

随伴関手定理

alg-d

http://alg-d.com/math/kan_extension/

2016年8月22日

定義. $F: C \rightarrow D, E: C \rightarrow U$ を関手として左 Kan 拡張 $F^\dagger E$ が存在して, $F^\dagger E$ が任意の関手 $H: U \rightarrow V$ と交換するとき, $F^\dagger E$ は絶対左 Kan 拡張であるという.

定義から明らかに次が成り立つ.

命題 1. $F: C \rightarrow D, E: C \rightarrow U, L: D \rightarrow U$ を関手, $\eta: E \Rightarrow L \circ F$ を自然変換とする.

$$\begin{array}{ccc}
 & D & \\
 F \uparrow & \searrow L & \\
 C & \xrightarrow{E} & U
 \end{array}$$

このとき $\langle L, \eta \rangle$ が F に沿った E の絶対左 Kan 拡張である

\iff 任意の圏 V と関手 $K: D \rightarrow V, H: U \rightarrow V$, 自然変換 $\theta: HE \Rightarrow KF$ に対して, ある自然変換 $\tau: HL \Rightarrow K$ が一意に存在して, 次の等式が成り立つ.

$$\begin{array}{ccc}
 D & \xrightarrow{K} & V \\
 F \uparrow & \searrow \tau \uparrow & \uparrow H \\
 C & \xrightarrow{E} & U
 \end{array}
 =
 \begin{array}{ccc}
 D & \xrightarrow{K} & V \\
 F \uparrow & \theta \uparrow & \uparrow H \\
 C & \xrightarrow{E} & U
 \end{array}$$

□

定理 2. $F: C \rightarrow D$ を関手とするとき以下の条件は同値である.

- (1) F は右随伴を持つ.

(2) 絶対左 Kan 拡張 $\langle F^\dagger \text{id}_C, \eta \rangle$ が存在する .

(3) F に沿った id_C の左 Kan 拡張 $\langle F^\dagger \text{id}_C, \eta \rangle$ が存在し , F が左 Kan 拡張 $F^\dagger \text{id}_C$ と交換する .

$$\begin{array}{ccc}
 D & & D \\
 \uparrow F & \searrow^{F \circ (F^\dagger \text{id}_C)} & \uparrow F \\
 C & \xrightarrow{\text{id}_C} C \xrightarrow{F} D & C \xrightarrow{\text{id}_C} C \xrightarrow{F} D \\
 \eta \Uparrow & \nearrow^{F^\dagger \text{id}_C} & \Uparrow \\
 & \nearrow^{\text{id}} & \\
 & C &
 \end{array} =$$

またこのとき $F \dashv F^\dagger \text{id}_C$ であり η がその unit である .

証明. (1 \implies 2) $F \dashv G$ を随伴として , その unit を η , counit を ε とする . 任意の圏 X と関手 $K: C \rightarrow X, H: D \rightarrow X$, 自然変換 $\theta: K \implies HF$ を取る .

$$\tau := \begin{array}{ccccc}
 D & \xrightarrow{\text{id}_D} & D & \xrightarrow{H} & X \\
 \searrow G & & \uparrow F & \theta \Uparrow & \uparrow K \\
 & & C & \xrightarrow{\text{id}_C} & C
 \end{array}$$

と定義すれば

$$\begin{array}{ccccc}
 D & \xrightarrow{H} & X & & \\
 \uparrow F & \searrow \tau \Uparrow & \uparrow K & & \\
 C & \xrightarrow{\text{id}_C} & C & & \\
 \eta \Uparrow & & \uparrow G & & \\
 D & \xrightarrow{\text{id}_D} & D & \xrightarrow{H} & X \\
 \searrow G & & \uparrow F & \theta \Uparrow & \uparrow K \\
 & & C & \xrightarrow{\text{id}_C} & C \\
 \eta \Uparrow & & \uparrow G & & \\
 D & \xrightarrow{H} & X & & \\
 \uparrow F & \searrow \theta \Uparrow & \uparrow K & & \\
 C & \xrightarrow{\text{id}_C} & C & &
 \end{array}$$

