随伴関手

alg-d
http://alg-d.com/math/kan_extension/

2018 年 9 月 16 日

定義． C, D を圏，$F\colon C \to D$，$G\colon D \to C$ を関手とする．$c \in C$，$d \in D$ について自然な同型射 $\varphi_{cd}\colon \mathrm{Hom}_D(Fc, d) \to \mathrm{Hom}_C(c, Gd)$ が存在するとき，3 つ組 $\langle F, G, \varphi\rangle$ を随伴 (adjoint) という．このとき記号では $F \dashv G\colon C \to D$ もしくは単に $F \dashv G$ と書く．また F を (G の) 左随伴関手 (left adjoint functor)，G を (F の) 右随伴関手 (right adjoint functor) という．

$F \dashv G\colon C \to D$ とすると，自然同型 φ により次のような二つの射が一対一に対応するという事になる．

$$f\colon Fc \to d \qquad g\colon c \to Gd$$

$\varphi_{cd}(f) = g$ のとき，g を f の右随伴射 (right adjunct)，f を g の左随伴射 (left adjunct) と呼ぶ．この PDF では，随伴射を$\widetilde{\ }$をつけて表すことにする．つまり $f\colon Fc \to d$ のとき $\widetilde{f}\colon c \to Gd$ であり $\varphi_{cd}(f) = \widetilde{f}$ となる．

今，$q\colon d \to d'$ を D の射とすると，自然性から次の図式が可換となる．

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_D(Fc, d) \arrow[r, "\varphi_{cd}"] \arrow[d, "q\circ -"'] & \mathrm{Hom}_C(c, Gd) \arrow[d, "Gq\circ -"] \\
\mathrm{Hom}_D(Fc, d') \arrow[r, "\varphi_{cd'}"'] & \mathrm{Hom}_C(c, Gd')
\end{tikzcd}$$

よって $f \in \mathrm{Hom}_D(Fc, d)$ として $g := q \circ f$ と置くと f の行き先を見れば $Gq \circ \widetilde{f} = \widetilde{g}$ が分かる．

$$\begin{tikzcd}
f \arrow[r, mapsto, "\varphi_{cd}"] \arrow[d, mapsto, "q\circ -"'] & \widetilde{f} \arrow[d, mapsto, "Gq\circ -"] \\
g \arrow[r, mapsto, "\varphi_{cd'}"'] & \widetilde{g} = Gq \circ \widetilde{f}
\end{tikzcd}$$

つまり，次の図式の (0) が可換であれば，(1) も可換になる．

$$
\begin{tikzcd}
Fc \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g"'] & d \arrow[d, "q"] \arrow[dl, phantom, "(0)"] \\
 & d'
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
c \arrow[r, "\widetilde{f}"] \arrow[dr, "\widetilde{g}"'] & Gd \arrow[d, "Gq"] \arrow[dl, phantom, "(1)"] \\
 & Gd'
\end{tikzcd}
$$

逆に，(1) が可換であるとする (即ち，$f\colon Fc \to d$，$g\colon Fc \to d'$，$q\colon d \to d'$ が $Gq \circ \widetilde{f} = \widetilde{g}$ を満たすとする)．このとき先程と同様にして

$$
\begin{tikzcd}
f \arrow[r, mapsto, "\varphi_{cd}"] \arrow[d, mapsto, "q\circ -"'] & \widetilde{f} \arrow[d, mapsto, "Gq\circ -"] \\
q \circ f \arrow[r, mapsto, "\varphi_{cd'}"] & Gq \circ \widetilde{f} \arrow[d, equal] \\
g \arrow[r, mapsto, "\varphi_{cd'}"] & \widetilde{g}
\end{tikzcd}
$$

となるが，$\varphi_{cd'}$ は同型 (全単射) だから $g = q \circ f$ が分かる．即ち，(0) が可換となる．

同様のことが次の図式にも成り立つ．

$$
\begin{tikzcd}
Fc \arrow[d, "Fp"'] \arrow[dr, "g"] & \\
Fc' \arrow[r, "h"'] \arrow[ur, phantom, "(2)"] & d'
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
c \arrow[d, "p"'] \arrow[dr, "\widetilde{g}"] & \\
c' \arrow[r, "\widetilde{h}"'] \arrow[ur, phantom, "(3)"] & Gd'
\end{tikzcd}
$$

即ち，(2) が可換であれば (3) も可換であるし，逆に (3) が可換であれば (2) も可換となる．

この二つを合わせて次の命題を得る．

命題 1. $f\colon Fc \to d$，$h\colon Fc' \to d'$，$p\colon c \to c'$，$q\colon d \to d'$ とする．このとき，次の左の図式が可換ならば右の図式も可換であり，右の図式が可換ならば左の図式も可換である[*1]．

$$
\begin{tikzcd}
Fc \arrow[r, "f"] \arrow[d, "Fp"'] & d \arrow[d, "q"] \\
Fc' \arrow[r, "h"'] & d'
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
c \arrow[r, "\widetilde{f}"] \arrow[d, "p"'] & Gd \arrow[d, "Gq"] \\
c' \arrow[r, "\widetilde{h}"'] & Gd'
\end{tikzcd}
$$

□

[*1] 感覚的に言えば，図式の可換性を考えるときには，左側にある F を右側の G へと変えてよい，ということになる

同じような形の命題で，次の命題も成り立つ．

命題 2. $f\colon Fc \to d$, $h\colon Fc' \to d'$, $p\colon c \to c'$, $q\colon d' \to d$ とする．このとき，次の左の図式が可換ならば右の図式も可換であり，右の図式が可換ならば左の図式も可換である

$$
\begin{tikzcd}
Fc \arrow[r, "f"] \arrow[d, "Fp"'] & d \\
Fc' \arrow[r, "h"'] & d' \arrow[u, "q"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
c \arrow[r, "\widetilde{f}"] \arrow[d, "p"'] & Gd \\
c' \arrow[r, "\widetilde{h}"'] & Gd' \arrow[u, "Gq"']
\end{tikzcd}
$$

証明. $k := h \circ Fp$ と置く．すると次の図式が得られる．

$$
\begin{tikzcd}
Fc \arrow[r, "f"] \arrow[d, "Fp"'] \arrow[dr, "k"] \arrow[dr, phantom, "(0)"', near end] & d \arrow[dl, phantom, "(1)"] \\
Fc' \arrow[r, "h"'] & d' \arrow[u, "q"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
c \arrow[r, "\widetilde{f}"] \arrow[d, "p"'] \arrow[dr, "\widetilde{k}"] \arrow[dr, phantom, "(2)"', near end] & Gd \arrow[dl, phantom, "(3)"] \\
c' \arrow[r, "\widetilde{h}"'] & Gd' \arrow[u, "Gq"']
\end{tikzcd}
$$

(0) は定義から可換なので，(2) も可換である．よって「(1) が可換 $\Longleftrightarrow$ (3) が可換」より命題が成り立つ． $\square$

さて，$F \dashv G\colon C \to D$ を随伴とする．即ち $\mathrm{Hom}_D(Fc, d) \cong \mathrm{Hom}_C(c, Gd)$ であるが，ここで d として Fc を取れば $\mathrm{Hom}_D(Fc, Fc) \cong \mathrm{Hom}_C(c, GFc)$ を得る．この同型の左辺には恒等射 id_{Fc} があるから，その随伴射 $\eta_c := \widetilde{\mathrm{id}_{Fc}}$ を得ることができる．この η_c は次のような普遍性を持つ．

定理 3. $F \dashv G\colon C \to D$ を随伴とする．$c \in C$ に対して上のように $\eta_c\colon c \to GFc$ を取ると，$\langle Fc, \eta_c \rangle$ は c から G への普遍射である．

証明. 任意の $\widetilde{f}\colon c \to Gd$ を取る．$g\colon Fc \to d$ が一意に存在して $Gg \circ \eta_c = \widetilde{f}$ となることを示す．

$$
\begin{tikzcd}
c \arrow[r, "\eta_c"] \arrow[dr, "\widetilde{f}"'] & GFc \arrow[d, dashed, "Gg"] \\
& Gd
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
Fc \arrow[d, dashed, "g"] \\
d
\end{tikzcd}
$$

まず次の左の図式が可換だから，右の図式も可換である．

$$\begin{tikzcd} Fc \arrow[r, "\mathrm{id}_{Fc}"] \arrow[dr, "f"'] & Fc \arrow[d, "f"] \\ & d \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} c \arrow[r, "\eta_c"] \arrow[dr, "\widetilde{f}"'] & GFc \arrow[d, "Gf"] \\ & Gd \end{tikzcd}$$

よって $Gf \circ \eta_c = \widetilde{f}$ であるから，上記の g が存在することが分かる．

g の一意性を示すため，$g\colon Fc \to d$ が $Gg \circ \eta_c = \widetilde{f}$ を満たすとする．次の右の図式が可換だから，左の図式も可換である．

$$\begin{tikzcd} Fc \arrow[r, "\mathrm{id}_{Fc}"] \arrow[dr, "f"'] & Fc \arrow[d, "g"] \\ & d \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} c \arrow[r, "\eta_c"] \arrow[dr, "\widetilde{f}"'] & GFc \arrow[d, "Gg"] \\ & Gd \end{tikzcd}$$

よって $f = g$ となり，g の一意性が分かった． $\square$

> ※ 証明中に見たように $\widetilde{f} = Gg \circ \eta_c$ だから，同型 $\mathrm{Hom}_D(Fc, d) \to \mathrm{Hom}_C(c, Gd)$ は η_c により $g \mapsto Gg \circ \eta_c$ で与えられることも分かる．

実は，ある意味で定理 3 の逆も成り立つ．

定理 4. $G\colon D \to C$ を関手として，各 $c \in C$ に対して普遍射 $\eta_c\colon c \to Gd_c$ が存在するとする．このとき対応 $c \mapsto d_c$ は関手 $F\colon C \to D$ を定め，$F \dashv G$ となる．

