

# 随伴関手

alg-d

[http://alg-d.com/math/kan\\_extension/](http://alg-d.com/math/kan_extension/)

2016年9月16日

定義.  $C, D$  を圏,  $F: C \rightarrow D, G: D \rightarrow C$  を関手とする.  $c \in C, d \in D$  に関して自然な同型  $\text{Hom}_D(Fc, d) \cong \text{Hom}_C(c, Gd)$  が成り立つとき,  $F$  を  $G$  の左随伴関手,  $G$  を  $F$  の右随伴関手という. これを記号  $F \dashv G: C \rightarrow D$  もしくは単に  $F \dashv G$  で表す.

$F \dashv G: C \rightarrow D$  とすると, 次のような二つの射が一对一に対応するという事になる.

$$Fc \rightarrow d \quad c \rightarrow Gd$$

この対応で  $f: Fc \rightarrow d$  に対応する射を  $\tilde{f}: c \rightarrow Gd$  のように  $\sim$  をつけて表すことにする. 今,  $q: d \rightarrow d'$  を  $D$  の射とすると, 自然性から次の図式が可換となる.

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_D(Fc, d) & \xrightarrow{\cong} & \text{Hom}_C(c, Gd) \\ q \circ - \downarrow & & \downarrow Gq \circ - \\ \text{Hom}_D(Fc, d') & \xrightarrow{\cong} & \text{Hom}_C(c, Gd') \end{array}$$

よって,  $f \in \text{Hom}_D(Fc, d)$  として  $g := q \circ f$  と置くと  $f$  の行き先を見れば  $Gq \circ \tilde{f} = \tilde{g}$  が分かる.

$$\begin{array}{ccc} f & \xrightarrow{\cong} & \tilde{f} \\ q \circ - \downarrow & & \downarrow Gq \circ - \\ g & \xrightarrow{\cong} & \tilde{g} = Gq \circ \tilde{f} \end{array}$$

即ち、次の左の図式が可換であれば、右の図式も可換である。

$$\begin{array}{ccc}
 Fc & \xrightarrow{f} & d \\
 & \searrow g & \downarrow q \\
 & & d'
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 c & \xrightarrow{\tilde{f}} & Gd \\
 & \searrow \tilde{g} & \downarrow Gq \\
 & & Gd'
 \end{array}$$

逆に、右の図式が可換ならば、左の図式が可換であることも分かる。同様のことが次の図式にも成り立つ。

$$\begin{array}{ccc}
 Fc & & \\
 Fp \downarrow & \searrow g & \\
 Fc' & \xrightarrow{h} & d'
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 c & & \\
 p \downarrow & \searrow \tilde{g} & \\
 c' & \xrightarrow{\tilde{h}} & Gd'
 \end{array}$$

この二つを合わせて次の命題を得る。

**命題 1.**  $f: Fc \rightarrow d, h: Fc' \rightarrow d', p: c \rightarrow c', q: d \rightarrow d'$  とする。このとき、次の左の図式が可換ならば右の図式も可換であり、右の図式が可換ならば左の図式も可換である<sup>\*1</sup>。

$$\begin{array}{ccc}
 Fc & \xrightarrow{f} & d \\
 Fp \downarrow & & \downarrow q \\
 Fc' & \xrightarrow{h} & d'
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 c & \xrightarrow{\tilde{f}} & Gd \\
 p \downarrow & & \downarrow Gq \\
 c' & \xrightarrow{\tilde{h}} & Gd'
 \end{array}$$

□

$F \dashv G: C \rightarrow D$  を随伴とする。即ち  $\text{Hom}_D(Fc, d) \cong \text{Hom}_C(c, Gd)$  であるが、ここで  $d$  として  $Fc$  を取れば  $\text{Hom}_D(Fc, Fc) \cong \text{Hom}_C(c, GFc)$  を得る。この同型において  $\text{id}_{Fc} \in \text{Hom}_D(Fc, Fc)$  に対応する射を  $\eta_c \in \text{Hom}_C(c, GFc)$  と書く。即ち  $\eta_c := \widetilde{\text{id}_{Fc}}$  である。この  $\eta_c$  は次のような普遍性を持つ。

**命題 2.**  $F \dashv G: C \rightarrow D$  を随伴とする。  $c \in C$  に対して上のように  $\eta_c: c \rightarrow GFc$  を取ると、 $\langle Fc, \eta_c \rangle$  は  $c$  から  $G$  への普遍射である。

**証明.** 任意の  $\tilde{f}: c \rightarrow Gd$  を取る。  $g: Fc \rightarrow d$  が一意に存在して  $Gg \circ \eta_c = \tilde{f}$  となるこ

<sup>\*1</sup> 感覚的に言えば、図式の可換性を考えるときには、左側にある  $F$  を右側の  $G$  へと変えてよい、ということになる

とを示す .

$$\begin{array}{ccc}
 c & \xrightarrow{\eta_c} & GFc \\
 & \searrow \tilde{f} & \downarrow Gg \\
 & & Gd
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{ccc}
 Fc & & \\
 & \downarrow g & \\
 & & d
 \end{array}$$

まず次の左の図式が可換だから , 右の図式も可換である .

$$\begin{array}{ccc}
 Fc & \xrightarrow{\text{id}_{Fc}} & Fc \\
 & \searrow f & \downarrow f \\
 & & d
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{ccc}
 c & \xrightarrow{\eta_c} & GFc \\
 & \searrow \tilde{f} & \downarrow Gf \\
 & & Gd
 \end{array}$$

よって  $Gf \circ \eta_c = \tilde{f}$  であるから , 上記の  $g$  が存在することが分かる .

一意性を示すため ,  $g: Fc \rightarrow d$  が  $Gg \circ \eta_c = \tilde{f}$  を満たすとする . 次の右の図式が可換だから , 左の図式も可換である .

$$\begin{array}{ccc}
 Fc & \xrightarrow{\text{id}_{Fc}} & Fc \\
 & \searrow f & \downarrow g \\
 & & d
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{ccc}
 c & \xrightarrow{\eta_c} & GFc \\
 & \searrow \tilde{f} & \downarrow Gg \\
 & & Gd
 \end{array}$$

よって  $f = g$  となり ,  $g$  の一意性が分かった . □

※ 証明中に見たように  $\tilde{f} = Gg \circ \eta_c$  だから , 同型  $\text{Hom}_D(Fc, d) \rightarrow \text{Hom}_C(c, Gd)$  は  $\eta_c$  により  $g \mapsto Gg \circ \eta_c$  で与えられることも分かる .

実は , ある意味で命題 2 の逆も成り立つ .

**定理 3.**  $G: D \rightarrow C$  を関手として , 各  $c \in C$  に対して普遍射  $\eta_c: c \rightarrow Gd_c$  が存在するとする . このとき  $G$  は左随伴関手  $F: C \rightarrow D$  を持つ .

