# 2-category での極限

alg-d

http://alg-d.com/math/kan_extension/

2017 年 2 月 12 日

この PDF では 2-category と言えば strict 2-category を表すものとする.

2-category とは **Cat**-豊穣圏であるから，2-category $\mathcal{C}$ において weighted (co)limit を考えることができる.

$\mathcal{J}$ を small 2-category，$W\colon \mathcal{J} \longrightarrow \mathbf{Cat}$，$F\colon \mathcal{J} \longrightarrow \mathcal{C}$ を strict 2-functor，即ち **Cat**-関手とする．weighted limit とは $a \in \mathcal{C}$ に関して自然な圏同型

$$\varphi\colon \mathcal{C}(a, \lim^W F) \longrightarrow [\mathcal{J}, \mathbf{Cat}](W, \mathcal{C}(a, F-))$$

が成り立つ対象 $\lim^W F \in \mathcal{C}$ であった.

$a = \lim^W F$ とすれば $\eta := \varphi(\mathrm{id}_{\lim^W F})\colon W \Longrightarrow \mathcal{C}(\lim^W F, F-)$ が得られる．この $\eta$ は strict natural transformation である．これを $\lim^W F$ の unit という.

**定義.** strict natural transformation $\sigma\colon W \Longrightarrow \mathcal{C}(a, F-)$ を cylinder という.

**例 1.** 上記の unit $\eta\colon W \Longrightarrow \mathcal{C}(\lim^W F, F-)$ は cylinder である. □

$F\colon \mathcal{J} \longrightarrow \mathcal{C}$ を strict 2-functor, $f\colon a \longrightarrow b$ を $\mathcal{C}$ の 1-morphism とする．$j \in \mathcal{J}$ に対して $(f^*)_j := - \bullet f\colon \mathcal{C}(b, Fj) \longrightarrow \mathcal{C}(a, Fj)$ とすれば $f^*$ は strict natural transformation $\mathcal{C}(b, F-) \Longrightarrow \mathcal{C}(a, F-)\colon \mathcal{J} \longrightarrow \mathbf{Cat}$ である.

$\lim^W F$ が存在するとして, $\eta$ をその unit とする．任意の cylinder $\sigma\colon W \Longrightarrow \mathcal{C}(a, F-)$ を取る．$\varphi$ により，1-morphism $f\colon a \longrightarrow \lim^W F$ で $\varphi(f) = \sigma$ となるものが一意に取れ

る．$\varphi$ の自然性から，**Cat** における次の図式は可換である．

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{C}(\lim^W F, \lim^W F) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "-\bullet f"'] & {[\mathcal{J}, \mathbf{Cat}](W, \mathcal{C}(\lim^W F, F-))} \arrow[d, "f^* \widehat{\bullet} -"] \\
\mathcal{C}(a, \lim^W F) \arrow[r, "\varphi"'] & {[\mathcal{J}, \mathbf{Cat}](W, \mathcal{C}(a, F-))}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathrm{id} \arrow[r, mapsto, "\varphi"] \arrow[d, mapsto, "-\bullet f"'] & \eta \arrow[d, mapsto, "f^* \widehat{\bullet} -"] \\
f \arrow[r, mapsto, "\varphi"'] & \sigma
\end{tikzcd}
$$

故に $\mathrm{id} \in \mathcal{C}(\lim^W F, \lim^W F)$ の行き先を考えれば $\sigma = f^* \mathbin{\widehat{\circ}} \eta$ を得る．

つまり $\eta$ は次の性質を満たす: 任意の cylinder $\sigma\colon W \Longrightarrow \mathcal{C}(a, F-)$ に対して，ある 1-morphism $f\colon a \longrightarrow \lim^W F$ が一意に存在して $f^* \mathbin{\widehat{\circ}} \eta = \sigma$ と書ける．

$$
\begin{tikzcd}[column sep=huge]
\mathcal{J} \arrow[r, bend left=50, "W"{name=U}] \arrow[r, "\mathcal{C}(\lim^W F, F-)"{name=M, description}] \arrow[r, bend right=50, "\mathcal{C}(a, F-)"'{name=D}] & \mathbf{Cat}
\arrow[from=U, to=M, phantom, "\eta \Downarrow"]
\arrow[from=M, to=D, phantom, "f^* \Downarrow"]
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}[column sep=huge]
\mathcal{J} \arrow[r, bend left=50, "W"{name=U}] \arrow[r, bend right=50, "\mathcal{C}(a, F-)"'{name=D}] & \mathbf{Cat}
\arrow[from=U, to=D, phantom, "\sigma \Downarrow"]
\end{tikzcd}
$$

即ち $\eta$ は「普遍性を持つ cylinder」であると言える．この普遍性を「1 次元的普遍性*1」と呼ぶことにするとき，「1 次元的普遍性」を持つ cylinder が (weighted limit の) unit となるとは限らず，「2 次元的普遍性」も考える必要がある．それは次の性質である．

**命題 2.** $\eta\colon W \Longrightarrow \mathcal{C}(\lim^W F, F-)$ を unit とする．$\sigma, \tau\colon W \Longrightarrow \mathcal{C}(a, F-)$ を cylinder として，それに 1 次元的普遍性で対応する 1-morphism を $f, g\colon a \longrightarrow \lim^W F$ とする．このとき任意の modification $\Gamma\colon \sigma \Rrightarrow \tau$ に対してある 2-morphism $\alpha\colon f \Longrightarrow g$ が一意に存在して $\alpha^* \mathbin{\widehat{\bullet}} \eta = \Gamma$ と書ける．

$$
\begin{tikzcd}[column sep=huge]
\mathcal{J} \arrow[r, bend left=50, "W"{name=U}] \arrow[r, "\mathcal{C}(\lim^W F, F-)"{name=M, description}] \arrow[r, bend right=50, "\mathcal{C}(a, F-)"'{name=D}] & \mathbf{Cat}
\arrow[from=U, to=M, phantom, "\eta \Downarrow"]
\arrow[from=M, to=D, phantom, "f^* \Downarrow \overset{}{\underset{\alpha^*}{\Rrightarrow}} \Downarrow g^*"]
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}[column sep=huge]
\mathcal{J} \arrow[r, bend left=50, "W"{name=U}] \arrow[r, bend right=50, "\mathcal{C}(a, F-)"'{name=D}] & \mathbf{Cat}
\arrow[from=U, to=D, phantom, "\sigma \Downarrow \overset{\Gamma}{\Rrightarrow} \Downarrow \tau"]
\end{tikzcd}
$$

ここで $\alpha^*\colon f^* \Rrightarrow g^*$ は $j \in \mathcal{J}$ に対して $(\alpha^*)_j := - \bullet \alpha\colon - \bullet f \Longrightarrow - \bullet g$ で与えられる modification である．

---

*1 [1] などでは one-dimensional aspect of the universal property と呼んでいる．

**証明**. $\varphi(f)=\sigma$，$\varphi(g)=\tau$ であり，$\varphi$ は圏同型だから，$\varphi(\alpha)=\Gamma$ となる $\alpha\colon f\Longrightarrow g$ が一意に取れる．このとき次の図式を得る．

$$
\begin{tikzcd}[column sep=large]
\mathcal{C}(\lim^W F, \lim^W F) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, shift right=3, "-\bullet f"'] \arrow[d, shift left=3, "-\bullet g"] \arrow[d, phantom, "\overset{-\bullet\alpha}{\Longrightarrow}"] & {[\mathcal{J}, \mathbf{Cat}](W, \mathcal{C}(\lim^W F, F-))} \arrow[d, shift right=5, "f^*\widehat{\bullet}-"'] \arrow[d, shift left=5, "g^*\widehat{\bullet}-"] \arrow[d, phantom, "\overset{\alpha^*\widehat{\bullet}-}{\Longrightarrow}"] \\
\mathcal{C}(a, \lim^W F) \arrow[r, "\varphi"'] & {[\mathcal{J}, \mathbf{Cat}](W, \mathcal{C}(a, F-))}
\end{tikzcd}
$$

よって $\Gamma=\alpha^*\,\widehat{\bullet}\,\eta$ が分かる． $\square$

**定理 3.** $\mathcal{J},\mathcal{C}$ を 2-category，$W\colon\mathcal{J}\longrightarrow\mathbf{Cat}$，$F\colon\mathcal{J}\longrightarrow\mathcal{C}$ を strict 2-functor とする．cylinder $\eta\colon W\Longrightarrow\mathcal{C}(c,F-)$ が 1 次元的普遍性と 2 次元的普遍性を満たすとする．このとき $c\cong\lim^W F$ である．

**証明**. $a\in\mathcal{C}$ とする．1 次元的普遍性により，任意の cylinder $\sigma\colon W\Longrightarrow\mathcal{C}(a,F-)$ に対して 1-morphism $f\colon a\longrightarrow c$ が一意に存在して $f^*\,\widehat{\circ}\,\eta=\sigma$ となる．この対応により得られる全単射を $\varphi_a\colon\ \mathrm{Ob}(\mathcal{C}(a,c))\longrightarrow\mathrm{Ob}\big([\mathcal{J},\mathbf{Cat}](W,\mathcal{C}(a,F-))\big)$ とする．

