連続だから明らか. \square

定理 18. C を余完備な圏, D を圏とする. $A \subset C$ を小さい稠密部分圏とする. このとき関手 $F: C \rightarrow D$ が余連続 $\iff F$ が右随伴を持つ.

証明. (\Leftarrow) 明らか.

(\implies) Kan 拡張 $F^\dagger \mathrm{id}_C$ が存在することを示せばよい. 包含関手 $K: A \rightarrow C$ が稠密だから $K^\dagger K = \mathrm{id}_A$ である. また A が小圏で C が余完備だから $(FK)^\dagger K$ も存在する.



故に補題 6 より $F^\dagger \mathrm{id}_C$ も存在する. \square