**証明.** まず関手  $F: C \rightarrow D$  を定義する .  $c \in C$  に対する普遍射  $\eta_c: c \rightarrow Gd_c$  を使って  $Fc := d_c$  と定める . 射  $p: c \rightarrow c'$  に対して射  $Fp: Fc \rightarrow Fc'$  を ,  $\eta_c: c \rightarrow GFc$  の普遍性から一意に定まる射とする ( 次の図式参照 ) .

$$\begin{array}{ccc}
 c & \xrightarrow{\eta_c} & GFc \\
 p \downarrow & & \downarrow GFp \\
 c' & \xrightarrow{\eta_{c'}} & GFc'
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{ccc}
 Fc & & \\
 \downarrow Fp & & \\
 Fc' & &
 \end{array}$$

この  $F$  が関手  $C \rightarrow D$  であることは  $\eta_c$  の普遍性から容易に分かる．またこの図式の可換性は  $\eta: \text{id}_C \Rightarrow GF$  が自然変換であることを意味していることに注意しておく．

$F \dashv G$  を示す．  $c \in C, d \in D$  に対して写像  $\varphi_{cd}: \text{Hom}_D(Fc, d) \rightarrow \text{Hom}_C(c, Gd)$  を  $\varphi_{cd}(g) := Gg \circ \eta_c$  で定める．

$$\begin{array}{ccc} c & \xrightarrow{\eta_c} & GFc \\ & \searrow \varphi_{cd}(g) & \downarrow Gg \\ & & Gd \end{array} \quad \begin{array}{c} Fc \\ \downarrow g \\ d \end{array}$$

この  $\varphi$  は自然変換である．

∴) まず  $c$  に関する自然性，即ち  $p: c \rightarrow c'$  に対する次の可換性を示す．

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_D(Fc, d) & \xrightarrow{\varphi_{cd}} & \text{Hom}_C(c, Gd) \\ \uparrow - \circ Fp & & \uparrow - \circ p \\ \text{Hom}_D(Fc', d) & \xrightarrow{\varphi_{c'd}} & \text{Hom}_C(c', Gd) \end{array} \quad \begin{array}{ccc} f \circ Fp & \xrightarrow{\varphi_{cd}} & G(f \circ Fp) \circ \eta_c \\ \uparrow - \circ Fp & & \uparrow - \circ p \\ f & \xrightarrow{\varphi_{c'd}} & Gf \circ \eta_{c'} \end{array}$$

即ち  $\eta_{c'} \circ p = GFp \circ \eta_c$  を示せばよいが，これは  $Fp$  の定義

$$\begin{array}{ccc} c & \xrightarrow{\eta_c} & GFc \\ p \downarrow & & \downarrow GFp \\ c' & \xrightarrow{\eta_{c'}} & GFc' \end{array} \quad \begin{array}{c} Fc \\ \downarrow Fp \\ Fc' \end{array}$$

により明らか．次に  $d$  に関する自然性，即ち  $q: d \rightarrow d'$  に対する次の可換性であるが，それは  $\varphi$  の定義から明らか．

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_D(Fc, d) & \xrightarrow{\varphi_{cd}} & \text{Hom}_C(c, Gd) \\ q \circ - \downarrow & & \downarrow Gq \circ - \\ \text{Hom}_D(Fc, d') & \xrightarrow{\varphi_{cd'}} & \text{Hom}_C(c, Gd') \end{array} \quad \begin{array}{ccc} f & \xrightarrow{\varphi_{cd}} & Gf \circ \eta_c \\ q \circ - \downarrow & & \downarrow Gq \circ - \\ q \circ f & \xrightarrow{\varphi_{cd'}} & Gq \circ Gf \circ \eta_c \end{array}$$

また普遍射の性質から明らかに，各  $\varphi_{cd}$  が全単射であることが分かる．故に  $c, d$  に関して自然な同型  $\text{Hom}_D(Fc, d) \cong \text{Hom}_C(c, Gd)$  が存在する．よって  $F \dashv G$  である．  $\square$

今の証明により，随伴  $F \dashv G$  から得られる  $\eta_c: c \rightarrow GFc$  が自然変換  $\eta: \text{id}_C \Rightarrow GF$  を定めることもわかる．この  $\eta$  を  $F \dashv G$  の unit と呼ぶ．

定理 4.  $G: D \rightarrow C$  の左随伴は，存在するならば (自然同型を除いて) 一意である．即ち， $F \dashv G: C \rightarrow D$  かつ  $F' \dashv G: C \rightarrow D$  ならば自然同型  $F \cong F'$  が存在する．

証明.  $F \dashv G$  かつ  $F' \dashv G$  とすれば，それぞれの unit を  $\eta, \eta'$  としたときに  $\eta_c: c \rightarrow GFc$  と  $\eta'_c: c \rightarrow GF'c$  が普遍射となるから，普遍射の普遍性により  $Fc \cong F'c$  が分かる．この同型射を  $\theta_c: Fc \rightarrow F'c$  とする．

$$\begin{array}{ccc} c & \xrightarrow{\eta_c} & GFc \\ & \searrow \eta'_c & \downarrow G\theta_c \\ & & GF'c \end{array} \quad \begin{array}{c} Fc \\ \downarrow \theta_c \\ F'c \end{array}$$

この  $\theta_c$  は  $c$  について自然である．

∴)  $f: b \rightarrow c$  に対して，次の図式が可換であることを示せばよい．

$$\begin{array}{ccc} Fb & \xrightarrow{\theta_b} & F'b \\ Ff \downarrow & & \downarrow F'f \\ Fc & \xrightarrow{\theta_c} & F'c \end{array}$$

$\eta$  が自然変換であることと， $\theta_c$  の定義から次の図式が可換である．

$$\begin{array}{ccc} b & \xrightarrow{\eta_b} & GFb \\ f \downarrow & \searrow \eta_c & \downarrow GFf \\ c & \xrightarrow{\eta'_c} & GF'c \end{array} \quad \begin{array}{ccc} b & \xrightarrow{\eta_b} & GFb \\ f \downarrow & \searrow \eta'_b & \downarrow G\theta_b \\ c & \xrightarrow{\eta'_c} & GF'c \end{array}$$

よって  $\eta_b$  の普遍性により  $G\theta_c \circ GFf = GF'f \circ G\theta_b$  である．

故に自然同型  $F \cong F'$  が成り立つ． □

以上の双対を取れば以下のことも分かる．

定理 5.  $F \dashv G: C \rightarrow D$  を随伴として  $d \in D$  とする． $\tilde{\varepsilon}_d = \text{id}_{Gd}$  となる  $\varepsilon_d: FGd \rightarrow d$  を取れば， $\langle Gd, \varepsilon_d \rangle$  は  $F$  から  $d$  への普遍射であり，同型  $\text{Hom}_C(c, Gd) \rightarrow \text{Hom}_D(Fc, d)$

は  $\tilde{f} \mapsto \varepsilon_d \circ F\tilde{f}$  により与えられる。

$$\begin{array}{ccc}
 c & & Fc \\
 \tilde{f} \downarrow & & \downarrow F\tilde{f} \quad \searrow f \\
 Gd & & FGd \xrightarrow{\varepsilon_d} d
 \end{array}$$

また  $\varepsilon$  は自然変換  $FG \Rightarrow \text{id}_D$  となる。(これを counit と呼ぶ。)

逆に  $F: C \rightarrow D$  を関手として、各  $d \in D$  に対して普遍射  $\varepsilon_c: Fc_d \rightarrow d$  が存在すれば  $F$  は右随伴関手  $G$  を持つ。また右随伴は一意的である。□