$\varphi_a$ は関手 $\mathcal{C}(a,c)\longrightarrow[\mathcal{J},\mathbf{Cat}](W,\mathcal{C}(a,F-))$ を与える．

$\because$) $f,g\colon a\longrightarrow c$ とする．$\varphi_a$ の定義より $\varphi_a(f)=f^*\,\widehat{\circ}\,\eta$，$\varphi_a(g)=g^*\,\widehat{\circ}\,\eta$ である．$\alpha\colon f\Longrightarrow g$ を 2-morphism とする．このとき $\varphi_a(\alpha):=\alpha^*\,\widehat{\bullet}\,\eta$ と定義すれば，$\varphi_a$ は明らかに関手である．

2 次元的普遍性により明らかに，この関手 $\varphi_a\colon\mathcal{C}(a,c)\longrightarrow[\mathcal{J},\mathbf{Cat}](W,\mathcal{C}(a,F-))$ は圏同型である．故に後は $\varphi_a$ が $a\in\mathcal{C}$ に関して自然であることを示せばよい．

まず $f\colon a\longrightarrow b$ を 1-morphism とする．次の図式が可換であることを示す．

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{C}(b,c) \arrow[r, "\varphi_b"] \arrow[d, "-\bullet f"'] & {[\mathcal{J}, \mathbf{Cat}](W, \mathcal{C}(b, F-))} \arrow[d, "f_*\widehat{\bullet}-"] \\
\mathcal{C}(a,c) \arrow[r, "\varphi_a"'] & {[\mathcal{J}, \mathbf{Cat}](W, \mathcal{C}(a, F-))}
\end{tikzcd}
$$

しかしそれは $\varphi$ の定義より明らか．

次に $\alpha\colon f\Longrightarrow g\colon a\longrightarrow b$ とする．$\varphi_b\bullet(-\bullet\alpha)=(\alpha^*\,\widehat{\bullet}\,-)\bullet\varphi_a$ を示せばよい．

$$
\begin{tikzcd}[column sep=large]
\mathcal{C}(b,c) \arrow[r, "\varphi_b"] \arrow[d, shift right=3, "-\bullet f"'] \arrow[d, shift left=3, "-\bullet g"] \arrow[d, phantom, "\overset{-\bullet\alpha}{\Longrightarrow}"] & {[\mathcal{J}, \mathbf{Cat}](W, \mathcal{C}(b, F-))} \arrow[d, shift right=5, "f^*\widehat{\bullet}-"'] \arrow[d, shift left=5, "g^*\widehat{\bullet}-"] \arrow[d, phantom, "\overset{\alpha^*\widehat{\bullet}-}{\Longrightarrow}"] \\
\mathcal{C}(a,c) \arrow[r, "\varphi_a"'] & {[\mathcal{J}, \mathbf{Cat}](W, \mathcal{C}(a, F-))}
\end{tikzcd}
$$

$k \in \mathcal{C}(a,c)$ に対して

$$\begin{aligned}
\bigl(\varphi_b \bullet (- \bullet \alpha)\bigr)_k &= \varphi_b((- \bullet \alpha)_k) = \varphi_b(k \bullet \alpha) \\
&= (k \bullet \alpha)^* \mathbin{\widehat{\circ}} \eta \\
((\alpha^* \mathbin{\widehat{\bullet}} -) \bullet \varphi_a)_k &= (\alpha^* \mathbin{\widehat{\bullet}} -)_{\varphi_a(k)} = (\alpha^* \mathbin{\widehat{\bullet}} -)_{k^* \widehat{\circ} \eta} \\
&= \alpha^* \mathbin{\widehat{\bullet}} (k^* \mathbin{\widehat{\circ}} \eta)
\end{aligned}$$

だから $\varphi_b \bullet (- \bullet \alpha) = (\alpha^* \mathbin{\widehat{\bullet}} -) \bullet \varphi_a$ である． □

weighted limit の性質より

**定理 4.** $\mathcal{J}$ を small 2-category，$W\colon \mathcal{J} \longrightarrow \mathbf{Cat}$，$F\colon \mathcal{J} \longrightarrow \mathcal{C}$ を strict 2-functor，$a \in \mathcal{C}$ とする．このとき $\mathcal{C}(a, \lim^W F) \cong \lim^W (\mathcal{C}(a, F-))$ である． □

**例 5.** $\mathcal{J} = \mathbf{0}$ の場合の weighted limit を 2-終対象という．$\mathcal{J} = \mathbf{0}$ の場合 $[\mathcal{J}, \mathbf{Cat}] = \mathbf{1}$ である．故に $\mathcal{C}$ の 2-終対象とは，任意の $a \in \mathcal{C}$ に対して $\mathcal{C}(a,x) = \mathbf{1}$ となる対象 $x$ のことである．即ち $x$ は次の条件を満たす．

- 任意の $a \in \mathcal{C}$ に対して，1-morphsim $!\colon a \longrightarrow x$ が一意に存在する．
- $\alpha\colon ! \Longrightarrow !\colon a \longrightarrow x$ を 2-morphism とするとき $\alpha = \mathrm{id}_!$ である． □

**例 6.** $\mathcal{J}$ が小圏で $W = \Delta\mathbf{1}$ の場合．$\sigma\colon \Delta\mathbf{1} \Longrightarrow \mathcal{C}(a, F-)$ を cylinder とすると $j \in \mathcal{J}$ に対して $\sigma_j\colon \mathbf{1} \longrightarrow \mathcal{C}(a, Fj)$ は関手である．$\sigma$ の自然性から $\mathcal{J}$ の射 $k\colon i \longrightarrow j$ に対して次の図式が可換である．

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{1} \arrow[r, "\sigma_i"] \arrow[d, "\mathrm{id}"'] & \mathcal{C}(a, Fi) \arrow[d, "Fk\bullet-"] \\
\mathbf{1} \arrow[r, "\sigma_j"'] & \mathcal{C}(a, Fj)
\end{tikzcd}$$

よって $f_j := \sigma_j(*)\colon a \longrightarrow Fj$ と置けば $Fk \circ f_i = f_j$ である．

$$\begin{tikzcd}
 & Fi \arrow[dd, "Fk"] \\
a \arrow[ur, "f_i"] \arrow[dr, "f_j"'] \arrow[r, phantom, "||"] & \\
 & Fj
\end{tikzcd}$$

このような族 $\{f_j\colon a \longrightarrow Fj\}_{j \in \mathcal{J}}$ を cone と呼ぶことにする．逆に cone があれば cylinder $\sigma\colon \Delta\mathbf{1} \Longrightarrow \mathcal{C}(a, F-)$ が得られる．故にこの場合 cylinder を cone と同一視することができる．従って weighted limit とは「普遍性」を持つ cone のことである．

$\lim^{\Delta\mathbf{1}} F$ が存在するとして，その unit を $\eta\colon \Delta\mathbf{1} \Longrightarrow \mathcal{C}(\lim^{\Delta\mathbf{1}} F, F-)$ とし，$\eta$ に対応する cone を $\{p_j\colon \lim^{\Delta\mathbf{1}} F \longrightarrow Fj\}_{j\in\mathcal{J}}$ とする．$\{f_j\colon a \longrightarrow Fj\}_{j\in\mathcal{J}}$ を cone として対応する cylinder を $\sigma\colon \Delta\mathbf{1} \Longrightarrow \mathcal{C}(a,F-)$ とすれば 1 次元的普遍性により $h\colon a \longrightarrow \lim^{\Delta\mathbf{1}} F$ が一意に存在して $\sigma = h^*\hat{\circ}\eta$ となる．即ち $j\in\mathcal{J}$ に対して $\sigma_j = (-\bullet h)\circ\eta_j\colon \mathbf{1}\longrightarrow \mathcal{C}(a,Fj)$ は関手である．故に $*\in\mathbf{1}$ の行き先を考えれば $f_j = \sigma_j(*) = \eta_j(*)\circ h = p_j\circ h$ となる．

$$
\begin{tikzcd}
 & & Fi \arrow[dd, "Fk"] \\
a \arrow[r, dashed, "h"] \arrow[urr, bend left, "f_i"] \arrow[drr, bend right, "f_j"'] & \lim^{\Delta\mathbf{1}} F \arrow[ur, "p_i"] \arrow[dr, "p_j"'] & \\
 & & Fj
\end{tikzcd}
$$

