

3-category

alg-d

http://alg-d.com/math/kan_extension/

2018年8月29日

次元がもう一つ上がり, 2-morphism の間の射も存在するのが 3-category である. 即ち
定義. (Cat-Cat)-豊穡圏を strict 3-category という.

3-category の場合も weak バージョンがあり, それを tricategory という. 定義の前に一つ注意をしておく. \mathcal{B}, \mathcal{C} を bicategory, $F, G: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$ を pseudofunctor とすると $\text{Fun}_{\text{ps}}(\mathcal{B}, \mathcal{C})$ は bicategory である. よって $F, G \in \text{Fun}_{\text{ps}}(\mathcal{B}, \mathcal{C})$ の間の adjoint equivalence $\sigma \dashv \sigma^*: F \Rightarrow G$ を考えることができる. 以下ではこのように, adjoint equivalence に対してその右随伴を $*$ を付けて表す.

定義. tricategory \mathcal{T} とは, 以下を満たすことをいう.

- (1) 集まり $\text{Ob}(\mathcal{T})$ が与えられている. $\text{Ob}(\mathcal{T})$ の元を対象 (もしくは 0-cell) と呼ぶ.
- (2) 各対象 $a, b \in \mathcal{T}$ に対して bicategory $\mathcal{T}(a, b)$ が与えられている. ($\mathcal{T}(a, b)$ を a と b の hom-bicategory と呼ぶ.)
- (3) 各対象 $a, b, c \in \mathcal{T}$ に対して pseudofunctor $C^{abc}: \mathcal{T}(b, c) \times \mathcal{T}(a, b) \rightarrow \mathcal{T}(a, c)$ が与えられている.
- (4) 各対象 $a \in \mathcal{T}$ に対して pseudofunctor $I^a: \mathbf{1} \rightarrow \mathcal{T}(a, a)$ が与えられている.
- (5) 各対象 $a, b, c, d \in \mathcal{T}$ に対して次の adjoint equivalence α^{abcd} が与えられている.

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{T}(c, d) \times \mathcal{T}(b, c) \times \mathcal{T}(a, b) & \\ & \swarrow C^{bcd} \times \text{id} & \searrow \text{id} \times C^{abc} \\ \mathcal{T}(b, d) \times \mathcal{T}(a, b) & \xRightarrow{\alpha^{abcd}} & \mathcal{T}(c, d) \times \mathcal{T}(a, c) \\ & \swarrow C^{abd} & \searrow C^{abd} \\ & \mathcal{T}(a, d) & \end{array}$$

(6) 各対象 $a, b \in \mathcal{T}$ に対して次の adjoint equivalence λ^{ab}, ρ^{ab} が与えられている.