例 6.  $U: \mathbf{Ab} \rightarrow \mathbf{Set}$  を忘却関手とする。  $X \in \mathbf{Set}$  から  $U$  への普遍射は常に存在し、自由アーベル群  $FX$  となるのであった。故に  $X \mapsto FX$  は  $U: \mathbf{Ab} \rightarrow \mathbf{Set}$  の左随伴関手となる。故に  $X \in \mathbf{Set}$  と  $G \in \mathbf{Ab}$  に関して自然に  $\text{Hom}_{\mathbf{Ab}}(FX, G) \cong \text{Hom}_{\mathbf{Set}}(X, UG)$  である。このような、忘却関手の左随伴関手を自由関手と呼ぶ。□

例 7.  $J, C$  を圏、 $\Delta: C \rightarrow C^J$  を対角関手とする。  $T \in C^J$  の余極限とは  $T$  から  $\Delta$  への普遍射のことであった。故に任意の  $T \in C^J$  に対して余極限  $\text{colim } T \in C$  が存在するならば  $\text{colim}: C^J \rightarrow C$  は  $\Delta$  の左随伴関手である。即ち、 $T, c$  について自然な同型

$$\text{Hom}_C(\text{colim } T, c) \cong \text{Hom}_{C^J}(T, \Delta c)$$

が成り立つ。

同様に、任意の  $T \in C^J$  に対して極限  $\lim T \in C$  が存在するならば  $\lim: C^J \rightarrow C$  は  $\Delta$  の右随伴関手である。□

$G: D \rightarrow C$  を関手、 $c \in C$  を対象とすると、同値「 $c$  から  $G$  への普遍射が存在する  $\iff \text{Hom}_C(c, G(-))$  が表現可能関手」が成立するのであった。これと定理 3 を組み合わせて次の系を得る。

系 8. 関手  $G: D \rightarrow C$  が左随伴を持つ

$\iff$  各  $c \in C$  に対して  $\text{Hom}_C(c, G(-))$  が表現可能となる。□

双対を考えれば

系 9. 関手  $F: C \rightarrow D$  が右随伴を持つ

$\iff$  各  $d \in D$  に対して  $\text{Hom}_D(F(-), d)$  が表現可能となる。□

さて、 $F \dashv G$  の unit  $\eta: \text{id} \Rightarrow GF$  と counit  $\varepsilon: FG \Rightarrow \text{id}$  を図式で書くと次のよう

になる .

$$\begin{array}{ccc}
 D & \xrightarrow{\text{id}_D} & D \\
 \searrow G & \Uparrow \varepsilon & \nearrow G \\
 & C & \\
 & \xrightarrow{\text{id}_C} & C \\
 & \Uparrow F & \Uparrow \eta \\
 & C & \xrightarrow{\text{id}_C} C
 \end{array}$$

よってこの自然変換の合成を考えることができる .

命題 10. 合成  $G\varepsilon \circ \eta_G: G \Rightarrow GFG \Rightarrow G$  は  $\text{id}_G: G \Rightarrow G$  に等しい .

$$\begin{array}{ccc}
 D & \xrightarrow{\text{id}_D} & D \\
 \searrow G & \Uparrow \varepsilon & \nearrow G \\
 & C & \\
 & \xrightarrow{\text{id}_C} & C \\
 & \Uparrow F & \Uparrow \eta \\
 & C & \xrightarrow{\text{id}_C} C
 \end{array}
 =
 \begin{array}{ccc}
 D & \xrightarrow{\text{id}_D} & D \\
 \searrow G & \Uparrow \text{id}_G & \nearrow G \\
 & C & \\
 & \xrightarrow{\text{id}_C} & C
 \end{array}$$

証明.  $d \in D$  に対して  $G\varepsilon_d \circ \eta_{Gd} = \text{id}_{Gd}$  を示せばよいが , 命題 2 で見たように  $Gf \circ \eta_c = \tilde{f}$  だったから ,  $f$  として  $\varepsilon_d$  を取れば  $G\varepsilon_d \circ \eta_{Gd} = \text{id}_{Gd}$  を得る .  $\square$

双対的に ,  $\varepsilon_F \circ F\eta: F \Rightarrow FGF \Rightarrow F$  は  $\text{id}_F: F \Rightarrow F$  に等しいことも分かる .

$$\begin{array}{ccc}
 & D & \xrightarrow{\text{id}_D} & D \\
 & \nearrow F & \searrow G & \nearrow F \\
 & \Uparrow \eta & \Uparrow \varepsilon & \Uparrow F \\
 C & \xrightarrow{\text{id}_C} & C & \xrightarrow{\text{id}_C} C
 \end{array}
 =
 \begin{array}{ccc}
 & D & \xrightarrow{\text{id}_D} & D \\
 & \nearrow F & \searrow G & \nearrow F \\
 & \Uparrow \text{id}_F & & \Uparrow F \\
 C & \xrightarrow{\text{id}_C} & C & \xrightarrow{\text{id}_C} C
 \end{array}$$

実は , これもある意味で逆が成り立つのである .

定理 11.  $F: C \rightarrow D$  ,  $G: D \rightarrow C$  を関手 ,  $\eta: \text{id}_C \Rightarrow GF$  ,  $\varepsilon: FG \Rightarrow \text{id}_D$  を自然変換とするととき , 等式

$$\begin{array}{ccc}
 D & \xrightarrow{\text{id}_D} & D \\
 \searrow G & \Uparrow \varepsilon & \nearrow G \\
 & C & \\
 & \xrightarrow{\text{id}_C} & C \\
 & \Uparrow F & \Uparrow \eta \\
 & C & \xrightarrow{\text{id}_C} C
 \end{array}
 =
 \begin{array}{ccc}
 D & \xrightarrow{\text{id}_D} & D \\
 \searrow G & \Uparrow \text{id}_G & \nearrow G \\
 & C & \\
 & \xrightarrow{\text{id}_C} & C
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 & D & \xrightarrow{\text{id}_D} & D \\
 & \nearrow F & \searrow G & \nearrow F \\
 & \Uparrow \eta & \Uparrow \varepsilon & \Uparrow F \\
 C & \xrightarrow{\text{id}_C} & C & \xrightarrow{\text{id}_C} C
 \end{array}
 =
 \begin{array}{ccc}
 & D & \xrightarrow{\text{id}_D} & D \\
 & \nearrow F & \searrow G & \nearrow F \\
 & \Uparrow \text{id}_F & & \Uparrow F \\
 C & \xrightarrow{\text{id}_C} & C & \xrightarrow{\text{id}_C} C
 \end{array}$$

が成り立つならば  $F \dashv G$  である .

証明.  $c \in C, d \in D$  を取る.  $\varphi_{cd}: \text{Hom}_D(Fc, d) \rightarrow \text{Hom}_C(c, Gd)$  を  $\varphi_{cd}(f) := Gf \circ \eta_c$  で定める. また,  $\psi_{cd}: \text{Hom}_C(c, Gd) \rightarrow \text{Hom}_D(Fc, d)$  を  $\psi_{cd}(g) := \varepsilon_d \circ Fg$  で定める.

$$\begin{array}{ccc}
 c & \xrightarrow{\eta_c} & GFc \\
 \searrow \varphi_{cd}(f) & & \downarrow Gf \\
 & & Gd
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{ccc}
 Fc & & \\
 \downarrow f & & \\
 d & &
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{ccc}
 c & & Fc \\
 \downarrow g & & \downarrow Fg \\
 Gd & & FGd
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{ccc}
 & & \searrow \psi_{cd}(g) \\
 & & d \\
 & \xrightarrow{\varepsilon_d} &
 \end{array}$$

$\varphi, \psi$  は自然変換である.