次に $\{f_j\colon a \longrightarrow Fj\}_{j\in\mathcal{J}}$ と $\{f'_j\colon a \longrightarrow Fj\}_{j\in\mathcal{J}}$ を cone として，対応する cylinder を $\sigma,\sigma'\colon \Delta\mathbf{1} \Longrightarrow \mathcal{C}(a,F-)$ として上の方法で得られる 1-morphism を $h,h'\colon a \longrightarrow \lim^{\Delta\mathbf{1}} F$ とする．

$$
\begin{tikzcd}
a \arrow[r, dashed, "h"] \arrow[drr, bend right, "f_j"'] & \lim^{\Delta\mathbf{1}} F \arrow[dr, "p_j"] \arrow[d, phantom, "\parallel"] & \\
 & {} & Fj
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
a \arrow[r, dashed, "h'"] \arrow[drr, bend right, "f'_j"'] & \lim^{\Delta\mathbf{1}} F \arrow[dr, "p_j"] \arrow[d, phantom, "\parallel"] & \\
 & {} & Fj
\end{tikzcd}
$$

$\Gamma\colon \sigma \Lleftarrow\!\!\Rrightarrow \sigma'$ を modification とすると $\Gamma_j\colon \sigma_j \Longrightarrow \sigma'_j\colon \mathbf{1} \longrightarrow \mathcal{C}(a,Fj)$ は自然変換であり，$\theta_j := (\Gamma_j)_*\colon \tau_j \Longrightarrow \tau'_j\colon a \longrightarrow Fj$ は 2-morphism となる．$\Gamma$ が modification だから等式

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{1} \arrow[r, bend left, "\sigma_i"] \arrow[d, "\mathrm{id}"'] \arrow[dr, phantom, "/\!/"] & \mathcal{C}(a,Fi) \arrow[d, "Fk\bullet-"] \\
\mathbf{1} \arrow[r, bend left, "\sigma_j"] \arrow[r, bend right, "\sigma'_j"'] \arrow[r, phantom, "\Gamma_j\Downarrow"] & \mathcal{C}(a,Fj)
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
\mathbf{1} \arrow[r, bend left, "\sigma_i"] \arrow[r, bend right, "\sigma'_i"'] \arrow[r, phantom, "\Gamma_i\Downarrow"] \arrow[d, "\mathrm{id}"'] \arrow[dr, phantom, "/\!/"] & \mathcal{C}(a,Fi) \arrow[d, "Fk\bullet-"] \\
\mathbf{1} \arrow[r, bend right, "\sigma'_j"'] & \mathcal{C}(a,Fj)
\end{tikzcd}
$$

が成り立つ．故に $\theta_j = Fk\bullet\theta_i$ となることが分かる．

$$
\begin{tikzcd}
 & Fi \arrow[dd, "Fk"] \\
a \arrow[ur, bend left, "f'_i"] \arrow[ur, bend right, "f_i"'] \arrow[ur, phantom, "\Uparrow\theta_i"] \arrow[dr, bend right, "f_j"'] \arrow[r, phantom, "/\!/"] & {} \\
 & Fj
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
 & Fi \arrow[dd, "Fk"] \\
a \arrow[ur, bend left, "f'_i"] \arrow[dr, bend left, "f'_j"] \arrow[dr, bend right, "f_j"'] \arrow[dr, phantom, "\Uparrow\theta_j"] \arrow[r, phantom, "/\!/"] & {} \\
 & Fj
\end{tikzcd}
$$

逆にこのような $\{\theta_j \colon \tau_j \Longrightarrow \tau'_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ があれば modification $\Gamma \colon \sigma \Longrightarrow \sigma'$ が得られるから，$\Gamma$ と $\{\theta_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ が対応することが分かる．このような $\{\theta_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ が存在するとき，2 次元的普遍性から $\alpha \colon h \Longrightarrow h'$ が一意に存在して $\alpha^* \mathbin{\widehat{\bullet}} \eta = \Gamma$ となる．このとき $j \in \mathcal{J}$ に対して $(\alpha^*)_j \bullet \eta_j = \Gamma_j$ となるから $p_j \bullet \alpha = \theta_j$ である．

$$
\begin{tikzcd}
x \arrow[r, bend left, "h'"] \arrow[r, bend right, "h"'] \arrow[r, phantom, "\Uparrow\alpha"] & \lim^{\mathbf{\Delta 1}} F \arrow[r, "p_j"] & F_j
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
x \arrow[rr, bend left, "f'_j"] \arrow[rr, bend right, "f_j"'] \arrow[rr, phantom, "\Uparrow\theta_j"] & & F_j
\end{tikzcd}
$$

以上をまとめると，$\mathcal{J}$ が小圏で $W = \mathbf{\Delta 1}$ の場合の weighted limit とは，対象 $\lim^{\mathbf{\Delta 1}} F$ と cone $p = \{p_j \colon \lim^{\mathbf{\Delta 1}} F \longrightarrow Fj\}_{j\in\mathcal{J}}$ の組 $\langle \lim^{\mathbf{\Delta 1}} F, p\rangle$ であって，以下の条件を満たすものである．

- (1 次元的普遍性) cone $\{f_j \colon a \longrightarrow Fj\}_{j\in\mathcal{J}}$ に対して $h \colon a \longrightarrow \lim^{\mathbf{\Delta 1}} F$ が一意に存在して，任意の $j \in \mathcal{J}$ に対して

$$
\begin{tikzcd}
a \arrow[r, dashed, "h"] \arrow[dr, bend right, "f_j"'] & \lim^{\mathbf{\Delta 1}} F \arrow[d, phantom, "="] \arrow[dr, "p_j"] & \\
& {} & Fj
\end{tikzcd}
$$

となる．

- (2 次元的普遍性) $\{f_j \colon a \longrightarrow Fj\}_{j\in\mathcal{J}}$ と $\{f'_j \colon a \longrightarrow Fj\}_{j\in\mathcal{J}}$ を cone として，これらから 1 次元的普遍性で得られる 1-morphism を $h, h' \colon a \longrightarrow \lim^{\mathbf{\Delta 1}} F$ とする．2-morphism の族 $\{\theta_j \colon f_j \Longrightarrow f'_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ が，任意の $k \colon i \longrightarrow j$ に対して等式

$$
\begin{tikzcd}
& Fi \arrow[dd, "Fk"] \\
a \arrow[ur, bend left, "f'_i"] \arrow[ur, "f_i"'] \arrow[dr, bend right, "f_j"'] \arrow[r, phantom, "\Uparrow\theta_i \quad //"] & \\
& Fj
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
& Fi \arrow[dd, "Fk"] \\
a \arrow[ur, bend left, "f'_i"] \arrow[dr, "f'_j"] \arrow[dr, bend right, "f_j"'] \arrow[r, phantom, "// \quad \Uparrow\theta_j"] & \\
& Fj
\end{tikzcd}
$$

を満たすとき，2-morphism $\alpha \colon h \Longrightarrow h'$ が一意に存在して，任意の $j \in \mathcal{J}$ に対して

$$
\begin{tikzcd}
x \arrow[r, bend left, "h'"] \arrow[r, bend right, "h"'] \arrow[r, phantom, "\Uparrow\alpha"] & \lim^{\mathbf{\Delta 1}} F \arrow[r, "p_j"] & Fj
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
x \arrow[rr, bend left, "f'_j"] \arrow[rr, bend right, "f_j"'] \arrow[rr, phantom, "\Uparrow\theta_j"] & & Fj
\end{tikzcd}
$$

となる． $\square$

**例 7.** 例 6 の特別な場合として，$\mathcal{J}$ が

$$
\begin{tikzcd}
i_1 \arrow[r] & j \\
& i_0 \arrow[u]
\end{tikzcd}
$$

の場合を考える．(この場合の weighted limit を strict 2-pullback という．) $F\colon \mathcal{J} \longrightarrow \mathcal{C}$ を

$$
F\colon
\begin{tikzcd}
i_1 \arrow[r] & j \\
& i_0 \arrow[u]
\end{tikzcd}
\longmapsto
\begin{tikzcd}
a_1 \arrow[r, "g"] & b \\
& a_0 \arrow[u, "f"']
\end{tikzcd}
$$

で定義するとき，これの strict 2-pullback とは，図式

$$
\begin{tikzcd}
a_1 \arrow[r, "g"] & b \\
c \arrow[u, "p_1"] \arrow[r, "p_0"'] \arrow[ur, phantom, "="] & a_0 \arrow[u, "f"']
\end{tikzcd}
$$

であって「普遍性」を満たすものである．例 6 によれば，この「普遍性」は次のようになる．

- (1 次元的普遍性) 任意の

$$
\begin{tikzcd}
a_1 \arrow[r, "g"] & b \\
x \arrow[u, "q_1"] \arrow[r, "q_0"'] \arrow[ur, phantom, "="] & a_0 \arrow[u, "f"']
\end{tikzcd}
$$

  に対して，ある 1-morphism $h\colon x \longrightarrow c$ が一意に存在して $p_i \circ h = q_i$ となる．

$$
\begin{tikzcd}
& a_1 \arrow[r, "g"] & b \\
& c \arrow[u, "p_1"] \arrow[r, "p_0"'] \arrow[ur, phantom, "="] & a_0 \arrow[u, "f"'] \\
x \arrow[ur, dashed, "h"'] \arrow[uur, bend left, "q_1"] \arrow[urr, bend right, "q_0"'] \arrow[u, phantom, "="] \arrow[ur, phantom, ""] & &
\end{tikzcd}
$$