証明. まず関手 $F\colon C \to D$ を定義する．$c \in C$ に対する普遍射 $\eta_c\colon c \to Gd_c$ を使って $Fc := d_c$ と定める．射 $p\colon c \to c'$ に対して射 $Fp\colon Fc \to Fc'$ を，$\eta_c\colon c \to GFc$ の普遍性から一意に定まる射とする．

$$\begin{tikzcd} c \arrow[r, "\eta_c"] \arrow[d, "p"'] & GFc \arrow[d, dashed, "GFp"] & Fc \arrow[d, dashed, "Fp"] \\ c' \arrow[r, "\eta_{c'}"'] & GFc' & Fc' \end{tikzcd}$$

この F が関手 $F\colon C \to D$ を定めることは η_c の普遍性から容易に分かる．またこの図式の可換性は $\eta\colon \mathrm{id}_C \Rightarrow GF$ が自然変換であることを意味していることに注意しておく．

$F \dashv G$ を示す．$c \in C$，$d \in D$ に対して写像 $\varphi_{cd}\colon \mathrm{Hom}_D(Fc, d) \to \mathrm{Hom}_C(c, Gd)$ を $\varphi_{cd}(g) := Gg \circ \eta_c$ で定める．

$$
\begin{tikzcd}
c \arrow[r, "\eta_c"] \arrow[dr, "\varphi_{cd}(g)"'] & GFc \arrow[d, "Gg"] & Fc \arrow[d, "g"] \\
 & Gd & d
\end{tikzcd}
$$

この φ は自然変換である．

$\because$) まず c に関する自然性，即ち $p\colon c \to c'$ に対する次の可換性を示す．

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_D(Fc, d) \arrow[r, "\varphi_{cd}"] & \mathrm{Hom}_C(c, Gd) \\
\mathrm{Hom}_D(Fc', d) \arrow[r, "\varphi_{c'd}"] \arrow[u, "-\circ Fp"] & \mathrm{Hom}_C(c', Gd) \arrow[u, "-\circ p"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
f \circ Fp \arrow[r, mapsto, "\varphi_{cd}"] & G(f \circ Fp) \circ \eta_c \\
 & Gf \circ \eta_{c'} \circ p \\
f \arrow[r, mapsto, "\varphi_{c'd}"] \arrow[uu, mapsto, "-\circ Fp"] & Gf \circ \eta_{c'} \arrow[u, mapsto, "-\circ p"']
\end{tikzcd}
$$

即ち $\eta_{c'} \circ p = GFp \circ \eta_c$ を示せばよいが，これは Fp の定義

$$
\begin{tikzcd}
c \arrow[r, "\eta_c"] \arrow[d, "p"'] & GFc \arrow[d, dashed, "GFp"] & Fc \arrow[d, dashed, "Fp"] \\
c' \arrow[r, "\eta_{c'}"'] & GFc' & Fc'
\end{tikzcd}
$$

により明らか．次に d に関する自然性，即ち $q\colon d \to d'$ に対する次の可換性であるが，それは φ の定義から明らか．

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_D(Fc, d) \arrow[r, "\varphi_{cd}"] \arrow[d, "q\circ-"'] & \mathrm{Hom}_C(c, Gd) \arrow[d, "Gq\circ-"] \\
\mathrm{Hom}_D(Fc, d') \arrow[r, "\varphi_{cd'}"] & \mathrm{Hom}_C(c, Gd')
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
f \arrow[r, mapsto, "\varphi_{cd}"] \arrow[d, mapsto, "q\circ-"'] & Gf \circ \eta_c \arrow[d, mapsto, "Gq\circ-"] \\
q \circ f \arrow[r, mapsto, "\varphi_{cd'}"] & Gq \circ Gf \circ \eta_c
\end{tikzcd}
$$

また普遍射の性質から明らかに，各 φ_{cd} が全単射であることが分かる．故に c, d に関して自然な同型 $\mathrm{Hom}_D(Fc, d) \cong \mathrm{Hom}_C(c, Gd)$ が存在する．よって $F \dashv G$ である． $\square$

今の証明により，随伴 $F \dashv G$ から得られる $\eta_c\colon c \to GFc$ が自然変換 $\eta\colon \mathrm{id}_C \Rightarrow GF$ を定めることもわかる．この η を $F \dashv G$ の unit と呼ぶ．

定理 5. $G\colon D \to C$ の左随伴関手は，存在するならば (自然同型を除いて) 一意である．即ち，$F \dashv G\colon C \to D$ かつ $F' \dashv G\colon C \to D$ ならば自然同型 $F \cong F'$ が存在する．

証明. $F \dashv G$ かつ $F' \dashv G$ とすれば，それぞれの unit を η, η' としたときに $\eta_c\colon c \to GFc$ と $\eta'_c\colon c \to GF'c$ が普遍射となるから，普遍射の普遍性により $Fc \cong F'c$ が分かる．この同型射を $\theta_c\colon Fc \to F'c$ とする．

$$\begin{tikzcd}
c \arrow[r, "\eta_c"] \arrow[dr, "\eta'_c"'] & GFc \arrow[d, dashed, "G\theta_c"] & Fc \arrow[d, dashed, "\theta_c"] \\
 & GF'c & F'c
\end{tikzcd}$$

この θ_c は c について自然である．

$\because$) $f\colon b \to c$ に対して，次の図式が可換であることを示せばよい．

$$\begin{tikzcd}
Fb \arrow[r, "\theta_b"] \arrow[d, "Ff"'] & F'b \arrow[d, "F'f"] \\
Fc \arrow[r, "\theta_c"'] & F'c
\end{tikzcd}$$

η が自然変換であることと，θ_c の定義から次の図式が可換である．

$$\begin{tikzcd}
 & GFb \arrow[d, "GFf"] \\
b \arrow[ur, "\eta_b"] \arrow[d, "f"'] & GFc \arrow[d, "G\theta_c"] \\
c \arrow[ur, "\eta_c"] \arrow[r, "\eta'_c"'] & GFb
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & GFb \arrow[d, "G\theta_b"] \\
b \arrow[ur, "\eta_b"] \arrow[r, "\eta'_b"'] \arrow[d, "f"'] & GF'b \arrow[d, "GF'f"] \\
c \arrow[r, "\eta'_c"'] & GF'c
\end{tikzcd}$$

よって η_b の普遍性により $\theta_c \circ Ff = F'f \circ \theta_b$ である．

故に自然同型 $F \cong F'$ が成り立つ． $\square$

以上の双対を取れば以下のことも分かる．

定理 6. $F \dashv G\colon C \to D$ を随伴として $d \in D$ とする．$\widetilde{\varepsilon_d} = \mathrm{id}_{Gd}$ となる $\varepsilon_d\colon FGd \to d$ を取れば，$\langle Gd, \varepsilon_d \rangle$ は F から d への普遍射であり，同型 $\mathrm{Hom}_C(c, Gd) \to \mathrm{Hom}_D(Fc, d)$

は $\widetilde{f} \mapsto \varepsilon_d \circ F\widetilde{f}$ により与えられる．

$$
\begin{tikzcd}
c \arrow[d, "\widetilde{f}"'] & Fc \arrow[d, "F\widetilde{f}"'] \arrow[dr, "f"] & \\
Gd & FGd \arrow[r, "\varepsilon_d"'] & d
\end{tikzcd}
$$

また ε は自然変換 $FG \Rightarrow \mathrm{id}_D$ となる．（これを counit と呼ぶ．）

逆に $F\colon C \to D$ を関手として，各 $d \in D$ に対して普遍射 $\varepsilon_c\colon Fc_d \to d$ が存在すれば F は右随伴関手 G を持つ．また右随伴は一意的である． $\square$

例 7. $U\colon \mathbf{Ab} \to \mathbf{Set}$ を忘却関手とする．$X \in \mathbf{Set}$ から U への普遍射は常に存在し，自由アーベル群 FX となるのであった．故に $X \mapsto FX$ は $U\colon \mathbf{Ab} \to \mathbf{Set}$ の左随伴関手となる．故に $X \in \mathbf{Set}$ と $G \in \mathbf{Ab}$ に関して自然に $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Ab}}(FX, G) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(X, UG)$ である．このような，忘却関手の左随伴関手を自由関手と呼ぶ． $\square$

例 8. J, C を圏，$\Delta\colon C \to C^J$ を対角関手とする．$T \in C^J$ の余極限とは T から Δ への普遍射のことであった．故に任意の $T \in C^J$ に対して余極限 $\operatorname{colim} T \in C$ が存在するならば $\operatorname{colim}\colon C^J \to C$ は Δ の左随伴関手である．即ち，T, c について自然な同型

$$\mathrm{Hom}_C(\operatorname{colim} T, c) \cong \mathrm{Hom}_{C^J}(T, \Delta c)$$

が成り立つ．

同様に，任意の $T \in C^J$ に対して極限 $\lim T \in C$ が存在するならば $\lim\colon C^J \to C$ は Δ の右随伴関手である． $\square$

$G\colon D \to C$ を関手，$c \in C$ を対象とすると，同値「c から G への普遍射が存在する $\iff$ $\mathrm{Hom}_C(c, G(-))$ が表現可能関手」が成立するのであった (「極限」の PDF を参照). これと定理 4 を組み合わせて次の系を得る．

系 9. 関手 $G\colon D \to C$ が左随伴を持つ
$\iff$ 各 $c \in C$ に対して $\mathrm{Hom}_C(c, G(-))$ が表現可能となる． $\square$

双対を考えれば

系 10. 関手 $F\colon C \to D$ が右随伴を持つ
$\iff$ 各 $d \in D$ に対して $\mathrm{Hom}_D(F(-), d)$ が表現可能となる． $\square$

さて，$F \dashv G$ の unit $\eta\colon \mathrm{id} \Rightarrow GF$ と counit $\varepsilon\colon FG \Rightarrow \mathrm{id}$ を図式で書くと次のように

なる．

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[rr, "\mathrm{id}_D"] \arrow[dr, "G"'] & & D \arrow[dr, "G"] \arrow[d, phantom, "\Uparrow\eta"] & \\
& C \arrow[ur, "F"'] \arrow[rr, "\mathrm{id}_C"'] \arrow[u, phantom, "\Uparrow\varepsilon"] & & C
\end{tikzcd}$$

よってこの自然変換の合成を考えることができる．(「自然変換・関手圏」の PDF を参照．)

