2-category での Kan 拡張

alg-d
http://alg-d.com/math/kan_extension/

2017 年 2 月 12 日

この PDF では $\mathcal{C}$ を strict 2-category とする．

1 随伴・Kan 拡張・忠実充満

定義. $f\colon a \longrightarrow b$，$u\colon b \longrightarrow a$ を $\mathcal{C}$ の 1-morphism とする．組 $\langle f, u\rangle$ が随伴であるとは，$\mathcal{C}$ の 2-morphism $\eta\colon \mathrm{id}_a \Longrightarrow u \circ f$，$\varepsilon\colon f \circ u \Longrightarrow \mathrm{id}_b$ が存在して，次の等号が成り立つことを言う．

$$\begin{tikzcd} & b \arrow[rr, "\mathrm{id}_b"] \arrow[dr, "u"] \arrow[d, phantom, "\Uparrow\eta"] & & b \\ a \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "\mathrm{id}_a"'] & & a \arrow[ur, "f"'] \arrow[u, phantom, "\Uparrow\varepsilon"] & \end{tikzcd} = \begin{tikzcd} & b \arrow[rr, "\mathrm{id}_b"] \arrow[dr, phantom, "\Uparrow\mathrm{id}_f"] & & b \\ a \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "\mathrm{id}_a"'] & & a \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} b \arrow[rr, "\mathrm{id}_b"] \arrow[dr, "u"'] & & b \arrow[dr, "u"] \arrow[d, phantom, "\Uparrow\eta"] & \\ & a \arrow[ur, "f"'] \arrow[rr, "\mathrm{id}_a"'] \arrow[u, phantom, "\Uparrow\varepsilon"] & & a \end{tikzcd} = \begin{tikzcd} b \arrow[rr, "\mathrm{id}_b"] \arrow[dr, "u"'] & & b \arrow[dr, "u"] \arrow[dl, phantom, "\Uparrow\mathrm{id}_u"] & \\ & a \arrow[rr, "\mathrm{id}_a"'] & & a \end{tikzcd}$$

随伴を記号 $f \dashv u\colon a \longrightarrow b$ もしくは単に $f \dashv u$ で表し，f を u の左随伴，u を f の右随伴，η を unit，ε を counit と呼ぶ．

命題 1. $f\colon a \longrightarrow b$ の右随伴は，もし存在すれば，同型を除いて一意である．

証明. $f \dashv u$，$f \dashv u'$ を随伴として，それぞれの unit，counit を $\eta, \varepsilon, \eta', \varepsilon'$ とする．この

とき $\varphi\colon u \Longrightarrow u'$，$\psi\colon u' \Longrightarrow u$ を

$$
\begin{tikzcd}
b \arrow[rr, "\mathrm{id}_b"] \arrow[dr, "u"'] & & b \arrow[dr, "u'"] & \\
& a \arrow[rr, "\mathrm{id}_a"'] \arrow[ur, phantom, "\Uparrow\varphi"] & & a
\end{tikzcd}
\quad := \quad
\begin{tikzcd}
b \arrow[rr, "\mathrm{id}_b"] \arrow[dr, "u"'] \arrow[dr, phantom, bend left, "\Uparrow\varepsilon"] & & b \arrow[dr, "u'"] & \\
& a \arrow[ur, "f"'] \arrow[rr, "\mathrm{id}_a"'] \arrow[rr, phantom, bend left, "\Uparrow\eta'"] & & a
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
b \arrow[rr, "\mathrm{id}_b"] \arrow[dr, "u'"'] & & b \arrow[dr, "u"] & \\
& a \arrow[rr, "\mathrm{id}_a"'] \arrow[ur, phantom, "\Uparrow\psi"] & & a
\end{tikzcd}
\quad := \quad
\begin{tikzcd}
b \arrow[rr, "\mathrm{id}_b"] \arrow[dr, "u'"'] \arrow[dr, phantom, bend left, "\Uparrow\varepsilon'"] & & b \arrow[dr, "u"] & \\
& a \arrow[ur, "f"'] \arrow[rr, "\mathrm{id}_a"'] \arrow[rr, phantom, bend left, "\Uparrow\eta"] & & a
\end{tikzcd}
$$

で定義すれば，$\psi \circ \varphi = \mathrm{id}_u$，$\varphi \circ \psi = \mathrm{id}_{u'}$ となることが分かる．実際，$\psi \circ \varphi = \mathrm{id}_u$ については

$$
\begin{tikzcd}
b \arrow[rr, "\mathrm{id}_b"] \arrow[dr, "u"'] & & b \arrow[rr, "\mathrm{id}_b"] \arrow[dr, "u'"] & & b \arrow[dr, "u"] & \\
& a \arrow[rr, "\mathrm{id}_a"'] \arrow[ur, phantom, "\Uparrow\varphi"] & & a \arrow[rr, "\mathrm{id}_a"'] \arrow[ur, phantom, "\Uparrow\psi"] & & a
\end{tikzcd}
$$

$$
= \quad
\begin{tikzcd}
b \arrow[rr, "\mathrm{id}_b"] \arrow[dr, "u"'] \arrow[dr, phantom, bend left, "\Uparrow\varepsilon"] & & b \arrow[rr, "\mathrm{id}_b"] \arrow[dr, "u'"] \arrow[dr, phantom, bend left, "\Uparrow\varepsilon'"] & & b \arrow[dr, "u"] & \\
& a \arrow[ur, "f"'] \arrow[rr, "\mathrm{id}_a"'] \arrow[rr, phantom, bend left, "\Uparrow\eta'"] & & a \arrow[ur, "f"'] \arrow[rr, "\mathrm{id}_a"'] \arrow[rr, phantom, bend left, "\Uparrow\eta"] & & a
\end{tikzcd}
$$

$$
= \quad
\begin{tikzcd}
b \arrow[rr, "\mathrm{id}_b"] \arrow[dr, "u"'] & & b \arrow[rr, "\mathrm{id}_b"] & & b \arrow[dr, "u"] & \\
& a \arrow[rr, "\mathrm{id}_a"'] & & a \arrow[rr, "\mathrm{id}_a"'] \arrow[u, phantom, "\Uparrow\mathrm{id}_u"] & & a
\end{tikzcd}
$$

となる．$\varphi \circ \psi = \mathrm{id}_{u'}$ についても同様である．故に $u \cong u'$ である． □

命題 2. $f \dashv u\colon a \longrightarrow b$，$f' \dashv u'\colon b \longrightarrow c$ とするとき $f' \circ f \dashv u \circ u'\colon a \longrightarrow c$ である．

$$
\begin{tikzcd}
a \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & b \arrow[l, bend left, "u"] \arrow[r, bend left, "f'"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & c \arrow[l, bend left, "u'"]
\end{tikzcd}
$$

証明. $f \dashv u$，$f' \dashv u'$ の unit，counit をそれぞれ $\eta, \varepsilon, \eta', \varepsilon'$ とする．η'', ε'' を以下の合成

で定める．

$$
\begin{tikzcd}
 & & c \arrow[dr, "u'"] & & \\
 & b \arrow[ur, "f'"] & \Uparrow \eta'' & b \arrow[dr, "u"] & \\
a \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "\mathrm{id}_a"'] & & a \arrow[rr, "\mathrm{id}_a"'] & & a
\end{tikzcd}
\quad := \quad
\begin{tikzcd}
 & & c \arrow[dr, "u'"] \arrow[d, phantom, "\Uparrow \eta'"] & & \\
 & b \arrow[ur, "f'"] \arrow[rr, "\mathrm{id}_b"] \arrow[dr, "u"] \arrow[d, phantom, "\Uparrow \eta"] & \Uparrow \varepsilon & b \arrow[dr, "u"] \arrow[d, phantom, "\Uparrow \eta"] & \\
a \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "\mathrm{id}_a"'] & & a \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "\mathrm{id}_a"'] & & a
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
c \arrow[rr, "\mathrm{id}_c"] \arrow[dr, "u'"'] & & c \arrow[rr, "\mathrm{id}_c"] & & c \\
 & b \arrow[dr, "u"'] & \Uparrow \varepsilon'' & b \arrow[ur, "f'"'] & \\
 & & a \arrow[ur, "f"'] & &
\end{tikzcd}
\quad := \quad
\begin{tikzcd}
c \arrow[rr, "\mathrm{id}_c"] \arrow[dr, "u'"'] \arrow[r, phantom, "\Uparrow \varepsilon'"] & & c \arrow[rr, "\mathrm{id}_c"] \arrow[dr, "u'"] \arrow[d, phantom, "\Uparrow \eta'"] \arrow[r, phantom, "\Uparrow \varepsilon'"] & & c \\
 & b \arrow[ur, "f'"] \arrow[rr, "\mathrm{id}_b"] \arrow[dr, "u"'] & \Uparrow \varepsilon & b \arrow[ur, "f'"'] & \\
 & & a \arrow[ur, "f"'] & &
\end{tikzcd}
$$

このとき明らかに，η'', ε'' が $f' \circ f \dashv u \circ u'$ の unit，counit を与える． □

命題 3. $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ を strict 2-category，$F \colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ を pseudofunctor とする．$f \dashv u \colon a \longrightarrow b$ が $\mathcal{C}$ での随伴のとき，$\mathcal{D}$ での随伴 $Ff \dashv Fu \colon Fa \longrightarrow Fb$ が成り立つ．(即ち pseudofunctor は随伴を保つ．)

証明. $f \dashv u \colon a \longrightarrow b$ を随伴として，unit を η，counit を ε とする．$F \colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ を pseudofunctor とすると，自然な同型 $\varphi_{gf} \colon Fg \circ Ff \Longrightarrow F(g \circ f)$ と同型 $\psi_a \colon \mathrm{id}_{Fa} \Longrightarrow F(\mathrm{id}_a)$ が与えられているのであった．$\eta' \colon \mathrm{id}_{Fa} \Longrightarrow Fu \circ Ff$ と $\varepsilon' \colon Ff \circ Fu \Longrightarrow \mathrm{id}_{Fb}$ を $\eta' := \varphi_{uf}^{-1} \circ F\eta \circ \psi_a$，$\varepsilon' := \psi_b^{-1} \circ F\varepsilon \circ \varphi_{fu}$ で定める．この η', ε' が $Ff \dashv Fu$ の unit，counit を与える． □

系 4. $f \dashv u \colon a \longrightarrow b$ ならば $x \in \mathcal{C}$ に対して $\mathcal{C}(x, f) \dashv \mathcal{C}(x, u) \colon \mathcal{C}(x, a) \longrightarrow \mathcal{C}(x, b)$. □

定義. $a, b, c \in \mathcal{C}$ を対象，$f \colon a \longrightarrow b$，$g \colon a \longrightarrow c$ を 1-morphism とする．f に沿った g の左 Kan 拡張とは組 $\langle l, \eta \rangle$ であって，以下の条件を満たすものである．

(1) l は 1-morphism $b \longrightarrow c$ で，η は 2-morphism $g \Longrightarrow l \circ f$ である．

$$
\begin{tikzcd}
b \arrow[dr, "l"] & \\
a \arrow[u, "f"] \arrow[r, "g"'] \arrow[ur, phantom, "\eta \Uparrow"] & c
\end{tikzcd}
$$

(2) 他に 1-morphism $k\colon b \longrightarrow c$ と 2-morphism $\theta\colon g \Longrightarrow k \circ f$ が存在したとき，2-morphism $\tau\colon l \Longrightarrow k$ が一意に存在して次の等式が成り立つ．

$$\begin{tikzcd} b \arrow[dr, "l"'] \arrow[dr, bend left=50, "k"] \arrow[dr, phantom, bend left=25, "\overset{\tau}{\Uparrow}"] & \\ a \arrow[u, "f"] \arrow[r, "g"'] \arrow[ur, phantom, "\eta\Uparrow"] & c \end{tikzcd} = \begin{tikzcd} b \arrow[dr, bend left=50, "k"] & \\ a \arrow[u, "f"] \arrow[r, "g"'] \arrow[ur, phantom, "\theta\Uparrow"] & c \end{tikzcd}$$

$\langle l, \eta \rangle$ が f に沿った g の左 Kan 拡張のとき，記号で $f^{\dagger}g = \langle l, \eta \rangle$ と書くことにする．もしくは単に，l のことを $f^{\dagger}g$ で表すこともある．また $\mathcal{C}^{\mathrm{co}}$ での左 Kan 拡張を右 Kan 拡張，$\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ での左 Kan 拡張を左 Kan リフト，$\mathcal{C}^{\mathrm{coop}}$ での左 Kan 拡張を右 Kan リフトという．記号ではそれぞれ $f^{\ddagger}g, f_{\dagger}g, f_{\ddagger}g$ で表すことにする．

$$\begin{tikzcd} b \arrow[dr, "f^{\ddagger}g"] & \\ a \arrow[u, "f"] \arrow[r, "g"'] \arrow[ur, phantom, "\Downarrow"] & c \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} b \arrow[d, "f"'] & \\ a \arrow[ur, phantom, "\Uparrow"] & c \arrow[ul, "f_{\dagger}g"'] \arrow[l, "g"] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} b \arrow[d, "f"'] & \\ a \arrow[ur, phantom, "\Downarrow"] & c \arrow[ul, "f_{\ddagger}g"'] \arrow[l, "g"] \end{tikzcd}$$

定義. $f\colon a \longrightarrow b$，$g\colon a \longrightarrow c$ を 1-morphism として左 Kan 拡張 $f^{\dagger}g = \langle l, \eta \rangle$ が存在するとする．1-morphism $h\colon c \longrightarrow x$ が左 Kan 拡張 $f^{\dagger}g$ と交換するとは，$\langle h \circ l, h \bullet \eta \rangle$ が f に沿った $h \circ g$ の左 Kan 拡張になることを言う．

$$\begin{tikzcd} b \arrow[dr, "l"] & & \\ & c \arrow[dr, "h"] & \\ a \arrow[uu, "f"] \arrow[r, "g"'] \arrow[ur, phantom, "h\bullet\eta\Uparrow"] & c \arrow[r, "h"'] & x \end{tikzcd}$$

右 Kan 拡張・左 Kan リフト・右 Kan リフトと交換する，も同様に定義する．[*1]

定義. $f\colon a \longrightarrow b$，$g\colon a \longrightarrow c$ を 1-morphism とする．任意の 1-morphism $h\colon c \longrightarrow x$ と交換する左 Kan 拡張 $f^{\dagger}g$ を絶対左 Kan 拡張という．また絶対右 Kan 拡張，絶対左 Kan リフト，絶対右 Kan リフトも同様に定義する．

定義から次の同値が分かる．

[*1] 英語だと Kan 拡張と交換するは preserved by で Kan リフトと交換するは respected by と言うようだが，ここでは気にせずどちらも交換すると言う事にする．

命題 5. $f\colon a \longrightarrow b$, $g\colon a \longrightarrow c$, $l\colon b \longrightarrow c$ を 1-morphism, $\eta\colon g \Longrightarrow l\circ f$ を 2-morphism とする.

$$\begin{tikzcd} b \arrow[dr, "l"] & \\ a \arrow[u, "f"] \arrow[r, "g"'] \arrow[ur, phantom, "\eta\Uparrow" near start] & c \end{tikzcd}$$

$\langle l, \eta\rangle$ が f に沿った g の絶対左 Kan 拡張である

$\Longleftrightarrow$ 任意の $x \in \mathcal{C}$ と 1-morphism $k\colon b \longrightarrow x$, $h\colon c \longrightarrow x$, 2-morphism $\theta\colon h\circ g \Longrightarrow k\circ f$ に対して，ある 2-morphism $\tau\colon h\circ l \Longrightarrow k$ が一意に存在して，次の等式が成り立つ.

$$\begin{tikzcd} b \arrow[r, "k"] \arrow[dr, "l"] & x \\ a \arrow[u, "f"] \arrow[r, "g"'] \arrow[ur, phantom, "\eta\Uparrow" near start] & c \arrow[u, "h"'] \arrow[ul, phantom, "\tau\Uparrow" near start] \end{tikzcd} = \begin{tikzcd} b \arrow[r, "k"] & x \\ a \arrow[u, "f"] \arrow[r, "g"'] \arrow[ur, phantom, "\theta\Uparrow"] & c \arrow[u, "h"'] \end{tikzcd}$$

□

定理 6. $f\colon a \longrightarrow b$ を 1-morphism とするとき，以下の条件は同値である.

(1) f が右随伴を持つ.
(2) 絶対左 Kan 拡張 $\langle f^\dagger \mathrm{id}_a, \eta\rangle$ が存在する.
(3) 左 Kan 拡張 $\langle f^\dagger \mathrm{id}_a, \eta\rangle$ が存在し，f が $f^\dagger \mathrm{id}_a$ と交換する.

$$\begin{tikzcd} b \arrow[dr, "f^\dagger \mathrm{id}_a"] & & \\ a \arrow[u, "f"] \arrow[r, "\mathrm{id}_a"'] \arrow[ur, phantom, "\eta\Uparrow" near start] & a \arrow[r, "f"] & b \end{tikzcd}$$

またこのとき $f \dashv f^\dagger \mathrm{id}_a$ であり η がその unit である.