- (2 次元的普遍性) 図式

$$
\begin{tikzcd}
a_1 \arrow[r, "g"] & b \\
x \arrow[u, "q_1'"] \arrow[r, "q_0'"'] \arrow[ur, phantom, "="] & a_0 \arrow[u, "f"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
a_1 \arrow[r, "g"] & b \\
x \arrow[u, "q_1"] \arrow[r, "q_0"'] \arrow[ur, phantom, "="] & a_0 \arrow[u, "f"']
\end{tikzcd}
$$

に 1 次元的普遍性により対応する 1-morphism を $h, h' \colon x \longrightarrow c$ とする．$\theta, \xi$ が等式

$$
\begin{tikzcd}
a_1 \arrow[r, "g"] & b \\
x \arrow[u, bend left, "q_1'"] \arrow[u, bend right, "q_1"'] \arrow[u, phantom, "\overset{\xi}{\Leftarrow}"] \arrow[r, bend right, "q_0"'] \arrow[ur, phantom, "="] & a_0 \arrow[u, "f"']
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
a_1 \arrow[r, "g"] & b \\
x \arrow[u, bend left, "q_1'"] \arrow[r, bend left, "q_0'"] \arrow[r, bend right, "q_0"'] \arrow[r, phantom, "\Uparrow\theta"] \arrow[ur, phantom, "="] & a_0 \arrow[u, "f"']
\end{tikzcd}
$$

を満たすとき，$\alpha \colon h \Longrightarrow h'$ が一意に存在して次の等式が成り立つ．

$$
\begin{tikzcd}
a_1 \\
c \arrow[u, "p_1"] \\
x \arrow[u, bend left, "h'"] \arrow[u, bend right, "h"'] \arrow[u, phantom, "\overset{\alpha}{\Leftarrow}"]
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
a_1 \\
\\
x \arrow[uu, bend left, "q_1'"] \arrow[uu, bend right, "q_1"'] \arrow[uu, phantom, "\overset{\xi}{\Leftarrow}"]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
x \arrow[r, bend left, "h'"] \arrow[r, bend right, "h"'] \arrow[r, phantom, "\Uparrow\alpha"] & c \arrow[r, "p_0"] & a_0
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
x \arrow[r, bend left, "q_0'"] \arrow[r, bend right, "q_0"'] \arrow[r, phantom, "\Uparrow\theta"] & a_0
\end{tikzcd}
$$

□

**例 8．** 2-category $\mathcal{J}$ を

$$
\begin{tikzcd}
i_1 \arrow[r] & j \\
& i_0 \arrow[u]
\end{tikzcd}
$$

とする．strict 2-functor $W \colon \mathcal{J} \longrightarrow \mathbf{Cat}$，$F \colon \mathcal{J} \longrightarrow \mathcal{C}$ を

$$
W \colon
\begin{tikzcd}
i_1 \arrow[r] & j \\
& i_0 \arrow[u]
\end{tikzcd}
\longmapsto
\begin{tikzcd}
\mathbf{1} \arrow[r, "1"] & \mathbf{2} \\
& \mathbf{1} \arrow[u, "0"']
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
 & i_1 \arrow[r] & j & & a_1 \arrow[r, "g"] & b \\
F\colon & & & \longmapsto & & \\
 & & i_0 \arrow[uu] & & & a_0 \arrow[uu, "f"']
\end{tikzcd}
$$

で定義する．このときの weighted limit を $f, g$ のコンマ対象といい，$f\downarrow g$ で表す．

$x \in \mathcal{C}$ を対象として $\sigma\colon W \Longrightarrow \mathcal{C}(x, F-)$ を cylinder とする．$\sigma_{i_0}\colon \mathbf{1} \longrightarrow \mathcal{C}(x, a_0)$，$\sigma_{i_1}\colon \mathbf{1} \longrightarrow \mathcal{C}(x, a_1)$，$\sigma_j\colon \mathbf{2} \longrightarrow \mathcal{C}(x, b)$ は関手であり，また $\sigma$ の自然性から次の図式が可換である．

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{1} \arrow[r, "\sigma_{i_0}"] \arrow[d, "0"'] & \mathcal{C}(x, a_0) \arrow[d, "f\bullet-"] \\
\mathbf{2} \arrow[r, "\sigma_j"'] & \mathcal{C}(x, b)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathbf{1} \arrow[r, "\sigma_{i_1}"] \arrow[d, "1"'] & \mathcal{C}(x, a_1) \arrow[d, "g\bullet-"] \\
\mathbf{2} \arrow[r, "\sigma_j"'] & \mathcal{C}(x, b)
\end{tikzcd}
$$

故に $q_0 := \sigma_{i_0}(0)$，$q_1 := \sigma_{i_1}(0)$ と定義すれば $q_k\colon x \longrightarrow a_k$ であり，$\sigma_j(0) = f \circ q_0$，$\sigma_j(1) = g \circ q_1$ である．故に $\lambda := \sigma_j(0 \to 1)\colon f \circ q_0 \Longrightarrow g \circ q_1$ となる．

$$
\begin{tikzcd}
a_1 \arrow[r, "g"] & b \\
x \arrow[u, "q_1"] \arrow[r, "q_0"'] \arrow[ur, phantom, "\Nwarrow\lambda"] & a_0 \arrow[u, "f"']
\end{tikzcd}
$$

これにより $\sigma$ と $\lambda$ を同一視することができる．故に $a_0 \xrightarrow{f} b \xleftarrow{g} a_1$ のコンマ対象とは，対象 $f\downarrow g \in \mathcal{C}$，1-morphism $p_0\colon a_0 \longrightarrow b$，$p_1\colon a_1 \longrightarrow b$，2-morphism $\eta\colon f \circ p_0 \Longrightarrow g \circ p_1$ の四つ組 $\langle f\downarrow g, p_0, p_1, \eta\rangle$，即ち図式

$$
\begin{tikzcd}
a_1 \arrow[r, "g"] & b \\
f\downarrow g \arrow[u, "p_1"] \arrow[r, "p_0"'] \arrow[ur, phantom, "\Nwarrow\eta"] & a_0 \arrow[u, "f"']
\end{tikzcd}
$$

であって「普遍性」を満たすものであると言える．

容易に分かるように，1 次元的普遍性は次のようになる: 別の組 $\langle x, q_0, q_1, \sigma\rangle$ が同じ条

件を満たすならば，1-morphism $h\colon x \longrightarrow f{\downarrow}g$ が一意に存在して次の等号が成り立つ．

$$
\begin{tikzcd}
 & a_1 \arrow[r, "g"] & b \\
 & f{\downarrow}g \arrow[u, "p_1"] \arrow[r, "p_0"'] \arrow[ur, phantom, "\Uparrow\eta"] & a_0 \arrow[u, "f"'] \\
x \arrow[ur, dashed, "h"'] \arrow[uur, bend left, "q_1"] \arrow[urr, bend right, "q_0"'] & &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
 & a_1 \arrow[r, "g"] & b \\
 & & a_0 \arrow[u, "f"'] \\
x \arrow[uur, bend left, "q_1"] \arrow[urr, bend right, "q_0"'] \arrow[uurr, phantom, "\Uparrow\sigma"] & &
\end{tikzcd}
$$

次に 2 次元的普遍性についてみる．$x \in \mathcal{C}$ を対象として $\sigma, \sigma'\colon W \Longrightarrow \mathcal{C}(F-, x)$ を cylinder とする．即ち図式

$$
\begin{tikzcd}
a_1 \arrow[r, "g"] & b \\
x \arrow[u, "q_1"] \arrow[r, "q_0"'] \arrow[ur, phantom, "\Uparrow\sigma"] & a_0 \arrow[u, "f"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
a_1 \arrow[r, "g"] & b \\
x \arrow[u, "q_1'"] \arrow[r, "q_0'"'] \arrow[ur, phantom, "\Uparrow\sigma'"] & a_0 \arrow[u, "f"']
\end{tikzcd}
$$

である．これらに 1 次元的普遍性で対応する $h, h'\colon x \longrightarrow f{\downarrow}g$ を取る．$\Gamma\colon \sigma \Longrightarrow \sigma'$ を modification とする．

$$
\begin{aligned}
\Gamma_{i_0}\colon \sigma_{i_0} \Longrightarrow \sigma'_{i_0}\colon \mathbf{1} \longrightarrow \mathcal{C}(x, a_0),\\
\Gamma_{i_1}\colon \sigma_{i_1} \Longrightarrow \sigma'_{i_1}\colon \mathbf{1} \longrightarrow \mathcal{C}(x, a_1),\\
\Gamma_{j}\colon \sigma_{j} \Longrightarrow \sigma'_{j}\colon \mathbf{2} \longrightarrow \mathcal{C}(x, b)
\end{aligned}
$$