定理 11. 合成 $G\varepsilon \circ \eta_G \colon G \Rightarrow GFG \Rightarrow G$ は $\mathrm{id}_G \colon G \Rightarrow G$ に等しい．

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[rr, "\mathrm{id}_D"] \arrow[dr, "G"'] & & D \arrow[dr, "G"] \arrow[d, phantom, "\Uparrow\eta"] & \\
& C \arrow[ur, "F"'] \arrow[rr, "\mathrm{id}_C"'] \arrow[u, phantom, "\Uparrow\varepsilon"] & & C
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
D \arrow[rr, "\mathrm{id}_D"] \arrow[dr, "G"'] & & D \arrow[dr, "G"] & \\
& C \arrow[rr, "\mathrm{id}_C"'] \arrow[ur, phantom, "\Uparrow\mathrm{id}_G"] & & C
\end{tikzcd}$$

証明. $d \in D$ に対して $G\varepsilon_d \circ \eta_{Gd} = \mathrm{id}_{Gd}$ を示せばよいが, 定理 3 で見たように $Gf \circ \eta_c = \widetilde{f}$ だったから，f として ε_d を取れば $G\varepsilon_d \circ \eta_{Gd} = \mathrm{id}_{Gd}$ を得る． □

双対的に，$\varepsilon_F \circ F\eta \colon F \Rightarrow FGF \Rightarrow F$ は $\mathrm{id}_F \colon F \Rightarrow F$ に等しいことも分かる．[*2]

$$\begin{tikzcd}
& D \arrow[rr, "\mathrm{id}_D"] \arrow[dr, "G"] \arrow[d, phantom, "\eta\Uparrow"] & & D \\
C \arrow[ur, "F"] \arrow[rr, "\mathrm{id}_C"'] & & C \arrow[ur, "F"'] \arrow[u, phantom, "\varepsilon\Uparrow"] &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
& D \arrow[rr, "\mathrm{id}_D"] \arrow[dr, phantom, "\Uparrow\mathrm{id}_F"] & & D \\
C \arrow[ur, "F"] \arrow[rr, "\mathrm{id}_C"'] & & C \arrow[ur, "F"'] &
\end{tikzcd}$$

実は，これもある意味で逆が成り立つ．

定理 12. $F \colon C \to D$，$G \colon D \to C$ を関手，$\eta \colon \mathrm{id}_C \Rightarrow GF$，$\varepsilon \colon FG \Rightarrow \mathrm{id}_D$ を自然変換とするとき，等式

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[rr, "\mathrm{id}_D"] \arrow[dr, "G"'] & & D \arrow[dr, "G"] \arrow[d, phantom, "\Uparrow\eta"] & \\
& C \arrow[ur, "F"'] \arrow[rr, "\mathrm{id}_C"'] \arrow[u, phantom, "\Uparrow\varepsilon"] & & C
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
D \arrow[rr, "\mathrm{id}_D"] \arrow[dr, "G"'] & & D \arrow[dr, "G"] & \\
& C \arrow[rr, "\mathrm{id}_C"'] \arrow[ur, phantom, "\Uparrow\mathrm{id}_G"] & & C
\end{tikzcd}$$

[*2] これらの等式を三角恒等式 (triangular identities) と呼ぶ．

$$
\begin{tikzcd}
 & D \arrow[rr, "\mathrm{id}_D"] \arrow[dr, "G"'] & \arrow[d, phantom, "\varepsilon\Uparrow"] & D \\
C \arrow[ur, "F"] \arrow[rr, "\mathrm{id}_C"'] & \arrow[u, phantom, "\eta\Uparrow"] & C \arrow[ur, "F"'] &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
 & D \arrow[rr, "\mathrm{id}_D"] & \arrow[d, phantom, "\Uparrow\mathrm{id}_F"] & D \\
C \arrow[ur, "F"] \arrow[rr, "\mathrm{id}_C"'] & & C \arrow[ur, "F"'] &
\end{tikzcd}
$$

が成り立つならば $F \dashv G$ である．

証明. $c \in C$，$d \in D$ を取る．$\varphi_{cd}\colon \mathrm{Hom}_D(Fc, d) \to \mathrm{Hom}_C(c, Gd)$ を $\varphi_{cd}(f) := Gf \circ \eta_c$ で定める．また，$\psi_{cd}\colon \mathrm{Hom}_C(c, Gd) \to \mathrm{Hom}_D(Fc, d)$ を $\psi_{cd}(g) := \varepsilon_d \circ Fg$ で定める．

$$
\begin{tikzcd}
c \arrow[r, "\eta_c"] \arrow[dr, "\varphi_{cd}(f)"'] & GFc \arrow[d, "Gf"] \\
 & Gd
\end{tikzcd}
\quad
\begin{tikzcd}
Fc \arrow[d, "f"] \\
d
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
c \arrow[d, "g"'] \\
Gd
\end{tikzcd}
\quad
\begin{tikzcd}
Fc \arrow[d, "Fg"'] \arrow[dr, "\psi_{cd}(g)"] & \\
FGd \arrow[r, "\varepsilon_d"'] & d
\end{tikzcd}
$$

φ，ψ は自然変換である．

∵) $p\colon c \to c'$ を C の射とする．まず次の図式が可換であることを示す．

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_D(Fc, d) \arrow[r, "\varphi_{cd}"] & \mathrm{Hom}_C(c, Gd) \\
\mathrm{Hom}_D(Fc', d) \arrow[u, "-\circ Fp"] \arrow[r, "\varphi_{c'd}"] & \mathrm{Hom}_C(c', Gd) \arrow[u, "-\circ p"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
f \circ Fh \arrow[r, mapsto, "\varphi_{cd}"] & G(f \circ Fk) \circ \eta_c \\
 & Gf \circ \eta_{c'} \circ k \\
f \arrow[uu, mapsto, "-\circ Fp"] \arrow[r, mapsto, "\varphi_{c'd}"] & Gf \circ \eta_{c'} \arrow[u, mapsto, "-\circ p"']
\end{tikzcd}
$$

その為には $GFp \circ \eta_c = \eta_{c'} \circ p$ を示せばよいが，これは $\eta\colon \mathrm{id}_C \Rightarrow GF$ が自然変換だから次が可換となり分かる．

$$
\begin{tikzcd}
c \arrow[r, "\eta_c"] \arrow[d, "p"'] & GFc \arrow[d, "GFp"] \\
c' \arrow[r, "\eta_{c'}"'] & GFc'
\end{tikzcd}
$$

同様の議論を行うことにより，φ，ψ が自然変換であることが分かる．

$\varepsilon\colon FG \Rightarrow \mathrm{id}_D$ は自然変換だったから，次の図式が可換である．

$$
\begin{tikzcd}
FGFc \arrow[r, "\varepsilon_{Fc}"] \arrow[d, "FGf"'] & Fc \arrow[d, "f"] \\
FGd \arrow[r, "\varepsilon_d"'] & d
\end{tikzcd}
$$

即ち $\varepsilon_d \circ FGf = f \circ \varepsilon_{Fc}$ となる．仮定により $\varepsilon_F \circ F\eta = \mathrm{id}_F$ だったから，φ, ψ の定義により

$$\begin{aligned}\psi_{cd} \circ \varphi_{cd}(f) &= \psi_{cd}(Gf \circ \eta_c) \\ &= \varepsilon_d \circ F(Gf \circ \eta_c) \\ &= \varepsilon_d \circ FGf \circ F\eta_c \\ &= f \circ \varepsilon_{Fc} \circ F\eta_c \\ &= f\end{aligned}$$

である．故に $\psi_{cd} \circ \varphi_{cd} = \mathrm{id}$ となる．双対的に $\varphi_{cd} \circ \psi_{cd} = \mathrm{id}$ も成り立つことが分かる．従って $\varphi\colon \mathrm{Hom}_D(Fc, d) \cong \mathrm{Hom}_C(c, Gd)$ であり $F \dashv G$ が分かった． □

命題 13. $F \dashv G\colon C \to D$ を随伴とするとき随伴 $G^{\mathrm{op}} \dashv F^{\mathrm{op}}\colon D^{\mathrm{op}} \to C^{\mathrm{op}}$ が成り立つ．

証明. $d \in D$，$c \in C$ について自然に

$$\mathrm{Hom}_{C^{\mathrm{op}}}(Gd, c) = \mathrm{Hom}_C(c, Gd) \cong \mathrm{Hom}_D(Fc, d) = \mathrm{Hom}_{D^{\mathrm{op}}}(d, Fc).$$

□

定義. $f\colon a \to b$ を圏 C の射とする．

(1) f が分裂エピ射 (split epimorphism)
$\iff$ ある $g\colon b \to a$ が存在して $f \circ g = \mathrm{id}_b$ となる．

(2) f が分裂モノ射 (split monomorphism)
$\iff$ ある $g\colon b \to a$ が存在して $g \circ f = \mathrm{id}_a$ となる．

命題 14. 分裂エピ射はエピ射であり，分裂モノ射はモノ射である．

証明. 双対を考えればよいので分裂エピ射がエピ射であることを示せばよい．

$f\colon a \to b$ を分裂エピ射とする．つまりある $g\colon b \to a$ が存在して $f \circ g = \mathrm{id}_b$ となる．今 $h, k\colon b \to c$ が $h \circ f = k \circ f$ を満たすとすると

$$h = h \circ \mathrm{id}_b = h \circ f \circ g = k \circ f \circ g = k \circ \mathrm{id}_b = k$$

である． □

命題 15. モノ射かつ分裂エピ射ならば同型射である．

証明. $f\colon a \to b$ がモノ射かつ分裂エピ射であるとする．f が分裂エピ射だから，$g\colon b \to a$

が存在して $f \circ g = \mathrm{id}_b$ となる．よって $f \circ g \circ f = \mathrm{id}_b \circ f = f = f \circ \mathrm{id}_a$ である．今 f がモノ射だから $g \circ f = \mathrm{id}_a$ となり，f が同型射であることが分かった． $\square$