である . 逆に τ が

$$\begin{array}{ccccc}
 D & \xrightarrow{H} & X & & \\
 \uparrow F & \searrow \tau \Uparrow & \uparrow K & & \\
 C & \xrightarrow{\text{id}_C} & C & & \\
 \eta \Uparrow & & \uparrow G & & \\
 D & \xrightarrow{H} & X & & \\
 \uparrow F & \searrow \theta \Uparrow & \uparrow K & & \\
 C & \xrightarrow{\text{id}_C} & C & &
 \end{array}$$

を満たせば

$$\begin{array}{ccc}
 D & \xrightarrow{H} & X \\
 \searrow G & \Uparrow \tau & \Uparrow K \\
 & & C
 \end{array}
 =
 \begin{array}{ccccc}
 D & \xrightarrow{\text{id}_D} & D & \xrightarrow{H} & D \\
 \searrow G & \Uparrow \varepsilon & \Uparrow F & \searrow \tau & \Uparrow K \\
 & & C & \xrightarrow{\eta} & C \\
 & & & \Uparrow G & \\
 & & & & C \xrightarrow{\text{id}_C} C
 \end{array}
 =
 \begin{array}{ccccc}
 D & \xrightarrow{\text{id}_D} & D & \xrightarrow{H} & X \\
 \searrow G & \Uparrow \varepsilon & \Uparrow F & \Uparrow \theta & \Uparrow K \\
 & & C & \xrightarrow{\text{id}_C} & C
 \end{array}$$

となるから, このような τ は一意である. 故に $\langle F^\dagger \text{id}_C, \eta \rangle$ は絶対左 Kan 拡張である.

(2 \implies 3) 明らか.

(3 \implies 1) $G := F^\dagger \text{id}_C$ と置く. これの絶対性から左 Kan 拡張 $F^\dagger F = F \circ F^\dagger \text{id}_C = FG$ も存在する. $F^\dagger F$ の普遍性により $\varepsilon: FG \implies \text{id}_D$ が一意に存在して $\varepsilon_F \circ F\eta = \text{id}_F$ が成り立つ.

$$\begin{array}{ccc}
 D & \xrightarrow{\text{id}_D} & D \\
 \uparrow F & \searrow \varepsilon & \uparrow F \\
 & \Uparrow \eta & \Uparrow G \\
 C & \xrightarrow{\text{id}_C} & C
 \end{array}
 =
 \begin{array}{ccc}
 D & \xrightarrow{\text{id}_D} & D \\
 \uparrow F & \Uparrow \text{id}_F & \uparrow F \\
 C & \xrightarrow{\text{id}_C} & C
 \end{array}$$

故に後は $G\varepsilon \circ \eta_G = \text{id}_G$ を示せばよい. その為には, 左 Kan 拡張 $\langle G, \eta \rangle$ の普遍性から

$$\begin{array}{ccccc}
 D & \xrightarrow{\text{id}_D} & D & & \\
 \uparrow F & \searrow \varepsilon & \uparrow F & \searrow G & \\
 & \Uparrow \eta & \Uparrow G & & \\
 C & \xrightarrow{\text{id}_C} & C & \xrightarrow{\text{id}_C} & C
 \end{array}
 =
 \begin{array}{ccccc}
 D & \xrightarrow{\text{id}_D} & D & & \\
 \uparrow F & \searrow \varepsilon & \uparrow F & \Uparrow \text{id}_G & \searrow G \\
 & \Uparrow \eta & \Uparrow G & & \\
 C & \xrightarrow{\text{id}_C} & C & \xrightarrow{\text{id}_C} & C
 \end{array}$$

を示せばよいが, それは明らか. □

系 3. 圏 C に対して

C が終対象 1 を持つ $\iff \text{colim}(\text{id}_C)$ が存在する.

また, このとき $\text{colim}(\text{id}_C) \cong 1$ が成り立つ.

証明. 終対象とは対角関手 $\Delta: C \longrightarrow C^0 = \mathbf{1}$ の右随伴である.

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbf{1} & & \\
 \Delta \uparrow & \searrow 1 & \\
 C & \xrightarrow{\text{id}_C} & C
 \end{array}$$

(\implies) 終対象 1, 即ち Δ の右随伴が存在するから, 定理 2 により左 Kan 拡張 $\Delta^\dagger \text{id}_C$ が存在する. ところで $\Delta^\dagger = \text{colim}$ だったから $\text{colim}(\text{id}_C)$ が存在することが分かる.