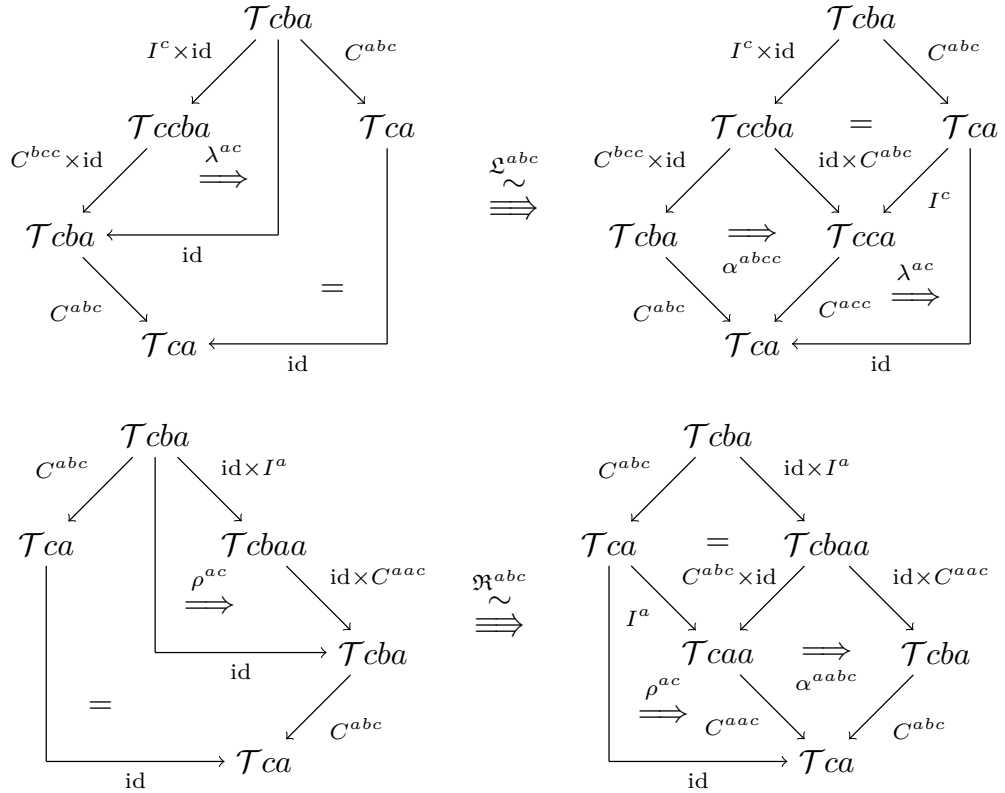
$$\begin{array}{ccc}
 \mathbf{1} \times \mathcal{T}(a, b) & \xrightarrow{\cong} & \mathcal{T}(a, b) \\
 \downarrow I^b \times \text{id} & \nearrow \lambda^{ab} \Uparrow & \uparrow C^{abb} \\
 \mathcal{T}(b, b) \times \mathcal{T}(a, b) & &
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{ccc}
 \mathcal{T}(a, b) \times \mathbf{1} & \xrightarrow{\cong} & \mathcal{T}(a, b) \\
 \downarrow \text{id} \times I^a & \nearrow \rho^{ab} \Uparrow & \uparrow C^{aab} \\
 \mathcal{T}(a, b) \times \mathcal{T}(a, a) & &
 \end{array}$$

(7) 各対象 $a, b, c, d, e \in \mathcal{T}$ に対して, 次の同型な modification \mathfrak{A}^{abcde} が与えられている. (ここで $\mathcal{T}cba := \mathcal{T}(b, c) \otimes \mathcal{T}(a, b)$ などの略記を行った)

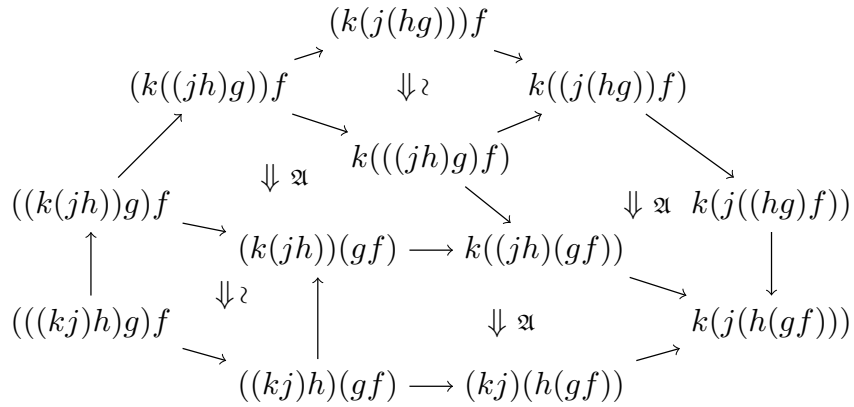
$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{ccccc}
 & & \mathcal{T}edcba & & \\
 & \swarrow C^{cde} \times \text{id} \times \text{id} & | & \searrow \text{id} \times \text{id} \times C^{abc} & \\
 \mathcal{T}ecba & & \text{id} \times C^{bcd} \times \text{id} & & \mathcal{T}edca \\
 | & \swarrow \alpha^{bcde} \times \text{id} & \downarrow & \searrow \text{id} \times \alpha^{abcd} & | \\
 C^{bce} \times \text{id} & & \mathcal{T}edba & & \text{id} \times C^{acd} \\
 \downarrow & \swarrow C^{bde} \times \text{id} & | & \searrow \text{id} \times C^{abd} & \downarrow \\
 \mathcal{T}eba & & \alpha^{abde} & & \mathcal{T}eda \\
 \swarrow C^{abe} & & \Downarrow & & \swarrow C^{ade} \\
 & & \mathcal{T}ea & &
 \end{array}
 & \xrightarrow{\mathfrak{A}^{abcde}} &
 \begin{array}{ccccc}
 & & \mathcal{T}edcba & & \\
 & \swarrow C^{cde} \times \text{id} \times \text{id} & | & \searrow \text{id} \times \text{id} \times C^{abc} & \\
 \mathcal{T}ecba & & \text{id} \times C^{abc} = C^{cde} \times \text{id} & & \mathcal{T}edca \\
 | & \swarrow \alpha^{abce} & \downarrow & \searrow \alpha^{acde} & | \\
 C^{bce} \times \text{id} & & \mathcal{T}ace & & \text{id} \times C^{acd} \\
 \downarrow & \swarrow \alpha^{abce} & | & \searrow \alpha^{acde} & \downarrow \\
 \mathcal{T}eba & & C^{ace} & & \mathcal{T}eda \\
 \swarrow C^{abe} & & \Downarrow & & \swarrow C^{ade} \\
 & & \mathcal{T}ea & &
 \end{array}
 \end{array}$$