双対を考えれば「エピ射かつ分裂モノ射ならば同型射」も分かる．

命題 16. $F\colon C \to D$ を関手，$f\colon a \to b$ を C の射とする．

(1) f が分裂エピ射ならば，Ff も分裂エピ射である．
(2) F が忠実充満の場合，Ff が分裂エピ射ならば，f も分裂エピ射である．

証明. (1) f が分裂エピ射だとする．つまりある $g\colon b \to a$ が存在して $f \circ g = \mathrm{id}_b$ となる．このとき $Ff \circ Fg = \mathrm{id}_{Fb}$ だから Ff も分裂エピ射である．

(2) Ff が分裂エピ射だとする．つまりある $h\colon Fb \to Fa$ が存在して $Ff \circ h = \mathrm{id}_b$ となる．今 F が充満だから，ある $g\colon b \to a$ が存在して $Fg = h$ となる．このとき $F(f \circ g) = Ff \circ Fg = Ff \circ h = \mathrm{id}_{Fb}$ である．今 f が忠実だから $f \circ g = \mathrm{id}_b$ が分かり，f は分裂エピ射である． $\square$

補題 17. C を圏，$f\colon a \to b$ を C の射とするとき

(1) f が分裂エピ射 $\Longleftrightarrow$ $y(f)$ が分裂エピ射 $\Longleftrightarrow$ $y(f)$ がエピ射
(2) f がモノ射 $\Longleftrightarrow$ $y(f)$ がモノ射
(3) f が分裂モノ射 $\Longleftrightarrow$ $y(f)$ が分裂モノ射

証明. 自然変換 $y(f)\colon \mathrm{Hom}_C(-,a) \Rightarrow \mathrm{Hom}_C(-,b)$ は対象 $x \in C$ に対して

$$y(f)_x\colon \mathrm{Hom}_C(x,a) \ni g \mapsto f \circ g \in \mathrm{Hom}_C(x,b)$$

で与えられるのであった．また，$\widehat{C}$ の射がエピ射 (モノ射) となるのは，全ての成分がエピ射 (モノ射) となるときであった (「極限」の PDF を参照).

(1) 米田埋込 y が忠実充満 (米田の補題) だから，「f が分裂エピ射 $\Longleftrightarrow$ $y(f)$ が分裂エピ射」は命題 16 より分かるので「分裂エピ射 $\Longleftrightarrow$ $y(f)$ がエピ射」を示せばよい．

f が分裂エピ射，即ち $f \circ g = \mathrm{id}_b$ となる $g\colon b \to a$ が存在するとする．各対象 $x \in C$ に対して $y(f)_x\colon \mathrm{Hom}_C(x,a) \to \mathrm{Hom}_C(x,b)$ が全射になることを示せばよい．それは $h \in \mathrm{Hom}_C(x,b)$ に対して $y(f)_x(g \circ h) = f \circ g \circ h = \mathrm{id} \circ h = h$ となるから分かる．

逆に $y(f)$ がエピ射とする．このとき $y(f)_b\colon \mathrm{Hom}_C(b,a) \to \mathrm{Hom}_C(b,b)$ はエピ，即ち全射である．よって $g \in \mathrm{Hom}_C(b,a)$ で $y(f)_b(g) = \mathrm{id}_b$ となるものが存在する．このとき $\mathrm{id}_b = y(f)_b(g) = f \circ g$ である．よって f が分裂エピ射となることが分かった．

(2) $x \in C$ に対して

$$
\begin{aligned}
y(f)_x \text{ が単射} &\iff g, h \in \mathrm{Hom}_C(x, a) \text{ が } y(f)_x(g) = y(f)_x(h) \text{ を} \\
&\qquad \text{満たすならば } g = h \text{ である} \\
&\iff g, h \in \mathrm{Hom}_C(x, a) \text{ が } f \circ g = f \circ h \text{ を} \\
&\qquad \text{満たすならば } g = h \text{ である}
\end{aligned}
$$

だから「$y(f)$ がモノ射 $\iff$ f がモノ射」である．

(3) 米田埋込が忠実充満だから命題 16 の双対より分かる． □

定理 18. 随伴 $F \dashv G \colon C \to D$ の unit を η, counit を ε とする．

(1) F が忠実 $\iff$ 任意の $c \in C$ に対して η_c がモノ射
(2) F が充満 $\iff$ 任意の $c \in C$ に対して η_c が分裂エピ射
(3) F が忠実充満 $\iff$ 任意の $c \in C$ に対して η_c が同型射
(4) G が忠実 $\iff$ 任意の $d \in D$ に対して ε_d がエピ射
(5) G が充満 $\iff$ 任意の $d \in D$ に対して ε_d が分裂モノ射
(6) G が忠実充満 $\iff$ 任意の $d \in D$ に対して ε_d が同型射

証明. $y(\eta_c)_b = (\eta_c \circ -)$ は合成 $\mathrm{Hom}_C(b, c) \xrightarrow{F} \mathrm{Hom}_D(Fb, Fc) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_C(b, GFc)$ と一致する．

$\because$) 合成 $\mathrm{Hom}(b, c) \xrightarrow{F} \mathrm{Hom}(Fb, Fc) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}(b, GFc)$ は定理 3 の証明より

$$f \mapsto Ff \mapsto GFf \circ \eta_b$$

で与えられる．η の自然性から

$$
\begin{tikzcd}
b \arrow[r, "\eta_b"] \arrow[d, "f"'] & GFb \arrow[d, "GFf"] \\
c \arrow[r, "\eta_c"'] & GFc
\end{tikzcd}
$$

が可換だから，$f \mapsto GFf \circ \eta_b$ は $f \mapsto \eta_c \circ f$ と一致する．

よって補題 17 を使えば

$$
\begin{aligned}
F \text{ が忠実} &\iff \text{任意の } b, c \in C \text{ に対して } F\colon \mathrm{Hom}(b,c) \to \mathrm{Hom}(Fb, Fc) \text{ が単射} \\
&\iff \text{任意の } b, c \in C \text{ に対して } y(\eta_c)_b \text{ が単射} \\
&\iff \text{任意の } c \in C \text{ に対して } y(\eta_c) \text{ がモノ射} \\
&\iff \text{任意の } c \in C \text{ に対して } \eta_c \text{ がモノ射}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
F \text{ が充満} &\iff \text{任意の } b, c \in C \text{ に対して } F\colon \mathrm{Hom}(b,c) \to \mathrm{Hom}(Fb, Fc) \text{ が全射} \\
&\iff \text{任意の } b, c \in C \text{ に対して } y(\eta_c)_b \text{ が全射} \\
&\iff \text{任意の } c \in C \text{ に対して } y(\eta_c) \text{ がエピ射} \\
&\iff \text{任意の } c \in C \text{ に対して } \eta_c \text{ が分裂エピ射}
\end{aligned}
$$

であるから F についての証明が終わった．G については，命題 13 より $G^{\mathrm{op}} \dashv F^{\mathrm{op}}$ だから，この $G^{\mathrm{op}} \dashv F^{\mathrm{op}}$ に対して上記の議論を当てはめれば分かる． □

定理 19. $F, H\colon C \to D$，$G\colon D \to C$ で $F \dashv G \dashv H$ とする．このとき
F が忠実充満 $\iff$ H が忠実充満

証明. $(\Longrightarrow)$ F が忠実充満であるとする．定理 18 により $F \dashv G$ の unit $\eta\colon \mathrm{id} \Rightarrow GF$ は自然同型である．よって $\mathrm{Hom}_C(c, GHc') \cong \mathrm{Hom}_D(Fc, Hc') \cong \mathrm{Hom}_C(GFc, c') \cong \mathrm{Hom}_C(c, c')$ となる．これは c について自然だから $\mathrm{Hom}_C(-, GHc') \cong \mathrm{Hom}_C(-, c')$ である．即ち $y(GHc') \cong y(c')$ である．この同型を $\theta\colon y(GHc') \Rightarrow y(c')$ と書くと，y が忠実充満であるから，同型射 $f\colon GHc' \to c'$ で $y(f) = \theta$ となるものが一意に存在する．

さて，ここで同型 $\mathrm{Hom}_C(c, GHc') \cong \mathrm{Hom}_C(c, c')$ を具体的に書き下すことを考えよう．その為に $F \dashv G$ の counit を ε，$G \dashv H$ の counit を ε' とすると同型

$$
\mathrm{Hom}_C(c, GHc') \to \mathrm{Hom}_D(Fc, Hc') \to \mathrm{Hom}_C(GFc, c') \to \mathrm{Hom}_C(c, c')
$$

は

$$
g \mapsto \varepsilon_{Hc'} \circ Fg \mapsto \varepsilon'_{c'} \circ G(\varepsilon_{Hc'} \circ Fg) \mapsto \varepsilon'_{c'} \circ G(\varepsilon_{Hc'} \circ Fg) \circ \eta_c
$$

で与えられることが分かる．即ち $\theta_c(g) = \varepsilon'_{c'} \circ G\varepsilon_{Hc'} \circ GFg \circ \eta_c$ である．一方 $\theta_c = y(f)_c = f \circ -$ だったから $f \circ g = \varepsilon'_{c'} \circ G\varepsilon_{Hc'} \circ GFg \circ \eta_c$ が分かる．η は自然変換だから次が可換となる．

$$
\begin{tikzcd}
c \arrow[r, "\eta_c"] \arrow[d, "g"'] & GFc \arrow[d, "GFg"] \\
GHc' \arrow[r, "\eta_{GHc'}"'] & d
\end{tikzcd}
$$

よって $\varepsilon'_{c'} \circ G\varepsilon_{Hc'} \circ GFg \circ \eta_c = \varepsilon'_{c'} \circ G\varepsilon_{Hc'} \circ \eta_{GHc'} \circ g = \varepsilon'_{c'} \circ g$ となる．故に $f = \varepsilon'_{c'}$ である．

よって $c' \in C$ に対して $\varepsilon'_{c'} \colon GHc' \to c'$ は同型である．従って定理 18 により H は忠実充満である．

($\Longleftarrow$) 同様である． $\square$

$F \colon C \to D$ を関手, U を圏とするとき，二つの関手 $F \colon C^U \to D^U$ と $F^{-1} \colon U^D \to U^C$ が得られるのであった．

命題 20. $F \dashv G \colon C \to D$ を随伴とする．このとき，圏 U に対して随伴 $F \dashv G \colon C^U \to D^U$ が成り立つ．