∴)  $p: c \rightarrow c'$  を  $C$  の射とする. まず次の図式が可換であることを示す.

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Hom}_D(Fc, d) & \xrightarrow{\varphi_{cd}} & \text{Hom}_C(c, Gd) \\
 \uparrow - \circ Fp & & \uparrow - \circ p \\
 \text{Hom}_D(Fc', d) & \xrightarrow{\varphi_{c'd}} & \text{Hom}_C(c', Gd)
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{ccc}
 f \circ Fh & \xrightarrow{\varphi_{cd}} & G(f \circ Fk) \circ \eta_c \\
 \uparrow - \circ Fp & & \uparrow - \circ p \\
 f & \xrightarrow{\varphi_{c'd}} & Gf \circ \eta_{c'}
 \end{array}$$

その為には  $GFp \circ \eta_c = \eta_{c'} \circ p$  を示せばよいが, これは  $\eta: \text{id}_C \Rightarrow GF$  が自然変換だから次が可換となり分かる.

$$\begin{array}{ccc}
 c & \xrightarrow{\eta_c} & GFc \\
 p \downarrow & & \downarrow GFp \\
 c' & \xrightarrow{\eta_{c'}} & GFc'
 \end{array}$$

同様の議論を行うことにより,  $\varphi, \psi$  が自然変換であることが分かる.

$\varepsilon: FG \Rightarrow \text{id}_D$  は自然変換だったから, 次の図式が可換である.

$$\begin{array}{ccc}
 FGFc & \xrightarrow{\varepsilon_{Fc}} & Fc \\
 FGf \downarrow & & \downarrow f \\
 FGd & \xrightarrow{\varepsilon_d} & d
 \end{array}$$

即ち  $\varepsilon_d \circ FGf = f \circ \varepsilon_{Fc}$  となる. 仮定により  $\varepsilon_F \circ F\eta = \text{id}_F$  だったから,  $\varphi, \psi$  の定義に



より

$$\begin{aligned}\psi_{cd} \circ \varphi_{cd}(f) &= \psi_{cd}(Gf \circ \eta_c) \\ &= \varepsilon_d \circ F(Gf \circ \eta_c) \\ &= \varepsilon_d \circ FGf \circ F\eta_c \\ &= f \circ \varepsilon_{Fc} \circ F\eta_c \\ &= f\end{aligned}$$

である。故に  $\psi_{cd} \circ \varphi_{cd} = \text{id}$  となる。双対的に  $\varphi_{cd} \circ \psi_{cd} = \text{id}$  も成り立つことが分かる。従って  $\varphi: \text{Hom}_D(Fc, d) \cong \text{Hom}_C(c, Gd)$  であり  $F \dashv G$  が分かった。□

定義.  $f: a \rightarrow b$  を圏  $C$  の射とする。

- (1)  $f$  が分裂モノ射  $\iff$  ある  $g: b \rightarrow a$  が存在して  $g \circ f = \text{id}_a$  となる。
- (2)  $f$  が分裂エピ射  $\iff$  ある  $g: b \rightarrow a$  が存在して  $f \circ g = \text{id}_b$  となる。

命題 12. 分裂モノ射はモノ射であり, 分裂エピ射はエピ射である。

証明. 双対を考えればよいので分裂モノ射がモノ射であることを示せばよい。

$f: a \rightarrow b$  を分裂モノ射とする。ある  $g: b \rightarrow a$  が存在して  $g \circ f = \text{id}_a$  となる。このとき  $h, k: c \rightarrow a$  が  $f \circ h = f \circ k$  を満たすとすると

$$h = \text{id}_a \circ h = g \circ f \circ h = g \circ f \circ k = \text{id}_a \circ k = k$$

である。□

補題 13.  $C$  を圏,  $f: a \rightarrow b$  を  $C$  の射とすると

- (1)  $y(f)$  がモノ射  $\iff f$  がモノ射
- (2)  $y(f)$  がエピ射  $\iff f$  が分裂エピ射

証明.  $y(a) = \text{Hom}_C(-, a)$  であり自然変換  $y(f): \text{Hom}_C(-, a) \Rightarrow \text{Hom}_C(-, b)$  は対象  $x \in C$  に対して  $y(f)_x: \text{Hom}_C(x, a) \ni g \mapsto f \circ g \in \text{Hom}_C(x, b)$  で与えられるのであった。

(1)  $x \in C$  に対して

$$\begin{aligned}y(f)_x \text{ が単射} &\iff \text{任意の } g, h \in \text{Hom}_C(x, a) \text{ に対して} \\ &\quad y(f)_x(g) = y(f)_x(h) \text{ ならば } g = h \\ &\iff \text{任意の } g, h \in \text{Hom}_C(x, a) \text{ に対して} \\ &\quad f \circ g = f \circ h \text{ ならば } g = h\end{aligned}$$

だから「 $y(f)$  がモノ射  $\iff f$  がモノ射」である。

(2)  $y(f)$  がエピ射とする。このとき  $y(f)_b: \text{Hom}_C(b, a) \rightarrow \text{Hom}_C(b, b)$  はエピ、即ち全射である。よって  $g \in \text{Hom}_C(b, a)$  で  $y(f)_b(g) = \text{id}_b$  となるものが存在する。このとき  $\text{id}_b = y(f)_b(g) = f \circ g$  である。よって  $f$  が分裂エピ射となることが分かった。

逆に  $f$  が分裂エピ射、即ち  $f \circ g = \text{id}_b$  となる  $g: b \rightarrow a$  が存在するとする。各対象  $x \in C$  に対して  $y(f)_x: \text{Hom}_C(x, a) \rightarrow \text{Hom}_C(x, b)$  の全射性を示せばよい。それは  $h \in \text{Hom}_C(x, b)$  に対して  $y(f)_x(g \circ h) = f \circ g \circ h = \text{id} \circ h = h$  となるから分かる。□

定理 14. 随伴  $F \dashv G: C \rightarrow D$  の unit を  $\eta$ , counit を  $\varepsilon$  とする。

- (1)  $F$  が忠実  $\iff$  任意の  $c \in C$  に対して  $\eta_c$  がモノ射
- (2)  $F$  が充満  $\iff$  任意の  $c \in C$  に対して  $\eta_c$  が分裂エピ射
- (3)  $F$  が忠実充満  $\iff$  任意の  $c \in C$  に対して  $\eta_c$  が同型射
- (4)  $G$  が忠実  $\iff$  任意の  $d \in D$  に対して  $\varepsilon_d$  がエピ射
- (5)  $G$  が充満  $\iff$  任意の  $d \in D$  に対して  $\varepsilon_d$  が分裂モノ射
- (6)  $G$  が忠実充満  $\iff$  任意の  $d \in D$  に対して  $\varepsilon_d$  が同型射

証明.  $y(\eta_c)_b$  は合成  $\text{Hom}(b, c) \xrightarrow{F} \text{Hom}(Fb, Fc) \xrightarrow{\cong} \text{Hom}(b, GFc)$  と一致する。よって補題 13 を使えば

$F$  が忠実  $\iff$  任意の  $b, c \in C$  に対して  $F: \text{Hom}(b, c) \rightarrow \text{Hom}(Fb, Fc)$  が単射  
 $\iff$  任意の  $b, c \in C$  に対して  $y(\eta_c)_b$  が単射  
 $\iff$  任意の  $c \in C$  に対して  $y(\eta_c)$  がモノ射  
 $\iff$  任意の  $c \in C$  に対して  $\eta_c$  がモノ射