(8) 各対象 $a, b, c \in \mathcal{T}$ に対して, 次の同型な modification $\mathfrak{B}^{abc}, \mathfrak{L}^{abc}, \mathfrak{R}^{abc}$ が与えられている.

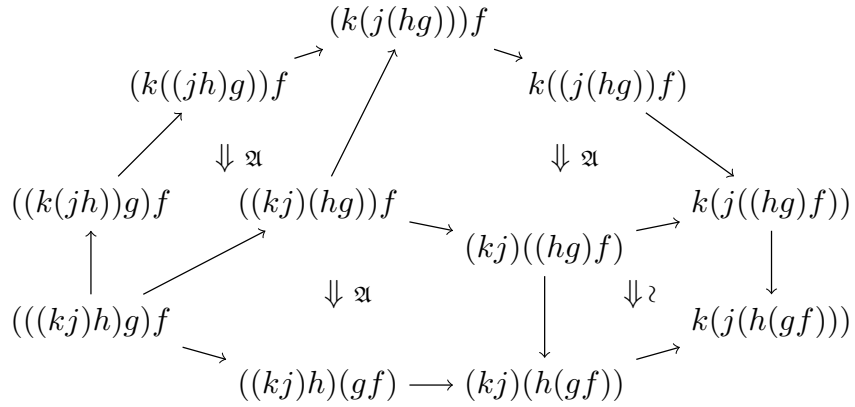
$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{ccccc}
 & & \mathcal{T}cba & & \\
 & \swarrow \text{id} & | & \searrow \text{id} & \\
 & \downarrow (\rho^{bc})^* \times \text{id} & \downarrow \text{id} \times I^b \times \text{id} & \downarrow \text{id} \times \lambda^{ab} & \\
 & \swarrow \Rightarrow & \mathcal{T}cbba & \searrow \Rightarrow & \\
 \mathcal{T}cba & & C^{bbc} \times \text{id} & \text{id} \times C^{abb} & \mathcal{T}cba \\
 \swarrow C^{abc} & & \alpha^{abbc} & & \swarrow C^{abc} \\
 & & \mathcal{T}ca & &
 \end{array}
 & \xrightarrow{\mathfrak{B}^{abc}} &
 \begin{array}{ccc}
 & \mathcal{T}cba & \\
 \swarrow \text{id} & | & \searrow \text{id} \\
 \mathcal{T}cba & = & \mathcal{T}cba \\
 \swarrow C^{abc} & & \swarrow C^{abc} \\
 & \mathcal{T}ca &
 \end{array}
 \end{array}$$



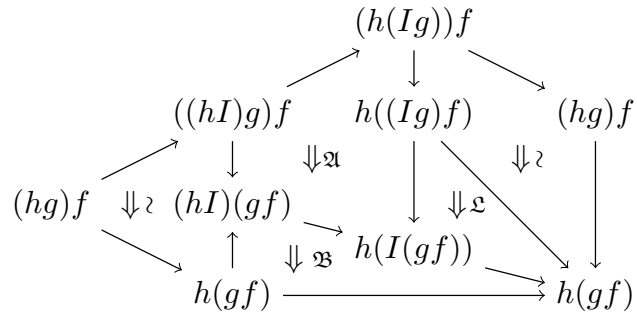
(9) 任意の $a \xrightarrow{f} b \xrightarrow{g} c \xrightarrow{h} d \xrightarrow{j} e \xrightarrow{k} x$ に対して次の等式が成り立つ.