証明. 随伴 $F \dashv G$ の unit，counit を η, ε とする．$K \in C^U$，$L \in D^U$ に関して自然に $\mathrm{Hom}_{D^U}(FK, L) \cong \mathrm{Hom}_{C^U}(K, GL)$ となることを示せばよい．

$\theta \in \mathrm{Hom}(FK, L)$ に対して次の図式の自然変換の合成を $\alpha_{K,L}(\theta) \colon K \Rightarrow GL$ とする．

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[rr, "L"] \arrow[dr, "K"'] & \arrow[d, phantom, "\Uparrow\theta"] & D \arrow[dr, "G"] \arrow[d, phantom, "\Uparrow\eta"] & \\
& C \arrow[ur, "F"] \arrow[rr, "\mathrm{id}_C"'] & & C
\end{tikzcd}$$

このとき $\alpha_{K,L} \colon \mathrm{Hom}_{D^U}(FK, L) \to \mathrm{Hom}_{C^U}(K, GL)$ は K, L に関して自然である．

$\because$) L についても同様に分かるから，K に関する自然性のみ示す．

$K, K' \in C^U$ の間の射 $\tau \colon K \Rightarrow K'$ を考える．図式

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{D^U}(FK, L) \arrow[r, "\alpha_{KL}"] & \mathrm{Hom}_{C^U}(K, GL) \\
\mathrm{Hom}_{D^U}(FK', L) \arrow[r, "\alpha_{K'L}"'] \arrow[u, "-\circ F\tau"] & \mathrm{Hom}_{C^U}(K', GL) \arrow[u, "-\circ\tau"']
\end{tikzcd}$$

が可換であることを示す．左の縦の射 $- \circ F\tau$ は $\theta \in \mathrm{Hom}_{D^U}(FK', L)$ に対して合成

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[rr, "L"] \arrow[dr, "K'"] \arrow[dr, bend right=60, "K"'] \arrow[dr, phantom, bend right=30, "\tau\Rrightarrow"] & \arrow[d, phantom, "\Uparrow\theta"] & D \\
& C \arrow[ur, "F"'] &
\end{tikzcd}$$

を与える射である．よって

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{D^U}(FK, L) \arrow[r, "\alpha_{KL}"] & \mathrm{Hom}_{C^U}(K, GL) \\
\mathrm{Hom}_{D^U}(FK', L) \arrow[u, "-\circ F\tau"] \arrow[r, "\alpha_{K'L}"'] & \mathrm{Hom}_{C^U}(K', GL) \arrow[u, "-\circ\tau"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\theta \circ F\tau \arrow[r, mapsto, "\alpha_{KL}"] & G(\theta \circ F\tau) \circ \eta_K \\
 & G\theta \circ \eta_{K'} \circ \tau \\
\theta \arrow[uu, mapsto, "-\circ F\tau"] \arrow[r, mapsto, "\alpha_{K'L}"'] & G\theta \circ \eta_{K'} \arrow[u, mapsto, "-\circ\tau"']
\end{tikzcd}$$

となるが, 自然変換の合成の性質により $G\theta\circ\eta_{K'}\circ\tau = G\theta\circ GF\tau\circ\eta_K = G(\theta\circ F\tau)\circ\eta_K$ であるから可換である．

よって $\alpha_{K,L}$ が同型であることを言えばよいが，それは逆射が次の β_{KL} によって与えられることから分かる．$\theta \in \mathrm{Hom}_{C^U}(K, GL)$ に対して次の図式の自然変換の合成を $\beta_{KL}(\theta)\colon FK \Rightarrow L$ とする．

$$\begin{tikzcd}
 & D \arrow[rr, "\mathrm{id}_D"] \arrow[dr, "G"] \arrow[d, phantom, "\theta\Uparrow"] & {} \arrow[d, phantom, "\varepsilon\Uparrow"] & D \\
U \arrow[ur, "L"] \arrow[rr, "K"'] & {} & C \arrow[ur, "F"'] &
\end{tikzcd}$$

β が α の逆になっていることは，unit η と counit ε の性質から分かる． □

命題 21. $F \dashv G\colon C \to D$ を随伴，U を圏とすると，随伴 $G^{-1} \dashv F^{-1}\colon U^C \to U^D$ が成り立つ．

証明. $F \dashv G$ の unit，counit を η, ε とする．$\theta \in \mathrm{Hom}(KG, L)$ に対して次の図式の自然変換の合成を $\alpha_{K,L}(\theta)\colon K \Rightarrow LF$ とする．

$$\begin{tikzcd}
 & D \arrow[rr, "L"] \arrow[dr, "G"] \arrow[d, phantom, "\eta\Uparrow"] & {} \arrow[d, phantom, "\theta\Uparrow"] & U \\
C \arrow[ur, "F"] \arrow[rr, "\mathrm{id}_C"'] & {} & C \arrow[ur, "K"'] &
\end{tikzcd}$$

この α が自然同型 $\mathrm{Hom}_{U^D}(KG, L) \cong \mathrm{Hom}_{U^C}(K, LF)$ を与えることが前命題と同様に分かる． □

系 22. $F \dashv G\colon C \to D$ のとき $F^{-1} \dashv G^{-1}\colon \widehat{D} \to \widehat{C}$ が成り立つ．

証明. $\widehat{C} = \mathbf{Set}^{C^{\mathrm{op}}}$ だったから，命題 21 と命題 13 を組み合わせればよい． □

定理 23. 左随伴関手は任意の余極限と交換する．即ち，$F \dashv G\colon C \to D$ を随伴関手，$T\colon J \to C$ を関手で $\operatorname{colim} T$ が存在するとするとき，F は $\operatorname{colim} T$ と交換する．

証明. $\langle c, \mu \rangle$ が $T\colon J \to C$ の余極限であるとする．即ち $\mu\colon T \Rightarrow \Delta c$ は普遍射である．$F\mu\colon FT \Rightarrow F\Delta c = \Delta(Fc)$ が FT から Δ への普遍射であることを示せばよい．$d \in D$ について自然に

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_D(Fc, d) &\cong \mathrm{Hom}_C(c, Gd) \\
&\cong \mathrm{Hom}_{C^J}(T, \Delta(Gd)) \\
&= \mathrm{Hom}_{C^J}(T, G\Delta(d)) \\
&\cong \mathrm{Hom}_{D^J}(FT, \Delta(d)) \quad (\text{命題 20 を参照})
\end{aligned}$$

となるから $\mathrm{Hom}_{D^J}(FT, \Delta -) \cong \mathrm{Hom}_D(Fc, -)$ は表現可能関手である．故に FT から Δ への普遍射は存在する．表現可能関手の性質 (「極限」の PDF を参照) からそれは同型 $\mathrm{Hom}_D(Fc, Fc) \cong \mathrm{Hom}_{D^J}(FT, \Delta(Fc))$ で id_{Fc} に対応する射 $FT \Rightarrow \Delta(Fc)$ である．それが $F\mu$ であることを示せばよい．随伴 $F \dashv G$ の unit，counit を η, ε とする．まず同型

$$\mathrm{Hom}_D(Fc, Fc) \cong \mathrm{Hom}_C(c, GFc) \cong \mathrm{Hom}_{C^J}(T, \Delta(GFc))$$

に対応するのは

$$\mathrm{id}_{Fc} \mapsto \eta_c \mapsto \Delta(\eta_c) \circ \mu =: \theta$$

である．命題 20 の証明より，θ に同型

$$\mathrm{Hom}_{C^J}(T, G\Delta(Fc)) \cong \mathrm{Hom}_{D^J}(FT, \Delta(Fc))$$

で対応するのは，合成

$$\begin{tikzcd}
 & D \arrow[rr, "\mathrm{id}_D"] \arrow[dr, "G"] \arrow[d, phantom, "\theta\Uparrow"] & & D \\
J \arrow[ur, "\Delta(Fc)"] \arrow[rr, "T"'] & {} & C \arrow[ur, "F"'] \arrow[u, phantom, "\varepsilon\Uparrow"] &
\end{tikzcd}$$

である．$j \in J$ に対して

$$\begin{aligned}
(\varepsilon_{\Delta(Fc))} \circ F\theta)_j &= \varepsilon_{Fc} \circ F\theta_j \\
&= \varepsilon_{Fc} \circ F(\Delta(\eta_c) \circ \mu)_j \\
&= \varepsilon_{Fc} \circ F\eta_c \circ F\mu_j \\
&= F\mu_j
\end{aligned}$$

だから $\varepsilon_{\Delta(Fc)} \circ F\theta = F\mu$ が分かる． □

双対的に，右随伴関手は極限と交換する．

例 24. J, C を圏として，任意の関手 $T\colon J \to C$ の余極限が存在するとする．この場合 $\operatorname{colim}\colon C^J \to C$ は関手となり，対角関手 $\Delta\colon C \to C^J$ の左随伴関手となるのであった．よって $\operatorname{colim}\colon C^J \to C$ は余極限と交換する．つまり，I を圏，$T\colon I \to C^J$ を関手として余極限 $\langle \operatorname{colim} T, \mu\rangle$ が存在するとすると $\langle \operatorname{colim}(\operatorname{colim} T), \operatorname{colim}(\mu)\rangle$ は $\operatorname{colim} \circ T$ の余極限である．T を関手 $I \times J \to C$ と同一視すれば $\operatorname{colim} T = \operatorname{colim}_i Ti = \operatorname{colim}_i T(i, -)$ であった．よって $\operatorname{colim}(\operatorname{colim} T)$ とは $\operatorname{colim}_j \operatorname{colim}_i T(i,j)$ を意味する．一方 $\operatorname{colim} \circ T$ の余極限とは $\operatorname{colim}_i \operatorname{colim}_j T(i,j)$ の意味である．即ち，$\operatorname{colim}\colon C^J \to C$ が余極限と交換するというのは極限の PDF で示した $\operatorname{colim}_i \operatorname{colim}_j T(i,j) \cong \operatorname{colim}_j \operatorname{colim}_i T(i,j)$ ということである． □