$F$  が充満  $\iff$  任意の  $b, c \in C$  に対して  $F: \text{Hom}(b, c) \rightarrow \text{Hom}(Fb, Fc)$  が全射  
 $\iff$  任意の  $b, c \in C$  に対して  $y(\eta_c)_b$  が全射  
 $\iff$  任意の  $c \in C$  に対して  $y(\eta_c)$  がエピ射  
 $\iff$  任意の  $c \in C$  に対して  $\eta_c$  が分裂エピ射

であるから  $F$  についての証明が終わった。 $G$  についても同様である。□

定理 15.  $F, H: C \rightarrow D, G: D \rightarrow C$  で  $F \dashv G \dashv H$  とする。このとき  $F$  が忠実充満  $\iff H$  が忠実充満

証明. ( $\implies$ )  $F$  が忠実充満であるとする。定理 14 により  $F \dashv G$  の unit  $\eta: \text{id} \implies GF$  は自然同型である。よって  $\text{Hom}_C(c, GHc') \cong \text{Hom}_D(Fc, Hc') \cong \text{Hom}_C(GFc, c') \cong$

$\text{Hom}_C(c, c')$  となる . これは  $c$  について自然だから  $\text{Hom}_C(-, GHc') \cong \text{Hom}_C(-, c')$  である . 即ち  $y(GHc') \cong y(c')$  である . この同型を  $\theta: y(GHc') \implies y(c')$  と書くと ,  $y$  が忠実充満である (米田の補題) から , 同型射  $f: GHc' \longrightarrow c'$  で  $y(f) = \theta$  となるものが一意に存在する .

さて , ここで同型  $\text{Hom}_C(c, GHc') \cong \text{Hom}_C(c, c')$  を具体的に書き下すことを考えよう . その為に  $F \dashv G$  の counit を  $\varepsilon$  ,  $G \dashv H$  の counit を  $\varepsilon'$  とすると同型

$$\text{Hom}_C(c, GHc') \rightarrow \text{Hom}_D(Fc, Hc') \rightarrow \text{Hom}_C(GFc, c') \rightarrow \text{Hom}_C(c, c')$$

は

$$g \longmapsto \varepsilon_{Hc'} \circ Fg \longmapsto \varepsilon'_{c'} \circ G(\varepsilon_{Hc'} \circ Fg) \longmapsto \varepsilon'_{c'} \circ G(\varepsilon_{Hc'} \circ Fg) \circ \eta_c$$

で与えられることが分かる . 即ち  $\theta_c(g) = \varepsilon'_{c'} \circ G\varepsilon_{Hc'} \circ GFg \circ \eta_c$  である . 一方  $\theta_c = y(f)_c = f \circ -$  だったから  $f \circ g = \varepsilon'_{c'} \circ G\varepsilon_{Hc'} \circ GFg \circ \eta_c$  が分かる .  $\eta$  は自然変換だから次が可換となる .

$$\begin{array}{ccc} c & \xrightarrow{\eta_c} & GFc \\ g \downarrow & & \downarrow GFg \\ GHc' & \xrightarrow{\eta_{GHc'}} & d \end{array}$$

よって  $\varepsilon'_{c'} \circ G\varepsilon_{Hc'} \circ GFg \circ \eta_c = \varepsilon'_{c'} \circ G\varepsilon_{Hc'} \circ \eta_{GHc'} \circ g = \varepsilon'_{c'} \circ g$  となる . 故に  $f = \varepsilon'_{c'}$  である .

よって  $c' \in C$  に対して  $\varepsilon'_{c'}: GHc' \longrightarrow c'$  は同型である . 従って定理 14 により  $H$  は忠実充満である .

( $\Leftarrow$ ) 同様である . □

定義 .  $J, C$  を圏 ,  $T: J \longrightarrow C$  を関手として ,  $T$  の極限  $\langle \lim T, \mu \rangle$  が存在するとする . 関手  $F: C \longrightarrow D$  が極限  $\langle \lim T, \mu \rangle$  と交換する  $\iff \langle F(\lim T), F\mu \rangle$  が  $FT$  の極限である .

定理 16 . 左随伴関手は任意の余極限と交換する . 即ち ,  $F \dashv G: C \longrightarrow D$  を随伴関手 ,  $T: J \longrightarrow C$  を関手で  $\text{colim } T$  が存在するとするとき ,  $F$  は  $\text{colim } T$  と交換する .

証明 .  $\langle \text{colim } T, \mu \rangle$  を  $T$  の余極限とする . 即ち  $\mu: T \implies \Delta(\text{colim } T)$  は普遍射である .  $F\mu: FT \implies F\Delta(\text{colim } T) = \Delta(F(\text{colim } T))$  が普遍射であることを示せばよい .  $d \in D$

について自然に

$$\begin{aligned}
 \text{Hom}_D(F \text{ colim } T, d) &\cong \text{Hom}_C(\text{colim } T, Gd) \\
 &\cong \text{Hom}_{C^J}(T, \Delta(Gd)) \\
 &\cong \text{Hom}_{C^J}(T, G\Delta(d)) \\
 &\cong \text{Hom}_{D^J}(FT, \Delta(d))
 \end{aligned}$$

となるから  $\text{Hom}_{D^J}(FT, \Delta-) \cong \text{Hom}_D(F \text{ colim } T, -)$  は表現可能関手である。故に  $FT$  から  $\Delta$  への普遍射は存在し、それは  $F\mu$  で与えられる。□

双対的に、右随伴関手は極限と交換する。

$F: C \rightarrow D$  を関手、 $U$  を圏とすると、二つの関手  $F: C^U \rightarrow D^U$  と  $F^{-1}: D^U \rightarrow C^U$  が得られるのであった。

命題 17.  $F \dashv G: C \rightarrow D$  を随伴とする。このとき、圏  $U$  に対して随伴  $F \dashv G: C^U \rightarrow D^U$  が成り立つ。

証明. 随伴  $F \dashv G$  の unit, counit を  $\eta, \varepsilon$  とする。  $K \in C^U, L \in D^U$  に関して自然に  $\text{Hom}_{D^U}(FK, L) \cong \text{Hom}_{C^U}(K, GL)$  となることを示せばよい。

$\theta \in \text{Hom}(FK, L)$  に対して次の図式の自然変換の合成を  $\alpha_{K,L}(\theta): K \Rightarrow GL$  とする。

$$\begin{array}{ccc}
 U & \xrightarrow{L} & D \\
 \searrow K & \Uparrow \theta & \nearrow G \\
 & C & \\
 & \xrightarrow{\text{id}_C} & C \\
 & \Uparrow F & \Uparrow \eta
 \end{array}$$

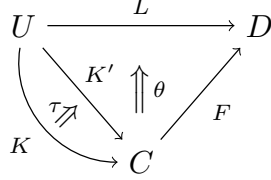
このとき  $\alpha_{K,L}: \text{Hom}_{D^U}(FK, L) \rightarrow \text{Hom}_{C^U}(K, GL)$  は  $K, L$  に関して自然である。