(\impliedby) 定理 2 により Δ が $\text{colim}(\text{id}_C)$ と交換することを示せばよいが, それは明らか. $\text{colim}(\text{id}_C) \cong 1$ も明らかである. \square

定義. 関手 $K: I \longrightarrow J$ が final

$\iff C$ を圏, $F: J \longrightarrow C$ を関手とする. 余極限 $\text{colim } F$, $\text{colim } FK$ のどちらかが存在すればもう片方も存在し, 普遍性から得られる射 $\text{colim } FK \longrightarrow \text{colim } F$ が同型を与える.

定義. C を圏, $a, b \in C$ を対象とする. a と b を結ぶ zigzag とは

$$a \rightarrow c_0 \leftarrow c_1 \rightarrow \cdots \leftarrow c_{n-1} \rightarrow c_n \leftarrow b$$

の形の図式のことをいう.

定義. 圏 C が連結 $\iff C \neq \mathbf{0}$ で, 任意の対象 $a, b \in C$ を結ぶ zigzag が存在する.

命題 4. 関手 $K: I \longrightarrow J$ が final \iff 任意の $j \in J$ に対して $j \downarrow K$ が連結.

証明. (\implies) $j \in J$ とする. $F := \text{Hom}_J(j, -): J \longrightarrow \text{Set}$ とすれば, K が final だから $\text{colim } FK \cong \text{colim } F \cong 1$ である. $\text{colim } FK \cong \left(\coprod_{i \in I} FK i \right) / \sim$ だから, ある $i \in I$ に対して $FK i \neq \emptyset$ でなければならない. 即ち $\text{Hom}_J(j, Ki) \neq \emptyset$ だから $j \downarrow K \neq \mathbf{0}$ が分かる.

また, $\text{colim } FK \cong \text{colim } F \cong 1$ となるためには任意の $f \in FK i_0, g \in FK i_1$ に対して $f \sim g$ とならなければならない. よって $j \downarrow K$ が連結となることが分かる.

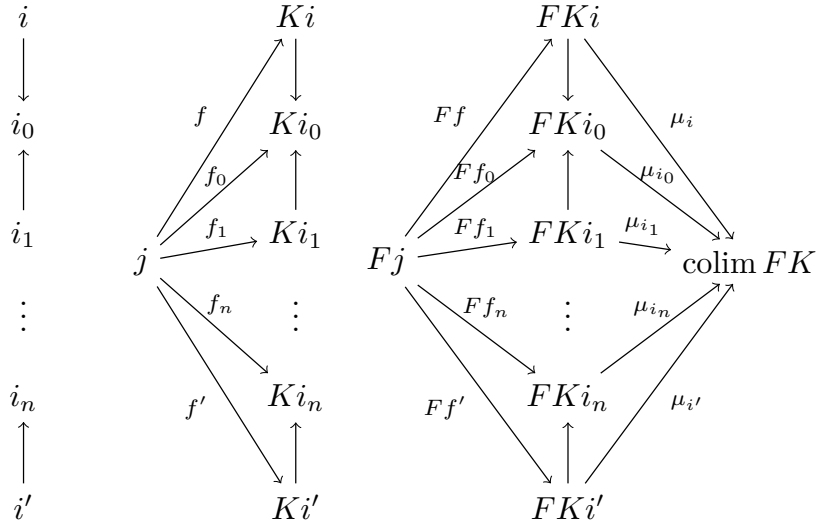
(\impliedby) C を圏, $F: J \longrightarrow C$ を関手として余極限 $\mu: FK \implies \Delta(\text{colim } FK)$ が存在するとする. $i \in I$ に対して $\mu_i: FK i \longrightarrow \text{colim } FK$ は C の射である. $j \in J$ を取る. $j \downarrow K \neq \mathbf{0}$ だから, ある対象 $\langle i, f \rangle \in j \downarrow K$ が存在する. この i と f を使って $\tau_j := \mu_i \circ Ff: Fj \longrightarrow \text{colim } FK$ と定める.

$$i \quad j \xrightarrow{f} Ki \quad Fj \xrightarrow{Ff} FK i \xrightarrow{\mu_i} \text{colim } FK$$

この τ_j は well-defined である.

($\cdot \cdot$) $\langle i, f \rangle, \langle i', f' \rangle \in j \downarrow K$ に対して $\mu_i \circ Ff = \mu_{i'} \circ Ff'$ を示せばよい. $j \downarrow K$ が連結だから zigzag $\langle i, f \rangle \rightarrow \langle i_0, f_0 \rangle \leftarrow \langle i_1, f_1 \rangle \rightarrow \cdots \rightarrow \langle i_n, f_n \rangle \leftarrow \langle i', f' \rangle$ が存在する.