例 25. 例 7 の随伴 $F \dashv U\colon \mathbf{Set} \to \mathbf{Ab}$ を考える．定理 23 の双対より，U は極限と交換する．特に直積と交換し，$A, B \in \mathbf{Ab}$ に対して $U(A \times B) \cong U(A) \times U(B)$ である．即ち，A と B の (圏 $\mathbf{Ab}$ における) 直積は，集合 $U(A) \times U(B)$ にアーベル群の構造を入れたものになる． □

定理 26. $F \dashv G\colon C \to D$ を随伴，η を unit，ε を counit とする．充満部分圏 $\widetilde{C} \subset C$，$\widetilde{D} \subset D$ を

$$\mathrm{Ob}(\widetilde{C}) := \{c \in \mathrm{Ob}(C) \mid \eta_c\colon c \to GFc \text{ が同型 }\}$$

$$\mathrm{Ob}(\widetilde{D}) := \{d \in \mathrm{Ob}(D) \mid \varepsilon_d\colon FGd \to d \text{ が同型 }\}$$

と定める．このとき圏同値 $\widetilde{C} \to \widetilde{D}$ が得られる．

証明． まず $c \in \widetilde{C}$ に対して $Fc \in \widetilde{D}$ である．

∵) $c \in \widetilde{C}$ とすれば $\eta_c\colon c \to GFc$ は同型である．よって $F\eta_c\colon Fc \to FGFc$ も同型である．今 $F\eta \circ \varepsilon_F = \mathrm{id}_F$ だったから，$\mathrm{id}_{Fc} = F\eta_c \circ \varepsilon_{Fc}$ となり ε_{Fc} も同型である．よって $Fc \in \widetilde{D}$ が分かった．

よって F は関手 $\widetilde{F}\colon \widetilde{C} \to \widetilde{D}$ を定める．同様にして G から関手 $\widetilde{G}\colon \widetilde{D} \to \widetilde{C}$ が得られる．定義から明らかに $\widetilde{G} \circ \widetilde{F} \cong \mathrm{id}_{\widetilde{C}}$，$\widetilde{F} \circ \widetilde{G} \cong \mathrm{id}_{\widetilde{D}}$ である． □

命題 27. $F\colon C \to D$，$G\colon D \to C$，$\eta\colon \mathrm{id}_C \cong GF$，$\rho\colon FG \cong \mathrm{id}_D$ を圏同値とするとき，η を unit とするような随伴 $F \dashv G$ が存在する．[*3]

[*3] 故に随伴は圏同値の一般化と考えることができる．

証明. 自然変換 $\varepsilon\colon FG \Rightarrow \mathrm{id}_D$ を $\varepsilon := \rho \circ F\eta_G^{-1} \circ \rho_{FG}^{-1}$ により定める．

$$
\begin{tikzcd}
 & & D \arrow[dr, "G"] \arrow[drr, bend left, "\mathrm{id}_D"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\eta^{-1}"] & \arrow[d, phantom, "\Downarrow\rho^{-1}"] & \\
D \arrow[r, "G"] \arrow[rrrr, bend right=40, "\mathrm{id}_D"'] & C \arrow[ur, "F"] \arrow[rr, "\mathrm{id}_C"'] & \arrow[d, phantom, "\Downarrow\rho"] & C \arrow[r, "F"'] & D \\
 & & {} & &
\end{tikzcd}
$$

このとき $G\varepsilon \circ \eta_G = \mathrm{id}_G$ と $\varepsilon_F \circ F\eta = \mathrm{id}_F$ を示せばよい．まず $G\rho^{-1}\colon G \Longrightarrow GFG$ が自然変換だから，次の図式が可換である．

$$
\begin{tikzcd}
Gd \arrow[r, "G\rho_d^{-1}"] \arrow[d, "\eta_{Gd}"'] & GFGd \arrow[d, "GF\eta_{Gd}"] \\
GFGd \arrow[r, "G\rho_{FGd}^{-1}"'] & GFGFGd
\end{tikzcd}
$$

即ち $G\rho_{FGd}^{-1} \circ \eta_{Gd} = GF\eta_{Gd} \circ G\rho_d^{-1}$ となる．よって

$$
\begin{aligned}
(G\varepsilon \circ \eta_G)_d &= G\varepsilon_d \circ \eta_{Gd} \\
&= G(\rho_d \circ F\eta_{Gd}^{-1} \circ \rho_{FGd}^{-1}) \circ \eta_{Gd} \\
&= G\rho_d \circ GF\eta_{Gd}^{-1} \circ G\rho_{FGd}^{-1} \circ \eta_{Gd} \\
&= G\rho_d \circ GF\eta_{Gd}^{-1} \circ GF\eta_{Gd} \circ G\rho_d^{-1} \\
&= \mathrm{id}_G
\end{aligned}
$$

となるから $G\varepsilon \circ \eta_G = \mathrm{id}_G$ が成り立つ．

同様にして $\varepsilon_F \circ F\eta = \mathrm{id}_F$ も分かる． □

系 28. 関手 $F\colon C \to D$ が圏同値を与えるとき，F は極限・余極限と交換する． □

定義. C を直積を持つ圏とする．すると対象 $a \in C$ に対して $- \times a\colon C \to C$ は関手となる．このとき $- \times a$ から $b \in C$ への普遍射 $\langle b^a, \mathrm{ev}\rangle$ を exponential object という．

$$
\begin{tikzcd}
b^a & b^a \times a \arrow[r, "\mathrm{ev}"] & b \\
x \arrow[u, dashed, "g"] & x \times a \arrow[u, dashed, "g\times\mathrm{id}_a"] \arrow[ur, "f"'] &
\end{tikzcd}
$$

$\mathrm{ev}\colon b^a \times a \to b$ を evaluation map という．また b^a は $[a,b]$ などと書くこともある．

例 29. $C = \mathbf{Set}$ の場合，b^a は集合としての冪 $b^a = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(a, b)$ であり，$\mathrm{ev}\colon b^a \times a \to b$ は $\mathrm{ev}(f, x) = f(x)$ で与えられる． □

定理 4 により

命題 30. C を有限直積を持つ圏として，任意の $a, b \in C$ に対して b^a が存在するとする．このとき $C \ni b \mapsto b^a \in C$ は関手 $(-)^a\colon C \to C$ を定め，随伴 $- \times a \dashv (-)^a$ が成り立つ．よって $b, c \in C$ について自然に $\mathrm{Hom}_C(b \times a, c) \cong \mathrm{Hom}_C(b, c^a)$ となる． □

このような圏を Cartesian 閉圏という．

定義. Cartesian 閉圏 (Cartesian Closed Category, CCC) とは次の条件を満たす圏 C のことである．

(1) C は有限直積を持つ．
(2) 任意の $a \in C$ に対して $- \times a$ は右随伴を持つ．

※ C を Cartesian 閉圏，$a \in C$ として $- \times a$ の右随伴を G_a とする．定理 3 から，$- \times a$ から $b \in C$ への普遍射，つまり exponential object (b^a, ev) が存在することが分かる．すると命題 30 から $- \times a \dashv (-)^a$ である．故に右随伴の一意性 (定理 5 の双対) から $G_a \cong (-)^a$ となる．よって Cartesian 閉圏の定義の「$- \times a$ の右随伴」は最初から $(-)^a$ と思ってよい．

定理 23 とその双対から次が分かる．

命題 31. C を Cartesian 閉圏とすると，$a \in C$ に対して $- \times a$ は余極限と交換し，$(-)^a$ は極限と交換する．特に $b, c \in C$ に対して

$$(b \amalg c) \times a \cong (b \times a) \amalg (c \times a)$$

$$(b \times c)^a \cong b^a \times c^a$$

が成り立つ．また $0 \times c \cong 0$，$1^c \cong 1$ である． □

命題 32. Cartesian 閉圏 C において $(a^b)^c \cong a^{b \times c}$．

証明. $(a^b)^c$ が $- \times (b \times c)$ から a への普遍射を与えることを示せばよい (そうすれば普遍射の一意性から $(a^b)^c \cong a^{b \times c}$ が分かる)．その為には，自然同型

$$\mathrm{Hom}_C(- \times (b \times c), a) \cong \mathrm{Hom}_C(-, (a^b)^c)$$

を示せばよい．それは，$x \in C$ に対して自然に

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_C(x \times (b \times c), a) &\cong \mathrm{Hom}_C(x \times (c \times b), a) \\ &\cong \mathrm{Hom}_C((x \times c) \times b, a) \\ &\cong \mathrm{Hom}_C(x \times c, a^b) \\ &\cong \mathrm{Hom}_C(x, (a^b)^c)\end{aligned}$$

となるから成り立つ． □

命題 33. Cartesian 閉圏 C において $a^b \times a^c \cong a^{b \amalg c}$.

証明．前命題と同様で，$x \in C$ に対して自然に

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_C(x \times (b \amalg c), a) &\cong \mathrm{Hom}_C((x \times b) \amalg (x \times c), a) \\ &\cong \mathrm{Hom}_C(x \times b, a) \times \mathrm{Hom}_C(x \times c, a) \\ &\cong \mathrm{Hom}_C(x, a^b) \times \mathrm{Hom}_C(x, a^c) \\ &\cong \mathrm{Hom}_C(x, a^b \times a^c)\end{aligned}$$

となるから $a^b \times a^c \cong a^{b \amalg c}$ である． □

命題 34. Cartesian 閉圏 C において $a^0 \cong 1$，$a^1 \cong a$.