∴)  $L$  についても同様に分かるから、 $K$  に関する自然性のみ示す。

$K, K' \in C^U$  の間の射  $\tau: K \Rightarrow K'$  を考える。図式

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Hom}_{D^U}(FK, L) & \xrightarrow{\alpha_{KL}} & \text{Hom}_{C^U}(K, GL) \\
 \uparrow -\circ F\tau & & \uparrow -\circ \tau \\
 \text{Hom}_{D^U}(FK', L) & \xrightarrow{\alpha_{K'L}} & \text{Hom}_{C^U}(K', GL)
 \end{array}$$

が可換であることを示す．左の縦の射  $- \circ F\tau$  は  $\theta \in \text{Hom}_{D^U}(FK', L)$  に対して合成

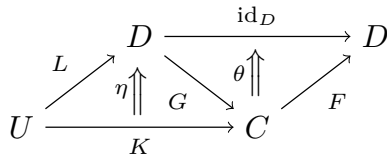


を与える射である．よって

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Hom}_{D^U}(FK, L) & \xrightarrow{\alpha_{KL}} & \text{Hom}_{C^U}(K, GL) & \theta \circ F\tau \xrightarrow{\alpha_{KL}} G(\theta \circ F\tau) \circ \eta_K \\
 \uparrow - \circ F\tau & & \uparrow - \circ \tau & \uparrow - \circ F\tau \quad G\theta \circ \eta_{K'} \circ \tau \\
 \text{Hom}_{D^U}(FK', L) & \xrightarrow{\alpha_{K'L}} & \text{Hom}_{C^U}(K', GL) & \theta \xrightarrow{\alpha_{K'L}} G\theta \circ \eta_{K'} \\
 & & & \uparrow - \circ \tau
 \end{array}$$

となるが,自然変換の合成の性質により  $G\theta \circ \eta_{K'} \circ \tau = G\theta \circ GF\tau \circ \eta_K = G(\theta \circ F\tau) \circ \eta_K$  であるから可換である．

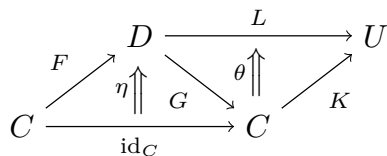
よって  $\alpha_{K,L}$  が同型であることを言えばよいが,それは逆射が次の  $\beta_{KL}$  によって与えられることから分かる． $\theta \in \text{Hom}_{C^U}(K, GL)$  に対して次の図式の自然変換の合成を  $\beta_{KL}(\theta): FK \implies L$  とする．



$\beta$  が  $\alpha$  の逆になっていることは, unit  $\eta$  と counit  $\varepsilon$  の性質から分かる． □

命題 18.  $F \dashv G: C \longrightarrow D$  を随伴,  $U$  を圏とすると, 随伴  $G^{-1} \dashv F^{-1}: U^C \longrightarrow U^D$  が成り立つ．

証明.  $F \dashv G$  の unit, counit を  $\eta, \varepsilon$  とする． $\theta \in \text{Hom}(KG, L)$  に対して次の図式の自然変換の合成を  $\alpha_{K,L}(\theta): K \implies LF$  とする．



この  $\alpha$  が自然同型  $\text{Hom}_{UD}(KG, L) \cong \text{Hom}_{UC}(K, LF)$  を与えることが前命題と同様に分かる。  $\square$

命題 19.  $F \dashv G: C \rightarrow D$  を随伴とするとき随伴  $G \dashv F: D^{\text{op}} \rightarrow C^{\text{op}}$  が成り立つ。

証明.  $\text{Hom}_{C^{\text{op}}}(Gd, c) = \text{Hom}_C(c, Gd) \cong \text{Hom}_D(Fc, d) = \text{Hom}_{D^{\text{op}}}(d, Fc)$ 。  $\square$

系 20.  $F \dashv G: C \rightarrow D$  のとき  $F^{-1} \dashv G^{-1}: \hat{D} \rightarrow \hat{C}$  が成り立つ。

証明.  $\hat{C} = \text{Set}^{C^{\text{op}}}$  だったから，前二つの命題を組み合わせればよい。  $\square$

定理 21.  $F \dashv G: C \rightarrow D$  を随伴， $\eta$  を unit， $\varepsilon$  を counit とする。充満部分圏  $\tilde{C} \subset C$ ， $\tilde{D} \subset D$  を

$$\text{Ob}(\tilde{C}) := \{c \in \text{Ob}(C) \mid \eta_c: c \rightarrow GFc \text{ が同型}\}$$

$$\text{Ob}(\tilde{D}) := \{d \in \text{Ob}(D) \mid \varepsilon_d: FGd \rightarrow d \text{ が同型}\}$$

と定める。このとき圏同値  $\tilde{C} \rightarrow \tilde{D}$  が得られる。

証明. まず  $c \in \tilde{C}$  に対して  $Fc \in \tilde{D}$  である。

$\therefore c \in \tilde{C}$  とすれば  $\eta_c: c \rightarrow GFc$  は同型である。よって  $F\eta_c: Fc \rightarrow FGFc$  も同型である。今  $F\eta \circ \varepsilon_F = \text{id}_F$  だったから， $\text{id}_{Fc} = F\eta_c \circ \varepsilon_{Fc}$  となり  $\varepsilon_{Fc}$  も同型である。よって  $Fc \in \tilde{D}$  が分かった。

よって  $F$  は関手  $\tilde{F}: \tilde{C} \rightarrow \tilde{D}$  を定める。同様にして  $G$  から関手  $\tilde{G}: \tilde{D} \rightarrow \tilde{C}$  が得られる。定義から明らかに  $\tilde{G} \circ \tilde{F} \cong \text{id}_{\tilde{C}}$ ， $\tilde{F} \circ \tilde{G} \cong \text{id}_{\tilde{D}}$  である。  $\square$

命題 22.  $F: C \rightarrow D$ ， $G: D \rightarrow C$ ， $\eta: \text{id}_C \cong GF$ ， $\rho: FG \cong \text{id}_D$  を圏同値とするととき， $\eta$  を unit とするような随伴  $F \dashv G$  が存在する。<sup>\*2</sup>

証明. 自然変換  $\varepsilon: FG \Rightarrow \text{id}_D$  を  $\varepsilon := \rho \circ F\eta_G^{-1} \circ \rho_{FG}^{-1}$  により定める。

$$\begin{array}{ccccc}
 & & D & & \\
 & & \uparrow & & \text{id}_D \\
 & & F & & \downarrow \\
 & & \downarrow \eta^{-1} & & \downarrow \rho^{-1} \\
 D & \xrightarrow{G} & C & \xrightarrow{\text{id}_C} & C & \xrightarrow{F} & D \\
 & & \downarrow \rho & & \downarrow \rho & & \\
 & & \text{id}_D & & & & 
 \end{array}$$

<sup>\*2</sup> 故に随伴は圏同値の一般化と考えることができる。

このとき  $G\varepsilon \circ \eta_G = \text{id}_G$  と  $\varepsilon_F \circ F\eta = \text{id}_F$  を示せばよい．まず  $G\rho^{-1}: G \Rightarrow GFG$  が自然変換だから，次の図式が可換である．

$$\begin{array}{ccc} Gd & \xrightarrow{G\rho_d^{-1}} & GFGd \\ \eta_{Gd} \downarrow & & \downarrow GF\eta_{Gd} \\ GFGd & \xrightarrow{G\rho_{FGd}^{-1}} & GFGFGd \end{array}$$

