

# 3-category

alg-d

[http://alg-d.com/math/kan\\_extension/](http://alg-d.com/math/kan_extension/)

2017年7月31日

次元がもう一つ上がり, 2-morphism の間の射も存在するのが 3-category である. 即ち  
定義. (Cat-Cat)-豊穡圏を strict 3-category という.

3-category の場合も weak バージョンがあり, それを tricategory という. 定義の前に一つ注意をしておく.  $\mathcal{B}, \mathcal{C}$  を bicategory,  $F, G: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$  を pseudofunctor とすると  $\text{Fun}_{\text{ps}}(\mathcal{B}, \mathcal{C})$  は bicategory である. よって  $F, G \in \text{Fun}_{\text{ps}}(\mathcal{B}, \mathcal{C})$  の間の adjoint equivalence  $\sigma \dashv \sigma^*: F \rightleftarrows G$  を考えることができる. 以下ではこのように adjoint equivalence に対してその右随伴を  $*$  を付けて表す.

定義. tricategory  $\mathcal{T}$  とは, 以下を満たすことをいう.

- (1) 集まり  $\text{Ob}(\mathcal{T})$  が与えられている.  $\text{Ob}(\mathcal{T})$  の元を対象 (もしくは 0-cell) と呼ぶ.
- (2) 各対象  $a, b \in \mathcal{T}$  に対して bicategory  $\mathcal{T}(a, b)$  が与えられている. ( $\mathcal{T}(a, b)$  を  $a$  と  $b$  の hom-bicategory と呼ぶ.)
- (3) 各対象  $a, b, c \in \mathcal{T}$  に対して pseudofunctor  $C^{abc}: \mathcal{T}(b, c) \times \mathcal{T}(a, b) \rightarrow \mathcal{T}(a, c)$  が与えられている.
- (4) 各対象  $a \in \mathcal{T}$  に対して pseudofunctor  $I^a: \mathbf{1} \rightarrow \mathcal{T}(a, a)$  が与えられている.
- (5) 各対象  $a, b, c, d \in \mathcal{T}$  に対して次の adjoint equivalence  $\alpha^{abcd}$  が与えられている.

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{T}(c, d) \times \mathcal{T}(b, c) \times \mathcal{T}(a, b) & \\ & \swarrow C^{bcd} \times \text{id} & \searrow \text{id} \times C^{abc} \\ \mathcal{T}(b, d) \times \mathcal{T}(a, b) & \xrightleftharpoons{\alpha^{abcd}} & \mathcal{T}(c, d) \times \mathcal{T}(a, c) \\ & \swarrow C^{abd} & \searrow C^{abd} \\ & \mathcal{T}(a, d) & \end{array}$$

(6) 各対象  $a, b \in \mathcal{T}$  に対して次の adjoint equivalence  $\lambda^{ab}, \rho^{ab}$  が与えられている .