証明. $(1 \Longrightarrow 2)$ f の右随伴を u，unit を η，counit を ε とする．任意の対象 $x \in \mathcal{C}$ と 1-morphism $k\colon a \longrightarrow x$, $h\colon b \longrightarrow x$, 2-morphism $\theta\colon k \Longrightarrow h\circ f$ を取る．$\tau\colon k\circ u \Longrightarrow h$

を合成

$$
\begin{tikzcd}
b \arrow[r, "\mathrm{id}_b"] \arrow[dr, "u"'] & b \arrow[r, "h"] & x \\
 & a \arrow[u, "f"] \arrow[r, "\mathrm{id}_a"'] \arrow[ul, phantom, "\varepsilon\Uparrow"'] \arrow[ur, phantom, "\theta\Uparrow"] & a \arrow[u, "k"']
\end{tikzcd}
$$

で定めれば

$$
\begin{tikzcd}
b \arrow[r, "h"] \arrow[dr, "u"] & x \\
a \arrow[u, "f"] \arrow[r, "\mathrm{id}_a"'] \arrow[ur, phantom, "\eta\Uparrow" near start, "\tau\Uparrow" near end] & a \arrow[u, "k"']
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
b \arrow[r, "\mathrm{id}_b"] \arrow[dr, "u"] & b \arrow[r, "h"] & x \\
a \arrow[u, "f"] \arrow[r, "\mathrm{id}_a"'] \arrow[ur, phantom, "\eta\Uparrow" near start, "\varepsilon\Uparrow" near end] & a \arrow[u, "f"] \arrow[r, "\mathrm{id}_a"'] \arrow[ur, phantom, "\theta\Uparrow"] & a \arrow[u, "k"']
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
b \arrow[r, "h"] & x \\
a \arrow[u, "f"] \arrow[r, "\mathrm{id}_a"'] \arrow[ur, phantom, "\theta\Uparrow"] & a \arrow[u, "k"']
\end{tikzcd}
$$

である．逆に τ が

$$
\begin{tikzcd}
b \arrow[r, "h"] \arrow[dr, "u"] & x \\
a \arrow[u, "f"] \arrow[r, "\mathrm{id}_a"'] \arrow[ur, phantom, "\eta\Uparrow" near start, "\tau\Uparrow" near end] & a \arrow[u, "k"']
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
b \arrow[r, "h"] & x \\
a \arrow[u, "f"] \arrow[r, "\mathrm{id}_a"'] \arrow[ur, phantom, "\theta\Uparrow"] & a \arrow[u, "k"']
\end{tikzcd}
$$

を満たせば

$$
\begin{tikzcd}
b \arrow[r, "h"] \arrow[dr, "u"'] \arrow[dr, phantom, "\tau\Uparrow", bend left] & x \\
 & a \arrow[u, "k"']
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
b \arrow[r, "\mathrm{id}_b"] \arrow[dr, "u"'] & b \arrow[r, "h"] \arrow[dr, "u"] & b \\
 & a \arrow[u, "f"'] \arrow[r, "\mathrm{id}_a"'] \arrow[ul, phantom, "\varepsilon\Uparrow"'] \arrow[ur, phantom, "\eta\Uparrow" near start, "\tau\Uparrow" near end] & a \arrow[u, "k"']
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
b \arrow[r, "\mathrm{id}_b"] \arrow[dr, "u"'] & b \arrow[r, "h"] & x \\
 & a \arrow[u, "f"] \arrow[r, "\mathrm{id}_a"'] \arrow[ul, phantom, "\varepsilon\Uparrow"'] \arrow[ur, phantom, "\theta\Uparrow"] & a \arrow[u, "k"']
\end{tikzcd}
$$

となるから，このような τ は一意である．故に絶対左 Kan 拡張 $f^\dagger \mathrm{id}_a$ は存在し，$f^\dagger \mathrm{id}_a = \langle u, \eta \rangle$ である．

(2 $\Longrightarrow$ 3) 明らか.

(3 $\Longrightarrow$ 1) $u := f^\dagger \mathrm{id}_a$ が f と交換するから，$\varepsilon\colon f \circ u \Longrightarrow \mathrm{id}_b$ が一意に存在して次の等式が成り立つ.

$$
\begin{tikzcd}
b \arrow[r, "\mathrm{id}_b"] \arrow[dr, "u"] & b \\
a \arrow[u, "f"] \arrow[r, "\mathrm{id}_a"'] \arrow[ur, phantom, "\eta\Uparrow" near start, "\varepsilon\Uparrow" near end] & a \arrow[u, "f"']
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
b \arrow[r, "\mathrm{id}_b"] & b \\
a \arrow[u, "f"] \arrow[r, "\mathrm{id}_a"'] \arrow[ur, phantom, "\mathrm{id}_f\Uparrow"] & a \arrow[u, "f"']
\end{tikzcd}
$$

故に後は $(u \bullet \varepsilon) * (\eta \bullet u) = \mathrm{id}_u$ を示せばよい．その為には，左 Kan 拡張 $\langle u, \eta \rangle$ の普遍性から

$$
\begin{tikzcd}
b \arrow[r, "\mathrm{id}_b"] \arrow[dr, "u"'] \arrow[dr, phantom, shift right=3ex, "\eta\Uparrow"] & b \arrow[dr, "u"] \arrow[dr, phantom, shift right=3ex, "\Uparrow\eta"] & \\
a \arrow[u, "f"] \arrow[r, "\mathrm{id}_a"'] \arrow[ur, phantom, shift right=3ex, "\varepsilon\Uparrow"] & a \arrow[u, "f"] \arrow[r, "\mathrm{id}_a"'] & a
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
b \arrow[r, "\mathrm{id}_b"] \arrow[dr, "u"'] \arrow[dr, phantom, shift right=3ex, "\eta\Uparrow"] & b \arrow[dr, "u"] & \\
a \arrow[u, "f"] \arrow[r, "\mathrm{id}_a"'] & a \arrow[r, "\mathrm{id}_a"'] \arrow[u, phantom, "\Uparrow\mathrm{id}_u"] & a
\end{tikzcd}
$$

を示せばよいが，それは明らか． □

系 7. 左随伴に沿った左 Kan 拡張は存在し，絶対左 Kan 拡張である．

証明. $f \colon a \longrightarrow b$，$g \colon a \longrightarrow c$ で f が右随伴を持つとする．

$$
\begin{tikzcd}
b \arrow[dr, "l"] & \\
a \arrow[u, "f"] \arrow[r, "g"'] \arrow[ur, phantom, shift left=2ex, "\eta\Uparrow"] & c
\end{tikzcd}
$$

このとき絶対左 Kan 拡張 $f^\dagger \mathrm{id}_a$ が存在するから $g \circ f^\dagger \mathrm{id}_a = f^\dagger g$ となり左 Kan 拡張 $f^\dagger g$ が存在することが分かる．また $h \colon c \longrightarrow x$ を任意の 1-morphism とするとき，$h \circ f^\dagger g = h \circ g \circ (f^\dagger \mathrm{id}_a) = f^\dagger (h \circ g)$ となって h が $f^\dagger g$ と交換することが分かる． □

$\mathcal{C}^{\mathrm{op}}, \mathcal{C}^{\mathrm{co}}, \mathcal{C}^{\mathrm{coop}}$ を考えれば次の定理が分かる．

定理 8. $u \colon b \longrightarrow a$ を 1-morphism とするとき，以下の条件は同値である．

(1) u が左随伴を持つ．
(2) 絶対右 Kan 拡張 $\langle u^\ddagger \mathrm{id}_b, \varepsilon \rangle$ が存在する．
(3) 右 Kan 拡張 $\langle u^\ddagger \mathrm{id}_b, \varepsilon \rangle$ が存在し，u が $u^\ddagger \mathrm{id}_b$ と交換する．

$$
\begin{tikzcd}
a \arrow[dr, "u^\ddagger \mathrm{id}_b"] & & \\
b \arrow[u, "u"] \arrow[r, "\mathrm{id}_b"'] \arrow[ur, phantom, shift left=2ex, "\varepsilon\Downarrow"] & b \arrow[r, "u"] & a
\end{tikzcd}
$$

またこのとき $u^\ddagger \mathrm{id}_b \dashv u$ であり ε がその counit である． □

定理 9. $f \colon a \longrightarrow b$ を 1-morphism とするとき，以下の条件は同値である．

(1) f が右随伴を持つ.

(2) 絶対右 Kan リフト $\langle f_{\ddagger}\mathrm{id}_b, \varepsilon\rangle$ が存在する.

(3) 右 Kan リフト $\langle f_{\ddagger}\mathrm{id}_b, \varepsilon\rangle$ が存在し，f が $f_{\ddagger}\mathrm{id}_b$ と交換する.

$$\begin{tikzcd}
 & & a \arrow[d, "f"] \\
a \arrow[r, "f"] & b \arrow[ur, "f_{\ddagger}\mathrm{id}_b"] \arrow[r, "\mathrm{id}_b"'] \arrow[ur, phantom, shift right=3, "\Downarrow\varepsilon"] & b
\end{tikzcd}$$

またこのとき $f \dashv f_{\ddagger}\mathrm{id}_b$ であり ε がその counit である. □

定理 10. $u\colon b \longrightarrow a$ を 1-morphism とするとき，以下の条件は同値である.

(1) u が左随伴を持つ.

(2) 絶対左 Kan リフト $\langle u_{\dagger}\mathrm{id}_a, \eta\rangle$ が存在する.

(3) 左 Kan リフト $\langle u_{\dagger}\mathrm{id}_a, \eta\rangle$ が存在し，u が $u_{\dagger}\mathrm{id}_a$ と交換する.

$$\begin{tikzcd}
 & & b \arrow[d, "u"] \\
b \arrow[r, "u"] & a \arrow[ur, "u_{\dagger}\mathrm{id}_a"] \arrow[r, "\mathrm{id}_a"'] \arrow[ur, phantom, shift right=3, "\Uparrow\eta"] & a
\end{tikzcd}$$

またこのとき $u_{\dagger}\mathrm{id}_a \dashv u$ であり η がその unit である. □

定理 11. 左随伴は左 Kan 拡張と交換する.

証明. $f\colon a \longrightarrow b$, $g\colon a \longrightarrow c$ で左 Kan 拡張 $f^{\dagger}g$ が存在し，$h \dashv u\colon c \longrightarrow x$ を随伴とする.

$$\begin{tikzcd}
b \arrow[dr, "f^{\dagger}g"] & & \\
a \arrow[u, "f"] \arrow[r, "g"'] \arrow[ur, phantom, shift left=2, "\eta\Uparrow"] & c \arrow[r, bend left, "h"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & x \arrow[l, bend left, "u"]
\end{tikzcd}$$

$f^{\dagger}(h\circ g) = \langle h\circ f^{\dagger}g, h\bullet\eta\rangle$ であることを示すため，任意の $k\colon b \longrightarrow x$ と $\theta\colon h\circ g \Longrightarrow k\circ f$

を取る．

$$\begin{tikzcd}
b \arrow[rrrd, bend left, "k"] & & & \\
a \arrow[u, "f"] \arrow[r, "g"'] \arrow[ur, phantom, "\theta\Uparrow"] & c \arrow[rr, bend left, "h"] \arrow[rr, phantom, "\perp"] & & x \arrow[ll, bend left, "u"]
\end{tikzcd}$$

$h \dashv u$ の unit を η' とすると，次の図式を得る．

$$\begin{tikzcd}
b \arrow[rr, bend left, "k"] & & x \arrow[dr, "u"] & \\
a \arrow[u, "f"] \arrow[r, "g"'] \arrow[ur, phantom, "\theta\Uparrow"] & c \arrow[ur, "h"] \arrow[rr, "\mathrm{id}_c"'] \arrow[r, phantom, "\eta'\Uparrow"] & & c
\end{tikzcd}$$

左 Kan 拡張 $f^\dagger g$ の普遍性から，$\tau\colon f^\dagger g \Longrightarrow u\circ k$ が存在して次の等式が成り立つ．

$$\begin{tikzcd}
b \arrow[rr, bend left, "k"] \arrow[dr, "f^\dagger g"] & & x \arrow[dr, "u"] & \\
a \arrow[u, "f"] \arrow[r, "g"'] \arrow[u, phantom, shift left=4ex, "\eta\Uparrow"] & c \arrow[rr, "\mathrm{id}_c"'] \arrow[ur, phantom, "\tau\Uparrow"] & & c
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
b \arrow[rr, bend left, "k"] & & x \arrow[dr, "u"] & \\
a \arrow[u, "f"] \arrow[r, "g"'] \arrow[ur, phantom, "\theta\Uparrow"] & c \arrow[ur, "h"] \arrow[rr, "\mathrm{id}_c"'] \arrow[r, phantom, "\eta'\Uparrow"] & & c
\end{tikzcd}$$

$h \dashv u$ だから $u_\dagger \mathrm{id}_c = \langle h, \eta' \rangle$ であり，これは絶対左 Kan リフトである．よって σ が存在して次の等式が成り立つ．

$$\begin{tikzcd}
b \arrow[rr, bend left, "k"] \arrow[dr, "f^\dagger g"'] \arrow[rr, phantom, shift right=5ex, "\sigma\Uparrow"] & & x \arrow[dr, "u"] & \\
& c \arrow[ur, "h"] \arrow[rr, "\mathrm{id}_c"'] \arrow[r, phantom, "\eta'\Uparrow"] & & c
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
b \arrow[rr, bend left, "k"] \arrow[dr, "f^\dagger g"'] & & x \arrow[dr, "u"] & \\
& c \arrow[rr, "\mathrm{id}_c"'] \arrow[ur, phantom, "\tau\Uparrow"] & & c
\end{tikzcd}$$

このとき

$$\begin{tikzcd}
b \arrow[rr, bend left, "k"] \arrow[dr, "f^\dagger g"] \arrow[rr, phantom, shift right=5ex, "\sigma\Uparrow"] & & x \arrow[dr, "u"] & \\
a \arrow[u, "f"] \arrow[r, "g"'] \arrow[u, phantom, shift left=4ex, "\eta\Uparrow"] & c \arrow[ur, "h"] \arrow[rr, "\mathrm{id}_c"'] \arrow[r, phantom, "\eta'\Uparrow"] & & c
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
b \arrow[rr, bend left, "k"] \arrow[dr, "f^\dagger g"] & & x \arrow[dr, "u"] & \\
a \arrow[u, "f"] \arrow[r, "g"'] \arrow[u, phantom, shift left=4ex, "\eta\Uparrow"] & c \arrow[rr, "\mathrm{id}_c"'] \arrow[ur, phantom, "\tau\Uparrow"] & & c
\end{tikzcd}$$

$$
=\quad
\begin{tikzcd}
b \arrow[rrr, bend left, "k"] & & & x \arrow[dr, "u"] & \\
a \arrow[u, "f"] \arrow[rr, "g"'] \arrow[ur, phantom, "\Uparrow\theta"] & & c \arrow[ur, "h"] \arrow[rr, "\mathrm{id}_c"'] \arrow[r, phantom, "\eta'\Uparrow"] & & c
\end{tikzcd}
$$

となるから，絶対左 Kan リフト $u_\dagger \mathrm{id}_c = \langle h, \eta' \rangle$ の普遍性より

$$
\begin{tikzcd}
b \arrow[rr, bend left, "k"] \arrow[dr, "f^\dagger g"] \arrow[drr, phantom, "\sigma\Uparrow"] & & x \\
a \arrow[u, "f"] \arrow[r, "g"'] \arrow[ur, phantom, "\eta\Uparrow"] & c \arrow[ur, "h"'] &
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
b \arrow[rr, bend left, "k"] & & x \\
a \arrow[u, "f"] \arrow[r, "g"'] \arrow[ur, phantom, "\theta\Uparrow"] & c \arrow[ur, "h"'] &
\end{tikzcd}
$$

である．このような σ は一意だとわかるから，$f^\dagger(h \circ g) = \langle h \circ f^\dagger g, h \bullet \eta \rangle$ である． $\square$

定理 12. $f\colon a \longrightarrow b$，$g\colon a \longrightarrow c$ で，左 Kan 拡張 $\langle f^\dagger g, \eta \rangle$ が存在すると仮定する．

$$
\begin{tikzcd}
b \arrow[dr, "f^\dagger g"] & \\
a \arrow[u, "f"] \arrow[r, "g"'] \arrow[ur, phantom, "\eta\Uparrow"] & c
\end{tikzcd}
$$

このとき $h\colon b \longrightarrow d$ に対して

$$
\text{Kan 拡張 } \langle (h \circ f)^\dagger g, \sigma \rangle \text{ が存在する} \iff \text{Kan 拡張 } \langle h^\dagger (f^\dagger g), \tau \rangle \text{ が存在する．}
$$

$$
\begin{tikzcd}
d \arrow[ddr, "(h \circ f)^\dagger g"] & \\
b \arrow[u, "h"] & \\
a \arrow[u, "f"] \arrow[r, "g"'] \arrow[ur, phantom, "\Uparrow\sigma"] & c
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
d \arrow[ddr, "h^\dagger (f^\dagger g)"] & \\
b \arrow[u, "h"] \arrow[dr, "f^\dagger g"] \arrow[ur, phantom, "\Uparrow\tau"] & \\
a \arrow[u, "f"] \arrow[r, "g"'] \arrow[ur, phantom, "\Uparrow\eta"] & c
\end{tikzcd}
$$