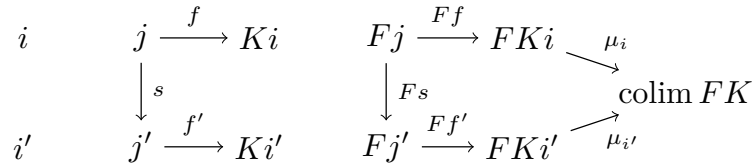
このとき次の図式は可換である .



故に $\mu_i \circ Ff = \mu_{i'} \circ Ff'$ である .

この τ_j は自然変換 $\tau: F \Rightarrow \Delta(\text{colim } FK)$ を定める .

\therefore) $s: j \rightarrow j'$ とする . $\langle i, f \rangle \in j \downarrow K$, $\langle i', f' \rangle \in j' \downarrow K$ を取れば $\tau_j = \mu_i \circ Ff$, $\tau_{j'} = \mu_{i'} \circ Ff'$ となる .



このとき well-defined の証明と同様に連結性から $\mu_i \circ Ff = \mu_{i'} \circ Ff' \circ Fs$ となることが分かる . 故に τ は自然変換である .

この τ が F から Δ への普遍射であることを示せばよい . その為に $c \in C$ を対象 , $\theta: F \Rightarrow \Delta c$ を自然変換とする . このとき $\theta_K: FK \Rightarrow \Delta c$ は自然変換である . 故に $\text{colim } FK$ の普遍性から射 $h: \text{colim } FK \rightarrow c$ が存在し $(\Delta h) \circ \tau = \theta$ となる . また $\text{colim } FK$ の普遍性から h の一意性も分かり , τ は F から Δ への普遍射である . \square

系 5. I が終対象 1 を持てば , 関手 $F: I \rightarrow C$ の余極限は存在し $\text{colim } F \cong F1$ となる .

証明. 関手 $K: 1 \rightarrow I$ を $K(*) := 1$ で定める . 任意の $i \in I$ に対して $i \downarrow K = 1$ だから K は final である . $\text{colim } FK = F1$ が存在するから , 前定理により $\text{colim } F \cong F1$ であ

る .

□

定理 6 (General Adjoint Functor Theorem). C, D を圏 , C は余完備で関手 $F: C \rightarrow D$ は余連続であるとする . 更に , 任意の $d \in D$ に対してある集合 $S \subset \text{Ob}(F \downarrow d)$ が存在して次を満たすとする (この条件を solution set condition と呼ぶ):

任意の $\langle c, f \rangle \in F \downarrow d$ に対してある $\langle s, k \rangle \in S$ と射 $\langle c, f \rangle \rightarrow \langle s, k \rangle$ が存在する

$$\begin{array}{ccc}
 & F s & \\
 & \nearrow & \searrow k \\
 F c & \xrightarrow{f} & d \\
 & \nwarrow & \nearrow k' \\
 & F s' &
 \end{array}$$

このとき F は右随伴を持つ .

証明. 各 $d \in D$ に対して $\text{colim}(F \downarrow d \xrightarrow{\pi} C)$ が存在することを示せばよい .

∴) この余極限 $\text{colim}(F \downarrow d \rightarrow C) = \text{colim}(F \downarrow d \rightarrow C \xrightarrow{\text{id}_C} C)$ が存在したとする .

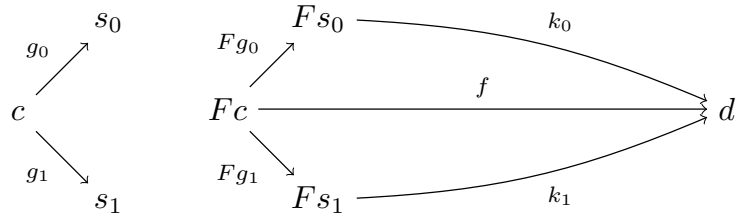
$$\begin{array}{ccc}
 \mathbf{1} & \xrightarrow{d} & D \\
 \uparrow & \swarrow & \uparrow F \\
 F \downarrow d & \xrightarrow{\pi} & C \xrightarrow{\text{id}_C} C
 \end{array}$$

このとき各点左 Kan 拡張 $F^\dagger \text{id}_C$ が存在し , $F^\dagger \text{id}_C(d) = \text{colim}(F \downarrow d \rightarrow C \xrightarrow{\text{id}_C} C)$ である . 今 F が余連続だから , F は各点左 Kan 拡張 $F^\dagger \text{id}_C$ と交換する . 従って定理 2 により F は右随伴を持つ .