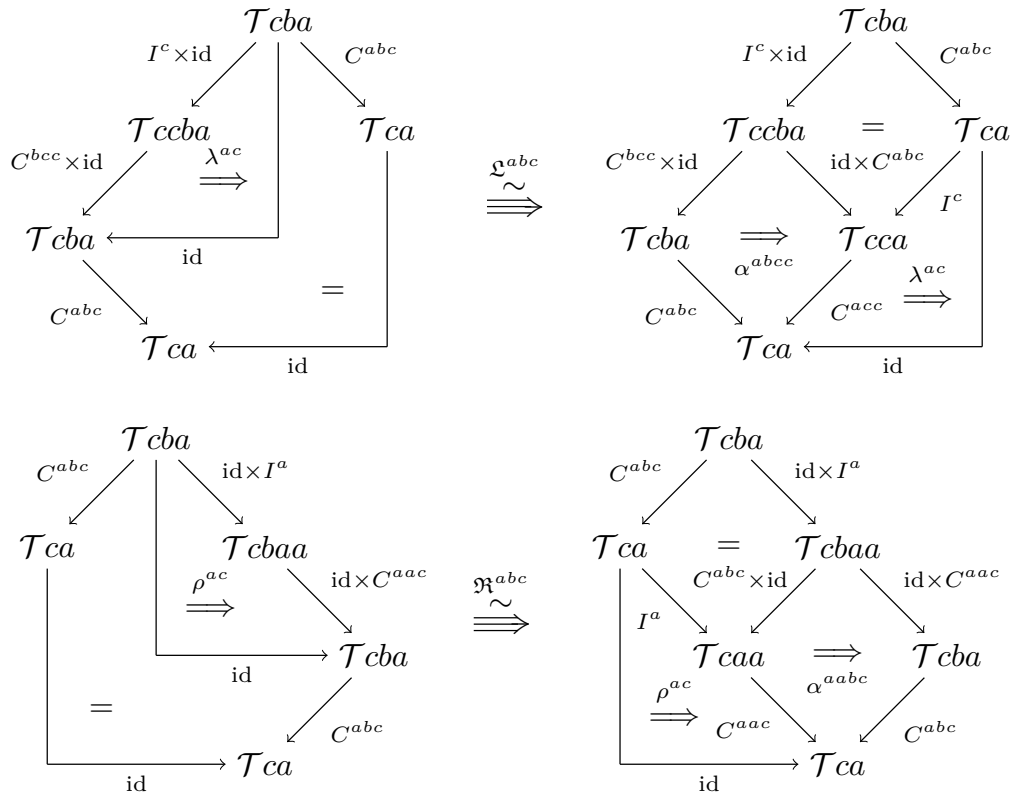
$$\begin{array}{ccc}
 \mathbf{1} \times \mathcal{T}(a, b) & \xrightarrow{\cong} & \mathcal{T}(a, b) \\
 \downarrow I^b \times \text{id} & \nearrow \lambda^{ab} \Uparrow & \uparrow C^{abb} \\
 \mathcal{T}(b, b) \times \mathcal{T}(a, b) & & 
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{ccc}
 \mathcal{T}(a, b) \times \mathbf{1} & \xrightarrow{\cong} & \mathcal{T}(a, b) \\
 \downarrow \text{id} \times I^a & \nearrow \rho^{ab} \Uparrow & \uparrow C^{aab} \\
 \mathcal{T}(a, b) \times \mathcal{T}(a, a) & & 
 \end{array}$$

(7) 各対象  $a, b, c, d, e \in \mathcal{T}$  に対して , 次の同型な modification  $\mathfrak{A}^{abcde}$  が与えられている . (ここで  $\mathcal{T}cba := \mathcal{T}(b, c) \otimes \mathcal{T}(a, b)$  などの略記を行った)