更に，これらが存在するとき $(h \circ f)^\dagger g \cong h^\dagger (f^\dagger g)$，$\sigma = (\tau \bullet f) * \eta$ である．

証明. 略 (通常の関手の Kan 拡張の場合と同様) $\square$

命題 13. $f \dashv u\colon a \longrightarrow b$, $f' \dashv u\colon a \longrightarrow b$ を随伴とする．このとき 2-morphism $f \Longrightarrow f'$ と $u' \Longrightarrow u$ は一対一に対応する．

証明. $f \dashv u$, $f' \dashv u'$ の unit をそれぞれ η, η' とする．このとき $u_{\dagger}\mathrm{id}_a = \langle f, \eta \rangle$, $f'^{\dagger}\mathrm{id}_a = \langle u', \eta' \rangle$ である．よって左 Kan 拡張，左 Kan リフトの普遍性から，等式

$$
\begin{tikzcd}
 & b \arrow[dr, bend left, "u"] \arrow[d, phantom, "\Uparrow\eta"] & \\
a \arrow[ur, bend left=50, "f'"] \arrow[ur, bend right, "f"'] \arrow[ur, phantom, "\Leftarrow\varphi"] \arrow[rr, "\mathrm{id}_a"'] & & a
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
 & b \arrow[dr, bend left=50, "u"] \arrow[dr, bend right, "u'"'] \arrow[dr, phantom, "\psi"] & \\
a \arrow[ur, bend left, "f'"] \arrow[r, phantom, "\eta'\Uparrow"] \arrow[rr, "\mathrm{id}_a"'] & & a
\end{tikzcd}
$$

により $\varphi\colon f \Longrightarrow f'$ と $\psi\colon u' \Longrightarrow u$ が一対一に対応する．(即ち，任意の φ に対して，一意に ψ が存在して等式が成立し，また任意の ψ に対して一意に φ が存在して等式が成り立つ．) □

よって圏 $\mathrm{Adj}(a, b)$ を

- 随伴 $f \dashv u\colon a \longrightarrow b$ を対象とする．
- $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Adj}(a,b)}(f \dashv u, f' \dashv u') := \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}(a,b)}(f, f') = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}(b,a)}(u', u)$

により定義することができる．

命題 14. $f\colon a_0 \longrightarrow b$, $g\colon a_1 \longrightarrow b$ を 1-morphism としてコンマ対象 $f{\downarrow}g$ が存在するとする．

$$
\begin{tikzcd}
a_1 \arrow[r, "g"] & b \\
f{\downarrow}g \arrow[u, "p_1"] \arrow[r, "p_0"'] \arrow[ur, phantom, "\Nwarrow\theta"] & a_0 \arrow[u, "f"']
\end{tikzcd}
$$

このとき次の条件は同値である．

(1) 絶対右 Kan リフト $f_{\ddagger}g$ が存在する．

(2) p_1 が右随伴を持つ．

(3) 絶対左 Kan 拡張 $p_1^{\dagger}p_0$ が存在する．

証明. $(1 \Longrightarrow 2)$ $\langle r, \alpha \rangle$ が絶対右 Kan リフト $f_{\ddagger}g$ であるとする．

$$
\begin{tikzcd}
a_1 \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "r"'] & b \\
 & a_0 \arrow[u, "f"'] \arrow[u, phantom, shift left=3, "\alpha\Uparrow"]
\end{tikzcd}
$$

コンマ対象の 1 次元的普遍性から次の等式を満たす $u\colon a_1 \longrightarrow f{\downarrow}g$ を得る.

$$
\begin{tikzcd}
 & a_1 \arrow[r, "g"] & b \\
 & f{\downarrow}g \arrow[u, "p_1"] \arrow[r, "p_0"'] \arrow[ur, phantom, "\Uparrow\theta"] & a_0 \arrow[u, "f"'] \\
a_1 \arrow[uur, bend left, "\mathrm{id}_{a_1}"] \arrow[ur, dashed, "u"'] \arrow[urr, bend right, "r"'] & &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
 & a_1 \arrow[r, "g"] & b \\
 & \Uparrow\alpha & a_0 \arrow[u, "f"'] \\
a_1 \arrow[uur, bend left, "\mathrm{id}_{a_0}"] \arrow[urr, bend right, "r"'] & &
\end{tikzcd}
$$

$p_1 \dashv u$ を示せばよい.

$\langle r, \alpha \rangle$ が絶対右 Kan リフトだから，次の等式を満たす τ が存在する.

$$
\begin{tikzcd}
a_1 \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "r"] & b \\
f{\downarrow}g \arrow[u, "p_1"] \arrow[r, "p_0"'] & a_0 \arrow[u, "f"']
\end{tikzcd}
\quad (\Uparrow\tau,\ \alpha\Uparrow)
=
\begin{tikzcd}
a_1 \arrow[r, "g"] & b \\
f{\downarrow}g \arrow[u, "p_1"] \arrow[r, "p_0"'] \arrow[ur, phantom, "\Uparrow\theta"] & a_0 \arrow[u, "f"']
\end{tikzcd}
$$

これを書き換えると次の等式を得る.

$$
\begin{tikzcd}
a_1 \arrow[r, "g"] & b \\
f{\downarrow}g \arrow[u, bend left, "p_1"] \arrow[r, bend left, "r\circ p_1"] \arrow[r, bend right, "p_0"'] \arrow[r, phantom, "\Uparrow\tau"] \arrow[ur, phantom, "\Uparrow\alpha\bullet p_1"] & a_0 \arrow[u, "f"']
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
a_1 \arrow[r, "g"] & b \\
f{\downarrow}g \arrow[u, bend left, "p_1"] \arrow[u, bend right, "p_1"'] \arrow[u, phantom, "\Leftarrow\mathrm{id}"] \arrow[r, bend right, "p_0"'] \arrow[ur, phantom, "\Uparrow\theta"] & a_0 \arrow[u, "f"']
\end{tikzcd}
$$

$\alpha \bullet p_1$，θ に 1 次元的普遍性で対応する 1-morphism は，次の図式から $u \circ p_1$，$\mathrm{id}_{f\downarrow g}$ と分かる.（u の取り方から $p_0 \circ u = r$，$p_1 \circ u = \mathrm{id}_{a_1}$ である.）

$$
\begin{tikzcd}
 & a_1 \arrow[r, "g"] & b \\
 & f{\downarrow}g \arrow[u, "p_1"] \arrow[r, "p_0"'] \arrow[ur, phantom, "\Uparrow\theta"] & a_0 \arrow[u, "f"'] \\
f{\downarrow}g \arrow[uur, bend left, "p_1"] \arrow[ur, dashed, "u\circ p_1"'] \arrow[urr, bend right, "r\circ p_1"'] & &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
 & a_1 \arrow[r, "g"] & b \\
 & \Uparrow\alpha\bullet p_1 & a_0 \arrow[u, "f"'] \\
f{\downarrow}g \arrow[uur, bend left, "p_1"] \arrow[urr, bend right, "r\circ p_1"'] & &
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
 & a_1 \arrow[r, "g"] & b \\
 & f\downarrow g \arrow[u, "p_1"] \arrow[r, "p_0"'] \arrow[ur, phantom, "\Uparrow\theta"] & a_0 \arrow[u, "f"'] \\
f\downarrow g \arrow[uur, bend left, "p_1"] \arrow[ur, dashed, "\mathrm{id}_{f\downarrow g}"'] \arrow[urr, bend right, "p_0"'] & &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
 & a_1 \arrow[r, "g"] & b \\
 & \Uparrow\theta & a_0 \arrow[u, "f"'] \\
f\downarrow g \arrow[uur, bend left, "p_1"] \arrow[urr, bend right, "p_0"'] & &
\end{tikzcd}
$$

故にコンマ対象の 2 次元的普遍性により，次の等式を満たす $\varepsilon\colon h\circ p_0 \Longrightarrow \mathrm{id}_{f\downarrow g}$ が一意に存在する．

$$
\begin{tikzcd}
a_1 \\
f\downarrow g \arrow[u, "p_1"] \\
f\downarrow g \arrow[u, bend left=40, "u\circ p_1"] \arrow[u, bend right=40, "\mathrm{id}_{f\downarrow g}"'] \arrow[u, phantom, "\overset{\eta}{\Leftarrow}"]
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
a_1 \\
f\downarrow g \arrow[u, bend left=30, "p_1"] \arrow[u, bend right=30, "p_1"'] \arrow[u, phantom, "\overset{\mathrm{id}_{p_1}}{\Leftarrow}"]
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
f\downarrow g \arrow[r, bend left, "u\circ p_1"] \arrow[r, bend right, "\mathrm{id}_{f\downarrow g}"'] \arrow[r, phantom, "\Uparrow\eta"] & f\downarrow g \arrow[r, "p_0"] & a_0
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
f\downarrow g \arrow[rr, bend left, "p_0\circ u\circ p_1"] \arrow[rr, bend right, "p_0"'] \arrow[rr, phantom, "\Uparrow\tau"] & & a_0
\end{tikzcd}
$$

$\varepsilon := \mathrm{id}_{\mathrm{id}_{a_1}} : p_1 \circ u \Longrightarrow \mathrm{id}_{a_1}$ として，η, ε が随伴 $p_1 \dashv u$ を与えることを示せばよい．

まず定義から明らかに

$$
\begin{tikzcd}
 & a_1 \arrow[rr, "\mathrm{id}_{a_1}"] \arrow[dr, "u"] \arrow[d, phantom, "\Uparrow\eta"] & \Uparrow\varepsilon & a_1 \\
f\downarrow g \arrow[ur, "p_1"] \arrow[rr, "\mathrm{id}_{f\downarrow g}"'] & {} & f\downarrow g \arrow[ur, "p_1"'] &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
 & a_1 \arrow[rr, "\mathrm{id}_{a_1}"] & \Uparrow\mathrm{id}_{p_1} & a_1 \\
f\downarrow g \arrow[ur, "p_1"] \arrow[rr, "\mathrm{id}_{f\downarrow g}"'] & & f\downarrow g \arrow[ur, "p_1"'] &
\end{tikzcd}
$$

である．次に

$$
\begin{tikzcd}
a_1 \arrow[rr, "\mathrm{id}_{a_1}"] \arrow[dr, "u"'] & \Uparrow\varepsilon & a_1 \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "u"] \arrow[d, phantom, "\Uparrow\eta"] & \alpha\Uparrow & b \\
 & f\downarrow g \arrow[ur, "p_1"] \arrow[r, "\mathrm{id}_{f\downarrow g}"'] & f\downarrow g \arrow[r, "p_0"'] & a_0 \arrow[ur, phantom] & a_0 \arrow[u, "p_1"']
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
a_1 \arrow[rr, "\mathrm{id}_{a_1}"] \arrow[dr, "u"'] & \Uparrow\varepsilon & a_1 \arrow[rr, "g"] \arrow[drr, "r"] & & b \arrow[d, phantom, "\alpha\Uparrow"] \\
 & f\downarrow g \arrow[ur, "p_1"] \arrow[rrr, "p_0"'] \arrow[r, phantom, "\Uparrow\tau"] & {} & & a_0 \arrow[u, "p_1"']
\end{tikzcd}
$$

$$
=
\begin{tikzcd}
a_1 \arrow[rr, "\mathrm{id}_{a_1}"] \arrow[dr, "u"'] & \Uparrow\varepsilon & a_1 \arrow[rr, "g"] & \Uparrow\theta & b \\
 & f\downarrow g \arrow[ur, "p_1"'] \arrow[rrr, "p_0"'] & & & a_0 \arrow[u, "p_1"']
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
a_1 \arrow[rr, "\mathrm{id}_{a_1}"] \arrow[dr, "u"'] & & a_1 \arrow[rr, "g"] & & b \\
 & f\downarrow g \arrow[rrr, "p_0"'] & \Uparrow\alpha & & a_0 \arrow[u, "p_1"']
\end{tikzcd}
$$

だから，α が絶対右 Kan リフトを与えることから

$$
\begin{tikzcd}
a_1 \arrow[rr, "\mathrm{id}_{a_1}"] \arrow[dr, "u"'] & & a_1 \arrow[dr, "u"] \arrow[d, phantom, "\Uparrow\eta"] & & \\
& f\downarrow g \arrow[u, phantom, "\Uparrow\varepsilon"] \arrow[ur, "p_1"] \arrow[rr, "\mathrm{id}_{f\downarrow g}"'] & {} & f\downarrow g \arrow[r, "p_0"'] & a_0
\end{tikzcd}
\quad = \quad \mathrm{id}
$$

が分かる．一方 $p_1 \bullet \eta = \mathrm{id}_{p_1}$ だから明らかに

$$
\begin{tikzcd}
a_1 \arrow[rr, "\mathrm{id}_{a_1}"] \arrow[dr, "u"'] & & a_1 \arrow[dr, "u"] \arrow[d, phantom, "\Uparrow\eta"] & & \\
& f\downarrow g \arrow[u, phantom, "\Uparrow\varepsilon"] \arrow[ur, "p_1"] \arrow[rr, "\mathrm{id}_{f\downarrow g}"'] & {} & f\downarrow g \arrow[r, "p_1"'] & a_1
\end{tikzcd}
\quad = \quad \mathrm{id}
$$

である．従って $f\downarrow g$ の 2 次元的普遍性から

$$
\begin{tikzcd}
a_1 \arrow[rr, "\mathrm{id}_{a_1}"] \arrow[dr, "u"'] & & a_1 \arrow[dr, "u"] \arrow[d, phantom, "\Uparrow\eta"] & \\
& f\downarrow g \arrow[u, phantom, "\Uparrow\varepsilon"] \arrow[ur, "p_1"] \arrow[rr, "\mathrm{id}_{f\downarrow g}"'] & {} & f\downarrow g
\end{tikzcd}
\quad = \quad \mathrm{id}
$$

が分かる．

(2 $\Longrightarrow$ 3) p_1 が右随伴を持つから，絶対左 Kan 拡張 $p_1^\dagger p_0$ が存在する．

(3 $\Longrightarrow$ 1) 絶対左 Kan 拡張 $p_1^\dagger p_0 = \langle l, \eta \rangle$ が存在するから，次の等式を満たす τ が一意に存在する．

$$
\begin{tikzcd}
a_1 \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "l"'] & b \\
f\downarrow g \arrow[u, "p_1"] \arrow[r, "p_0"'] \arrow[ur, phantom, "\Uparrow\eta", near start] & a_0 \arrow[u, "f"'] \arrow[ul, phantom, "\tau\Uparrow", near start]
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
a_1 \arrow[r, "g"] & b \\
f\downarrow g \arrow[u, "p_1"] \arrow[r, "p_0"'] & a_0 \arrow[u, "f"'] \arrow[ul, phantom, "\Nwarrow\theta"]
\end{tikzcd}
$$

$\langle l, \tau \rangle$ が絶対右 Kan リフト $f_\ddagger g$ であることを示せばよい．即ち，次の右辺のような σ に対して ξ が一意に存在して等式を満たすことを示す．

$$
\begin{tikzcd}
a_1 \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "l"'] & b \\
x \arrow[u, "k_1"] \arrow[r, "k_0"'] \arrow[ur, phantom, "\Uparrow\xi", near start] & a_0 \arrow[u, "f"'] \arrow[ul, phantom, "\tau\Uparrow", near start]
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
a_1 \arrow[r, "g"] & b \\
x \arrow[u, "k_1"] \arrow[r, "k_0"'] & a_0 \arrow[u, "f"'] \arrow[ul, phantom, "\Nwarrow\sigma"]
\end{tikzcd}
$$

まず σ に対して $f{\downarrow}g$ の 1 次元的普遍性から次の $h\colon x \longrightarrow f{\downarrow}g$ を得る.

$$
\begin{tikzcd}
 & a_1 \arrow[r, "g"] & b \\
 & f{\downarrow}g \arrow[u, "p_1"] \arrow[r, "p_0"'] \arrow[ur, phantom, "\Nwarrow\theta"] & a_0 \arrow[u, "f"'] \\
x \arrow[uur, bend left, "k_1"] \arrow[ur, dashed, "h"'] \arrow[urr, bend right, "k_0"']
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
 & a_1 \arrow[r, "g"] & b \\
 & \arrow[ur, phantom, "\Nwarrow\sigma"] & a_0 \arrow[u, "f"'] \\
x \arrow[uur, bend left, "k_1"] \arrow[urr, bend right, "k_0"']
\end{tikzcd}
$$

このとき

$$
\begin{tikzcd}
 & a_1 \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "l"] & b \\
 & f{\downarrow}g \arrow[u, "p_1"] \arrow[r, "p_0"'] & a_0 \arrow[u, "f"'] \\
x \arrow[uur, bend left, "k_1"] \arrow[ur, dashed, "h"'] \arrow[urr, bend right, "k_0"']
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
 & a_1 \arrow[r, "g"] & b \\
 & \arrow[ur, phantom, "\Nwarrow\sigma"] & a_0 \arrow[u, "f"'] \\
x \arrow[uur, bend left, "k_1"] \arrow[urr, bend right, "k_0"']
\end{tikzcd}
$$

だから $\xi := \eta \bullet h$ と取ればよい.