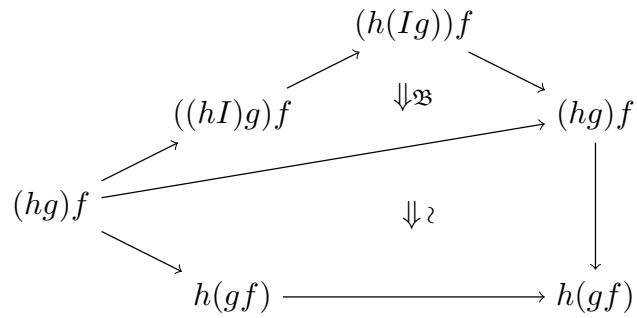
||

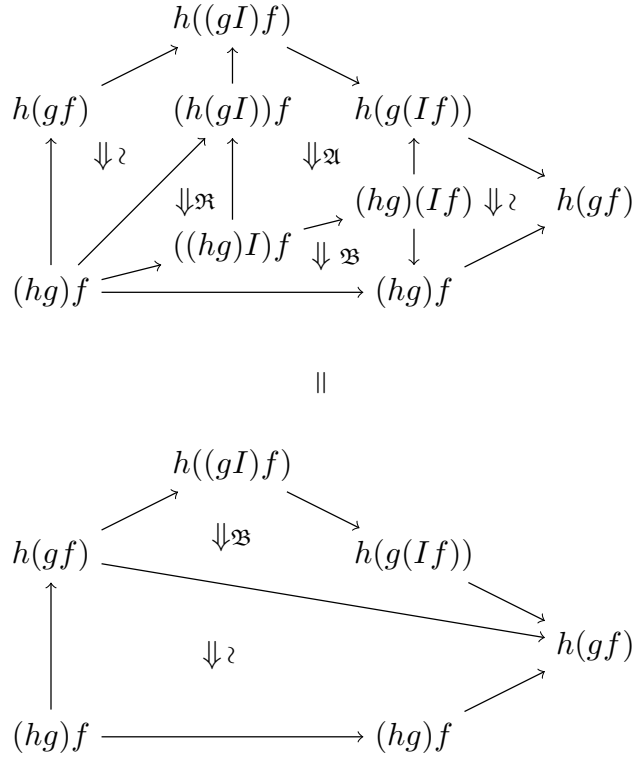


(10) 任意の $a \xrightarrow{f} b \xrightarrow{g} c \xrightarrow{h} c$ に対して次の等式が成り立つ.



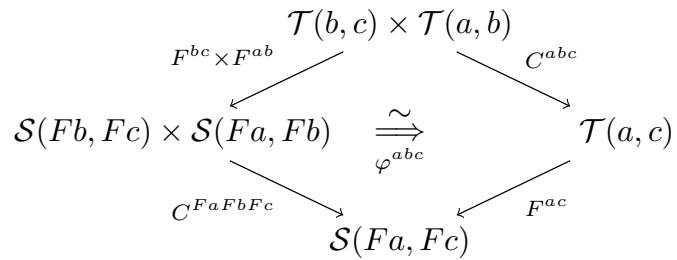
||





定義. \mathcal{T}, \mathcal{S} を tricategory とする. trihomomorphism $F: \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{S}$ とは以下を満たすことである.