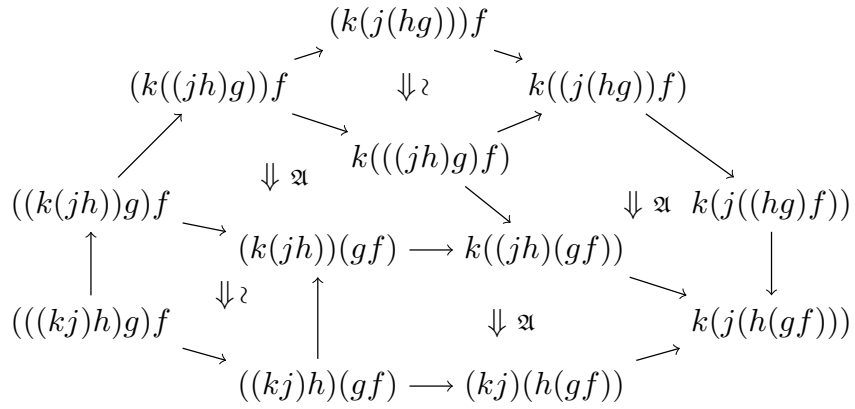
$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{ccccc}
 & & \mathcal{T}edcba & & \\
 & \swarrow C^{cde} \times \text{id} \times \text{id} & | & \searrow \text{id} \times \text{id} \times C^{abc} & \\
 \mathcal{T}ecba & & \text{id} \times C^{bcd} \times \text{id} & & \mathcal{T}edca \\
 | & \swarrow \alpha^{bcde} \times \text{id} & \downarrow & \searrow \text{id} \times \alpha^{abcd} & | \\
 C^{bce} \times \text{id} & & \mathcal{T}edba & & \text{id} \times C^{acd} \\
 \downarrow & \swarrow C^{bde} \times \text{id} & | & \searrow \text{id} \times C^{abd} & \downarrow \\
 \mathcal{T}eba & & \alpha^{abde} & & \mathcal{T}eda \\
 \swarrow C^{abe} & & \Downarrow & & \swarrow C^{ade} \\
 & \mathcal{T}ea & & & 
 \end{array}
 & \xrightarrow{\mathfrak{A}^{abcde}} & 
 \begin{array}{ccccc}
 & & \mathcal{T}edcba & & \\
 & \swarrow C^{cde} \times \text{id} \times \text{id} & | & \searrow \text{id} \times \text{id} \times C^{abc} & \\
 \mathcal{T}ecba & & \text{id} \times C^{abc} = C^{cde} \times \text{id} & & \mathcal{T}edca \\
 | & \swarrow \text{id} \times C^{abc} & \downarrow & \searrow \text{id} \times C^{acd} & | \\
 C^{bce} \times \text{id} & & \mathcal{T}ace & & \text{id} \times C^{acd} \\
 \downarrow & \swarrow \alpha^{abce} & | & \searrow \alpha^{acde} & \downarrow \\
 \mathcal{T}eba & & C^{ace} & & \mathcal{T}eda \\
 \swarrow C^{abe} & & \Downarrow & & \swarrow C^{ade} \\
 & \mathcal{T}ea & & & 
 \end{array}
 \end{array}$$

(8) 各対象  $a, b, c \in \mathcal{T}$  に対して , 次の同型な modification  $\mathfrak{B}^{abc}, \mathfrak{L}^{abc}, \mathfrak{R}^{abc}$  が与えられている .

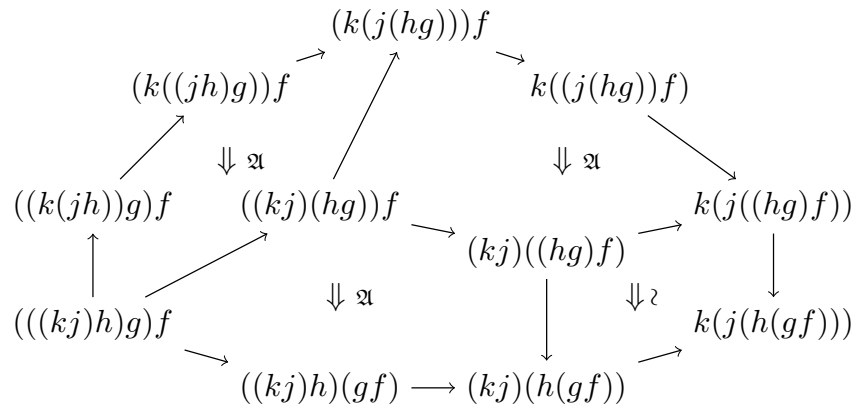
$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{ccccc}
 & & \mathcal{T}cba & & \\
 & \swarrow \text{id} & | & \searrow \text{id} & \\
 & (\rho^{bc})^* \times \text{id} & \downarrow \text{id} \times I^b \times \text{id} & \text{id} \times \lambda^{ab} & \\
 & \Downarrow & \mathcal{T}cbba & \Downarrow & \\
 \mathcal{T}cba & & C^{bbc} \times \text{id} & \text{id} \times C^{abb} & \mathcal{T}cba \\
 \swarrow C^{abc} & & \alpha^{abbc} & & \swarrow C^{abc} \\
 & \mathcal{T}ca & & & 
 \end{array}
 & \xrightarrow{\mathfrak{B}^{abc}} & 
 \begin{array}{ccc}
 & \mathcal{T}cba & \\
 \swarrow \text{id} & | & \searrow \text{id} \\
 \mathcal{T}cba & = & \mathcal{T}cba \\
 \swarrow C^{abc} & & \swarrow C^{abc} \\
 & \mathcal{T}ca & 
 \end{array}
 \end{array}$$