　ξ の一意性を示すため, ξ が

$$
\begin{tikzcd}
a_1 \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "l"] & b \\
x \arrow[u, "k_1"] \arrow[r, "k_0"'] & a_0 \arrow[u, "f"']
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
a_1 \arrow[r, "g"] & b \\
x \arrow[u, "k_1"] \arrow[r, "k_0"'] \arrow[ur, phantom, "\Nwarrow\sigma"] & a_0 \arrow[u, "f"']
\end{tikzcd}
$$

を満たすとする. $\xi := \eta \bullet h$ を示せばよい. 上記の等式を書き換えると次の等式を得る.

$$
\begin{tikzcd}
a_1 \arrow[r, "g"] & b \\
x \arrow[u, bend left, "k_1"] \arrow[r, bend left, "l\circ k_1"] \arrow[r, bend right, "k_0"'] \arrow[r, phantom, "\Uparrow\xi"] \arrow[ur, phantom, "\Nwarrow\tau\bullet k_1"] & a_0 \arrow[u, "f"']
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
a_1 \arrow[r, "g"] & b \\
x \arrow[u, bend left=40, "k_1"] \arrow[u, bend right=40, "k_1"'] \arrow[u, phantom, "\Leftarrow \mathrm{id}"] \arrow[r, bend right, "k_0"'] \arrow[ur, phantom, "\Nwarrow\sigma"] & a_0 \arrow[u, "f"']
\end{tikzcd}
$$

$\tau \bullet k_1$ に対して 1 次元的普遍性から得られる 1-morphism を h' とする.

$$
\begin{tikzcd}
 & a_1 \arrow[r, "g"] \arrow[dr, phantom, "\overset{\theta}{\Nwarrow}"] & b \\
 & f\downarrow g \arrow[u, "p_1"] \arrow[r, "p_0"'] & a_0 \arrow[u, "f"'] \\
x \arrow[uur, bend left, "k_1"] \arrow[ur, dashed, "h'"'] \arrow[urr, bend right, "l\circ k_1"'] & &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
 & a_1 \arrow[r, "g"] & b \\
 & \overset{\Nwarrow}{\tau\bullet k_1} & a_0 \arrow[u, "f"'] \\
x \arrow[uur, bend left, "k_1"] \arrow[urr, bend right, "l\circ k_1"'] & &
\end{tikzcd}
$$

2 次元的普遍性から次の α を得る.

$$
\begin{tikzcd}
a_1 \\
f\downarrow g \arrow[u, "p_1"] \\
x \arrow[u, bend left=40, "h'"] \arrow[u, bend right=40, "h"'] \arrow[u, phantom, "\overset{\alpha}{\Leftarrow}"]
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
a_1 \\
\\
x \arrow[uu, bend left=30, "k_1"] \arrow[uu, bend right=30, "k_1"'] \arrow[uu, phantom, "\overset{\mathrm{id}_{k_1}}{\Leftarrow}"]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
x \arrow[r, bend left, "h'"] \arrow[r, bend right, "h"'] \arrow[r, phantom, "\Uparrow\alpha"] & f\downarrow g \arrow[r, "p_0"] & a_0
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
x \arrow[r, bend left, "l\circ k_1"] \arrow[r, bend right, "k_0"'] \arrow[r, phantom, "\Uparrow\xi"] & a_0
\end{tikzcd}
$$

このとき水平合成 $\eta \bullet \alpha$ を 2 通りに考えることで次の等式を得る.

$$
\begin{tikzcd}
 & a_1 \arrow[dr, "l"] \arrow[d, phantom, "\Uparrow\eta"] & \\
 & f\downarrow g \arrow[u, "p_1"] \arrow[r, "p_0"'] & a_0 \\
x \arrow[uur, bend left, "k_1"] \arrow[ur, "h"'] & &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
 & a_1 \arrow[dr, "l"] \arrow[d, phantom, "\Uparrow\eta"] & \\
 & f\downarrow g \arrow[u, "p_1"] \arrow[r, "p_0"'] & a_0 \\
x \arrow[ur, bend left, "h'"] \arrow[ur, bend right, "h"'] \arrow[ur, phantom, "\overset{\alpha}{\Uparrow}"] & &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
 & a_1 \arrow[dr, "l"] \arrow[d, phantom, "\Uparrow\eta"] & \\
 & f\downarrow g \arrow[u, "p_1"] \arrow[r, "p_0"'] \arrow[d, phantom, "\Uparrow\xi"] & a_0 \\
x \arrow[ur, "h'"] \arrow[urr, bend right, "k_0=p_0\circ h"'] & &
\end{tikzcd}
$$

よって $\eta \bullet h' = \mathrm{id}$ を示せば, $\xi = \eta \bullet h$ が分かる.

τ から $f\downarrow g$ の 1 次元的普遍性で得られる 1-morphism を h'' とする.

$$
\begin{tikzcd}
 & a_1 \arrow[r, "g"] \arrow[dr, phantom, "\overset{\theta}{\Nwarrow}"] & b \\
 & f\downarrow g \arrow[u, "p_1"] \arrow[r, "p_0"'] & a_0 \arrow[u, "f"'] \\
a_1 \arrow[uur, bend left, "\mathrm{id}_{a_1}"] \arrow[ur, dashed, "h''"'] \arrow[urr, bend right, "l"'] & &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
 & a_1 \arrow[r, "g"] & b \\
 & \overset{\Nwarrow}{\tau} & a_0 \arrow[u, "f"'] \\
a_1 \arrow[uur, bend left, "\mathrm{id}_{a_1}"] \arrow[urr, bend right, "l"'] & &
\end{tikzcd}
$$

明らかに $h'' \circ k_1 = h'$ である．故に $\eta \bullet h'' = \mathrm{id}$ を示せばよい．

$$
\begin{tikzcd}
 & a_1 \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "l"'] \arrow[r, phantom, shift right=3, "\tau\Uparrow"] & b \\
 & f{\downarrow}g \arrow[u, "p_1"] \arrow[r, "p_0"'] \arrow[ur, phantom, "\Uparrow\eta"] & a_0 \arrow[u, "f"'] \\
a_1 \arrow[uur, bend left, "\mathrm{id}_{a_1}"] \arrow[ur, "h''"'] \arrow[urr, bend right, "l"'] \arrow[u, phantom, "="] & & \\
 & f{\downarrow}g \arrow[ul, "p_1"] \arrow[uur, bend right, "p_0"'] \arrow[u, phantom, "\Uparrow\eta"] &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
 & a_1 \arrow[r, "g"] & b \\
 & f{\downarrow}g \arrow[u, "p_1"] \arrow[r, "p_0"'] \arrow[u, phantom, shift left=6, "\Uparrow\theta"] & a_0 \arrow[u, "f"'] \\
a_1 \arrow[uur, bend left, "\mathrm{id}_{a_1}"] \arrow[ur, "h''"'] \arrow[urr, bend right, "l"'] \arrow[u, phantom, "="] & & \\
 & f{\downarrow}g \arrow[ul, "p_1"] \arrow[uur, bend right, "p_0"'] \arrow[u, phantom, "\Uparrow\eta"] &
\end{tikzcd}
$$

$$
=
\begin{tikzcd}
 & a_1 \arrow[r, "g"] & b \\
 & \arrow[u, phantom, "\Uparrow\tau"] & a_0 \arrow[u, "f"'] \\
a_1 \arrow[uur, bend left, "\mathrm{id}_{a_1}"] \arrow[urr, bend right, "l"'] & & \\
 & f{\downarrow}g \arrow[ul, "p_1"] \arrow[uur, bend right, "p_0"'] \arrow[u, phantom, "\Uparrow\eta"] &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
 & a_1 \arrow[r, "g"] & b \\
 & & a_0 \arrow[u, "f"'] \\
a_1 \arrow[uur, bend left, "\mathrm{id}_{a_1}"] & \arrow[u, phantom, "\Uparrow\theta"] & \\
 & f{\downarrow}g \arrow[ul, "p_1"] \arrow[uur, bend right, "p_0"'] &
\end{tikzcd}
$$

よって $f{\downarrow}g$ の 2 次元的普遍性から次の β を得る．

$$
\begin{tikzcd}
a_1 \\
f{\downarrow}g \arrow[u, "p_1"] \\
f{\downarrow}g \arrow[u, bend left=40, "h''\circ p_1"] \arrow[u, bend right=40, "\mathrm{id}_{f\downarrow g}"'] \arrow[u, phantom, "\overset{\beta}{\Leftarrow}"]
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
a_1 \\
f{\downarrow}g \arrow[u, bend left=40, "p_1"] \arrow[u, bend right=40, "p_1"'] \arrow[u, phantom, "\overset{\mathrm{id}_{p_1}}{\Leftarrow}"]
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
f{\downarrow}g \arrow[r, bend left, "h''\circ p_1"] \arrow[r, bend right, "\mathrm{id}_{f\downarrow g}"'] \arrow[r, phantom, "\Uparrow\beta"] & f{\downarrow}g \arrow[r, "p_0"] & a_0
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
f{\downarrow}g \arrow[r, bend left, "p_0\circ h''\circ p_1"] \arrow[r, bend right, "p_0"'] \arrow[r, phantom, "\Uparrow\eta"] & a_0
\end{tikzcd}
$$

このとき水平合成 $\eta \bullet \beta$ を 2 通りに考えることで次の等式を得る.

$$
\begin{tikzcd}
& a_1 \arrow[dr, "l"] & \\
& f\downarrow g \arrow[u, "p_1"] \arrow[u, phantom, shift left=3, "\Uparrow\eta"] \arrow[r, "p_0"'] & a_0 \\
f\downarrow g \arrow[ur, "\mathrm{id}"'] \arrow[uur, bend left, "p_1"] \arrow[ur, phantom, shift left=3, "="] & &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
& a_1 \arrow[dr, "l"] & \\
& f\downarrow g \arrow[u, "p_1"] \arrow[u, phantom, shift left=3, "\Uparrow\eta"] \arrow[r, "p_0"'] & a_0 \\
f\downarrow g \arrow[ur, bend left, "h''\circ p_1"] \arrow[ur, bend right, "\mathrm{id}"'] \arrow[ur, phantom, "\Leftarrow\beta"] & &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
& a_1 \arrow[dr, "l"] & \\
& f\downarrow g \arrow[u, "p_1"] \arrow[u, phantom, shift left=3, "\Uparrow\eta"] \arrow[r, "p_0"'] & a_0 \\
f\downarrow g \arrow[ur, "h''"] \arrow[urr, bend right, "p_0"'] \arrow[urr, phantom, "\Uparrow\eta"] & &
\end{tikzcd}
$$

従って左 Kan 拡張 $p_1^\dagger p_0 = \langle l, \eta \rangle$ の普遍性から $\eta \bullet h'' = \mathrm{id}$ である. □

$\mathcal{C}^{\mathrm{co}}$ を考えれば次の命題を得る.

命題 15. 前命題と同じ設定の下, 次の条件は同値である.

(1) 絶対左 Kan リフト $g_\dagger f$ が存在する.
(2) p_0 が左随伴を持つ.
(3) 絶対右 Kan 拡張 $p_0^\ddagger p_1$ が存在する.

$$
\begin{tikzcd}
a_1 \arrow[r, "g"] & b \\
f\downarrow g \arrow[u, "p_1"] \arrow[r, "p_0"'] \arrow[ur, phantom, "\Nwarrow\theta"] & a_0 \arrow[u, "f"']
\end{tikzcd}
$$

□

系 16. $f\colon a_0 \longrightarrow b$, $g\colon a_1 \longrightarrow b$ を 1-morphism としてコンマ対象 $f\downarrow g$ が存在するとする.

$$
\begin{tikzcd}
a_1 \arrow[r, "g"] & b \\
f\downarrow g \arrow[u, "p_1"] \arrow[r, "p_0"'] \arrow[ur, phantom, "\Nwarrow\theta"] & a_0 \arrow[u, "f"']
\end{tikzcd}
$$

このとき f が右随伴を持つならば p_1 も右随伴を持ち, g が左随伴を持つならば p_0 も左随伴を持つ.

証明. f が右随伴を持てば絶対右 Kan リフト $f_\ddagger \mathrm{id}_b$ が存在する. 故に絶対右 Kan リフト $f_\ddagger g = (f_\ddagger \mathrm{id}_b) \circ g$ が存在するから命題 14 により p_1 が右随伴を持つ. g についても同様. □

系 17. $f\colon a \longrightarrow b$ に対して $p_1\colon \mathrm{id}_b{\downarrow}f \longrightarrow a$ は右随伴を持つ．$p_0\colon f{\downarrow}\mathrm{id}_b \longrightarrow a$ は左随伴を持つ．

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "f"] & b \\ \mathrm{id}_b{\downarrow}f \arrow[u, "p_1"] \arrow[r] \arrow[ur, phantom, "\Nwarrow"] & b \arrow[u, "\mathrm{id}_b"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} b \arrow[r, "\mathrm{id}_b"] & b \\ f{\downarrow}\mathrm{id}_b \arrow[u] \arrow[r, "p_0"'] \arrow[ur, phantom, "\Nwarrow"] & a \arrow[u, "f"'] \end{tikzcd}$$

証明. id_b が右随伴・左随伴を持つから明らか． □

系 18. $f\colon a_0 \longrightarrow b$ を 1-morphism としてコンマ対象 $f{\downarrow}\mathrm{id}_b$ が存在するとする．

$$\begin{tikzcd} a_1 \arrow[r, "\mathrm{id}_b"] & b \\ f{\downarrow}\mathrm{id}_b \arrow[u, "p_1"] \arrow[r, "p_0"'] \arrow[ur, phantom, "\Nwarrow\theta"] & a_0 \arrow[u, "f"'] \end{tikzcd}$$

このとき f が右随伴を持つ $\Longleftrightarrow$ p_1 が右随伴を持つ

証明. f が右随伴を持つ $\Longleftrightarrow$ 絶対右 Kan リフト $f_{\ddagger}\mathrm{id}_b$ が存在する $\Longleftrightarrow$ p_1 が右随伴を持つ． □

命題 19. $f\colon a \longrightarrow b,\ u\colon b \longrightarrow a$ としてコンマ対象 $f{\downarrow}\mathrm{id}_b$，$\mathrm{id}_a{\downarrow}u$ が存在するとする．

$$\begin{tikzcd} b \arrow[r, "\mathrm{id}_b"] & b \\ f{\downarrow}\mathrm{id}_b \arrow[u, "p_1"] \arrow[r, "p_0"'] \arrow[ur, phantom, "\Nwarrow\alpha"] & a \arrow[u, "f"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} b \arrow[r, "u"] & a \\ \mathrm{id}_a{\downarrow}u \arrow[u, "q_1"] \arrow[r, "q_0"'] \arrow[ur, phantom, "\Nwarrow\beta"] & a \arrow[u, "\mathrm{id}_a"'] \end{tikzcd}$$

このとき $f \dashv u$ $\Longleftrightarrow$ 次を可換にする同型 $h\colon f{\downarrow}\mathrm{id}_b \longrightarrow \mathrm{id}_a{\downarrow}u$ が存在する．

$$\begin{tikzcd} & f{\downarrow}\mathrm{id}_b \arrow[dl, "p_0"'] \arrow[dr, "p_1"] \arrow[dd, "h"] & \\ a & & b \\ & \mathrm{id}_a{\downarrow}u \arrow[ul, "q_0"] \arrow[ur, "q_1"'] & \end{tikzcd}$$

証明. ($\Longrightarrow$) $f \dashv u$ の unit, counit を η, ε とする．1 次元的普遍性により次の h, k を得る．

$$
\begin{tikzcd}
{} & b \arrow[r, "u"] & a \\
{} & \mathrm{id}_a\!\downarrow\! u \arrow[u, "q_1"] \arrow[r, "q_0"'] \arrow[ur, phantom, "\Leftarrow\beta"] & a \arrow[u, "\mathrm{id}_a"'] \\
f\!\downarrow\!\mathrm{id}_b \arrow[uur, bend left, "p_1"] \arrow[ur, dashed, "h"'] \arrow[urr, bend right, "p_0"'] & &
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
b \arrow[r, "\mathrm{id}_b"] & b \arrow[r, "u"] & a \\
{} \arrow[ur, phantom, "\Leftarrow\alpha"] & a \arrow[u, "f"] \arrow[r, "\mathrm{id}_a"'] \arrow[ur, phantom, "\Leftarrow\eta"] & a \arrow[u, "\mathrm{id}_a"'] \\
f\!\downarrow\!\mathrm{id}_b \arrow[uu, bend left, "p_1"] \arrow[ur, bend right, "p_0"'] & &
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
{} & b \arrow[r, "\mathrm{id}_b"] & a \\
{} & f\!\downarrow\!\mathrm{id}_b \arrow[u, "p_1"] \arrow[r, "p_0"'] \arrow[ur, phantom, "\Leftarrow\alpha"] & a \arrow[u, "f"'] \\
\mathrm{id}_a\!\downarrow\! u \arrow[uur, bend left, "q_1"] \arrow[ur, dashed, "k"'] \arrow[urr, bend right, "q_0"'] & &
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
b \arrow[r, "\mathrm{id}_b"] & b \\
b \arrow[u, "\mathrm{id}_b"] \arrow[r, "u"] \arrow[ur, phantom, "\Leftarrow\varepsilon"] & a \arrow[u, "f"'] \\
{} \arrow[ur, phantom, "\Leftarrow\beta"] & a \arrow[u, "\mathrm{id}_a"'] \\
\mathrm{id}_a\!\downarrow\! u \arrow[uu, bend left, "q_1"] \arrow[ur, bend right, "q_0"'] &
\end{tikzcd}
$$