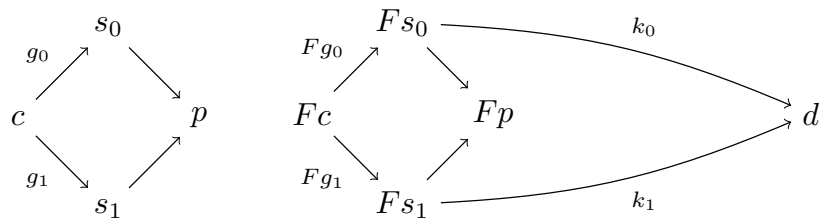
$d \in D$ とする . solution set condition を満たす集合 $S \subset \text{Ob}(F \downarrow d)$ を取る . $S \subset F \downarrow d$ を充満部分圏とみなす . $K: S \rightarrow F \downarrow d$ を包含関手とすれば , S が small で C は余完備だから , 余極限 $\text{colim}(S \xrightarrow{K} F \downarrow d \xrightarrow{\pi} C)$ が存在する . 故に K が final であることを示せば $\text{colim}(F \downarrow d \xrightarrow{\pi} C) \cong \text{colim}(S \xrightarrow{K} F \downarrow d \xrightarrow{\pi} C)$ の存在が分かる .

$\langle c, f \rangle \in F \downarrow d$ とする . $\langle c, f \rangle \downarrow K$ が連結であることを示せばよい . S の取り方から明らかに $\langle c, f \rangle \downarrow K \neq \mathbf{0}$ である . $\langle \langle s_0, k_0 \rangle, g_0 \rangle, \langle \langle s_1, k_1 \rangle, g_1 \rangle \in \langle c, f \rangle \downarrow K$ とする . 即ち

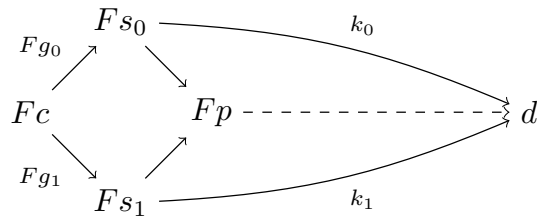
$g_0: \langle c, f \rangle \longrightarrow \langle s_0, k_0 \rangle$, $g_1: \langle c, f \rangle \longrightarrow \langle s_1, k_1 \rangle$ である .



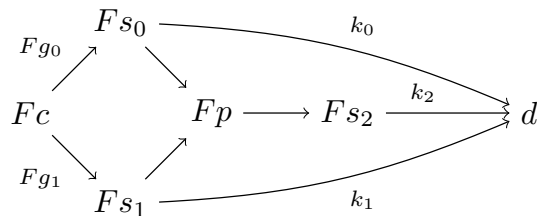
C が余完備だから , 左の図式の pushout p が存在する . また F が余連続だから , Fp も pushout である .



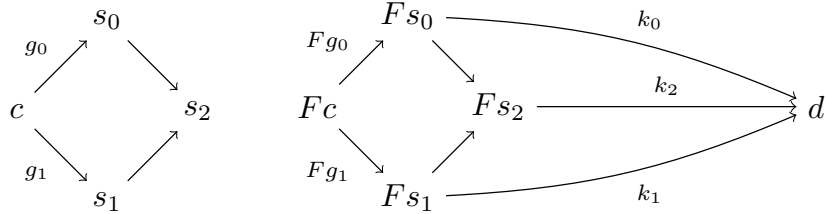
よって pushout の普遍性により , 射 $Fp \longrightarrow d$ が一意に伸びる .



S の性質により , この射 $Fp \longrightarrow d$ はある $\langle s_2, k_2 \rangle \in S$ を使って $Fp \rightarrow Fs_2 \xrightarrow{k_2} d$ と書ける .

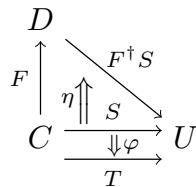


このとき次の図式を得る .