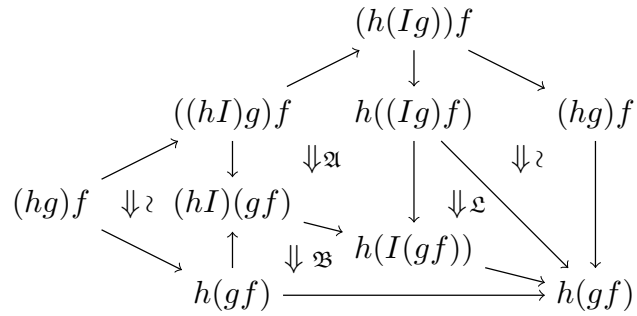
(9) 任意の  $a \xrightarrow{f} b \xrightarrow{g} c \xrightarrow{h} d \xrightarrow{j} e \xrightarrow{k} x$  に対して次の等式が成り立つ.



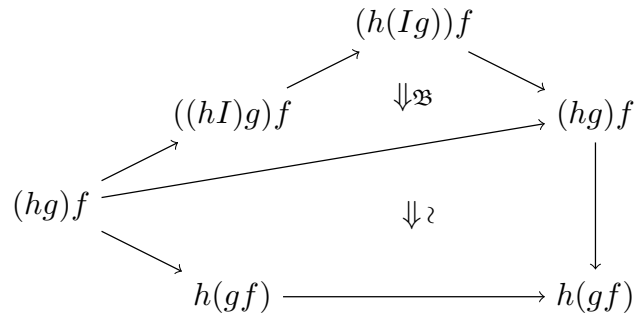
||

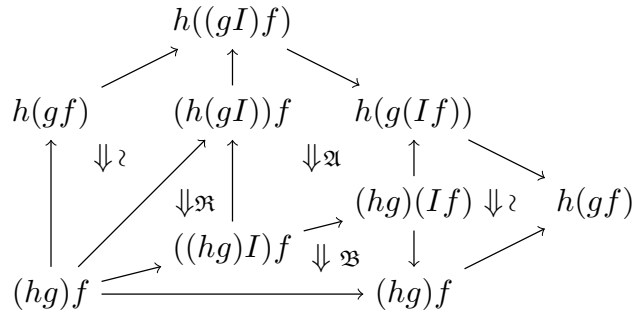


(10) 任意の  $a \xrightarrow{f} b \xrightarrow{g} c \xrightarrow{h} c$  に対して次の等式が成り立つ .

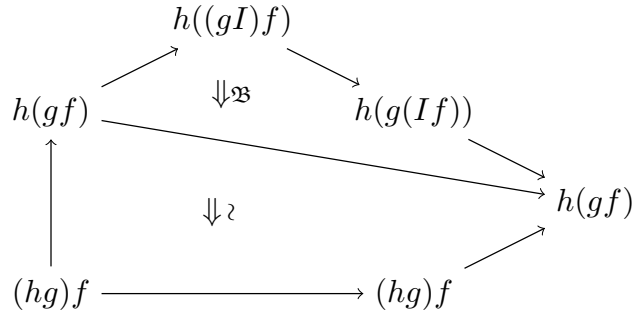


||



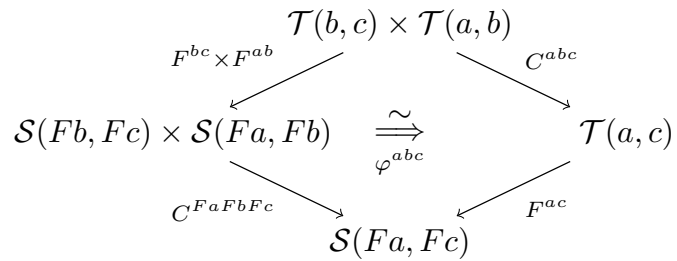


||



定義.  $\mathcal{T}, \mathcal{S}$  を tricategory とする . trihomomorphism  $F: \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{S}$  とは以下を満たすことである .