- (1) 関数 $F: \text{Ob}(\mathcal{T}) \rightarrow \text{Ob}(\mathcal{S})$ が与えられている.
- (2) 各対象 $a, b \in \mathcal{T}$ に対して pseudofunctor $F^{ab}: \mathcal{T}(a, b) \rightarrow \mathcal{S}(Fa, Fb)$ が与えられている.
- (3) 各対象 $a, b, c \in \mathcal{T}$ に対して次の adjoint equivalence φ^{abc} が与えられている.



(4) 各対象 $a \in \mathcal{T}$ に対して次の adjoint equivalence ψ^a が与えられている.

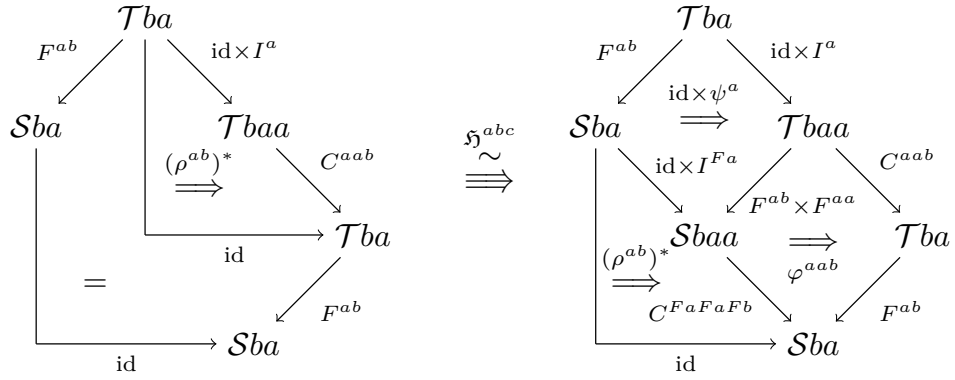
$$\begin{array}{ccc}
 \mathbf{1} & \xrightarrow{I^{Fa}} & \mathcal{S}(Fa, Fa) \\
 & \searrow I^a & \swarrow F^{aa} \\
 & & \mathcal{T}(a, a)
 \end{array}
 \quad \begin{array}{c}
 \Downarrow \psi^a \\
 \Downarrow
 \end{array}$$

(5) 各対象 $a, b, c, d \in \mathcal{T}$ に対して次の同型な modification \mathfrak{F}^{abcd} が与えられている.

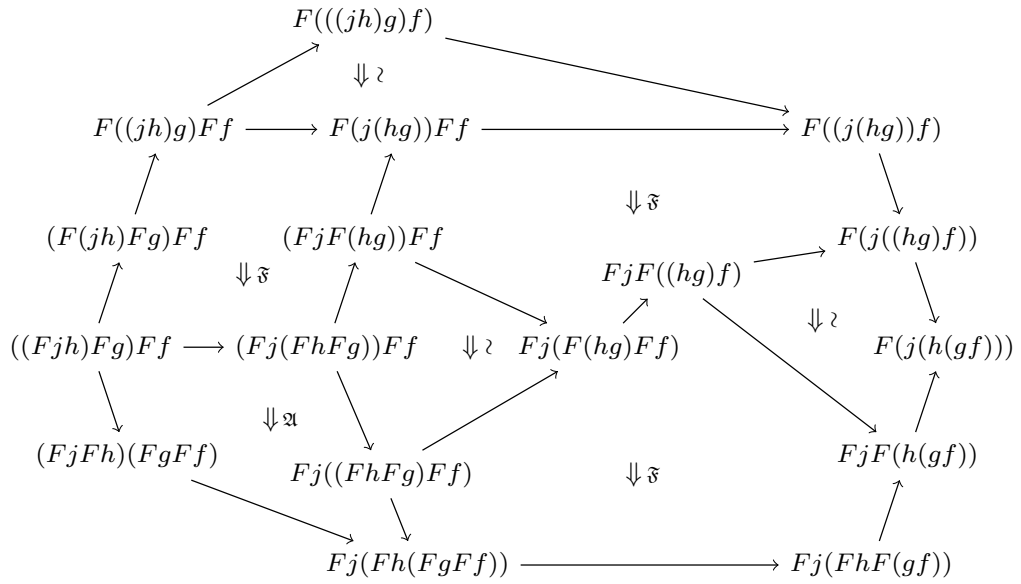
$$\begin{array}{ccccc}
 & & \mathcal{T}dcb a & \xrightarrow{F^{cd} \times F^{bc} \times F^{ab}} & \mathcal{S}dcb a \\
 & \swarrow \text{id} \times C^{abc} & & \searrow C^{bcd} \times \text{id} & \swarrow C^{FbFcFd} \times \text{id} \\
 \mathcal{T}dca & & & & \mathcal{T}dba & \xrightarrow{\varphi^{bcd} \times \text{id}} & \mathcal{S}dba \\
 & \searrow C^{acd} & \swarrow \alpha^{abcd} & & \swarrow F^{bd} \times F^{ab} & & \\
 & & \mathcal{T}da & \xrightarrow{C^{abd}} & \mathcal{S}da & \xrightarrow{C^{FaFbFd}} & \\
 & & & \searrow F^{ad} & & & \\
 & & & & & & \\
 \mathfrak{F}^{abcd} & & \mathcal{T}dcb a & \xrightarrow{F^{cd} \times F^{bc} \times F^{ab}} & \mathcal{S}dcb a & & \\
 \sim & \swarrow \text{id} \times C^{abc} & & \searrow \text{id} \times \varphi^{abc} & \swarrow \text{id} \times C^{bcd} & \searrow C^{FbFcFd} \times \text{id} & \\
 \cong & & \mathcal{T}dca & \xrightarrow{F^{cd} \times F^{ac}} & \mathcal{S}dca & \xrightarrow{\alpha^{FaFbFcFd}} & \mathcal{S}dba \\
 & \searrow C^{acd} & \swarrow \varphi^{acd} & & \swarrow C^{FaFcFd} & \searrow C^{FaFbFd} & \\
 & & \mathcal{T}da & \xrightarrow{F^{ad}} & \mathcal{S}da & &
 \end{array}$$