即ち  $G\rho_{FGd}^{-1} \circ \eta_{Gd} = GF\eta_{Gd} \circ G\rho_d^{-1}$  となる．よって

$$\begin{aligned} (G\varepsilon \circ \eta_G)_d &= G\varepsilon_d \circ \eta_{Gd} \\ &= G(\rho_d \circ F\eta_{Gd}^{-1} \circ \rho_{FGd}^{-1}) \circ \eta_{Gd} \\ &= G\rho_d \circ GF\eta_{Gd}^{-1} \circ G\rho_{FGd}^{-1} \circ \eta_{Gd} \\ &= G\rho_d \circ GF\eta_{Gd}^{-1} \circ GF\eta_{Gd} \circ G\rho_d^{-1} \\ &= \text{id}_G \end{aligned}$$

となるから  $G\varepsilon \circ \eta_G = \text{id}_G$  が成り立つ．

同様に  $\varepsilon_F \circ F\eta = \text{id}_F$  も分かる． □

系 23. 関手  $F: C \rightarrow D$  が圏同値を与えるとき， $F$  は極限・余極限と交換する． □

定義.  $C$  を直積を持つ圏とする．すると対象  $a \in C$  に対して  $- \times a: C \rightarrow C$  は関手となる．このとき  $- \times a$  から  $b \in C$  への普遍射  $\langle b^a, \text{ev} \rangle$  を exponential object という．

$$\begin{array}{ccc} b^a & & b^a \times a \xrightarrow{\text{ev}} b \\ \uparrow g & & \uparrow g \times \text{id}_a \\ x & & x \times a \end{array} \quad \begin{array}{c} \nearrow f \end{array}$$

$\text{ev}: b^a \times a \rightarrow b$  を evaluation map という．また  $b^a$  は  $[a, b]$  などと書くこともある．

例 24.  $C = \text{Set}$  の場合， $b^a$  は集合としての冪  $b^a = \text{Hom}_{\text{Set}}(a, b)$  であり， $\text{ev}: b^a \times a \rightarrow b$  は  $\text{ev}(f, x) = f(x)$  で与えられる． □

定理 3 により

命題 25.  $C$  を有限直積を持つ圏として，任意の  $a, b \in C$  に対して  $b^a$  が存在するとする．このとき  $C \ni b \mapsto b^a \in C$  は関手  $(-)^a: C \rightarrow C$  を定め，随伴  $- \times a \dashv (-)^a$  が成り立つ．よって  $b, c \in C$  について自然に  $\text{Hom}_C(b \times a, c) \cong \text{Hom}_C(b, c^a)$  となる． □

このような圏を Cartesian 閉圏という。

定義. Cartesian 閉圏 (Cartesian Closed Category, CCC) とは次の条件を満たす圏  $C$  のことである。

- (1)  $C$  は有限直積を持つ。
- (2) 任意の  $a \in C$  に対して  $- \times a$  は右随伴を持つ。

※  $C$  を Cartesian 閉圏,  $a \in C$  として  $- \times a$  の右随伴を  $G_a$  とする。命題 2 から,  $- \times a$  から  $b \in C$  への普遍射, つまり exponential object  $(b^a, ev)$  が存在することが分かる。すると命題 25 から  $- \times a \dashv (-)^a$  である。故に右随伴の一意性 (定理 4 の双対) から  $G_a \cong (-)^a$  となる。よって Cartesian 閉圏の定義の「 $- \times a$  の右随伴」は最初から  $(-)^a$  と思ってよい。

定理 16 とその双対から次が分かる。

命題 26.  $C$  を Cartesian 閉圏とすると,  $a \in C$  に対して  $- \times a$  は余極限と交換し,  $(-)^a$  は極限と交換する。特に  $b, c \in C$  に対して

$$(b \amalg c) \times a \cong (b \times a) \amalg (c \times a)$$

$$(b \times c)^a \cong b^a \times c^a$$

が成り立つ。また  $0 \times c \cong 0, 1^c \cong 1$  である。□

命題 27. Cartesian 閉圏  $C$  において  $(a^b)^c \cong a^{b \times c}$ 。

証明.  $(a^b)^c$  が  $- \times (b \times c)$  から  $a$  への普遍射を与えることを示せばよい (そうすれば普遍射の一意性から  $(a^b)^c \cong a^{b \times c}$  が分かる)。その為には, 自然同型

$$\text{Hom}_C(- \times (b \times c), a) \cong \text{Hom}_C(-, (a^b)^c)$$

を示せばよい。それは,  $x \in C$  に対して自然に

$$\begin{aligned} \text{Hom}_C(x \times (b \times c), a) &\cong \text{Hom}_C(x \times (c \times b), a) \\ &\cong \text{Hom}_C((x \times c) \times b, a) \\ &\cong \text{Hom}_C(x \times c, a^b) \\ &\cong \text{Hom}_C(x, (a^b)^c) \end{aligned}$$

となるから成り立つ。□



命題 28. Cartesian 閉圏  $C$  において  $a^b \times a^c \cong a^{b \amalg c}$  .

証明. 前命題と同様で,  $x \in C$  に対して自然に

$$\begin{aligned} \text{Hom}_C(x \times (b \amalg c), a) &\cong \text{Hom}_C((x \times b) \amalg (x \times c), a) \\ &\cong \text{Hom}_C(x \times b, a) \times \text{Hom}_C(x \times c, a) \\ &\cong \text{Hom}_C(x, a^b) \times \text{Hom}_C(x, a^c) \\ &\cong \text{Hom}_C(x, a^b \times a^c) \end{aligned}$$

となるから  $a^b \times a^c \cong a^{b \amalg c}$  である . □

命題 29. Cartesian 閉圏  $C$  において  $a^0 \cong 1$  ,  $a^1 \cong a$  .

証明.  $x \in C$  に対して自然に

$$\begin{aligned} \text{Hom}_C(x \times 0, a) &\cong \text{Hom}_C(0, a) \cong 1 \cong \text{Hom}_C(x, 1) \\ \text{Hom}_C(x \times 1, a) &\cong \text{Hom}_C(x, a) \end{aligned}$$

である . □

以上により, Cartesian 閉圏においては, いわゆる「指数法則」が成り立つ .

定理 30.  $F: C \times X \rightarrow D$  を関手とし各  $x \in X$  に対して随伴  $F(-, x) \dashv G_x: C \rightarrow D$  が存在するとする . このときある関手  $G: X^{\text{op}} \times D \rightarrow C$  が存在して  $G(x, c) = G_x(c)$  となる .

証明. 随伴  $F(-, x) \dashv G_x: C \rightarrow D$  の counit を  $\varepsilon^x: F(G_x-, x) \Rightarrow \text{id}_D$  とする .  $d \in D$  に対して  $\varepsilon_d^x: F(G_x(d), x) \rightarrow d$  は普遍射である .

$f: x \rightarrow z$  に対して  $G_f(d): G_z(d) \rightarrow G_x(d)$  を  $\varepsilon_d^x$  の普遍性により次のように定める .

$$\begin{array}{ccccc} G_x(d) & F(G_x(d), x) & \xrightarrow{\varepsilon_d^x} & d & \\ G_f(d) \uparrow & \uparrow F(G_f(d), x) & & \uparrow \varepsilon_d^z & \\ G_z(d) & F(G_z(d), x) & \xrightarrow{F(\text{id}, f)} & F(G_z(d), z) & \end{array}$$

$G(x, d) := G_x(d)$  として  $f: x \rightarrow z$  ,  $g: d \rightarrow d'$  に対して  $G(f, g) := G_f(d) \circ G_y(g)$  と定めれば  $G: X^{\text{op}} \times D \rightarrow C$  は関手である . □

よって Cartesian 閉圏では,  $\langle a, b \rangle \mapsto b^a$  は関手  $C^{\text{op}} \times C \rightarrow C$  を与える .