- (1) 関数  $F: \text{Ob}(\mathcal{T}) \rightarrow \text{Ob}(\mathcal{S})$  が与えられている .
- (2) 各対象  $a, b \in \mathcal{T}$  に対して pseudofunctor  $F^{ab}: \mathcal{T}(a, b) \rightarrow \mathcal{S}(Fa, Fb)$  が与えられている .
- (3) 各対象  $a, b, c \in \mathcal{T}$  に対して次の adjoint equivalence  $\varphi^{abc}$  が与えられている .



(4) 各対象  $a \in \mathcal{T}$  に対して次の adjoint equivalence  $\psi^a$  が与えられている .

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbf{1} & \xrightarrow{I^{Fa}} & \mathcal{S}(Fa, Fa) \\
 & \searrow I^a & \swarrow F^{aa} \\
 & & \mathcal{T}(a, a)
 \end{array}
 \quad \begin{array}{c} \Downarrow \\ \psi^a \end{array}$$

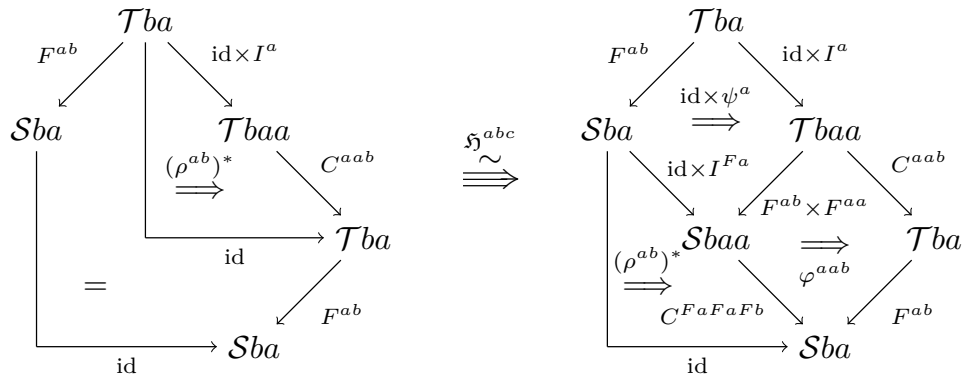
(5) 各対象  $a, b, c, d \in \mathcal{T}$  に対して次の同型な modification  $\mathfrak{F}^{abcd}$  が与えられている .

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \mathcal{T}dcb a & \xrightarrow{F^{cd} \times F^{bc} \times F^{ab}} & \mathcal{S}dcb a \\
 & \swarrow \text{id} \times C^{abc} & & \searrow C^{bcd} \times \text{id} & \\
 \mathcal{T}dca & & & & \mathcal{S}dba \\
 & \searrow C^{acd} & \swarrow \alpha^{abcd} & \swarrow \varphi^{bcd} \times \text{id} & \swarrow C^{FbFcFd} \times \text{id} \\
 & & \mathcal{T}dba & \xrightarrow{F^{bd} \times F^{ab}} & \mathcal{S}dba \\
 & & & \searrow C^{abd} & \searrow C^{FaFbFd} \\
 & & \mathcal{T}da & \xrightarrow{F^{ad}} & \mathcal{S}da
 \end{array}$$
  