(6) 各対象 $a, b \in \mathcal{T}$ に対して次の同型な modification $\mathfrak{G}^{ab}, \mathfrak{H}^{ab}$ が与えられている.

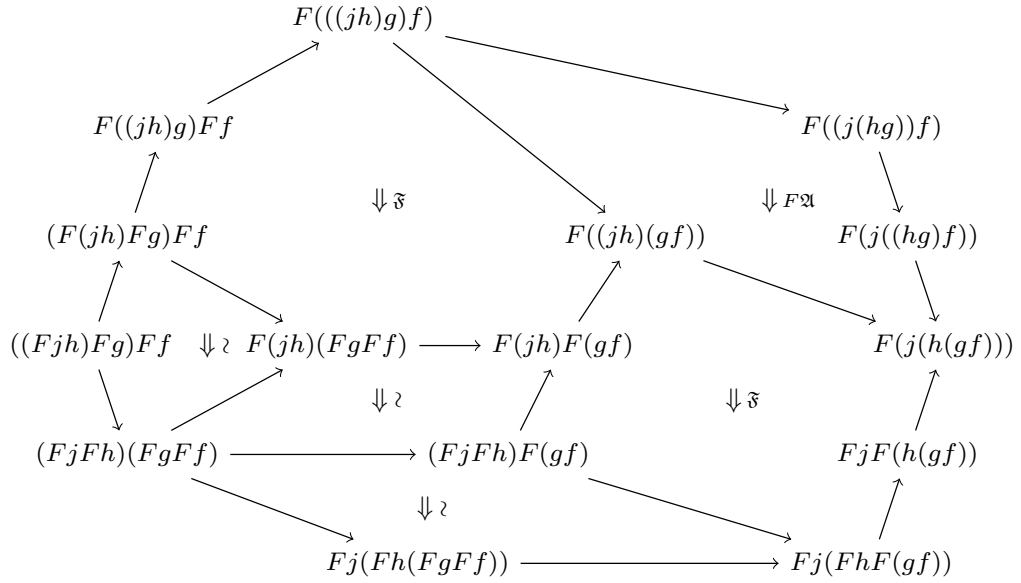
$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{ccc}
 \mathcal{T}ba & \xrightarrow{I^b \times \text{id}} & \mathcal{T}bba \\
 \swarrow F^{ab} & \searrow \psi^b \times \text{id} & \swarrow C^{abb} \\
 \mathcal{S}ba & & \mathcal{T}ba \\
 \swarrow I^{Fb} \times \text{id} & \searrow F^{bb} \times F^{ab} & \swarrow F^{ab} \\
 \mathcal{S}bba & & \mathcal{S}ba \\
 \swarrow C^{FaFbFb} & \searrow \varphi^{abb} & \\
 \mathcal{S}ba & &
 \end{array}
 & \xrightarrow{\mathfrak{G}^{ab}} &
 \begin{array}{ccc}
 \mathcal{T}ba & \xrightarrow{\text{id}} & \mathcal{T}ba \\
 \swarrow F^{ab} & \searrow \text{id} & \swarrow \text{id} \\
 \mathcal{S}ba & & \mathcal{T}ba \\
 \swarrow I^{Fb} \times \text{id} & \searrow \lambda^{ac} & \swarrow \text{id} \\
 \mathcal{S}bba & & \mathcal{S}ba \\
 \swarrow C^{FaFbFb} & \searrow \text{id} & \swarrow F^{ab} \\
 \mathcal{S}ba & &
 \end{array}
 \end{array}$$