このとき

$$
\begin{tikzcd}
{} & {} & b \arrow[r, "u"] & a \\
{} & {} & \mathrm{id}_a\!\downarrow\! u \arrow[u, "q_1"] \arrow[r, "q_0"'] \arrow[ur, phantom, "\Leftarrow\beta"] & a \arrow[u, "\mathrm{id}_a"'] \\
{} & f\!\downarrow\!\mathrm{id}_b \arrow[uur, bend left, "p_1"] \arrow[ur, "h"'] \arrow[urr, bend right, "p_0"'] & & \\
\mathrm{id}_a\!\downarrow\! u \arrow[uuurr, bend left, "q_1"] \arrow[ur, "k"'] \arrow[uurrr, bend right, "q_0"'] & & &
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
{} & {} & b \arrow[r, "\mathrm{id}_b"] & b \arrow[r, "u"] & a \\
{} & {} & {} \arrow[ur, phantom, "\Leftarrow\alpha"] & a \arrow[u, "f"] \arrow[r, "\mathrm{id}_a"'] \arrow[ur, phantom, "\Leftarrow\eta"] & a \arrow[u, "\mathrm{id}_a"'] \\
{} & f\!\downarrow\!\mathrm{id}_b \arrow[uur, bend left, "p_1"] \arrow[urr, bend right, "p_0"'] & & & \\
\mathrm{id}_a\!\downarrow\! u \arrow[uuurr, bend left, "q_1"] \arrow[ur, "k"'] \arrow[uurrr, bend right, "q_0"'] & & & &
\end{tikzcd}
$$

$$
= \quad
\begin{tikzcd}
{} & b \arrow[r, "\mathrm{id}_b"] & b \arrow[r, "u"] & a \\
{} & b \arrow[u, "\mathrm{id}_b"] \arrow[r, "u"] \arrow[ur, phantom, "\Leftarrow\varepsilon"] & a \arrow[u, "f"] \arrow[r, "\mathrm{id}_a"'] \arrow[ur, phantom, "\Leftarrow\eta"] & a \arrow[u, "\mathrm{id}_a"'] \\
{} & {} \arrow[ur, phantom, "\Leftarrow\beta"] & a \arrow[u, "\mathrm{id}_a"'] & \\
\mathrm{id}_a\!\downarrow\! u \arrow[uur, bend left, "q_1"] \arrow[urr, bend right, "q_0"'] & & &
\end{tikzcd}
\quad = \quad \beta
$$

だから $h\circ k=\mathrm{id}_{\mathrm{id}_a\downarrow u}$ である．同様にして $k\circ h=\mathrm{id}_{f\downarrow \mathrm{id}_b}$ も分かる．

($\Longleftarrow$) f が右随伴を持つ $\Longleftrightarrow$ p_1 が右随伴を持つ $\Longleftrightarrow$ q_1 が右随伴を持つ，である．系 17 より q_1 は右随伴を持つので，f も右随伴を持つことが分かる．それが u であることを示せばよい．

まず q_1 の右随伴は次の図式の v で与えられる．

$$
\begin{tikzcd}
 & b \arrow[r, "u"] & a \\
 & \mathrm{id}_a\downarrow u \arrow[u, "q_1"] \arrow[r, "q_0"'] \arrow[ur, phantom, "\Nwarrow\beta"] & a \arrow[u, "\mathrm{id}_a"'] \\
b \arrow[uur, bend left, "\mathrm{id}_b"] \arrow[ur, dashed, "v"'] \arrow[urr, bend right, "u"'] & &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
 & b \arrow[r, "u"] & a \\
 & & a \arrow[u, "\mathrm{id}_a"'] \\
b \arrow[uur, bend left, "\mathrm{id}_b"] \arrow[urr, bend right, "u"'] \arrow[ur, phantom, "\Nwarrow\mathrm{id}_u"] & &
\end{tikzcd}
$$

よって $p_1=(q_1\circ h)\dashv(h^{-1}\circ v)$ であり，$p_1^{\dagger}\mathrm{id}=h^{-1}\circ v$ となる．

命題 14 の証明から，f の右随伴は $p_1^{\dagger}p_0$ である．

$$p_1^{\dagger}p_0=p_0\circ(p_1^{\dagger}\mathrm{id})=p_0\circ h^{-1}\circ v=q_0\circ v=u$$

だから $f\dashv u$ が分かった． □

$\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ を考えれば，次の命題を得る．

命題 20. $f\colon a\longrightarrow b$，$u\colon b\longrightarrow a$ としてココンマ対象 $f{\uparrow}\mathrm{id}_a$，$\mathrm{id}_b{\uparrow}u$ が存在するとする．

$$
\begin{tikzcd}
b \arrow[d, "p_1"'] \arrow[dr, phantom, "\Nwarrow"] & a \arrow[l, "f"'] \arrow[d, "\mathrm{id}_a"] \\
f{\uparrow}\mathrm{id}_a & a \arrow[l, "p_0"]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
b \arrow[d, "q_1"'] \arrow[dr, phantom, "\Nwarrow"] & b \arrow[l, "\mathrm{id}_b"'] \arrow[d, "u"] \\
\mathrm{id}_b{\uparrow}u & a \arrow[l, "q_0"]
\end{tikzcd}
$$

このとき $f\dashv u$ $\Longleftrightarrow$ 次を可換にする同型 $h\colon f{\uparrow}\mathrm{id}_a\longrightarrow \mathrm{id}_b{\uparrow}u$ が存在する．

$$
\begin{tikzcd}
 & f{\uparrow}\mathrm{id}_a \arrow[dd, "h"] & \\
a \arrow[ur, "p_0"] \arrow[dr, "q_0"'] & & b \arrow[ul, "p_1"'] \arrow[dl, "q_1"] \\
 & \mathrm{id}_b{\uparrow}u &
\end{tikzcd}
$$

□

定義. 1-morphism $f\colon a \longrightarrow b$ が忠実充満[*2]
$\Longleftrightarrow$ 任意の $x \in \mathcal{C}$ に対して，関手 $f \bullet -\colon \mathcal{C}(x,a) \longrightarrow \mathcal{C}(x,b)$ が忠実充満関手となる.

命題 21. $f\colon a \longrightarrow b$ が忠実充満
$\Longleftrightarrow$ $f_{\dagger}f = \langle \mathrm{id}_b, \mathrm{id}_f \rangle$ で，これが絶対左 Kan リフトになる.

証明. $f_{\dagger}f = \langle \mathrm{id}_b, \mathrm{id}_f \rangle$ が絶対左 Kan リフト
$\Longleftrightarrow$ 任意の $x \in \mathcal{C}$ と $g, h\colon x \longrightarrow a$，$\theta\colon f \circ g \Longrightarrow h \circ g$ に対して，$\tau\colon g \Longrightarrow h$ が一意に存在して $f \circ \tau = \theta$ となる.

$$
\begin{tikzcd}
a \arrow[d, "f"'] & x \arrow[l, "h"'] \arrow[d, "g"] \arrow[dl, phantom, "\tau"] \\
b \arrow[ur, phantom, "\mathrm{id}_f \Uparrow"] & a \arrow[l, "f"] \arrow[ul, "\mathrm{id}_a"']
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
a \arrow[d, "f"'] & x \arrow[l, "h"'] \arrow[d, "g"] \arrow[dl, phantom, "\theta \Uparrow"] \\
b & a \arrow[l, "f"]
\end{tikzcd}
$$

$\Longleftrightarrow$ 任意の $x \in \mathcal{C}$ と $g, h\colon x \longrightarrow a$ に対して

$$f \bullet -\colon \ \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}(x,a)}(g,h) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}(x,b)}(f \circ g, f \circ h)$$

が全単射となる.
$\Longleftrightarrow$ f が忠実充満. □

命題 22. 随伴 $f \dashv u\colon a \longrightarrow b$ の unit を η とするとき，f が忠実充満 $\Longleftrightarrow$ η が同型.

証明. ($\Longrightarrow$) f が忠実充満だから $f_{\dagger}f = \langle \mathrm{id}_a, \mathrm{id}_f \rangle$ が絶対左 Kan リフトである．また $f \dashv u$ より $u_{\dagger}\mathrm{id} = \langle f, \eta \rangle$ も絶対左 Kan リフトである．故に定理 12 (の絶対左 Kan リフトバージョン) から $(u \circ f)_{\dagger}\mathrm{id}_a = \langle \mathrm{id}_a, \eta \rangle$ も絶対左 Kan リフトである.

$$
\begin{tikzcd}
 & a \arrow[d, "f"] \\
 & b \arrow[d, "u"] \\
a \arrow[uur, "\mathrm{id}_a"] \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "\mathrm{id}_a"'] & a
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
 & a \arrow[d, "f"] \\
 & b \arrow[d, "u"] \\
a \arrow[uur, "\mathrm{id}_a"] \arrow[r, "\mathrm{id}_a"'] & a
\end{tikzcd}
$$

[*2] この意味での忠実充満を representably fully faithful ということがある.

故に $\mathrm{id}_a \dashv u \circ f$ である．一方 $\mathrm{id}_a \dashv \mathrm{id}_a$ だから，右随伴の一意性 (命題 1) より $u \circ f \cong \mathrm{id}_a$ である．よって η が同型であることが分かる．

($\Longleftarrow$) 随伴 $f \dashv u\colon a \longrightarrow b$ の unit η が同型であるとする．任意の $x \in \mathcal{C}$ を取る．$\mathcal{C}(x,-)\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathbf{Cat}$ は pseudofunctor だから，$\mathcal{C}(x,f) \dashv \mathcal{C}(x,u)\colon \mathcal{C}(x,a) \longrightarrow \mathcal{C}(x,b)$ は随伴関手で，unit は $\mathcal{C}(x,\eta)$ である．故に unit が自然同型となるから，$\mathcal{C}(x,f)$ は忠実充満関手である．任意の $x \in \mathcal{C}$ について $\mathcal{C}(x,f)$ が忠実充満だから，f が忠実充満である． □

命題 23. $f\colon a \longrightarrow b$ を 1-morphism として，コンマ対象 $f{\downarrow}f$，$\mathrm{id}_a{\downarrow}\mathrm{id}_a$ が存在するとする．

$$
\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "f"] & b \\
f{\downarrow}f \arrow[u, "p_1"] \arrow[r, "p_0"'] \arrow[ur, phantom, "\Nwarrow\alpha"] & a \arrow[u, "f"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "\mathrm{id}_a"] & a \\
\mathrm{id}_a{\downarrow}\mathrm{id}_a \arrow[u, "q_1"] \arrow[r, "q_0"'] \arrow[ur, phantom, "\Nwarrow\beta"] & a \arrow[u, "\mathrm{id}_a"']
\end{tikzcd}
$$

このとき f が忠実充満

$\Longleftrightarrow$ 1 次元的普遍性から得られる 1-morphism $h\colon \mathrm{id}_a{\downarrow}\mathrm{id}_a \longrightarrow f{\downarrow}f$ が同型となる．

$$
\begin{tikzcd}
 & a \arrow[rr, "f"] & & b \\
 & f{\downarrow}f \arrow[u, "p_1"] \arrow[r, "p_0"'] \arrow[ur, phantom, "\Nwarrow\alpha"] & a \arrow[ur, "f"'] & \\
\mathrm{id}_a{\downarrow}\mathrm{id}_a \arrow[uur, bend left, "q_1"] \arrow[ur, dashed, "h"'] \arrow[urr, bend right, "q_0"'] & & &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
 & a \arrow[r, "\mathrm{id}_a"] & a \arrow[r, "f"] & b \\
 & & a \arrow[u, "\mathrm{id}_a"] \arrow[ur, "f"'] \arrow[ul, phantom, "\Nwarrow\beta"] \arrow[u, phantom, shift right=-3, "\Uparrow\mathrm{id}_f"] & \\
\mathrm{id}_a{\downarrow}\mathrm{id}_a \arrow[uur, bend left, "q_1"] \arrow[urr, bend right, "q_0"'] & & &
\end{tikzcd}
$$

証明. ($\Longrightarrow$) f が忠実充満だから命題 21 より $f_\dagger f = \langle \mathrm{id}_b, \mathrm{id}_f \rangle$ で，これが絶対左 Kan リフトだから次の等式を満たす τ が一意に存在する．

$$
\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "f"] & b \\
f{\downarrow}f \arrow[u, "p_1"] \arrow[r, "p_0"'] & a \arrow[u, "f"'] \arrow[ul, "\mathrm{id}_a" description] \arrow[ul, phantom, shift left=4, "\Leftarrow\mathrm{id}_f"] \arrow[ul, phantom, shift right=4, "\overset{\tau}{\Leftarrow}"]
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "f"] & b \\
f{\downarrow}f \arrow[u, "p_1"] \arrow[r, "p_0"'] \arrow[ur, phantom, "\Nwarrow\alpha"] & a \arrow[u, "f"']
\end{tikzcd}
$$

この τ に対して 1 次元的普遍性から次の k が存在する.

$$
\begin{tikzcd}
& a \arrow[r, "\mathrm{id}_a"] & a \\
& \mathrm{id}_a\downarrow\mathrm{id}_a \arrow[u, "q_1"] \arrow[r, "q_0"'] \arrow[ur, phantom, "\Leftarrow\beta"] & a \arrow[u, "\mathrm{id}_a"'] \\
f\downarrow f \arrow[uur, bend left, "p_1"] \arrow[ur, dashed, "k"'] \arrow[urr, bend right, "p_0"'] \arrow[ur, phantom, bend left, "="] \arrow[urr, phantom, "="] & &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
& a \arrow[r, "\mathrm{id}_a"] & a \\
& \arrow[ur, phantom, "\Leftarrow\tau"] & a \arrow[u, "\mathrm{id}_a"'] \\
f\downarrow f \arrow[uur, bend left, "p_1"] \arrow[urr, bend right, "p_0"'] & &
\end{tikzcd}
$$

このとき

$$
\begin{tikzcd}
& & a \arrow[r, "\mathrm{id}_a"] & a \arrow[r, "f"] & b \\
& & \mathrm{id}_a\downarrow\mathrm{id}_a \arrow[u, "q_1"] \arrow[r, "q_0"'] \arrow[ur, phantom, "\Leftarrow\beta"] & a \arrow[u, "\mathrm{id}_a"] \arrow[ur, "f"'] \arrow[ur, phantom, "\Uparrow\mathrm{id}_f"] & \\
& f\downarrow f \arrow[uur, bend left, "p_1"] \arrow[ur, "k"'] \arrow[urr, bend right, "p_0"'] \arrow[ur, phantom, bend left, "="] \arrow[urr, phantom, "="] & & & \\
\mathrm{id}_a\downarrow\mathrm{id}_a \arrow[uuurr, bend left, "q_1"] \arrow[ur, "h"'] \arrow[uurrr, bend right, "q_0"'] \arrow[ur, phantom, bend left, "="] \arrow[urr, phantom, "="] & & & &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
& & a \arrow[r, "\mathrm{id}_a"] & a \arrow[r, "f"] & b \\
& & \arrow[ur, phantom, "\Leftarrow\tau"] & a \arrow[u, "\mathrm{id}_a"] \arrow[ur, "f"'] \arrow[ur, phantom, "\Uparrow\mathrm{id}_f"] & \\
& f\downarrow f \arrow[uur, bend left, "p_1"] \arrow[urr, bend right, "p_0"'] & & & \\
\mathrm{id}_a\downarrow\mathrm{id}_a \arrow[uuurr, bend left, "q_1"] \arrow[ur, "h"'] \arrow[uurrr, bend right, "q_0"'] \arrow[ur, phantom, bend left, "="] \arrow[urr, phantom, "="] & & & &
\end{tikzcd}
$$

$$
=
\begin{tikzcd}
& & a \arrow[r, "\mathrm{id}_a"] & a \arrow[r, "f"] & b \\
& & \arrow[u, phantom, "\Leftarrow\alpha"] & a \arrow[ur, "f"'] & \\
& f\downarrow f \arrow[uur, bend left, "p_1"] \arrow[urr, bend right, "p_0"'] & & & \\
\mathrm{id}_a\downarrow\mathrm{id}_a \arrow[uuurr, bend left, "q_1"] \arrow[ur, "h"'] \arrow[uurrr, bend right, "q_0"'] \arrow[ur, phantom, bend left, "="] \arrow[urr, phantom, "="] & & & &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
& & a \arrow[r, "\mathrm{id}_a"] & a \arrow[r, "f"] & b \\
& & \arrow[ur, phantom, "\Leftarrow\beta"] & a \arrow[u, "\mathrm{id}_a"] \arrow[ur, "f"'] \arrow[ur, phantom, "\Uparrow\mathrm{id}_f"] & \\
& & & & \\
\mathrm{id}_a\downarrow\mathrm{id}_a \arrow[uuurr, bend left, "q_1"] \arrow[uurrr, bend right, "q_0"'] & & & &
\end{tikzcd}
$$