は自然変換である．$\theta := (\Gamma_{i_0})_0\colon q_0 \Longrightarrow q_0'$，$\xi := (\Gamma_{i_1})_0\colon q_1 \Longrightarrow q_1'$ と置く．また modification の定義より，次の等式が成り立つ．

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{1} \arrow[r, bend left, "\sigma_{i_0}"] \arrow[d, "0"'] & \mathcal{C}(x, a_0) \arrow[d, "f\bullet-"] \\
\mathbf{2} \arrow[r, bend left, "\sigma_j"] \arrow[r, bend right, "\sigma_j'"'] \arrow[r, phantom, "\Gamma_j\Downarrow"] & \mathcal{C}(x, b)
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
\mathbf{1} \arrow[r, bend left, "\sigma_{i_0}"] \arrow[r, bend right, "\sigma_{i_0}'"'] \arrow[r, phantom, "\Gamma_{i_0}\Downarrow"] \arrow[d, "0"'] & \mathcal{C}(x, a_0) \arrow[d, "f\bullet-"] \\
\mathbf{2} \arrow[r, bend right, "\sigma_j'"'] & \mathcal{C}(x, b)
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{1} \arrow[r, bend left, "\sigma_{i_1}"] \arrow[d, "1"'] \arrow[dr, phantom, "/\!/"] & \mathcal{C}(x,a_1) \arrow[d, "g\bullet -"] \\
\mathbf{2} \arrow[r, bend left, "\sigma_j"] \arrow[r, bend right, "\sigma'_j"'] \arrow[r, phantom, "\Gamma_j \Downarrow"] & \mathcal{C}(x,b)
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
\mathbf{1} \arrow[r, bend left, "\sigma_{i_1}"] \arrow[r, bend right, "\sigma'_{i_1}"'] \arrow[r, phantom, "\Gamma_{i_1} \Downarrow"] \arrow[d, "1"'] \arrow[dr, phantom, "/\!/"] & \mathcal{C}(x,a_1) \arrow[d, "g\bullet -"] \\
\mathbf{2} \arrow[r, bend right, "\sigma'_j"'] & \mathcal{C}(x,b)
\end{tikzcd}
$$

よって $(\Gamma_j)_0 = f \bullet \theta$，$(\Gamma_j)_1 = g \bullet \xi$ である．また $\Gamma_j \colon \sigma_j \Longrightarrow \sigma'_j$ が自然変換だから，次の図式が可換である．

$$
\begin{tikzcd}
\sigma_j(0) \arrow[r, "(\Gamma_j)_0"] \arrow[d, "\sigma_j(0\to 1)"'] & \sigma'_j(0) \arrow[d, "\sigma'_j(0\to 1)"] \\
\sigma_j(1) \arrow[r, "(\Gamma_j)_1"'] & \sigma'_j(1)
\end{tikzcd}
$$

これは書き換えると

$$
\begin{tikzcd}
f \circ q_0 \arrow[r, "f\bullet\theta"] \arrow[d, "\sigma"'] & f \circ q'_0 \arrow[d, "\sigma'"] \\
g \circ q_1 \arrow[r, "g\bullet\xi"'] & g \circ q'_1
\end{tikzcd}
$$

となる．即ち

$$
\begin{tikzcd}
a_1 \arrow[r, "g"] & b \\
x \arrow[u, bend left, "q'_1"] \arrow[u, bend right, "q_1"'] \arrow[u, phantom, "\overset{\Leftarrow}{\xi}"] \arrow[r, bend right, "q_0"'] \arrow[ur, phantom, "\Uparrow\sigma"] & a_0 \arrow[u, "f"']
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
a_1 \arrow[r, "g"] & b \\
x \arrow[u, bend left, "q'_1"] \arrow[r, bend left, "q'_0"] \arrow[r, bend right, "q_0"'] \arrow[r, phantom, "\Uparrow\theta"] \arrow[ur, phantom, "\Uparrow\sigma'"] & a_0 \arrow[u, "f"']
\end{tikzcd}
$$

である．このとき 2-morphism $\alpha \colon h \Longrightarrow h'$ が一意に存在して $p_1 \bullet \alpha = \xi$，$p_0 \bullet \alpha = \theta$ が成り立つ．

$$
\begin{tikzcd}
a_1 \\
f\downarrow g \arrow[u, "p_1"] \\
x \arrow[u, bend left, "h'"] \arrow[u, bend right, "h"'] \arrow[u, phantom, "\overset{\alpha}{\Leftarrow}"]
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
a_1 \\
x \arrow[u, bend left, "q'_1"] \arrow[u, bend right, "q_1"'] \arrow[u, phantom, "\overset{\xi}{\Leftarrow}"]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
x \arrow[r, bend left, "h'"] \arrow[r, bend right, "h"'] \arrow[r, phantom, "\Uparrow\alpha"] & f\downarrow g \arrow[r, "p_0"] & a_0
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
x \arrow[r, bend left, "q'_0"] \arrow[r, bend right, "q_0"'] \arrow[r, phantom, "\Uparrow\theta"] & a_0
\end{tikzcd}
$$

□

**命題 9.** **Cat** におけるコンマ対象はコンマ圏である．

**証明**. 関手 $F\colon A_0 \longrightarrow B$, $G\colon A_1 \longrightarrow B$ のコンマ圏 $F{\downarrow}G$ を取る．

$$
\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[r, "G"] & B \\
F{\downarrow}G \arrow[u, "P_1"] \arrow[r, "P_0"'] \arrow[ur, phantom, "\Uparrow\eta"] & A_0 \arrow[u, "F"']
\end{tikzcd}
$$

これが 1 次元的普遍性を持つことは既に示したから 2 次元的普遍性を示せばよい．

その為に次の等式が成り立つとする．

$$
\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[r, "G"] & B \\
X \arrow[u, bend left, "Q_1'"] \arrow[u, bend right, "Q_1"'] \arrow[u, phantom, "\xleftarrow{}\xi"] \arrow[r, bend right, "Q_0"'] \arrow[ur, phantom, "\Uparrow\sigma"] & A_0 \arrow[u, "F"']
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[r, "G"] & B \\
X \arrow[u, bend left, "Q_1'"] \arrow[r, bend left, "Q_0'"] \arrow[r, bend right, "Q_0"'] \arrow[r, phantom, "\Uparrow\theta"] \arrow[ur, phantom, "\Uparrow\sigma'"] & A_0 \arrow[u, "F"']
\end{tikzcd}
$$

1 次元的普遍性から $H, H'\colon X \longrightarrow F{\downarrow}G$ が存在して次の等式が成り立つ．

$$
\begin{tikzcd}
& A_1 \arrow[r, "G"] & B \\
& F{\downarrow}G \arrow[u, "P_1"] \arrow[r, "P_0"'] \arrow[ur, phantom, "\Uparrow\eta"] & A_0 \arrow[u, "F"'] \\
X \arrow[uur, bend left, "Q_1"] \arrow[ur, dashed, "H"'] \arrow[urr, bend right, "Q_0"'] & &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
& A_1 \arrow[r, "G"] & B \\
& & A_0 \arrow[u, "F"'] \\
X \arrow[uur, bend left, "Q_1"] \arrow[urr, bend right, "Q_0"'] \arrow[uurr, phantom, "\Uparrow\sigma"] & &
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
& A_1 \arrow[r, "G"] & B \\
& F{\downarrow}G \arrow[u, "P_1"] \arrow[r, "P_0"'] \arrow[ur, phantom, "\Uparrow\eta"] & A_0 \arrow[u, "F"'] \\
X \arrow[uur, bend left, "Q_1'"] \arrow[ur, dashed, "H'"'] \arrow[urr, bend right, "Q_0'"'] & &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
& A_1 \arrow[r, "G"] & B \\
& & A_0 \arrow[u, "F"'] \\
X \arrow[uur, bend left, "Q_1'"] \arrow[urr, bend right, "Q_0'"'] \arrow[uurr, phantom, "\Uparrow\sigma'"] & &
\end{tikzcd}
$$

$x \in X$ に対して $Hx = \langle Q_0x, Q_1x, \sigma_x \rangle$, $H'x = \langle Q_0'x, Q_1'x, \sigma_x' \rangle$ だった．一方上記の等式

から $G\xi_x \circ \sigma_x = \sigma'_x \circ F\theta_x$ である．

$$
\begin{tikzcd}
Q_0x \arrow[d, "\theta_x"'] & FQ_0x \arrow[r, "\sigma_x"] \arrow[d, "F\theta_x"'] & GQ_1x \arrow[d, "G\xi_x"] & Q_1x \arrow[d, "\xi_x"'] \\
Q'_0x & FQ'_0x \arrow[r, "\sigma'_x"'] & GQ'_1x & Q'_1x
\end{tikzcd}
$$