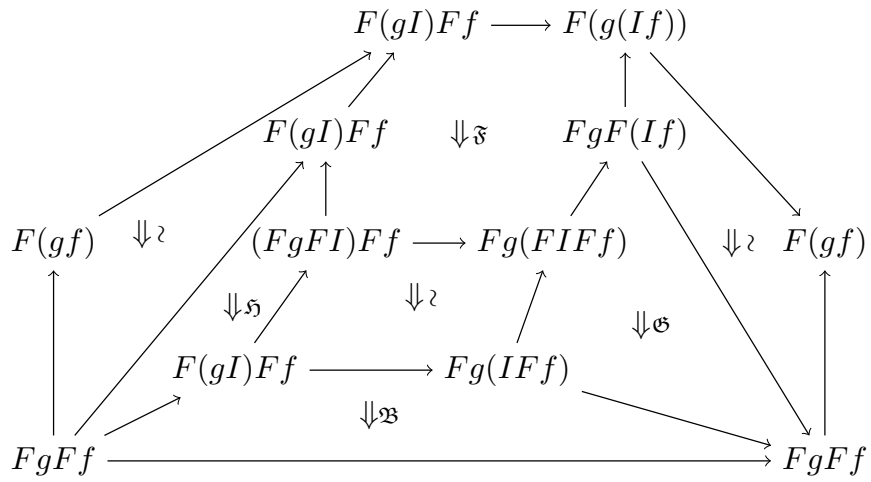
(7) 任意の $a \xrightarrow{f} b \xrightarrow{g} c \xrightarrow{h} d \xrightarrow{j} e$ に対して次の等式が成り立つ.



||



(8) 任意の $a \xrightarrow{f} b \xrightarrow{g} c$ に対して次の等式が成り立つ.



||

$$\begin{array}{ccc}
 & F(gI)Ff \longrightarrow F(g(If)) & \\
 & \searrow & \swarrow \\
 F(gf) & \xrightarrow{\quad} & F(gf) \\
 \uparrow & & \uparrow \\
 FgFf & \xrightarrow{\quad} & FgFf
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \Downarrow F\mathfrak{B} \\
 \Downarrow \wr
 \end{array}$$

定義. strict 2-category \mathcal{A}, \mathcal{B} の Gray テンソル積 $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ とは (略)

定義. 圏 **Cat-Cat** は Gray テンソル積により対称モノイダル閉圏となる. これを **Gray** と書く.

定義. **Gray-豊穡圏**を Gray-category という.

定義. trihomomorphism $F: \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{S}$ が triequivalence

$\iff F$ が triessentially surjective かつ, 任意の $a, b \in \mathcal{T}$ に対して F^{ab} が biequivalence.

定理 1. 任意の tricategory はある Gray-category と triequivalence である.

証明. 略

□

参考文献

- [1] Nick Gurski, An algebraic theory of tricategories, 2007, <http://gauss.math.yale.edu/~mg622/pubs.html>