となるから，絶対左 Kan リフト $f_\dagger f$ の普遍性により

$$
\begin{tikzcd}
& & a \arrow[r, "\mathrm{id}_a"] & a \\
& & \mathrm{id}_a\downarrow\mathrm{id}_a \arrow[u, "q_1"] \arrow[r, "q_0"'] \arrow[ur, phantom, "\Leftarrow\beta"] & a \arrow[u, "\mathrm{id}_a"'] \\
& f\downarrow f \arrow[uur, bend left, "p_1"] \arrow[ur, "k"'] \arrow[urr, bend right, "p_0"'] \arrow[ur, phantom, bend left, "="] \arrow[urr, phantom, "="] & & \\
\mathrm{id}_a\downarrow\mathrm{id}_a \arrow[uuurr, bend left, "q_1"] \arrow[ur, "h"'] \arrow[uurrr, bend right, "q_0"'] \arrow[ur, phantom, bend left, "="] \arrow[urr, phantom, "="] & & &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "\mathrm{id}_a"] & a \\
\mathrm{id}_a\downarrow\mathrm{id}_a \arrow[u, "q_1"] \arrow[r, "q_0"'] \arrow[ur, phantom, "\Leftarrow\beta"] & a \arrow[u, "\mathrm{id}_a"']
\end{tikzcd}
$$

である．故に $\mathrm{id}_a\downarrow\mathrm{id}_a$ の 1 次元的普遍性から $k\circ h=\mathrm{id}_{\mathrm{id}_a\downarrow\mathrm{id}_a}$ が分かる．一方

$$
\begin{tikzcd}
 & & a \arrow[rr, "f"] & & b \\
 & & f\downarrow f \arrow[u, "p_1"] \arrow[r, "p_0"'] & a \arrow[ur, "f"'] \arrow[ul, phantom, "\Leftarrow\alpha"] & \\
 & \mathrm{id}_a\downarrow\mathrm{id}_a \arrow[uur, bend left, "q_1"] \arrow[ur, "h"'] \arrow[urr, bend right, "q_0"'] & & & \\
 f\downarrow f \arrow[uuurr, bend left, "p_1"] \arrow[ur, "k"'] \arrow[uurrr, bend right, "p_0"'] & & & &
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
 & & a \arrow[r, "\mathrm{id}_a"] & a \arrow[r, "f"] & b \\
 & & & a \arrow[u, "\mathrm{id}_a"] \arrow[ur, "f"'] \arrow[ur, phantom, "\Uparrow\mathrm{id}_f"] \arrow[ul, phantom, "\Leftarrow\beta"] & \\
 & \mathrm{id}_a\downarrow\mathrm{id}_a \arrow[uur, bend left, "q_1"] \arrow[urr, bend right, "q_0"'] & & & \\
 f\downarrow f \arrow[uuurr, bend left, "p_1"] \arrow[ur, "k"'] \arrow[uurrr, bend right, "p_0"'] & & & &
\end{tikzcd}
$$

$$
= \quad
\begin{tikzcd}
 & a \arrow[r, "\mathrm{id}_a"] & a \arrow[r, "f"] & b \\
 & & a \arrow[u, "\mathrm{id}_a"] \arrow[ur, "f"'] \arrow[ur, phantom, "\Uparrow\mathrm{id}_f"] \arrow[ul, phantom, "\Leftarrow\tau"] & \\
 f\downarrow f \arrow[uur, bend left, "p_1"] \arrow[urr, bend right, "p_0"'] & & &
\end{tikzcd}
\quad = \quad \alpha
$$

だから $f\downarrow f$ の 1 次元的普遍性により $h\circ k=\mathrm{id}_{f\downarrow f}$ である．

($\Longleftarrow$) 命題 21 により絶対左 Kan リフト $f_{\dagger}f$ が存在することを言えばよいが，その為には命題 15 により，p_0 が左随伴を持つことを示せばよい．今，同型 $\mathrm{id}_a\downarrow\mathrm{id}_a \longrightarrow f\downarrow f$ が存在するから，q_0 が左随伴を持つことを示せばよいが，それは命題 17 から明らか． $\square$

2　コンマ対象を使った各点 Kan 拡張

この節では，任意の $a_0 \xrightarrow{f} b \xleftarrow{g} a_1$ に対してコンマ対象 $f\downarrow g$ が存在すると仮定しておく．

$f\colon a\longrightarrow b$ として，コンマ対象 $\langle f\downarrow\mathrm{id}_b, p_0, p_1, \theta\rangle$ を考える．コンマ対象の 1 次元的普

遍性により，次の 1-morphism $i_f\colon a \longrightarrow f{\downarrow}\mathrm{id}_b$ が得られる．

$$
\begin{tikzcd}
 & b \arrow[r, "\mathrm{id}_b"] & b \\
 & f{\downarrow}\mathrm{id}_b \arrow[u, "p_1"] \arrow[r, "p_0"'] \arrow[ur, phantom, "\Leftarrow\theta"] & a \arrow[u, "f"'] \\
a \arrow[uur, bend left, "f"] \arrow[ur, dashed, "i_f"'] \arrow[urr, bend right, "\mathrm{id}_a"'] \arrow[ur, phantom, "="] & &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
 & b \arrow[r, "\mathrm{id}_b"] & b \\
 & \arrow[ur, phantom, "\Leftarrow\mathrm{id}_f"] & a \arrow[u, "f"'] \\
a \arrow[uur, bend left, "f"] \arrow[urr, bend right, "\mathrm{id}_a"'] & &
\end{tikzcd}
$$

補題 24 (米田の補題)**.** $a \xrightarrow{j} x \xleftarrow{k} b$ のコンマ対象を $\langle j{\downarrow}k, q_0, q_1, \rho\rangle$ として，次の図式が可換であるとする．

$$
\begin{tikzcd}
 & b & \\
 & j{\downarrow}k \arrow[u, "q_1"] \arrow[r, "q_0"'] & a \\
a \arrow[uur, bend left, "f"] \arrow[ur, "s"'] \arrow[urr, bend right, "\mathrm{id}_a"'] & &
\end{tikzcd}
$$

このとき

$$
\begin{tikzcd}
 & b & \\
 & j{\downarrow}k \arrow[u, "q_1"] \arrow[r, "q_0"'] & a \\
f{\downarrow}\mathrm{id}_b \arrow[uur, bend left, "p_1"] \arrow[ur, dashed, "t"'] \arrow[urr, bend right, "p_0"'] & &
\end{tikzcd}
$$

を可換にする $t\colon f{\downarrow}\mathrm{id}_b \longrightarrow j{\downarrow}k$ が一意に存在して $t \circ i_f = s$ を満たす．

$$
\begin{tikzcd}
 & & b & \\
 & & j{\downarrow}k \arrow[u, "q_1"] \arrow[r, "q_0"'] & a \\
 & f{\downarrow}\mathrm{id}_b \arrow[uur, bend left, "p_1"] \arrow[ur, dashed, "t"'] \arrow[urr, bend right, "p_0"'] & & \\
a \arrow[uuurr, bend left, "f"] \arrow[ur, "i_f"'] \arrow[uurrr, bend right, "\mathrm{id}_a"'] & & &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
 & b & \\
 & j{\downarrow}k \arrow[u, "q_1"] \arrow[r, "q_0"'] & a \\
a \arrow[uur, bend left, "f"] \arrow[ur, "s"'] \arrow[urr, bend right, "\mathrm{id}_a"'] & &
\end{tikzcd}
$$

証明. $j{\downarrow}k$ の 1 次元的普遍性から，次の等式を満たす $t\colon f{\downarrow}\mathrm{id}_b \longrightarrow j{\downarrow}k$ が一意に存在

する．

$$
\begin{tikzcd}
 & b \arrow[r, "\mathrm{id}_b"] \arrow[dr, phantom, "="] & b \arrow[r, "k"] & x \\
 & & j\downarrow k \arrow[u, "q_1"] \arrow[r, "q_0"'] \arrow[ur, phantom, "\Uparrow\rho"] & a \arrow[u, "j"'] \\
f\downarrow\mathrm{id}_b \arrow[uur, bend left, "p_1"] \arrow[urr, dashed, "t"] \arrow[r, "p_0"'] & a \arrow[urr, bend right, "\mathrm{id}_a"'] \arrow[ur, phantom, "="] & &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
 & b \arrow[r, "\mathrm{id}_b"] & b \arrow[r, "k"] & x \\
 & \arrow[ul, phantom, "\Uparrow\theta"] & j\downarrow k \arrow[u, "q_1"] \arrow[r, "q_0"'] \arrow[ur, phantom, "\Uparrow\rho"] \arrow[l, phantom, "="] & a \arrow[u, "j"'] \\
f\downarrow\mathrm{id}_b \arrow[uur, bend left, "p_1"] \arrow[r, "p_0"'] & a \arrow[uur, bend left, "f"] \arrow[ur, "s"'] \arrow[urr, bend right, "\mathrm{id}_a"'] \arrow[ur, phantom, shift right=3, "="] & &
\end{tikzcd}
$$

このとき

$$
\begin{tikzcd}
 & & b \arrow[r, "\mathrm{id}_b"] \arrow[dr, phantom, "="] & b \arrow[r, "k"] & x \\
 & & & j\downarrow k \arrow[u, "q_1"] \arrow[r, "q_0"'] \arrow[ur, phantom, "\Uparrow\rho"] & a \arrow[u, "j"'] \\
 & f\downarrow\mathrm{id}_b \arrow[uur, bend left, "p_1"] \arrow[urr, "t"] \arrow[r, "p_0"'] \arrow[l, phantom, "="] & a \arrow[urr, bend right, "\mathrm{id}_a"'] \arrow[ur, phantom, "="] & & \\
a \arrow[uuurr, bend left, "f"] \arrow[ur, "i_f"'] \arrow[urr, bend right, "\mathrm{id}_a"'] \arrow[ur, phantom, shift right=3, "="] & & & &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
 & & b \arrow[r, "\mathrm{id}_b"] & b \arrow[r, "k"] & x \\
 & & \arrow[u, phantom, "\Uparrow\theta"] & j\downarrow k \arrow[u, "q_1"] \arrow[r, "q_0"'] \arrow[ur, phantom, "\Uparrow\rho"] \arrow[l, phantom, "="] & a \arrow[u, "j"'] \\
 & f\downarrow\mathrm{id}_b \arrow[uur, bend left, "p_1"] \arrow[r, "p_0"'] \arrow[l, phantom, "="] & a \arrow[uur, bend left, "f"] \arrow[ur, "s"'] \arrow[urr, bend right, "\mathrm{id}_a"'] \arrow[ur, phantom, shift right=3, "="] & & \\
a \arrow[uuurr, bend left, "f"] \arrow[ur, "i_f"'] \arrow[urr, bend right, "\mathrm{id}_a"'] \arrow[ur, phantom, shift right=3, "="] & & & &
\end{tikzcd}
$$

$$
=
\begin{tikzcd}
 & b \arrow[r, "\mathrm{id}_b"] & b \arrow[r, "k"] & x \\
 & \arrow[r, phantom, "="] & j\downarrow k \arrow[u, "q_1"] \arrow[r, "q_0"'] \arrow[ur, phantom, "\Uparrow\rho"] & a \arrow[u, "j"'] \\
 \arrow[r, phantom, "\Uparrow\mathrm{id}_f"] & a \arrow[uur, bend left, "f"] \arrow[ur, "s"'] \arrow[urr, bend right, "\mathrm{id}_a"'] \arrow[ur, phantom, shift right=3, "="] & & \\
a \arrow[uuur, bend left, "f"] \arrow[ur, bend right, "\mathrm{id}_a"'] & & &
\end{tikzcd}
$$

より $t\circ i_f = s$ が分かる． $\square$

補題 25. $j\colon a \longrightarrow x$，$k\colon b \longrightarrow x$ とする．このとき，任意の $\kappa\colon j \Longrightarrow k\circ f$ に対して，あ

る $\zeta\colon j\circ p_0 \Longrightarrow k\circ p_1$ が一意に存在して，次の等式が成り立つ．

$$\begin{tikzcd}
 & b \arrow[r, "k"] & x \\
 & f\downarrow\mathrm{id}_b \arrow[u, "p_1"] \arrow[r, "p_0"'] \arrow[ur, phantom, "\Uparrow\zeta"] & a \arrow[u, "j"'] \\
a \arrow[uur, bend left, "f"] \arrow[ur, "i_f"'] \arrow[urr, bend right, "\mathrm{id}_a"'] & &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
 & b \arrow[r, "k"] & x \\
 & \arrow[ur, phantom, "\Uparrow\kappa"] & a \arrow[u, "j"'] \\
a \arrow[uur, bend left, "f"] \arrow[urr, bend right, "\mathrm{id}_a"'] & &
\end{tikzcd}$$

更にこのとき，$f^\dagger j = \langle k,\kappa\rangle \Longleftrightarrow p_1^\dagger(j\circ p_0) = \langle k,\zeta\rangle$ である．

証明. $\kappa\colon j \Longrightarrow k\circ f$ として $\langle j\downarrow k, q_0, q_1, \rho\rangle$ をコンマ対象とする．$j\downarrow k$ の 1 次元的普遍性により，次の等式を満たす $s\colon a \longrightarrow j\downarrow k$ が一意に存在する．

$$\begin{tikzcd}
 & b \arrow[r, "k"] & x \\
 & j\downarrow k \arrow[u, "q_1"] \arrow[r, "q_0"'] \arrow[ur, phantom, "\Uparrow\rho"] & a \arrow[u, "j"'] \\
a \arrow[uur, bend left, "f"] \arrow[ur, dashed, "s"'] \arrow[urr, bend right, "\mathrm{id}_a"'] & &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
 & b \arrow[r, "k"] & x \\
 & \arrow[ur, phantom, "\Uparrow\kappa"] & a \arrow[u, "j"'] \\
a \arrow[uur, bend left, "f"] \arrow[urr, bend right, "\mathrm{id}_a"'] & &
\end{tikzcd}$$

よって補題 24 により $t\colon f\downarrow\mathrm{id}_b \longrightarrow j\downarrow k$ が一意に存在する．

$$\begin{tikzcd}
 & & b \arrow[r, "k"] & x \\
 & & j\downarrow k \arrow[u, "q_1"] \arrow[r, "q_0"'] \arrow[ur, phantom, "\Uparrow\rho"] & a \arrow[u, "j"'] \\
 & f\downarrow\mathrm{id}_b \arrow[ur, dashed, "t"'] \arrow[uur, bend left, "p_1"] \arrow[urr, bend right, "p_0"'] & & \\
a \arrow[ur, "i_f"'] \arrow[uuurr, bend left, "f"] \arrow[uurrr, bend right, "\mathrm{id}_a"'] & & &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
 & b \arrow[r, "k"] & x \\
 & j\downarrow k \arrow[u, "q_1"] \arrow[r, "q_0"'] \arrow[ur, phantom, "\Uparrow\rho"] & a \arrow[u, "j"'] \\
a \arrow[uur, bend left, "f"] \arrow[ur, "s"'] \arrow[urr, bend right, "\mathrm{id}_a"'] & &
\end{tikzcd}$$

よって $\zeta := \rho\bullet t$ とすれば

$$\begin{tikzcd}
 & b \arrow[r, "k"] & x \\
 & f\downarrow\mathrm{id}_b \arrow[u, "p_1"] \arrow[r, "p_0"'] \arrow[ur, phantom, "\Uparrow\zeta"] & a \arrow[u, "j"'] \\
a \arrow[uur, bend left, "f"] \arrow[ur, "i_f"'] \arrow[urr, bend right, "\mathrm{id}_a"'] & &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
 & b \arrow[r, "k"] & x \\
 & \arrow[ur, phantom, "\Uparrow\kappa"] & a \arrow[u, "j"'] \\
a \arrow[uur, bend left, "f"] \arrow[urr, bend right, "\mathrm{id}_a"'] & &
\end{tikzcd}$$

を満たす．このような ζ は明らかに一意である．

次に $f^\dagger j = \langle k, \kappa\rangle$ として，任意の $\alpha\colon j\circ p_0 \Longrightarrow r\circ p_1$ を取る．

$$
\begin{tikzcd}
b \arrow[r, bend left, "r"] & x \\
f\downarrow\mathrm{id}_b \arrow[u, "p_1"] \arrow[r, "p_0"'] \arrow[ur, phantom, "\Leftarrow\alpha"] & a \arrow[u, "j"']
\end{tikzcd}
$$

すると $f^\dagger j = \langle k, \kappa\rangle$ の普遍性により，ある $\tau\colon k \Longrightarrow r$ が一意に存在して

$$
\begin{tikzcd}
 & b \arrow[r, "k"'] \arrow[r, bend left=60, "r"] \arrow[r, phantom, bend left=30, "\Uparrow\tau"] & x \\
 & \arrow[r, phantom, "\Leftarrow\kappa"] & a \arrow[u, "j"'] \\
a \arrow[uur, bend left, "f"] \arrow[urr, bend right, "\mathrm{id}_a"'] & &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
 & b \arrow[r, bend left, "r"] & x \\
 & f\downarrow\mathrm{id}_b \arrow[u, "p_1"] \arrow[r, "p_0"'] \arrow[ur, phantom, "\Leftarrow\alpha"] & a \arrow[u, "j"'] \\
a \arrow[uur, bend left, "f"] \arrow[ur, "i_f"'] \arrow[urr, bend right, "\mathrm{id}_a"'] \arrow[u, phantom, "="] \arrow[urr, phantom, "="] & &
\end{tikzcd}
$$