よって $F{\downarrow}G$ の射 $\langle\theta_x,\xi_x\rangle\colon Hx = \langle Q_0x, Q_1x, \sigma_x\rangle \longrightarrow \langle Q'_0x, Q'_1x, \sigma'_x\rangle = H'x$ が得られる．$\alpha_x := \langle\theta_x,\xi_x\rangle$ と置けばこれは自然変換 $\alpha\colon H \Longrightarrow H'$ を与える．

∵) $f\colon x \longrightarrow x'$ を $X$ の射とする．定義から，図式

$$
\begin{tikzcd}
\langle Q_0x, Q_1x, \sigma_x\rangle \arrow[r, "\langle\theta_x,\xi_x\rangle"] \arrow[d, "\langle Q_0f,Q_1f\rangle"'] & \langle Q'_0x, Q'_1x, \sigma'_x\rangle \arrow[d, "\langle Q'_0f,Q'_1f\rangle"] \\
\langle Q_0x', Q_1x', \sigma_{x'}\rangle \arrow[r, "\langle\theta_{x'},\xi_{x'}\rangle"'] & \langle Q'_0x', Q'_1x', \sigma'_{x'}\rangle
\end{tikzcd}
$$

が可換であることを示せばよい．その為には

$$
\begin{tikzcd}
Q_0x \arrow[r, "\theta_x"] \arrow[d, "Q_0f"'] & Q'_0x \arrow[d, "Q'_0f"] & Q_1x \arrow[r, "\xi_x"] \arrow[d, "Q_1f"'] & Q'_1x \arrow[d, "Q'_1f"] \\
Q_0x' \arrow[r, "\theta_{x'}"'] & Q'_0x' & Q_1x' \arrow[r, "\xi_{x'}"'] & Q'_1x'
\end{tikzcd}
$$

が可換であればよいが，それは $\theta,\xi$ が自然変換だから明らか．

$P_1(\alpha)_x = P_1(\alpha_x) = \xi_x$，$P_0(\alpha)_x = P_0(\alpha_x) = \theta_x$ だから等式

$$
\begin{tikzcd}
A_1 \\
F{\downarrow}G \arrow[u, "P_1"] \\
X \arrow[u, bend left=40, "H'"] \arrow[u, bend right=40, "H"'] \arrow[u, phantom, "\overset{\alpha}{\Leftarrow}"]
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
A_1 \\
\\
X \arrow[uu, bend left=30, "Q'_1"] \arrow[uu, bend right=30, "Q_1"'] \arrow[uu, phantom, "\overset{\xi}{\Leftarrow}"]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, bend left, "H'"] \arrow[r, bend right, "H"'] \arrow[r, phantom, "\Uparrow\alpha"] & F{\downarrow}G \arrow[r, "P_0"] & A_0
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, bend left, "Q'_0"] \arrow[r, bend right, "Q_0"'] \arrow[r, phantom, "\Uparrow\theta"] & A_0
\end{tikzcd}
$$

が成り立つ．このような $\alpha$ が一意であることをは明らかである． □

従って定理 4 により

**命題 10.** $f\colon a_0 \longrightarrow b$, $g\colon a_1 \longrightarrow b$ を 1-morphism としてコンマ対象 $\langle f\downarrow g, p_0, p_1, \theta\rangle$ が存在するとする．このとき任意の $x \in \mathcal{C}$ に対して圏同型 $\mathcal{C}(x, f\downarrow g) = \mathcal{C}(x,f)\downarrow\mathcal{C}(x,g)$ が成り立つ．(右辺はコンマ圏である．) □

**命題 11.** $\langle f\downarrow g, p_0, p_1, \eta\rangle$ をコンマ対象とする．次の図式で左の四角が strict 2-pullback $\Longleftrightarrow$ 外側の四角がコンマ対象.

$$\begin{tikzcd}
c \arrow[r, "k"] & a_1 \arrow[r, "g"] & b \\
d \arrow[u, "q_1"] \arrow[r, "q_0"'] \arrow[ur, phantom, "="] & f\downarrow g \arrow[u, "p_1"'] \arrow[r, "p_0"'] \arrow[ur, phantom, "\Nwarrow\eta"] & a_0 \arrow[u, "f"']
\end{tikzcd}$$

**証明**. ($\Longrightarrow$) まず 1 次元的普遍性を示すため，次の図式を考える．

$$\begin{tikzcd}
& c \arrow[r, "k"] & a_1 \arrow[r, "g"] & b \\
& & & a_0 \arrow[u, "f"'] \\
x \arrow[uur, bend left, "k_1"] \arrow[urrr, bend right, "k_0"'] \arrow[uurr, phantom, "\Nwarrow\sigma"] & & &
\end{tikzcd}$$

$f\downarrow g$ の 1 次元的普遍性から，次の $s$ が得られる．

$$\begin{tikzcd}
& c \arrow[r, "k"] & a_1 \arrow[r, "g"] & b \\
& & f\downarrow g \arrow[u, "p_1"] \arrow[r, "p_0"'] \arrow[ur, phantom, "\Nwarrow\eta"] & a_0 \arrow[u, "f"'] \\
x \arrow[uur, bend left, "k_1"] \arrow[urr, dashed, bend right, "s"'] \arrow[urrr, bend right, "k_0"'] \arrow[ur, phantom, "="] & & \arrow[u, phantom, "="] &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
& c \arrow[r, "k"] & a_1 \arrow[r, "g"] & b \\
& & & a_0 \arrow[u, "f"'] \\
x \arrow[uur, bend left, "k_1"] \arrow[urrr, bend right, "k_0"'] \arrow[uurr, phantom, "\Nwarrow\sigma"] & & &
\end{tikzcd}$$

strict 2-pullback の 1 次元的普遍性から，次の $t$ が得られる．

$$\begin{tikzcd}
& c \arrow[r, "k"] & a_1 \arrow[r, "g"] & b \\
& d \arrow[u, "q_1"] \arrow[r, "q_0"'] \arrow[ur, phantom, "="] & f\downarrow g \arrow[u, "p_1"'] \arrow[r, "p_0"'] \arrow[ur, phantom, "\Nwarrow\eta"] & a_0 \arrow[u, "f"'] \\
x \arrow[uur, bend left, "k_1"] \arrow[ur, dashed, "t"'] \arrow[urr, bend right, "s"'] \arrow[urrr, bend right, "k_0"'] \arrow[u, phantom, "="] & \arrow[u, phantom, "="] & \arrow[u, phantom, "="] &
\end{tikzcd}$$

この $t$ の一意性も容易に分かるから，1 次元的普遍性が分かった．2 次元的普遍性を示すため，次の等式を考える．

$$
\begin{tikzcd}
c \arrow[r, "k"] & a_1 \arrow[r, "g"] & b \\
x \arrow[u, bend left, "k_1'"] \arrow[u, bend right, "k_1"'] \arrow[u, phantom, "\Leftarrow\xi"] \arrow[ur, phantom, "\Nwarrow\sigma"] \arrow[rr, bend right, "k_0"'] & & a_0 \arrow[u, "f"']
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
c \arrow[r, "k"] & a_1 \arrow[r, "g"] & b \\
x \arrow[u, bend left, "k_1'"] \arrow[rr, bend left, "k_0'"] \arrow[rr, bend right, "k_0"'] \arrow[rr, phantom, "\Uparrow\theta"] & & a_0 \arrow[u, "f"'] \arrow[ul, phantom, "\Nwarrow\sigma'"]
\end{tikzcd}
$$

$\sigma, \sigma'$ から上記のように $s, t, s', t'$ を取ると次の等式を得る．

$$
\begin{tikzcd}
 & c \arrow[r, "k"] & a_1 \arrow[r, "g"] & b \\
 & d \arrow[u, "q_1"] \arrow[r, "q_0"'] \arrow[ur, phantom, "="] & f{\downarrow}g \arrow[u, "p_1"] \arrow[r, "p_0"'] \arrow[ur, phantom, "\Nwarrow\eta"] & a_0 \arrow[u, "f"'] \\
x \arrow[uur, bend left, "k_1'"] \arrow[ur, "t"'] \arrow[ur, phantom, shift left=6, "\Nwarrow\xi"] \arrow[urr, bend right, "s"'] \arrow[urrr, bend right, "k_0"'] & & &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
 & c \arrow[r, "k"] & a_1 \arrow[r, "g"] & b \\
 & d \arrow[u, "q_1"] \arrow[r, "q_0"'] \arrow[ur, phantom, "="] & f{\downarrow}g \arrow[u, "p_1"] \arrow[r, "p_0"'] \arrow[ur, phantom, "\Nwarrow\eta"] & a_0 \arrow[u, "f"'] \\
x \arrow[uur, bend left, "k_1'"] \arrow[ur, "t'"'] \arrow[urr, bend right, "s'"'] \arrow[urrr, bend right, "k_0"'] & & &
\end{tikzcd}
$$