証明．$x \in C$ に対して自然に

$$\begin{aligned}&\mathrm{Hom}_C(x \times 0, a) \cong \mathrm{Hom}_C(0, a) \cong 1 \cong \mathrm{Hom}_C(x, 1) \\ &\mathrm{Hom}_C(x \times 1, a) \cong \mathrm{Hom}_C(x, a)\end{aligned}$$

である． □

以上により，Cartesian 閉圏においては，いわゆる「指数法則」が成り立つと言える．

さて，Cartesian 閉圏において成り立つ同型 $\mathrm{Hom}_C(b \times a, c) \cong \mathrm{Hom}_C(b, c^a)$ は $b, c \in C$ について自然であったが，この場合，一見 a も変数のように見える．実は一般に次の定理が成り立つ．

定理 35. $F\colon C \times X \to D$ を関手として，各 $x \in X$ に対して関手 $F(-, x)\colon C \to D$ は右随伴関手 $G_x\colon D \to C$ を持つとする．このとき，関手 $G\colon X^{\mathrm{op}} \times D \to C$ が一意に存在して次を満たす．

(1) $G(x, -) = G_x$ である．

(2) 随伴 $F(-,x) \dashv G(x,-)$ が与える，c,d について自然な同型

$$\varphi_{cxd}\colon \mathrm{Hom}_D(F(c,x),d) \to \mathrm{Hom}_C(c,G(x,d))$$

は x についても自然である．

証明. 随伴 $F(-,x) \dashv G_x\colon C \to D$ の counit を $\varepsilon^x\colon F(G_x-,x) \Rightarrow \mathrm{id}_D$ とする．$d \in D$ に対して $\varepsilon^x_d\colon F(G_x(d),x) \to d$ は普遍射である．

X の射 $k\colon u \to v$ に対して $G_k(d)\colon G_v(d) \to G_u(d)$ を ε^u_d の普遍性により次のように定める．

$$\begin{tikzcd}
G_u(d) & F(G_u(d),u) \arrow[rr, "\varepsilon^u_d"] & & d \\
G_v(d) \arrow[u, dashed, "G_k(d)"] & F(G_v(d),u) \arrow[u, dashed, "F(G_k(d){,}u)"'] \arrow[rr, "F(\mathrm{id}{,}k)"'] & & F(G_v(d),v) \arrow[u, "\varepsilon^v_d"']
\end{tikzcd}$$

このとき G を

- $x \in X$，$d \in D$ に対して $G(x,d) := G_x(d)$ とする．
- X の射 $k\colon u \to v$ と D の射 $f\colon a \to b$ に対して，C の射 $G(k,f)$ を合成

  $$G(v,a) \xrightarrow{G_v(f)} G(v,b) \xrightarrow{G_k(b)} G(u,b)$$

  で定義する．

と定めると，これは関手 $G\colon X^{\mathrm{op}} \times D \to C$ を与える．

$\because$) まず $G_k(d)$ の定義 (ε^x_d の普遍性) と次の図式より，$G_{\mathrm{id}}(f) = \mathrm{id}$ である．

$$\begin{tikzcd}
G_x(d) & F(G_x(d),x) \arrow[rr, "\varepsilon^x_d"] & & d \\
G_x(d) \arrow[u, "\mathrm{id}"] & F(G_x(d),x) \arrow[u, "F(\mathrm{id}{,}x)"'] \arrow[rr, "F(\mathrm{id}{,}\mathrm{id})=\mathrm{id}"'] & & F(G_x(d),x) \arrow[u, "\varepsilon^x_d"']
\end{tikzcd}$$

よって $G(\mathrm{id},\mathrm{id}) = G_x(\mathrm{id}) \circ G_{\mathrm{id}}(d) = \mathrm{id} \circ \mathrm{id} = \mathrm{id}$ となり恒等射についてはよい．

G が合成と交換することを示す．その為に $u \xrightarrow{k} v \xrightarrow{l} w$ を X の射，$a \xrightarrow{f} b \xrightarrow{g} c$ を D の射とする．$G(l \circ k, g \circ f) = G(k,g) \circ G(l,f)$ を示す．その為には次の図式が可

換であることを示せばよい．

$$
\begin{tikzcd}
G(w,a) \arrow[r, "G_w(f)"] \arrow[rr, bend left=50, "G(l,f)"] \arrow[dr, "G_w(g\circ f)"'] \arrow[ddrr, bend right=50, "G(l\circ k, g\circ f)"'] & G(w,b) \arrow[r, "G_l(b)"] \arrow[d, "G_w(g)"] \arrow[d, phantom, shift right=3em, "(G_w)"] & G(v,b) \arrow[d, "G_v(g)"] \arrow[dd, bend left=60, "G(k,g)"] \arrow[dl, phantom, "(**)"] \\
 & G(w,c) \arrow[r, "G_l(c)"] \arrow[dr, "G_{l\circ k}(c)"'] & G(v,c) \arrow[d, "G_k(c)"] \arrow[dl, phantom, "(*)"] \\
 & & G(u,c)
\end{tikzcd}
$$

(G) は G の定義より可換である．(G_w) は G_w が関手であるから可換である．$(*)$ は普遍性により，次の 2 つの可換図式から分かる．

$$
\begin{tikzcd}
G_u(c) & F(G_u(c),u) \arrow[r, "\varepsilon^u_c"] & c & \\
G_v(c) \arrow[u, "G_k(c)"] & F(G_v(c),u) \arrow[u, "F(G_k(c),u)"'] \arrow[r, "F(\mathrm{id},k)"'] & F(G_v(c),v) \arrow[u, "\varepsilon^v_c"'] & \\
G_w(c) \arrow[u, "G_l(c)"] & F(G_w(c),u) \arrow[u, "F(G_l(c),u)"'] \arrow[r, "F(\mathrm{id},k)"'] & F(G_w(c),v) \arrow[u, "F(G_l(c),v)"'] \arrow[r, "F(\mathrm{id},l)"'] & F(G_w(c),w) \arrow[uul, "\varepsilon^w_c"']
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
G_u(c) & F(G_u(c),u) \arrow[r, "\varepsilon^u_c"] & c \\
G_w(c) \arrow[u, "G_{l\circ k}(c)"] & F(G_w(c),u) \arrow[u, "F(G_{l\circ k}(c),u)"'] \arrow[r, "F(\mathrm{id},l\circ k)"'] & F(G_w(c),w) \arrow[u, "\varepsilon^w_c"']
\end{tikzcd}
$$

$(**)$ は再び普遍性により，次の 2 つの可換図式から分かる．(ε^x が自然変換であるこ

とに注意する．)

$$
\begin{tikzcd}
G_v(c) & F(G_v(c),v) \arrow[r, "\varepsilon_c^v"] & c \\
G_v(b) \arrow[u, "G_v(g)"] & F(G_v(b),v) \arrow[u, "F(G_v(g),v)"'] \arrow[r, "\varepsilon_b^v"'] & b \arrow[u, "g"'] \\
G_w(b) \arrow[u, "G_l(b)"] & F(G_w(b),v) \arrow[u, "F(G_l(b),v)"'] \arrow[r, "F(\mathrm{id},l)"'] & F(G_w(b),w) \arrow[u, "\varepsilon_b^w"']
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
G_v(c) & F(G_v(c),v) \arrow[r, "\varepsilon_c^v"] & c & \\
G_w(c) \arrow[u, "G_l(c)"] & F(G_w(c),v) \arrow[u, "F(G_l(c),u)"'] \arrow[r, "F(\mathrm{id},l)"'] & F(G_w(c),w) \arrow[u, "\varepsilon_c^w"'] & b \arrow[lu, "g"'] \\
G_w(b) \arrow[u, "G_w(g)"] & F(G_w(b),v) \arrow[u, "F(G_w(g),v)"'] \arrow[r, "F(\mathrm{id},l)"'] & F(G_w(b),w) \arrow[u, "F(G_w(g),w)"'] \arrow[ru, "\varepsilon_b^w"'] &
\end{tikzcd}
$$

このとき明らかに $G(x,-)=G_x$ である．

また同型 $\varphi_{cxd}\colon \mathrm{Hom}_D(F(c,x),d)\to \mathrm{Hom}_C(c,G(x,d))$ は x について自然である．

$\because$) φ_{cxd}^{-1} が x について自然であることを示せばよい．即ち $k\colon u\to v$ に対して次の図式が可換であることを示す．

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_C(c,G(u,d)) \arrow[r, "\varphi_{cud}^{-1}"] & \mathrm{Hom}_D(F(c,u),d) \\
\mathrm{Hom}_C(c,G(v,d)) \arrow[u, "G(k,d)\circ-"] \arrow[r, "\varphi_{cvd}^{-1}"'] & \mathrm{Hom}_D(F(c,v),d) \arrow[u, "-\circ F(c,k)"']
\end{tikzcd}
$$

φ_{cxd}^{-1} は合成

$$
\mathrm{Hom}_C(c,G(x,d)) \xrightarrow{F(-,x)} \mathrm{Hom}_D(F(c,x),F(G(x,d),x)) \xrightarrow{\varepsilon_d^x\circ-} \mathrm{Hom}_D(F(c,x),d)
$$

で与えられるのであった (定理 6)．よって $f\in \mathrm{Hom}_C(c,G(v,d))$ に対して左回りと

右回りを計算すると

$$\begin{aligned}\varphi_{cud}^{-1}(G(k,d)\circ f) &= \varepsilon_d^u\circ F(G(k,d)\circ f,u)\\ &= \varepsilon_d^u\circ F(G(k,d),u)\circ F(f,u)\\ \varphi_{cvd}^{-1}(f)\circ F(c,k) &= \varepsilon_d^v\circ F(f,v)\circ F(c,k)=\varepsilon_d^v\circ F(f,k)\\ &= \varepsilon_d^v\circ F(\mathrm{id},k)\circ F(f,u)\end{aligned}$$

となる．G の定義より次の図式が可換であるから，x についての自然性が分かった．

$$\begin{tikzcd} G(u,d) & F(G(u,d),u) \arrow[rr, "\varepsilon_d^u"] & & d \\ G(v,d) \arrow[u, dashed, "G(k,d)"] & F(G(v,d),u) \arrow[u, dashed, "F(G(k,d),u)"'] \arrow[r, "F(\mathrm{id},k)"'] & F(G(v,d),v) \arrow[ru, "\varepsilon_d^v"'] & \end{tikzcd}$$

以上により，条件を満たす G は存在することが分かった．

G の一意性を示すため, G が条件を満たすとする．一意性を示すには, X の射 $k\colon u\to v$ に対して

$$\begin{tikzcd} G(u,d) & F(G(u,d),u) \arrow[rr, "\varepsilon_d^u"] & & d \\ G(v,d) \arrow[u, dashed, "G(k,d)"] & F(G(v,d),u) \arrow[u, dashed, "F(G(k,d),u)"'] \arrow[r, "F(\mathrm{id},k)"'] & F(G(v,d),v) \arrow[ru, "\varepsilon_d^v"'] & \end{tikzcd}$$