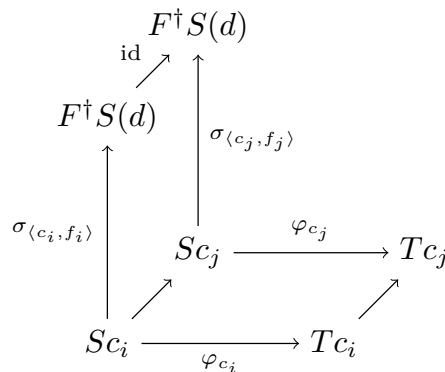
この図式は可換である . 故に $\langle c, f \rangle \downarrow K$ が連結であることが分かる . □

補題 7. C, D, U を圏で U は co-wellpowered で余完備 , $F: C \rightarrow D, S, T: C \rightarrow U$ を関手 , $\varphi: S \Rightarrow T$ をエビな自然変換とする . このとき Kan 拡張 $F^\dagger S$ が存在するならば $F^\dagger T$ も存在する .



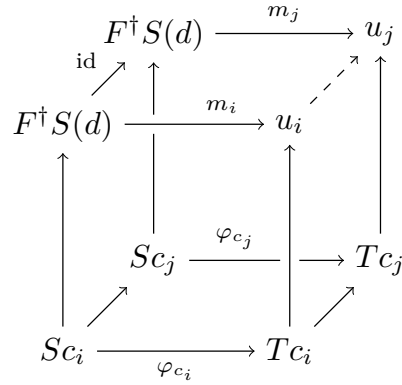
証明. $d \in D$ に対して $\text{colim}(F \downarrow d \xrightarrow{\pi} C \xrightarrow{T} U)$ が存在することを示せばよい .

各点 Kan 拡張により $F^\dagger S(d) = \text{colim}(F \downarrow d \xrightarrow{\pi} C \xrightarrow{S} U)$ である . $\langle c, f \rangle \in F \downarrow d$ に対して , 標準的な射を $\sigma_{\langle c, f \rangle}: Sc \rightarrow F^\dagger S(d)$ と書く . これと自然変換 $\varphi: S \Rightarrow T$ を合わせて , 次の可換図式を得る .

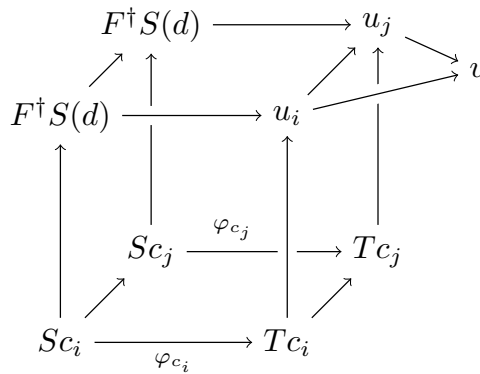


今 U は余完備だから , 次の図式のように pushout を取ることができる . また , pushout

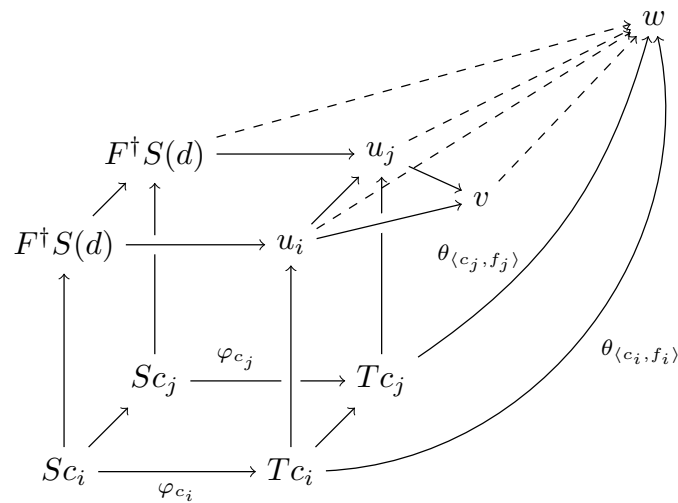
の普遍性から点線の射が延びる .



仮定から φ_{c_i} はエピ射で , エピ射の pushout はエピ射だから , m_i もエピ射である . U が co-wellpowered だから , m_i たちの余極限 v を取ることができる .