左辺を書き換えて次の等式を得る．

$$
\begin{tikzcd}
 & c \arrow[r, "k"] & a_1 \arrow[r, "g"] & b \\
 & \Nwarrow k\bullet\xi & f{\downarrow}g \arrow[u, "p_1"] \arrow[r, "p_0"'] \arrow[ur, phantom, "\Nwarrow\eta"] & a_0 \arrow[u, "f"'] \\
x \arrow[uur, bend left, "k_1'"] \arrow[urr, bend right, "s"'] \arrow[urrr, bend right, "k_0"'] & & &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
 & c \arrow[r, "k"] & a_1 \arrow[r, "g"] & b \\
 & d \arrow[u, "q_1"] \arrow[r, "q_0"'] \arrow[ur, phantom, "="] & f{\downarrow}g \arrow[u, "p_1"] \arrow[r, "p_0"'] \arrow[ur, phantom, "\Nwarrow\eta"] & a_0 \arrow[u, "f"'] \\
x \arrow[uur, bend left, "k_1'"] \arrow[ur, "t'"'] \arrow[urr, bend right, "s'"'] \arrow[urrr, bend right, "k_0"'] & & &
\end{tikzcd}
$$

よって $f{\downarrow}g$ の 2 次元的普遍性から，$\alpha\colon s \Longrightarrow s'$ が存在して次の等式が成り立つ．

$$
\begin{tikzcd}
a_1 \\
f{\downarrow}g \arrow[u, "p_1"] \\
x \arrow[u, bend left, "s'"] \arrow[u, bend right, "s"'] \arrow[u, phantom, "\overset{\alpha}{\Leftarrow}"]
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
a_1 \\
x \arrow[u, bend left=50, "k\circ k_1'"] \arrow[u, bend right=50, "p_1\circ s"'] \arrow[u, phantom, "\overset{k\bullet\xi}{\Leftarrow}"]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
x \arrow[r, bend left, "s'"] \arrow[r, bend right, "s"'] \arrow[r, phantom, "\Uparrow\alpha"] & f{\downarrow}g \arrow[r, "p_0"] & a_0
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
x \arrow[r, bend left, "k_0'"] \arrow[r, bend right, "k_0"'] \arrow[r, phantom, "\Uparrow\theta"] & a_0
\end{tikzcd}
$$

このとき次の等式を得る.

$$
\begin{tikzcd}
 & c \arrow[r, "k"] & a_1 \\
 & d \arrow[u, "q_1"] \arrow[r, "q_0"'] \arrow[ur, phantom, "="] & f\downarrow g \arrow[u, "p_1"'] \\
x \arrow[ur, "t"'] \arrow[uur, bend left, "k_1'"] \arrow[urr, bend right, "s"'] \arrow[uu, phantom, "\Uparrow\xi"] \arrow[urr, phantom, "="]
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
 & c \arrow[r, "k"] & a_1 \\
 & d \arrow[u, "q_1"] \arrow[r, "q_0"'] \arrow[ur, phantom, "="] & f\downarrow g \arrow[u, "p_1"'] \\
x \arrow[ur, "t'"'] \arrow[uur, bend left, "k_1'"] \arrow[urr, bend right, "s"'] \arrow[uu, phantom, "="] \arrow[urr, phantom, "\Uparrow\alpha"]
\end{tikzcd}
$$

よって strict 2-pullback の普遍性から $\beta\colon t \Longrightarrow t'$ が存在して次の等式を満たす.

$$
\begin{tikzcd}
c \\
d \arrow[u, "q_1"] \\
x \arrow[u, bend left=40, "t'"] \arrow[u, bend right=40, "t"'] \arrow[u, phantom, "\overset{\beta}{\Leftarrow}"]
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
c \\
x \arrow[u, bend left=30, "k_1'"] \arrow[u, bend right=30, "k_1"'] \arrow[u, phantom, "\overset{\xi}{\Leftarrow}"]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
x \arrow[r, bend left, "t'"] \arrow[r, bend right, "t"'] \arrow[r, phantom, "\Uparrow\beta"] & d \arrow[r, "q_0"] & f\downarrow g
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
x \arrow[r, bend left, "s'"] \arrow[r, bend right, "s"'] \arrow[r, phantom, "\Uparrow\alpha"] & f\downarrow g
\end{tikzcd}
$$

このとき

$$
\begin{tikzcd}
x \arrow[r, bend left, "t'"] \arrow[r, bend right, "t"'] \arrow[r, phantom, "\Uparrow\beta"] & d \arrow[r, "q_0"] & f\downarrow g \arrow[r, "p_0"] & a_0
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
x \arrow[r, bend left, "k_0'"] \arrow[r, bend right, "k_0"'] \arrow[r, phantom, "\Uparrow\theta"] & a_0
\end{tikzcd}
$$

である. このような $\beta$ の一意性も分かるから, 2 次元的普遍性が成り立つことが分かった.

($\Longleftarrow$) まず strict 2-pullback の 1 次元的普遍性を示すため, 次の図式を考える.

$$
\begin{tikzcd}
 & c \arrow[r, "k"] & a_1 \\
 & & f\downarrow g \arrow[u, "p_1"'] \\
x \arrow[uur, bend left, "k_1"] \arrow[urr, bend right, "k_0"'] \arrow[ur, phantom, "="]
\end{tikzcd}
$$

コンマ対象 $d$ の 1 次元的普遍性から次の $t$ を得る．

$$
\begin{tikzcd}
 & c \arrow[r, "k"] & a_1 \arrow[r, "g"] \arrow[dr, phantom, "\Uparrow\eta"] & b \\
 & d \arrow[u, "q_1"] \arrow[r, "q_0"'] \arrow[ur, phantom, "="] & f\downarrow g \arrow[u, "p_1"] \arrow[r, "p_0"'] & a_0 \arrow[u, "f"'] \\
x \arrow[uur, bend left, "k_1"] \arrow[ur, dashed, "t"'] \arrow[urrr, bend right, "p_0\circ k_0"'] \arrow[u, phantom, "="] \arrow[urr, phantom, "="] & & &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
 & c \arrow[r, "k"] & a_1 \arrow[r, "g"] \arrow[dr, phantom, "\Uparrow\eta"] & b \\
 & & f\downarrow g \arrow[u, "p_1"] \arrow[r, "p_0"'] & a_0 \arrow[u, "f"'] \\
 & x \arrow[uu, bend left, "k_1"] \arrow[ur, bend right, "k_0"'] \arrow[u, phantom, "="] & &
\end{tikzcd}
$$

このときコンマ対象 $f\downarrow g$ の 1 次元的普遍性から $q_0 \circ t = k_0$ となるから，次の図式を得る．

$$
\begin{tikzcd}
 & c \arrow[r, "k"] & a_1 \\
 & d \arrow[u, "q_1"] \arrow[r, "q_0"'] \arrow[ur, phantom, "="] & f\downarrow g \arrow[u, "p_1"'] \\
x \arrow[uur, bend left, "k_1"] \arrow[ur, "t"'] \arrow[urr, bend right, "k_0"'] \arrow[u, phantom, "="] \arrow[urr, phantom, "="] & &
\end{tikzcd}
$$

コンマ対象 $d$ の 1 次元的普遍性から，このような $t$ の一意性も分かる．故に strict 2-pullback の 1 次元的普遍性が成り立つことが分かった．

　2 次元的普遍性を示すため，次の等式が成り立つとする．

$$
\begin{tikzcd}
c \arrow[r, "k"] & a_1 \\
x \arrow[u, bend left=40, "k_1'"] \arrow[u, bend right=40, "k_1"'] \arrow[u, phantom, "\overset{\Leftarrow}{\xi}"] \arrow[r, bend right, "k_0"'] \arrow[ur, phantom, "="] & f\downarrow g \arrow[u, "p_1"']
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
c \arrow[r, "k"] & a_1 \\
x \arrow[u, bend left, "k_1'"] \arrow[r, bend left, "k_0'"] \arrow[r, bend right, "k_0"'] \arrow[r, phantom, "\Uparrow\theta"] \arrow[ur, phantom, "="] & f\downarrow g \arrow[u, "p_1"']
\end{tikzcd}
$$

上記で示した通り次の $t, t'$ を得る．

$$
\begin{tikzcd}
 & c \arrow[r, "k"] & a_1 \\
 & d \arrow[u, "q_1"] \arrow[r, "q_0"'] \arrow[ur, phantom, "="] & f\downarrow g \arrow[u, "p_1"'] \\
x \arrow[uur, bend left, "k_1"] \arrow[ur, dashed, "t"'] \arrow[urr, bend right, "k_0"'] \arrow[u, phantom, "="] \arrow[urr, phantom, "="] & &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & c \arrow[r, "k"] & a_1 \\
 & d \arrow[u, "q_1"] \arrow[r, "q_0"'] \arrow[ur, phantom, "="] & f\downarrow g \arrow[u, "p_1"'] \\
x \arrow[uur, bend left, "k_1'"] \arrow[ur, dashed, "t'"'] \arrow[urr, bend right, "k_0'"'] \arrow[u, phantom, "="] \arrow[urr, phantom, "="] & &
\end{tikzcd}
$$