が可換であることを示せばよい (示せれば，普遍性から $G_k(d)=G(k,d)$ となり G の一意性が分かる)．今 φ_{cxd}^{-1} が x について自然だから，次の図式が可換である．

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_C(G(v,d),G(u,d)) \arrow[r, "\varphi^{-1}"] & \mathrm{Hom}_D(F(G(v,d),u),d) \\ \mathrm{Hom}_C(G(v,d),G(v,d)) \arrow[u, "G(k,d)\circ -"] \arrow[r, "\varphi^{-1}"'] & \mathrm{Hom}_D(F(G(v,d),v),d) \arrow[u, "-\circ F(G(v,d),k)"'] \end{tikzcd}$$

よって $\mathrm{id}\in\mathrm{Hom}_C(G(v,d),G(v,d))$ の行き先を考えれば

$$\begin{aligned}\varphi^{-1}(G(k,d)) &= \varepsilon_d^u\circ F(G(k,d),u)\\ \varphi^{-1}(\mathrm{id})\circ F(c,k) &= \varepsilon_d^v\circ F(\mathrm{id},v)\circ F(c,k)\\ &= \varepsilon_d^v\circ F(\mathrm{id},k)\end{aligned}$$

より $\varepsilon_d^u\circ F(G(k,d),u)=\varepsilon_d^v\circ F(\mathrm{id},k)$ が分かり，示したかった可換性を得る． $\square$

c,x,d についての自然性から次の系が分かる．

系 36. 定理 35 の状況で，C の射 $p\colon c \to c'$，D の射 $q\colon d' \to d$，$f\colon F(c,x) \to d$，$g\colon F(c',x') \to d'$，X の射 $k\colon x \to x'$ に対して，次の左の図式が可換ならば右の図式も可換であり，右の図式が可換ならば左の図式も可換である

$$\begin{tikzcd} F(c,x) \arrow[r, "f"] \arrow[d, "F(p,k)"'] & d \\ F(c',x') \arrow[r, "g"'] & d' \arrow[u, "q"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} c \arrow[r, "\widetilde{f}"] \arrow[d, "p"'] & G(x,d) \\ c' \arrow[r, "\widetilde{g}"'] & G(x',d') \arrow[u, "G(k,q)"'] \end{tikzcd}$$

□

例 37. Cartesian 閉圏では，$\langle a,b\rangle \mapsto b^a$ は関手 $C^{\mathrm{op}} \times C \to C$ を与える．更に同型 $\mathrm{Hom}_C(b \times a, c) \cong \mathrm{Hom}_C(b, c^a)$ は a,b,c について自然である． □

例 38. **Ab** は Cartesian 閉圏ではない．

$\because$) Cartesian 閉圏であると仮定すると $A,B,C \in \mathbf{Ab}$ について自然な同型

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Ab}}(B \times A, C) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ab}}(B, C^A)$$

が成り立つような C^A が存在するが，ここで $B = 0$ と取ると

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Ab}}(A,C) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ab}}(0 \times A, C) \cong \mathrm{Hom}_C(0, C^A) = \{0\}$$

となって矛盾する．

しかし，**Ab** のような圏であれば Cartesian 閉圏のような「良い」圏であって欲しいであろう．ところで **Ab** の場合，C^A となりそうな対象を定義することができる．つまり集合としては $C^A := \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ab}}(A,C)$ として，演算を各点ごとに入れる (即ち $(f+g)(x) := f(x)+g(x)$ とする)．この $\langle A,C\rangle \mapsto C^A$ は関手 $\mathbf{Ab}^{\mathrm{op}} \times \mathbf{Ab} \to \mathbf{Ab}$ を与えることが分かる．そこで関手 $(-)^A\colon \mathbf{Ab} \to \mathbf{Ab}$ の左随伴 (これは存在することが分かる) を $- \otimes A$ と書き，$B \otimes A$ を B と A のテンソル積と呼ぶ．定理 35 と同様，これは関手 $\otimes\colon \mathbf{Ab} \times \mathbf{Ab} \to \mathbf{Ab}$ を与え，$A,B,C \in \mathbf{Ab}$ について自然な同型 $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Ab}}(B \otimes A, C) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ab}}(B, C^A)$ が成り立つ．この $\langle \mathbf{Ab}, \otimes\rangle$ はモノイダル閉圏という，Cartesian 閉圏を一般化したものになっている (モノイダル閉圏については「豊穣圏」の PDF を参照．)． □

以下，随伴の例を挙げる．

例 39. **Set** を集合の圏，k を体，$\mathbf{Vect}_k$ を k-線型空間の圏，$U\colon \mathbf{Vect}_k \to \mathbf{Set}$ を忘却関手とする．$F\colon \mathbf{Set} \to \mathbf{Vect}_k$ を集合 X に対して X で生成される k 上の線型空間を与える関手とすれば $F \dashv U$ である． □

例 40. **Grp** を群の圏，$U\colon \mathbf{Ab} \to \mathbf{Grp}$ を忘却関手とする．$F\colon \mathbf{Grp} \to \mathbf{Ab}$ を集合 X に対して X で生成される自由群を与える関手とすれば $F \dashv U$ である． □

例 41. **Grp** を群の圏とする．$\mathbf{Ab} \subset \mathbf{Grp}$ は充満部分圏である．この包含関手を $U\colon \mathbf{Ab} \to \mathbf{Grp}$ として，$F\colon \mathbf{Grp} \to \mathbf{Ab}$ をアーベル化 $FG := G/[G,G]$ とすれば $F \dashv U$ である． □

例 42. R を可換環，R-**Mod** を R 加群の圏とする．$U\colon R\text{-}\mathbf{Mod} \to \mathbf{Ab}$ を忘却関手とする．$F, G\colon \mathbf{Ab} \to R\text{-}\mathbf{Mod}$ を $F(A) := R \otimes_{\mathbb{Z}} A$，$G(A) := \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, A)$ とすれば $F \dashv U \dashv G$ である． □

例 43. **Top** を位相空間の圏，$U\colon \mathbf{Top} \to \mathbf{Set}$ を忘却関手とする．$F\colon \mathbf{Set} \to \mathbf{Top}$ を集合 X に対して離散位相空間 X を与える関手，$G\colon \mathbf{Set} \to \mathbf{Top}$ を集合 X に対して密着位相空間 X を与える関手とすれば $F \dashv U \dashv G$ である． □

例 44. **Monoid** をモノイドの圏，**Ring** を環の圏とする．$U\colon \mathbf{Ring} \to \mathbf{Monoid}$ を忘却関手 (環に対して乗法モノイドを与える関手) とする．$F\colon \mathbf{Monoid} \to \mathbf{Ring}$ を $M \in \mathbf{Monoid}$ に対して $\mathbb{Z}[M]$ を与える関手とすれば $F \dashv U$ である． □

例 45. $\mathbf{Ring}_*$ を基点付き環の圏とする．即ち対象は環 A と $a \in A$ の組 $\langle A, a\rangle$ で，射 $\langle A, a\rangle \to \langle B, b\rangle$ は環準同型 $f\colon A \to B$ で $f(a) = b$ を満たすもの，とする．$U\colon \mathbf{Ring}_* \to \mathbf{Ring}$ を忘却関手とする．$F\colon \mathbf{Ring} \to \mathbf{Ring}_*$ を環 R に対して多項式環 $R[x]$ を与える関手とすれば $F \dashv U$ である． □

例 46. **Dom** を整域の圏，**Field** を体の圏とする．$U\colon \mathbf{Field} \to \mathbf{Dom}$ を忘却関手，$\mathrm{Quot}\colon \mathbf{Dom} \to \mathbf{Field}$ を整域 D に対して商体 $\mathrm{Quot}(D)$ を与える関手とすれば $\mathrm{Quot} \dashv U$ である． □

例 47. **LocRing** を局所環の圏，**Hensel** を Hensel 環の圏とする．$U\colon \mathbf{Hensel} \to \mathbf{LocRing}$ を忘却関手，$F\colon \mathbf{LocRing} \to \mathbf{Hensel}$ を Hensel 化とすれば $F \dashv U$ である． □

例 48. **Latt** を束の圏とする．$U\colon \mathbf{Latt} \to \mathbf{Set}$ を忘却関手とする．$F\colon \mathbf{Set} \to \mathbf{Latt}$ を $X \in \mathbf{Set}$ に対して X で生成される自由束を与える関手とすれば $F \dashv U$ である． □

例 49. **CptHaus** をコンパクト Hausdorff 空間の圏，$U\colon \mathbf{CptHaus} \to \mathbf{Top}$ を忘却関手とする．U の左随伴関手 $SC\colon \mathbf{Top} \to \mathbf{CptHaus}$ が Stone-Čech コンパクト化である． □

例 50. X を位相空間，$\mathbf{PSh}(X)$ を X 上の前層の圏，$\mathbf{Sh}(X)$ を X 上の層の圏とする．$U\colon \mathbf{Sh}(X) \to \mathbf{PSh}(X)$ を忘却関手とする．$F\colon \mathbf{PSh}(X) \to \mathbf{Sh}(X)$ を層化とすれば $F \dashv U$ である． □

例 51. $\mathbf{Ban}_1$ を Banach 空間と linear contraction がなす圏とする．$B\colon \mathbf{Ban}_1 \to \mathbf{Set}$ を単位球体を与える関手とする．B は左随伴関手を持つ． □

例 52. 圏 **Idem** を次のように定める．$\mathrm{Ob}(\mathbf{Idem}) := \{\langle X, v\rangle \mid X$ は集合，$v\colon X \to X$ は冪等 $\}$ として $\langle X, v\rangle$，$\langle Y, w\rangle$ の間の射は $f\colon X \to Y$ で $w \circ f = f \circ v$ を満たすものとする．$F\colon \mathbf{Idem} \to \mathbf{Set}$ を $F(\langle X, v\rangle) := X$，$G\colon \mathbf{Set} \to \mathbf{Idem}$ を $G(X) := \langle X, \mathrm{id}_X\rangle$ で定めれば $F \dashv G$ かつ $G \dashv F$ である． □

参考文献

[1] Saunders Mac Lane, Categories for the Working Mathematician, Springer, 2nd ed. 1978 版 (1998)