$v = \text{colim}(F \downarrow d \xrightarrow{\pi} C \xrightarrow{T} U)$ であることを示そう . その為に任意の $\theta: T \circ \pi \implies \Delta w$ を取る .



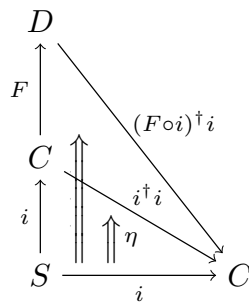
このとき $\theta \circ \varphi: S \circ \pi \implies \Delta w$ が得られるから、普遍性により $F^\dagger S(d) \rightarrow w$ が一意に延びる。よって pushout の普遍性から $u_i \rightarrow w$ が一意に延びる。よって v の普遍性から $v \rightarrow w$ が一意に延びる。以上により $v = \text{colim}(F \downarrow d \xrightarrow{\pi} C \xrightarrow{T} U)$ である。 \square

定理 8 (Special Adjoint Functor Theorem). C, D が圏で、 C は余完備、co-wellpowered で、small generating set S を持つとする。このとき関手 $F: C \rightarrow D$ に対して F が余連続 $\iff F$ が右随伴を持つ。

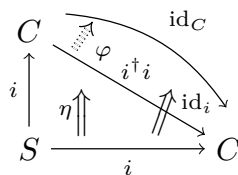
証明. (\Leftarrow) 明らか。

(\Rightarrow) Kan 拡張 $F^\dagger \text{id}_C$ が存在することを示せばよい。

generating set $S \subset C$ を充満部分圏とみなし、 $i: S \rightarrow C$ を包含関手とする。 S が small で C が余完備だから Kan 拡張 $i^\dagger i$ 、 $(F \circ i)^\dagger i$ が存在する。



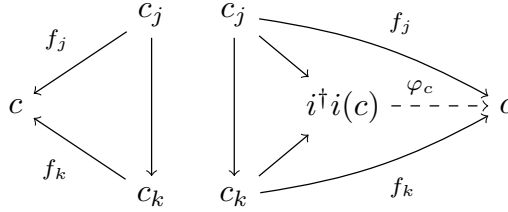
故に $F^\dagger(i^\dagger i)$ も存在して、 $F^\dagger(i^\dagger i) = (F \circ i)^\dagger i$ が成り立つ。また $\text{id}_C: C \rightarrow C$ を考えれば、Kan 拡張の普遍性により $\varphi: i^\dagger i \implies \text{id}_C$ が一意に取れる。



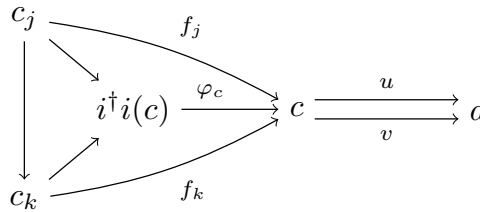
φ はエピ射である。

$\therefore c \in C$ に対して $\varphi_c: i^\dagger i(c) \rightarrow c$ がエピ射であることを示せばよい。各点 Kan 拡張の構成を思い出せば、 φ_c は $i^\dagger i(c) = \text{colim}(i \downarrow c \rightarrow S \rightarrow C) = \text{colim}_{(c,f) \in i \downarrow c} c$ の普遍性

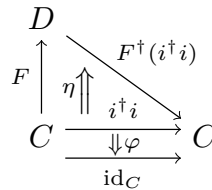
から定まる射である .



$u, v: c \rightarrow d$ を射で , $u \neq v$ とする . S が generating set だったから , ある $s \in S$ と $g: s \rightarrow c$ が存在して $u \circ g \neq v \circ g$ となる . このとき $\langle s, g \rangle \in i \downarrow c$ である .



よって $u \circ \varphi_c \neq v \circ \varphi_c$ でなければならない . 故に φ_c はエピ射である .



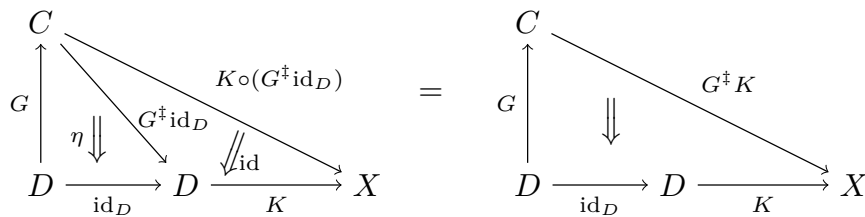
よって補題 7 により $F^+ \text{id}_C$ が存在する .