等式

$$
\begin{tikzcd}
c \arrow[r, "k"] & a_1 \arrow[r, "g"] & b \\
x \arrow[u, bend left, "k_1'"] \arrow[u, bend right, "k_1"'] \arrow[u, phantom, "\overset{\Leftarrow}{\xi}"] \arrow[ur, phantom, "="] \arrow[r, bend right, "k_0"'] & f\downarrow g \arrow[u, "p_1"'] \arrow[r, "p_0"'] \arrow[ur, phantom, "\Nwarrow\eta"] & a_0 \arrow[u, "f"']
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
c \arrow[r, "k"] & a_1 \arrow[r, "g"] & b \\
x \arrow[u, bend left, "k_1'"] \arrow[ur, phantom, "="] \arrow[r, bend left, "k_0'"] \arrow[r, bend right, "k_0"'] \arrow[r, phantom, "\Uparrow\theta"] & f\downarrow g \arrow[u, "p_1"'] \arrow[r, "p_0"'] \arrow[ur, phantom, "\Nwarrow\eta"] & a_0 \arrow[u, "f"']
\end{tikzcd}
$$

が成り立つから，コンマ対象 $d$ の 2 次元的普遍性により $\alpha\colon s \Longrightarrow s'$ が存在して次の等式が成り立つ．

$$
\begin{tikzcd}
c \\
d \arrow[u, "q_1"] \\
x \arrow[u, bend left, "t'"] \arrow[u, bend right, "t"'] \arrow[u, phantom, "\overset{\alpha}{\Leftarrow}"]
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
c \\
x \arrow[u, bend left, "k_1'"] \arrow[u, bend right, "k_1"'] \arrow[u, phantom, "\overset{\xi}{\Leftarrow}"]
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
x \arrow[r, bend left, "t'"] \arrow[r, bend right, "t"'] \arrow[r, phantom, "\Uparrow\alpha"] & d \arrow[r, "q_0"] & f\downarrow g \arrow[r, "p_0"] & a_0
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
x \arrow[r, bend left, "k_0'"] \arrow[r, bend right, "k_0"'] \arrow[r, phantom, "\Uparrow\theta"] & f\downarrow g \arrow[r, "p_0"] & a_0
\end{tikzcd}
$$

このとき

$$
\begin{tikzcd}
 & & a_1 \\
x \arrow[r, bend left, "t'"] \arrow[r, bend right, "t"'] \arrow[r, phantom, "\Uparrow\alpha"] & d \arrow[r, "q_0"'] & f\downarrow g \arrow[u, "p_1"']
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
 & c \arrow[r, "k"] & a_1 \\
x \arrow[r, bend left, "t'"] \arrow[r, bend right, "t"'] \arrow[r, phantom, "\Uparrow\alpha"] & d \arrow[u, "q_1"]
\end{tikzcd}
$$

$$
= \quad
\begin{tikzcd}
c \arrow[r, "k"] & a_1 \\
x \arrow[u, bend left, "k_1'"] \arrow[u, bend right, "k_1"'] \arrow[u, phantom, "\overset{\xi}{\Leftarrow}"]
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
 & a_1 \\
x \arrow[r, bend left, "k_0'"] \arrow[r, bend right, "k_0"'] \arrow[r, phantom, "\Uparrow\theta"] & f\downarrow g \arrow[u, "p_1"']
\end{tikzcd}
$$

となるから $f\downarrow g$ の 2 次元的普遍性より

$$
\begin{tikzcd}
x \arrow[r, bend left, "t'"] \arrow[r, bend right, "t"'] \arrow[r, phantom, "\Uparrow\alpha"] & d \arrow[r, "q_0"] & f\downarrow g
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
x \arrow[r, bend left, "k_0'"] \arrow[r, bend right, "k_0"'] \arrow[r, phantom, "\Uparrow\theta"] & f\downarrow g
\end{tikzcd}
$$

が分かる．$\alpha$ の一意性も分かるので，strict 2-pullback の 2 次元的普遍性が成り立つことが分かった． $\square$

**系 12.** 任意の strict 2-pullback が存在し，また任意の $a \in \mathcal{C}$ に対して $\mathrm{id}_a{\downarrow}\mathrm{id}_a$ が存在するとする．このとき任意のコンマ対象が存在する．

**証明**. $f\colon a_0 \longrightarrow b$, $g\colon a_1 \longrightarrow b$ とする．$p_0\colon \mathrm{id}_b{\downarrow}\mathrm{id}_b \longrightarrow b$ と $f$ の strict 2-pullback を取ればそれはコンマ対象 $f{\downarrow}\mathrm{id}_b$ となる．更に $p_1 \circ q_1$ と $g$ の strict 2-pullback を取れば $f{\downarrow}g$ を得る．

$$
\begin{tikzcd}
a_1 \arrow[r, "g"] & b \arrow[r, "\mathrm{id}_b"] \arrow[dr, phantom, "\Nwarrow"] & b \\
 & \mathrm{id}_b{\downarrow}\mathrm{id}_b \arrow[u, "p_1"] \arrow[r, "p_0"'] \arrow[dr, phantom, "="] \arrow[ul, phantom, "="] & b \arrow[u, "\mathrm{id}_b"'] \\
f{\downarrow}g \arrow[uu] \arrow[r] & f{\downarrow}\mathrm{id}_b \arrow[u, "q_1"] \arrow[r, "q_0"'] & a_0 \arrow[u, "f"']
\end{tikzcd}
$$

□

**例 13.** **Cat** では $\mathrm{id}_B{\downarrow}\mathrm{id}_B = B^{\mathbf{2}}$ であった．よって $F\colon A_0 \longrightarrow B$, $G\colon A_1 \longrightarrow B$ のコンマ圏 $F{\downarrow}G$ は次の図式の極限として得られる．

$$
\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[r, "G"] & B & \\
 & B^{\mathbf{2}} \arrow[u, "\mathrm{cod}"] \arrow[r, "\mathrm{dom}"'] & B \\
 & & A_0 \arrow[u, "F"']
\end{tikzcd}
$$

□

weighted colimit についても同様である．weighted colimit とは $\mathcal{C}(\mathrm{colim}^W F, a) = \widehat{\mathcal{J}}(W, \mathcal{C}(F-, a))$ となる $\mathrm{colim}^W F$ であった．strict natural transformation $W \Longrightarrow \mathcal{C}(F-, a)$ も cylinder と呼び，$\eta\colon W \Longrightarrow \mathcal{C}(\mathrm{colim}^W F, F-)$ も unit と呼べば，weighted colimit とは 1 次元的普遍性と 2 次元的普遍性を満たす cylinder のことである．また $\mathbf{Cat}(\mathrm{colim}^W F, C) \cong \lim^W(\mathbf{Cat}(F-, C))$ が成り立つ．

weighted limit の定義に使っている $[\mathcal{J}, \mathbf{Cat}]$ は **Cat**-豊穣圏としての関手圏，つまり strict 2-functor，strict natural transformation，modification がなす 2-category である．この部分を別の関手圏に変えたものを考えることができる．つまり $\mathrm{Fun}_{\mathrm{ps}}(\mathcal{J}, \mathbf{Cat})$, $\mathrm{Fun}_{\mathrm{lax}}(\mathcal{J}, \mathbf{Cat})$ である．

**定義.** $\mathcal{J}$ を small 2-category，$W\colon \mathcal{J} \longrightarrow \mathbf{Cat}$，$F\colon \mathcal{J} \longrightarrow \mathcal{C}$ を strict 2-functor，即ち $\mathbf{Cat}$-関手とする.

(1) pseudo limit とは $a \in \mathcal{C}$ に関して自然な圏同型

$$\varphi\colon \mathcal{C}(a, \lim^W_{\mathrm{ps}} F) \longrightarrow \mathrm{Fun}_{\mathrm{ps}}(\mathcal{J}, \mathbf{Cat})(W, \mathcal{C}(a, F-))$$

が成り立つ対象 $\lim^W_{\mathrm{ps}} F \in \mathcal{C}$ である.

(2) lax limit とは $a \in \mathcal{C}$ に関して自然な圏同型

$$\varphi\colon \mathcal{C}(a, \lim^W_{\mathrm{lax}} F) \longrightarrow \mathrm{Fun}_{\mathrm{lax}}(\mathcal{J}, \mathbf{Cat})(W, \mathcal{C}(a, F-))$$

が成り立つ対象 $\lim^W_{\mathrm{lax}} F \in \mathcal{C}$ である.

pseudo colimit，lax colimit も同様に定義される.

## 参考文献

[1] G. M. Kelly, elementary observations on 2-Categorical Limits, Bull. Austral. Math. Soc. vol. 39 (1989), 301–317, `http://dx.doi.org/10.1017/S0004972700002781`