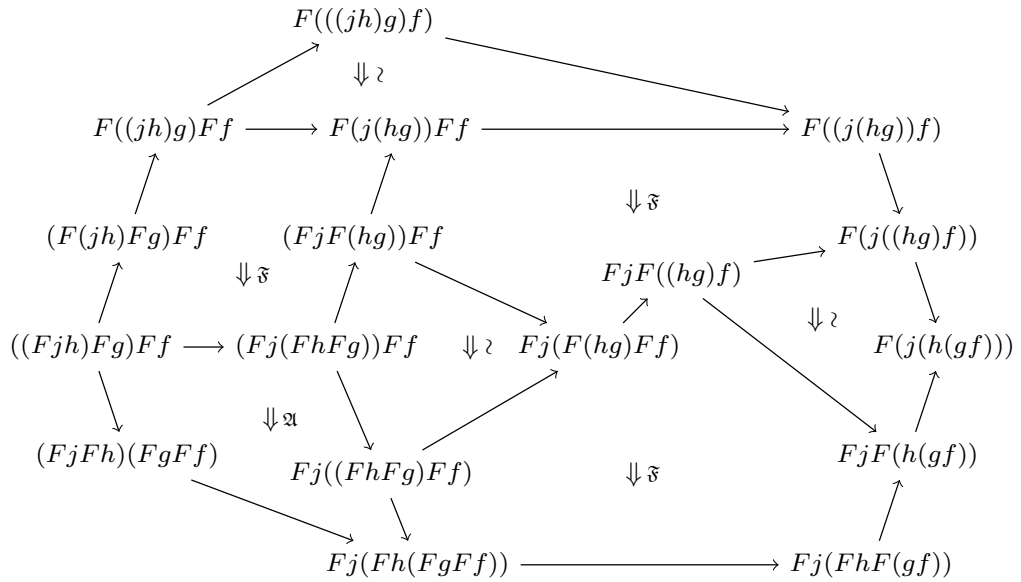
$$\mathfrak{F}^{abcd} \cong \begin{array}{ccccc}
 & & \mathcal{T}dcb a & \xrightarrow{F^{cd} \times F^{bc} \times F^{ab}} & \mathcal{S}dcb a \\
 & \swarrow \text{id} \times C^{abc} & & \searrow \text{id} \times \varphi^{abc} & \searrow \text{id} \times C^{bcd} \\
 \mathcal{T}dca & & & & \mathcal{S}dca \\
 & \searrow C^{acd} & \swarrow \varphi^{acd} & \swarrow C^{FaFcFd} & \swarrow \alpha^{FaFbFcFd} \\
 & & \mathcal{T}da & \xrightarrow{F^{ad}} & \mathcal{S}da
 \end{array}$$

(6) 各対象  $a, b \in \mathcal{T}$  に対して次の同型な modification  $\mathfrak{G}^{ab}, \mathfrak{H}^{ab}$  が与えられている .

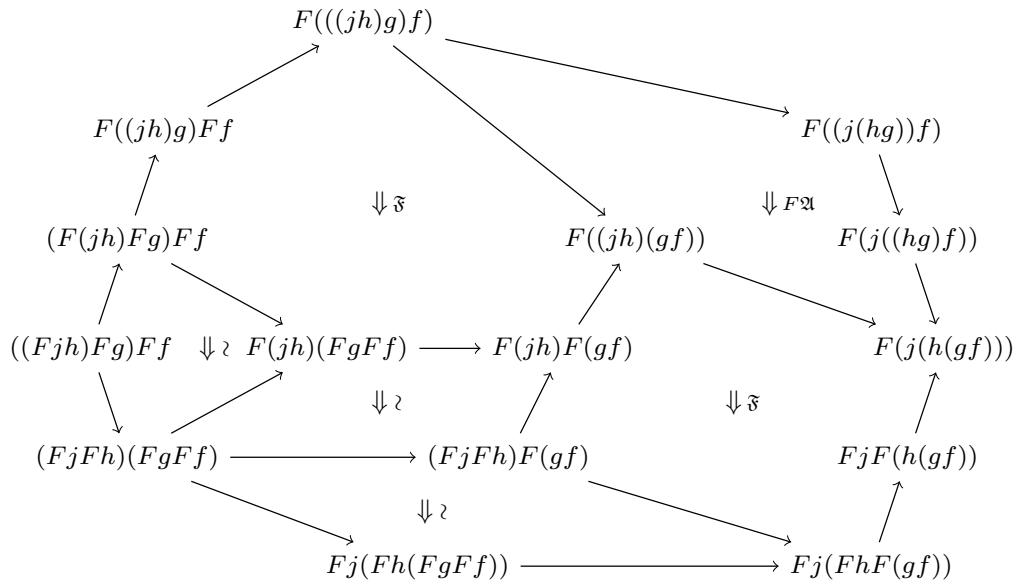
$$\begin{array}{ccccc}
 & & \mathcal{T}ba & & \\
 & \swarrow F^{ab} & & \searrow I^b \times \text{id} & \\
 \mathcal{S}ba & & & & \mathcal{T}bba \\
 & \searrow I^{Fb} \times \text{id} & \swarrow \psi^b \times \text{id} & \swarrow F^{bb} \times F^{ab} & \swarrow C^{abb} \\
 & & \mathcal{S}bba & \xrightarrow{\varphi^{abb}} & \mathcal{T}ba \\
 & & & \searrow C^{FaFbFb} & \searrow F^{ab} \\
 & & & & \mathcal{S}ba
 \end{array}
 \quad \mathfrak{G}^{abc} \cong \begin{array}{ccccc}
 & & \mathcal{T}ba & & \\
 & \swarrow F^{ab} & & \searrow \text{id} & \\
 \mathcal{S}ba & & & & \mathcal{T}ba \\
 & \searrow I^{Fb} \times \text{id} & \swarrow \lambda^{ac} & \swarrow \text{id} & \swarrow \text{id} \\
 & & \mathcal{S}bba & \xrightarrow{\lambda^{ac}} & \mathcal{T}ba \\
 & & & \searrow C^{FaFbFb} & \searrow F^{ab} \\
 & & & & \mathcal{S}ba
 \end{array}$$