以下, 随伴の例を挙げる .

例 31.  $\text{Set}$  を集合の圏,  $k$  を体,  $\text{Vect}_k$  を  $k$ -線型空間の圏,  $U: \text{Vect}_k \rightarrow \text{Set}$  を忘却関手とする.  $F: \text{Set} \rightarrow \text{Vect}_k$  を集合  $X$  に対して  $X$  で生成される  $k$  上の線型空間を与える関手とすれば  $F \dashv U$  である.  $\square$

例 32.  $\text{Grp}$  を群の圏,  $U: \text{Ab} \rightarrow \text{Grp}$  を忘却関手とする.  $F: \text{Grp} \rightarrow \text{Ab}$  を集合  $X$  に対して  $X$  で生成される自由群を与える関手とすれば  $F \dashv U$  である.  $\square$

例 33.  $\text{Ab}$  をアーベル群の圏,  $U: \text{Ab} \rightarrow \text{Set}$  を忘却関手とする.  $F: \text{Set} \rightarrow \text{Ab}$  を集合  $X$  に対して  $X$  で生成される自由アーベル群を与える関手とすれば  $F \dashv U$  である.  $\square$

例 34.  $\text{Grp}$  を群の圏とする.  $U: \text{Ab} \rightarrow \text{Grp}$  を忘却関手とする.  $F: \text{Grp} \rightarrow \text{Ab}$  をアーベル化  $FG := G/[G, G]$  とすれば  $F \dashv U$  である.  $\square$

例 35.  $R$  を可換環,  $\text{Mod}R$  を  $R$  加群の圏とする.  $U: \text{Mod}R \rightarrow \text{Ab}$  を忘却関手とする.  $F, G: \text{Ab} \rightarrow \text{Mod}R$  を  $F(A) := R \otimes_{\mathbb{Z}} A$ ,  $G(A) := \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, A)$  とすれば  $F \dashv U \dashv G$  である.  $\square$

例 36.  $\text{Top}$  を位相空間の圏,  $U: \text{Top} \rightarrow \text{Set}$  を忘却関手とする.  $F: \text{Set} \rightarrow \text{Top}$  を集合  $X$  に対して離散位相空間  $X$  を与える関手,  $G: \text{Set} \rightarrow \text{Top}$  を集合  $X$  に対して密着位相空間  $X$  を与える関手とすれば  $F \dashv U \dashv G$  である.  $\square$

例 37.  $\text{Monoid}$  をモノイドの圏,  $\text{Ring}$  を環の圏とする.  $U: \text{Ring} \rightarrow \text{Monoid}$  を忘却関手 (環に対して乗法モノイドを与える関手) とする.  $F: \text{Monoid} \rightarrow \text{Ring}$  を  $M \in \text{Monoid}$  に対して  $\mathbb{Z}[M]$  を与える関手とすれば  $F \dashv U$  である.  $\square$

例 38.  $\text{Ring}_*$  を基点付き環の圏とする. 即ち対象は環  $A$  と  $a \in A$  の組  $\langle A, a \rangle$  で, 射  $\langle A, a \rangle \rightarrow \langle B, b \rangle$  は環準同型  $f: A \rightarrow B$  で  $f(a) = b$  を満たすもの, とする.  $U: \text{Ring}_* \rightarrow \text{Ring}$  を忘却関手とする.  $F: \text{Ring} \rightarrow \text{Ring}_*$  を環  $R$  に対して多項式環  $R[x]$  を与える関手とすれば  $F \dashv U$  である.  $\square$

例 39.  $\text{Dom}$  を整域の圏,  $\text{Field}$  を体の圏とする.  $U: \text{Field} \rightarrow \text{Dom}$  を忘却関手,  $\text{Quot}: \text{Dom} \rightarrow \text{Field}$  を整域  $D$  に対して商体  $\text{Quot}(D)$  を与える関手とすれば  $\text{Quot} \dashv U$  である.  $\square$

例 40.  $\text{LocRing}$  を局所環の圏,  $\text{Hensel}$  を Hensel 環の圏とする.  $U: \text{Hensel} \rightarrow \text{LocRing}$  を忘却関手,  $F: \text{LocRing} \rightarrow \text{Hensel}$  を Hensel 化とすれば  $F \dashv U$  である.

□

例 41.  $\mathbf{Latt}$  を束の圏とする .  $U: \mathbf{Latt} \rightarrow \mathbf{Set}$  を忘却関手とする .  $F: \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Latt}$  を  $X \in \mathbf{Set}$  に対して  $X$  で生成される自由束を与える関手とすれば  $F \dashv U$  である . □

例 42.  $\mathbf{CptHaus}$  をコンパクト Hausdorff 空間の圏 ,  $U: \mathbf{CptHaus} \rightarrow \mathbf{Top}$  を忘却関手とする .  $U$  の左随伴関手  $SC: \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{CptHaus}$  が Stone-Čech コンパクト化である . □

例 43.  $X$  を位相空間 ,  $\mathbf{PSh}(X)$  を  $X$  上の前層の圏 ,  $\mathbf{Sh}(X)$  を  $X$  上の層の圏とする .  $U: \mathbf{Sh}(X) \rightarrow \mathbf{PSh}(X)$  を忘却関手とする .  $F: \mathbf{PSh}(X) \rightarrow \mathbf{Sh}(X)$  を層化とすれば  $F \dashv U$  である . □

例 44.  $\mathbf{Ban}_1$  を Banach 空間と linear contraction がなす圏とする .  $B: \mathbf{Ban}_1 \rightarrow \mathbf{Set}$  を単位球体を与える関手とする .  $B$  は左随伴関手を持つ . □

例 45.  $X, Y$  を集合 ,  $f: X \rightarrow Y$  を写像とする . 冪集合を包含関係により順序集合 , 即ち圏と見なせば順像  $f: \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(Y)$  と逆像  $f^{-1}: \mathcal{P}(Y) \rightarrow \mathcal{P}(X)$  は関手である . また  $f_!: \mathcal{P}(X) \ni A \mapsto Y \setminus f(X \setminus A) \in \mathcal{P}(Y)$  も関手である . このとき  $f \dashv f^{-1} \dashv f_!$  が成り立つ . □

例 46. 圏  $\mathbf{Idem}$  を次のように定める .  $\text{Ob}(\mathbf{Idem}) := \{ \langle X, v \rangle \mid X \text{ は集合 , } v: X \rightarrow X \text{ は冪等} \}$  として  $\langle X, v \rangle, \langle Y, w \rangle$  の間の射は  $f: X \rightarrow Y$  で  $w \circ f = f \circ v$  を満たすものとする .  $F: \mathbf{Idem} \rightarrow \mathbf{Set}$  を  $F(\langle X, v \rangle) := X$  ,  $G: \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Idem}$  を  $G(X) := \langle X, \text{id}_X \rangle$  で定めれば  $F \dashv G$  かつ  $G \dashv F$  である . □

## 参考文献

- [1] Saunders Mac Lane, Categories for the Working Mathematician, Springer, 2nd ed. 1978 版 (1998)