□

双対的に , 以下の定理も成り立つ . (証明は同様である .)

定理 9. $G: D \rightarrow C$ を関手とするとき以下の条件は同値である .

- (1) G は左随伴を持つ .
- (2) G に沿った id_D の右 Kan 拡張 $\langle G^+ \text{id}_D, \varepsilon \rangle$ が存在し , 任意の関手 $K: D \rightarrow X$ が右 Kan 拡張 $G^+ \text{id}_D$ と交換する .

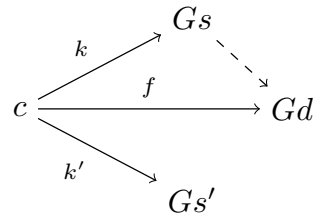


(3) G に沿った id_D の右 Kan 拡張 $\langle G^\dagger \text{id}_D, \varepsilon \rangle$ が存在し, G が右 Kan 拡張 $G^\dagger \text{id}_D$ と交換する.

またこのとき $G^\dagger \text{id}_D \dashv G$ であり ε がその counit である. □

定理 10 (General Adjoint Functor Theorem). C, D を圏, D は完備で関手 $G: D \rightarrow C$ は連続であるとする. 更に, 任意の $c \in C$ に対してある集合 $S \subset \text{Ob}(c \downarrow G)$ が存在して次を満たすとする. (この条件を solution set condition と呼ぶ)

任意の $\langle d, f \rangle \in c \downarrow G$ に対してある $\langle s, k \rangle \in S$ と射 $\langle s, k \rangle \rightarrow \langle d, f \rangle$ が存在する



このとき G は右随伴を持つ. □

定理 11 (Special Adjoint Functor Theorem). C, D が圏で, D は完備, wellpowered で, small cogenerating set S を持つとする. このとき関手 $G: D \rightarrow C$ に対して G が連続 $\iff G$ が左随伴を持つ. □

また, 関手の表現可能性について次の定理が分かる.

定理 12. D を完備な圏, $G: D \rightarrow \mathbf{Set}$ を連続な関手で solution set condition を満たすとする. このとき G は表現可能関手である.

証明. General Adjoint Functor Theorem により G は左随伴関手 $F: \mathbf{Set} \rightarrow D$ を持つ. このとき $d \in D$ と $1 \in \mathbf{Set}$ に対して $\text{Hom}_D(F(1), -) \cong \text{Hom}_{\mathbf{Set}}(1, G-) \cong G$ である. 故に G は表現可能関手である. □

定理 13. D を完備, wellpowered な圏で, small cogenerating set S を持つとする. このとき関手 $G: D \rightarrow \mathbf{Set}$ に対して以下は同値である.

- (1) G が連続である.
- (2) G が左随伴を持つ.
- (3) G が表現可能関手である.

証明. 1 \iff 2 は Special Adjoint Functor Theorem である .

(2 \implies 3) G の左随伴関手を $F: \mathbf{Set} \rightarrow D$ とすれば $1 \in \mathbf{Set}$ に対して

$$\mathrm{Hom}_D(F(1), -) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(1, G-) \cong G$$

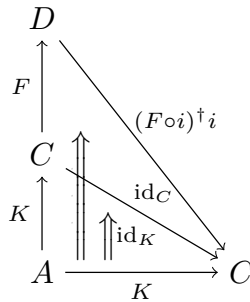
である . 故に G は表現可能関手である .

(3 \implies 1) 表現可能関手 $\mathrm{Hom}_D(d, -)$ は連続だから明らか . □

定理 14. C を余完備な圏 , D を圏とする . $A \subset C$ を小さい稠密部分圏とする . このとき関手 $F: C \rightarrow D$ が余連続 $\iff F$ が右随伴を持つ .

証明. (\Leftarrow) 明らか .

(\implies) Kan 拡張 $F^\dagger \mathrm{id}_C$ が存在することを示せばよい . 包含関手 $i: A \rightarrow C$ が稠密だから $i^\dagger i = \mathrm{id}_A$ である . また A が小圏で C が余完備だから $(F \circ i)^\dagger i$ も存在する .



故に $F^\dagger \mathrm{id}_C$ も存在する . □