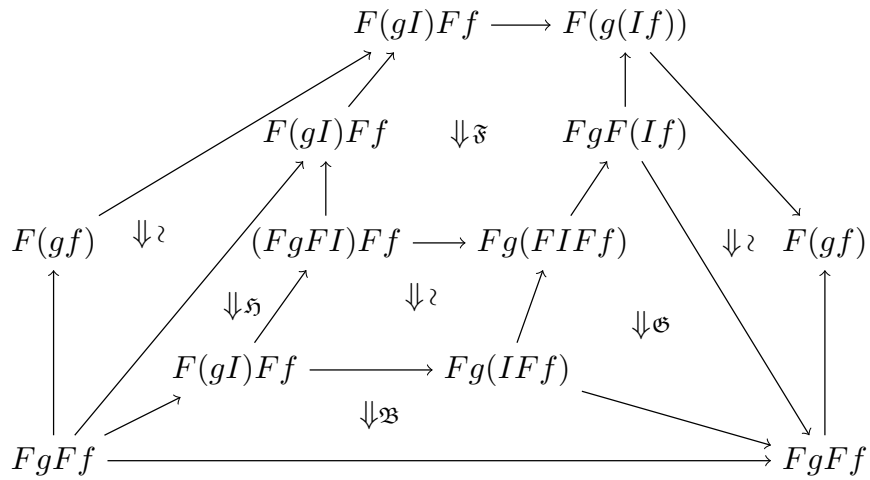
(7) 任意の  $a \xrightarrow{f} b \xrightarrow{g} c \xrightarrow{h} d \xrightarrow{j} e$  に対して次の等式が成り立つ .



||



(8) 任意の  $a \xrightarrow{f} b \xrightarrow{g} c$  に対して次の等式が成り立つ .



||



$$\begin{array}{ccc}
& F(gI)Ff \longrightarrow F(g(If)) & \\
& \nearrow & \searrow \\
F(gf) & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & F(gf) \\
\uparrow & & \uparrow \\
FgFf & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & FgFf
\end{array}$$

$\Downarrow_{F\mathfrak{B}}$  (between top and middle rows)  
 $\Downarrow_{\wr}$  (between middle and bottom rows)

定義. strict 2-category  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  の Gray テンソル積  $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$  とは (略)

定義. 圏  $\text{Cat-Cat}$  は Gray テンソル積により対称モノイダル閉圏となる. これを Gray と書く.

定義. Gray-豊穣圏を Gray-category という.

定義. trihomomorphism  $F: \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{S}$  が triequivalence

$\iff F$  が triessentially surjective かつ, 任意の  $a, b \in \mathcal{T}$  に対して  $F^{ab}$  が biequivalence .

定理 1. 任意の tricategory はある Gray-category と triequivalence である.

証明. 略

□

## 参考文献

- [1] Nick Gurski, An algebraic theory of tricategories, 2007, <http://gauss.math.yale.edu/~mg622/pubs.html>