となる．このとき

$$
\begin{tikzcd}
 & b \arrow[r, bend left, "r"] & x \\
 & f\downarrow\mathrm{id}_b \arrow[u, "p_1"] \arrow[r, "p_0"'] \arrow[ur, phantom, "\Leftarrow\alpha"] & a \arrow[u, "j"'] \\
a \arrow[uur, bend left, "f"] \arrow[ur, "i_f"'] \arrow[urr, bend right, "\mathrm{id}_a"'] \arrow[u, phantom, "="] \arrow[urr, phantom, "="] & &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
 & b \arrow[r, "k"'] \arrow[r, bend left=60, "r"] \arrow[r, phantom, bend left=30, "\Uparrow\tau"] & x \\
 & \arrow[r, phantom, "\Leftarrow\kappa"] & a \arrow[u, "j"'] \\
a \arrow[uur, bend left, "f"] \arrow[urr, bend right, "\mathrm{id}_a"'] & &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
 & b \arrow[r, "k"'] \arrow[r, bend left=60, "r"] \arrow[r, phantom, bend left=30, "\Uparrow\tau"] & x \\
 & f\downarrow\mathrm{id}_b \arrow[u, "p_1"] \arrow[r, "p_0"'] \arrow[ur, phantom, "\Leftarrow\zeta"] & a \arrow[u, "j"'] \\
a \arrow[uur, bend left, "f"] \arrow[ur, "i_f"'] \arrow[urr, bend right, "\mathrm{id}_a"'] \arrow[u, phantom, "="] \arrow[urr, phantom, "="] & &
\end{tikzcd}
$$

となるから，前半で示した ζ の一意性と同様の議論を j, r に対して行えば

$$
\begin{tikzcd}
b \arrow[r, "k"'] \arrow[r, bend left=60, "r"] \arrow[r, phantom, bend left=30, "\Uparrow\tau"] & x \\
f\downarrow\mathrm{id}_b \arrow[u, "p_1"] \arrow[r, "p_0"'] \arrow[ur, phantom, "\Leftarrow\zeta"] & a \arrow[u, "j"']
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
b \arrow[r, bend left, "r"] & x \\
f\downarrow\mathrm{id}_b \arrow[u, "p_1"] \arrow[r, "p_0"'] \arrow[ur, phantom, "\Leftarrow\alpha"] & a \arrow[u, "j"']
\end{tikzcd}
$$

が分かる．このような τ の一意性も $f^\dagger j$ の普遍性より分かるから，$p_1^\dagger(j\circ p_0) = \langle k, \zeta\rangle$ が分かった．

逆向きも同様にわかる． □

定義． $a, b, c \in \mathcal{C}$ を対象，$f\colon a \longrightarrow b$，$g\colon a \longrightarrow c$，$l\colon b \longrightarrow c$ を 1-morphism，$\eta\colon g \Longrightarrow l \circ f$ を 2-morphism とする．$\langle l, \eta \rangle$ が f に沿った g の各点左 Kan 拡張とは，任意の 1-morphism $j\colon x \longrightarrow b$ に対して，コンマ対象 $f\!\downarrow\! j$ を考えたとき合成

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "j"] & b \arrow[dr, "l"] & \\ f\!\downarrow\! j \arrow[u] \arrow[r] \arrow[ur, phantom, "\Nwarrow"] & a \arrow[u, "f"'] \arrow[r, "g"'] \arrow[ur, phantom, "\eta\Uparrow"] & c \end{tikzcd}$$

が左 Kan 拡張になることである．

定理 26. 各点左 Kan 拡張は左 Kan 拡張である．

証明. $f\colon a \longrightarrow b$，$g\colon a \longrightarrow c$，$l\colon b \longrightarrow c$ を 1-morphism，$\eta\colon g \Longrightarrow l \circ f$ を 2-morphism として，$\langle l, \eta \rangle$ を f に沿った g の各点左 Kan 拡張とする．このとき

$$\begin{tikzcd} b \arrow[r, "\mathrm{id}_b"] & b \arrow[dr, "l"] & \\ f\!\downarrow\! \mathrm{id}_b \arrow[u, "p_1"] \arrow[r, "p_0"'] \arrow[ur, phantom, "\Nwarrow\theta"] & a \arrow[u, "f"'] \arrow[r, "g"'] \arrow[ur, phantom, "\eta\Uparrow"] & c \end{tikzcd}$$

は左 Kan 拡張である．よって補題 25 を

$$\begin{tikzcd} & b \arrow[r, "l"] & c \\ & j\!\downarrow\! \mathrm{id}_b \arrow[u, "p_1"] \arrow[r, "p_0"'] \arrow[ur, phantom, "\Nwarrow\zeta"] & a \arrow[u, "g"'] \\ a \arrow[uur, bend left, "f"] \arrow[ur, "i_j"'] \arrow[urr, bend right, "\mathrm{id}_a"'] \arrow[u, phantom, "="] \arrow[ur, phantom, shift right=3, "="] & & \end{tikzcd} = \begin{tikzcd} & b \arrow[r, "l"] & c \\ & & a \arrow[u, "g"'] \arrow[ul, phantom, "\Nwarrow\eta"] \\ a \arrow[uur, bend left, "f"] \arrow[urr, bend right, "\mathrm{id}_a"'] & & \end{tikzcd}$$

に適用すれば $f^\dagger g = \langle l, \eta \rangle$ である． □

命題 27. $f\colon a \longrightarrow b$，$g\colon a \longrightarrow c$ を 1-morphism として f は右随伴を持つとする．このとき既に示したように左 Kan 拡張 $\langle f^\dagger g, \eta \rangle$ が存在するが，この左 Kan 拡張は各点左 Kan

拡張である．

$$\begin{tikzcd} b \arrow[dr, "f^\dagger g"] & \\ a \arrow[u, "f"] \arrow[r, "g"'] \arrow[ur, phantom, "\eta\Uparrow"] & c \end{tikzcd}$$

証明．$j\colon x \longrightarrow b$ に対してコンマ対象 $f{\downarrow}j$ を考えたとき，命題 16 より p_1 は右随伴を持つ．

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "j"] & b \arrow[dr, "f^\dagger g"] & \\ f{\downarrow}j \arrow[u, "p_1"] \arrow[r, "p_0"'] \arrow[ur, phantom, "\Nwarrow"] & a \arrow[u, "f"] \arrow[r, "g"'] \arrow[ur, phantom, "\eta\Uparrow"] & c \end{tikzcd}$$

故に p_1 に沿った $g \circ p_0$ の左 Kan 拡張は存在する．$p_1 \dashv v$ とすれば $p_1^\dagger(g \circ p_0) = g \circ p_0 \circ v$ である．$f \dashv u$ とすれば，命題 16 の証明から $u \circ j = p_0 \circ v$ となる．また $f^\dagger g = g \circ u$ だったから $(f^\dagger g) \circ j = g \circ u \circ j = g \circ p_0 \circ v = p_1^\dagger(g \circ p_0)$ となる． $\square$

命題 28． $f\colon a \longrightarrow b$，$g\colon a \longrightarrow c$ を 1-morphism として各点左 Kan 拡張 $\langle f^\dagger g, \eta \rangle$ が存在するとする．

$$\begin{tikzcd} b \arrow[dr, "f^\dagger g"] & \\ a \arrow[u, "f"] \arrow[r, "g"'] \arrow[ur, phantom, "\eta\Uparrow"] & c \end{tikzcd}$$

f が忠実充満ならば η は同型である．

証明．$f^\dagger g$ が各点左 Kan 拡張だから，次の図式は左 Kan 拡張である．

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "f"] & b \arrow[dr, "f^\dagger g"] & \\ f{\downarrow}f \arrow[u] \arrow[r] \arrow[ur, phantom, "\Nwarrow"] & a \arrow[u, "f"] \arrow[r, "g"'] \arrow[ur, phantom, "\eta\Uparrow"] & c \end{tikzcd}$$

f が忠実充満だから命題 23 より $f\downarrow f \cong \mathrm{id}_a\downarrow\mathrm{id}_a$ となり，次の図式も左 Kan 拡張である．

$$
\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "f"] & b \arrow[dr, "f^\dagger g"] & \\
\mathrm{id}_a\downarrow\mathrm{id}_a \arrow[u] \arrow[r] \arrow[ur, phantom, "\Nwarrow"] & a \arrow[u, "f"'] \arrow[r, "g"'] \arrow[ur, phantom, "\eta\Uparrow"] & c
\end{tikzcd}
$$

よって補題 25 により $\mathrm{id}_a^\dagger g = \langle f^\dagger g \circ f, \eta\rangle$ である．一方 $\mathrm{id}_a^\dagger g = \langle g, \mathrm{id}_a\rangle$ だから，η は同型でなければならない． □

以上のようにコンマ対象を使って各点 Kan 拡張を定義したが，実はこの定義には問題がある．豊穣圏について，各点 Kan 拡張を定義したが，この各点 Kan 拡張は V-豊穣圏がなす 2-category V-**Cat** における (コンマ対象を使った) 各点 Kan 拡張と一致しないのである．それは次の例から分かる．

例 29. 2-category (即ち **Cat**-豊穣圏) $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ を次の図式で定義する．

$$
\mathcal{A} := \begin{tikzcd} a \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "g"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow"] & b \end{tikzcd}, \quad \mathcal{B} := \begin{tikzcd} a \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "g"'] & b \end{tikzcd}.
$$

$\mathbf{1} := \{*\}$ として **Cat**-関手 $F\colon \mathbf{1} \longrightarrow \mathcal{A},\ E\colon \mathbf{1} \longrightarrow \mathcal{B}$ を $F(*) := a,\ E(*) := a$ で定める．このとき **Cat**-関手の左 Kan 拡張 $F^\dagger E$ が存在し，それは $x \in \mathcal{A}$ に対して $F^\dagger E(x) = a$ で与えられる．

$K\colon \mathbf{1} \longrightarrow \mathcal{A}$ を $K(*) := b$ で定める．

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{1} \arrow[r, "K"] & \mathcal{A} \arrow[dr, "F^\dagger E"] & \\
F\downarrow K \arrow[u] \arrow[r] \arrow[ur, phantom, "\Nwarrow"] & \mathbf{1} \arrow[u, "F"'] \arrow[r, "E"'] \arrow[ur, phantom, "\eta\Uparrow"] & \mathcal{B}
\end{tikzcd}
$$

このとき，この図式は 2-category **Cat**-**Cat** における左 Kan 拡張ではない． □

3　米田構造と各点 Kan 拡張

$\mathcal{C}$ の 1-morphism からなる集まり A で，次の条件を満たすものを取り固定する:

$$f\colon a \longrightarrow b,\ g\colon b \longrightarrow c,\ g \in A \Longrightarrow g \circ f \in A.$$

A に含まれる 1-morphism は admissible であるという．また id_a が admissible なとき，対象 $a \in \mathcal{C}$ は admissible であるという． f が admissible であることを強調するために，$\color{red}{f}$ のように赤字で表すことがある．

定義． admissible な対象 $\color{red}{a} \in \mathcal{C}$ に対して，対象 $\widehat{a} \in \mathcal{C}$ と admissible な $\color{red}{y_a}\colon \color{red}{a} \longrightarrow \widehat{a}$ が与えられ，以下の条件を満たすとき，これを米田構造という．

(1) $\color{red}{f}\colon \color{red}{a} \longrightarrow b$ を 1-morphism として，$\color{red}{a}, \color{red}{f}$ が admissible とするとき，$f^\dagger y_a$ が存在する．$f^\dagger y_a = \langle b(f,1), \chi^f \rangle$ と書く．

$$\begin{tikzcd} b \arrow[dr, "b(f,1)"] & \\ a \arrow[u, "f"] \arrow[r, "y_a"'] \arrow[ur, phantom, "\chi^f \Uparrow"] & \widehat{a} \end{tikzcd}$$

(2) 条件 1 で得られた $\langle b(f,1), \chi^f \rangle$ に対して $b(f,1)_\dagger y_a = \langle f, \chi^f \rangle$ であり，更にこれは絶対左 Kan リフトである．

$$\begin{tikzcd} & b \arrow[d, "b(f,1)"] \\ a \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "y_a"'] \arrow[ur, phantom, "\chi^f \Uparrow"'] & \widehat{a} \end{tikzcd}$$

(3) admissible な対象 $\color{red}{a} \in \mathcal{C}$ に対して $y_a^\dagger y_a = \langle \mathrm{id}_{\hat{a}}, \mathrm{id}_{y_a} \rangle$ である．

$$\begin{tikzcd} \widehat{a} \arrow[dr, "\mathrm{id}_{\hat{a}}"] & \\ a \arrow[u, "y_a"] \arrow[r, "y_a"'] \arrow[ur, phantom, "\mathrm{id}_{y_a} \Uparrow"] & \widehat{a} \end{tikzcd}$$

(4) $f\colon \color{red}{a} \longrightarrow \color{red}{b}$，$\color{red}{g}\colon \color{red}{b} \longrightarrow c$ を 1-morphism として，$\color{red}{a}, \color{red}{b}, \color{red}{g}$ が admissible とする．$\color{red}{y_b}$ が admissible だから $y_b \circ f$ も admissible であり，よって $f^{-1} := \widehat{b}(y_b \circ f, 1)$ が定まる．このとき，次の図式が $(g \circ f)^\dagger y_a$ を定める．よって $c(g \circ f, 1) \cong f^{-1} \circ c(g, 1)$

である．

$$
\begin{tikzcd}
c \arrow[dr, "c(g,1)"] & \\
b \arrow[u, "g"] \arrow[r, "y_b"'] \arrow[ur, phantom, "\chi^g\Uparrow"] & \widehat{b} \arrow[d, "f^{-1}:=\widehat{b}(y_b\circ f,1)"] \\
a \arrow[u, "f"] \arrow[r, "y_a"'] \arrow[ur, phantom, "\chi^{y_b\circ f}\Uparrow"] & \widehat{a}
\end{tikzcd}
$$

例 30. locally small とは限らない圏がなす 2-category において

- $F\colon C\longrightarrow D$ が admissible $\iff$ 任意の $c\in C$，$d\in D$ に対して $\mathrm{Hom}_D(Fc,d)$ が small
- admissible(即ち locally small) な C に対して $\widehat{C}:=\mathbf{Set}^{C^{\mathrm{op}}}$．
- $y_C\colon C\longrightarrow\widehat{C}$ を米田埋込とする．

と定めれば米田構造となる．この場合 admissible な関手 $F\colon C\longrightarrow D$ に対して関手 $D(F,1)\colon D\longrightarrow\widehat{C}$ は $D(F,1)(\Box)=\mathrm{Hom}_D(F-,\Box)$ で与えられる． □

以下，米田構造を一つ取って考える．$\mathrm{id}_a^\dagger y_a\cong y_a$ だから，$a(\mathrm{id}_a,1)=y_a$，$\chi^{\mathrm{id}_a}=\mathrm{id}_{y_a}$ としてよい．

$$
\begin{tikzcd}
a \arrow[dr, "a(\mathrm{id}_a,1)=y_a"] & \\
a \arrow[u, "\mathrm{id}_a"] \arrow[r, "y_a"'] \arrow[ur, phantom, "\mathrm{id}_{y_a}\Uparrow"] & \widehat{a}
\end{tikzcd}
$$

$f,g\colon a\longrightarrow b$ で a,f,g を admissible とする．$\alpha\colon f\Longrightarrow g$ を 2-morphism とするとき左 Kan 拡張の普遍性から 2-morphism $b(\alpha,1)\colon b(g,1)\Longrightarrow b(f,1)$ が一意に定まる．

$$
\begin{tikzcd}
b \arrow[dr, bend left, "b(f,1)"] \arrow[dr, "b(g,1)"'] \arrow[dr, phantom, "b(\alpha,1)"] & \\
a \arrow[u, bend left, "g"] \arrow[r, "y_a"'] \arrow[ur, phantom, "\Uparrow\chi^g"] & \widehat{a}
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
b \arrow[dr, bend left, "b(f,1)"] & \\
a \arrow[u, bend left, "g"] \arrow[u, bend right, "f"'] \arrow[u, phantom, "\alpha\Leftarrow"] \arrow[r, "y_a"'] \arrow[ur, phantom, "\Uparrow\chi^f"] & \widehat{a}
\end{tikzcd}
$$

任意の $\beta\colon s\Longrightarrow t\colon x\longrightarrow b$ に対して $b(f,s):=b(f,1)\circ s$，$b(\alpha,\beta):=b(\alpha,1)\bullet\beta$ と定義する．

$$
\begin{tikzcd}
x \arrow[r, bend left, "b(f,s)"] \arrow[r, bend right, "b(g,t)"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow b(\alpha,\beta)"] & \widehat{a}
\end{tikzcd}
:=
\begin{tikzcd}
x \arrow[r, bend left, "s"] \arrow[r, bend right, "t"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\beta"] & b \arrow[r, bend left, "b(f,1)"] \arrow[r, bend right, "b(g,1)"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow b(\alpha,1)"] & \widehat{a}
\end{tikzcd}
$$

このとき $b(f, \mathrm{id}_b) = b(f, 1)$，$b(\alpha, \mathrm{id}_{\mathrm{id}_b}) = b(\alpha, 1)$ だから，この記号に現れる「1」は id のことだと思ってよい．また条件 3 より $\widehat{a}(y_a, 1) \cong \mathrm{id}_{\widehat{a}}$ となるから $f\colon c \longrightarrow \widehat{a}$ に対して $\widehat{a}(y_a, f) = \widehat{a}(y_a, 1) \circ f \cong f$ となり「米田の補題」のような命題が成り立つことが分かる．

a から b への admissible な 1-morphism 全体を $\mathrm{Adm}(a, b)$ と書けば，$b(-, \square)$ は関手 $\mathrm{Adm}(a, b)^{\mathrm{op}} \times \mathcal{C}(x, b) \longrightarrow \mathcal{C}(x, \widehat{a})$ を定める．

命題 31. $a \in \mathcal{C}$ を admissible とするとき，$y_a\colon a \longrightarrow \widehat{a}$ は忠実充満である．

証明. $a(\mathrm{id}_a, 1) = y_a$，$\chi^{\mathrm{id}_a} = \mathrm{id}_{y_a}$ だから，条件 2 より $(y_a)_\dagger y_a = \langle \mathrm{id}_a, \mathrm{id}_{y_a} \rangle$ は絶対左 Kan リフトである．

$$
\begin{tikzcd}
 & a \arrow[d, "y_a"] \\
a \arrow[ur, "\mathrm{id}_a"] \arrow[r, "y_a"'] \arrow[ur, phantom, shift right=3ex, "\mathrm{id}_{y_a}\Uparrow"] & \widehat{a}
\end{tikzcd}
$$

よって命題 21 より y_a は忠実充満である．□

命題 32. $f\colon a \longrightarrow b$，$g\colon a \longrightarrow c$，$l\colon b \longrightarrow c$ で，a, f, g が admissible であるとする．等式

$$
\begin{tikzcd}
b \arrow[r, "l"] \arrow[dr, phantom, shift left=3ex, "\eta\Uparrow"] & c \arrow[d, "{c(g,1)}"] \\
a \arrow[u, "f"] \arrow[ur, "g"] \arrow[r, "y_a"'] \arrow[ur, phantom, shift right=3ex, "\chi^g\Uparrow"] & \widehat{a}
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
b \arrow[r, "l"] \arrow[dr, "{b(f,1)}"] \arrow[dr, phantom, shift left=3ex, "\eta'\Uparrow"] & c \arrow[d, "{c(g,1)}"] \\
a \arrow[u, "f"] \arrow[r, "y_a"'] \arrow[ur, phantom, shift right=3ex, "\chi^f\Uparrow"] & \widehat{a}
\end{tikzcd}
$$

により，η と η' が一対一に対応する．(即ち，任意の η に対して，一意に η' が存在して等式が成立し，また任意の η' に対して一意に η が存在して等式が成り立つ．) また，η' が同型ならば $l_\dagger g = \langle f, \eta \rangle$ であり，これは絶対左 Kan リフトとなる．

証明. 一対一対応は $c(g, 1)_\dagger y_a = \langle g, \chi^g \rangle$ と $f^\dagger y_a = \langle b(f, 1), \chi^f \rangle$ の普遍性から得られる．η' が同型であるとする．このとき f は $c(g, 1) \circ l$ に沿った y_a の絶対左 Kan リフトである．故に命題 12 から，$l_\dagger g = \langle f, \eta \rangle$ で，これは絶対左 Kan リフトである．□

命題 33. $f\colon a \longrightarrow b$，$u\colon b \longrightarrow a$，$\eta\colon \mathrm{id}_a \Longrightarrow u \circ f$ で a, f が admissible だとする．こ

のとき $f \dashv u$ で，η がこの随伴の unit $\iff$ 命題 32 で η に対応する η' が同型となる．

$$
\begin{tikzcd}
b \arrow[r, "u"] & a \arrow[d, "y_a=a(\mathrm{id},1)"] \\
a \arrow[u, "f"] \arrow[ur, "\mathrm{id}_a"] \arrow[r, "y_a"'] \arrow[u, phantom, shift right=4ex, "\eta\Uparrow"'] & \widehat{a} \arrow[u, phantom, shift left=4ex, "\chi^{\mathrm{id}_a}=\mathrm{id}_{y_a}\Uparrow"]
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
b \arrow[r, "u"] \arrow[dr, "b(f,1)"] & a \arrow[d, "y_a"] \\
a \arrow[u, "f"] \arrow[r, "y_a"'] \arrow[u, phantom, shift right=4ex, "\chi^f\Uparrow"'] & \widehat{a} \arrow[u, phantom, shift left=4ex, "\eta'\Uparrow"]
\end{tikzcd}
$$

証明. ($\Longrightarrow$) $f \dashv u$ で η を unit とすれば $f^\dagger \mathrm{id}_a = \langle u, \eta \rangle$ で，これは絶対左 Kan 拡張である．故に次の左辺の合成は左 Kan 拡張になる．

$$
\begin{tikzcd}
b \arrow[r, "u"] & a \arrow[d, "y_a=a(\mathrm{id},1)"] \\
a \arrow[u, "f"] \arrow[ur, "\mathrm{id}_a"] \arrow[r, "y_a"'] \arrow[u, phantom, shift right=4ex, "\eta\Uparrow"'] & \widehat{a} \arrow[u, phantom, shift left=4ex, "\chi^{\mathrm{id}_a}=\mathrm{id}_{y_a}\Uparrow"]
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
b \arrow[r, "u"] \arrow[dr, "b(f,1)"] & a \arrow[d, "y_a"] \\
a \arrow[u, "f"] \arrow[r, "y_a"'] \arrow[u, phantom, shift right=4ex, "\chi^f\Uparrow"'] & \widehat{a} \arrow[u, phantom, shift left=4ex, "\eta'\Uparrow"]
\end{tikzcd}
$$

よって右辺全体も左 Kan 拡張である．右辺の η' は左 Kan 拡張 $b(f,1)$ の普遍性から得られていたから，η' は同型である．

($\Longleftarrow$) η' が同型だから命題 32 により $u_\dagger \mathrm{id}_a = \langle f, \eta \rangle$ は絶対左 Kan リフトであり，よって $f \dashv u$ となる． $\square$

命題 34. $f\colon a \longrightarrow b$，$u\colon b \longrightarrow a$ で a, f が admissible だとするとき

$$f \dashv u \iff b(f,1) \cong a(\mathrm{id}, u).$$

証明. $y_a \circ u = a(\mathrm{id},1) \circ u = a(\mathrm{id}, u)$ だから前命題よりわかる． $\square$

命題 35. $f \dashv u\colon a \longrightarrow b$ とする．$s\colon x \longrightarrow a$，$t\colon x' \longrightarrow b$ で x, a, f が admissible ならば，$b(f \circ s, t) \cong a(s, u \circ t)$ が成り立つ．

証明. $f \dashv u\colon a \longrightarrow b$ とすれば前命題より $b(f,1) \cong a(\mathrm{id}, u)$ である．故に

$$
\begin{aligned}
b(f \circ s, t) &= b(f \circ s, 1) \circ t \\
&\cong s^{-1} \circ b(f,1) \circ t \\
&\cong s^{-1} \circ a(\mathrm{id}, u) \circ t \\
&= s^{-1} \circ a(\mathrm{id}, 1) \circ u \circ t \\
&\cong a(s,1) \circ u \circ t \\
&= a(s, u \circ t)
\end{aligned}
$$

$\square$

命題 36. $f\colon a \longrightarrow b,\ g\colon a \longrightarrow c,\ l\colon b \longrightarrow c$ で，a, f, g が admissible であるとする．等式

$$
\begin{tikzcd}
b \arrow[r, "l"] & c \arrow[d, "c(g,1)"] \\
a \arrow[u, "f"] \arrow[ur, "g"'] \arrow[r, "y_a"'] \arrow[ur, phantom, "\eta\Uparrow", shift left=3ex] \arrow[ur, phantom, "\chi^g\Uparrow"', shift right=3ex] & \widehat{a}
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
b \arrow[r, "l"] \arrow[dr, "b(f,1)"] \arrow[dr, phantom, "\eta'\Uparrow", shift left=3ex] & c \arrow[d, "c(g,1)"] \\
a \arrow[u, "f"] \arrow[r, "y_a"'] \arrow[ur, phantom, "\chi^f\Uparrow", near start] & \widehat{a}
\end{tikzcd}
$$

により，η と η' が一対一に対応するのであった (命題 32)．このとき

$$
f^{\dagger}g = \langle l, \eta \rangle \iff c(g,1)_{\dagger}b(f,1) = \langle l, \eta' \rangle.
$$

証明. 同様なので $\Longrightarrow$ のみ示す．$f^{\dagger}g = \langle l, \eta \rangle$ とする．任意の 1-morphism $k\colon b \longrightarrow c$ と 2-morphism $\theta'\colon b(f,1) \Longrightarrow c(g,1) \circ k$ を取る．命題 32 により θ' に対応する θ を取る．

$$
\begin{tikzcd}
b \arrow[r, bend left, "k"] & c \arrow[d, "c(g,1)"] \\
a \arrow[u, "f"] \arrow[ur, "g"'] \arrow[r, "y_a"'] \arrow[ur, phantom, "\theta\Uparrow", shift left=3ex] \arrow[ur, phantom, "\chi^g\Uparrow"', shift right=3ex] & \widehat{a}
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
b \arrow[r, bend left, "k"] \arrow[dr, "b(f,1)"] \arrow[dr, phantom, "\theta'\Uparrow", shift left=3ex] & c \arrow[d, "c(g,1)"] \\
a \arrow[u, "f"] \arrow[r, "y_a"'] \arrow[ur, phantom, "\chi^f\Uparrow", near start] & \widehat{a}
\end{tikzcd}
$$

$f^{\dagger}g = \langle l, \eta \rangle$ の普遍性により，次の図式の σ が存在して等式が成り立つ．

$$
\begin{tikzcd}
b \arrow[r, bend left=50, "k"] \arrow[r, "l"'] \arrow[r, phantom, bend left=25, "\Uparrow\sigma"] & c \\
a \arrow[u, "f"] \arrow[ur, "g"'] \arrow[ur, phantom, "\eta\Uparrow", shift left=3ex] &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
b \arrow[r, bend left, "k"] & c \\
a \arrow[u, "f"] \arrow[ur, "g"'] \arrow[ur, phantom, "\theta\Uparrow", shift left=3ex] &
\end{tikzcd}
$$

このとき

$$
\begin{tikzcd}
b \arrow[r, bend left=50, "k"] \arrow[r, "l"'] \arrow[r, phantom, bend left=25, "\Uparrow\sigma"] \arrow[dr, "b(f,1)"] \arrow[dr, phantom, "\eta'\Uparrow", shift left=3ex] & c \arrow[d, "c(g,1)"] \\
a \arrow[u, "f"] \arrow[r, "y_a"'] \arrow[ur, phantom, "\chi^f\Uparrow", near start] & \widehat{a}
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
b \arrow[r, bend left=50, "k"] \arrow[r, "l"'] \arrow[r, phantom, bend left=25, "\Uparrow\sigma"] & c \arrow[d, "c(g,1)"] \\
a \arrow[u, "f"] \arrow[ur, "g"'] \arrow[r, "y_a"'] \arrow[ur, phantom, "\eta\Uparrow", shift left=3ex] \arrow[ur, phantom, "\chi^g\Uparrow"', shift right=3ex] & \widehat{a}
\end{tikzcd}
$$

$$
= \begin{tikzcd}
b \arrow[r, bend left, "k"] \arrow[dr, phantom, "\theta\Uparrow" near start] & c \arrow[d, "c(g,1)"] \\
a \arrow[u, "f"] \arrow[ur, "g"'] \arrow[r, "y_a"'] & \widehat{a} \arrow[ul, phantom, "\chi^g\Uparrow" near start]
\end{tikzcd}
= \begin{tikzcd}
b \arrow[r, bend left, "k"] \arrow[dr, "b(f,1)"] & c \arrow[d, "c(g,1)"] \arrow[dl, phantom, "\theta'\Uparrow" near start] \\
a \arrow[u, "f"] \arrow[r, "y_a"'] \arrow[ur, phantom, "\chi^f\Uparrow" near start] & \widehat{a}
\end{tikzcd}
$$

となるから，$f^\dagger y_a = \langle b(f,1), \chi^f \rangle$ の普遍性により次の等式が成り立つ．

$$
\begin{tikzcd}
b \arrow[r, bend left=50, "k"] \arrow[r, "l"'] \arrow[r, phantom, bend left=25, "\Uparrow\sigma"] \arrow[dr, "b(f,1)"'] & c \arrow[d, "c(g,1)"] \arrow[dl, phantom, "\eta'\Uparrow" near start] \\
 & \widehat{a}
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
b \arrow[r, bend left, "k"] \arrow[dr, "b(f,1)"'] & c \arrow[d, "c(g,1)"] \arrow[dl, phantom, "\theta'\Uparrow" near start] \\
 & \widehat{a}
\end{tikzcd}
$$

このような σ は一意だから $c(g,1)_\dagger b(f,1) = \langle l, \eta' \rangle$ である． $\square$

定義． 次の図式で，$a, b, g, l, b(f,1)$ が admissible だとする．

$$
\begin{tikzcd}
b \arrow[dr, "l"] & \\
a \arrow[u, "f"] \arrow[r, "g"'] \arrow[ur, phantom, "\eta\Uparrow" near start] & c
\end{tikzcd}
$$

命題 32 で η に対応する η' を取る．

$$
\begin{tikzcd}
b \arrow[r, "l"] \arrow[dr, phantom, "\eta\Uparrow" near start] & c \arrow[d, "c(g,1)"] \\
a \arrow[u, "f"] \arrow[ur, "g"'] \arrow[r, "y_a"'] & \widehat{a} \arrow[ul, phantom, "\chi^g\Uparrow" near start]
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
b \arrow[r, "l"] \arrow[dr, "b(f,1)"] & c \arrow[d, "c(g,1)"] \arrow[dl, phantom, "\eta'\Uparrow" near start] \\
a \arrow[u, "f"] \arrow[r, "y_a"'] \arrow[ur, phantom, "\chi^f\Uparrow" near start] & \widehat{a}
\end{tikzcd}
$$

この η' に対して，命題 32 で対応する η'' を取る．

$$
\begin{tikzcd}
c \arrow[r, "c(g,1)"] \arrow[dr, phantom, "\eta'\Uparrow" near start] & \widehat{a} \arrow[d, "\hat{a}(b(f,1),1)"] \\
b \arrow[u, "l"] \arrow[ur, "b(f,1)"'] \arrow[r, "y_b"'] & \widehat{b} \arrow[ul, phantom, "\chi^{b(f,1)}\Uparrow" near start]
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
c \arrow[r, "c(g,1)"] \arrow[dr, "c(l,1)"] & \widehat{a} \arrow[d, "\hat{a}(b(f,1),1)"] \arrow[dl, phantom, "\Uparrow\eta''" near start] \\
b \arrow[u, "l"] \arrow[r, "y_b"'] \arrow[ur, phantom, "\chi^l\Uparrow" near start] & \widehat{b}
\end{tikzcd}
$$

$\langle l, \eta \rangle$ が f に沿った g の各点左 Kan 拡張とは，$\eta'' \colon c(l,1) \Longrightarrow \widehat{a}(b(f,1), c(g,1))$ が同型になることをいう．

命題 37. 各点左 Kan 拡張は左 Kan 拡張である．

証明. $\langle l, \eta \rangle$ が f に沿った g の各点左 Kan 拡張であるとする．

$$
\begin{tikzcd}
b \arrow[r, "l"] & c \arrow[d, "{c(g,1)}"] \\
a \arrow[u, "f"] \arrow[ur, "g"'] \arrow[r, "y_a"'] \arrow[u, phantom, shift left=4ex, "\eta\Uparrow"] & \widehat{a} \arrow[u, phantom, shift left=4ex, "\chi^g\Uparrow"]
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
b \arrow[r, "l"] \arrow[dr, "{b(f,1)}"] & c \arrow[d, "{c(g,1)}"] \\
a \arrow[u, "f"] \arrow[r, "y_a"'] \arrow[u, phantom, shift left=4ex, "\chi^f\Uparrow"] & \widehat{a} \arrow[u, phantom, shift left=4ex, "\eta'\Uparrow"]
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
c \arrow[r, "{c(g,1)}"] & \widehat{a} \arrow[d, "{\widehat{a}(b(f,1),1)}"] \\
b \arrow[u, "l"] \arrow[ur, "{b(f,1)}"'] \arrow[r, "y_b"'] \arrow[u, phantom, shift left=4ex, "\eta'\Uparrow"] & \widehat{b} \arrow[u, phantom, shift left=4ex, "\chi^{b(f,1)}\Uparrow"]
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
c \arrow[r, "{c(g,1)}"] \arrow[dr, "{c(l,1)}"] & \widehat{a} \arrow[d, "{\widehat{a}(b(f,1),1)}"] \\
b \arrow[u, "l"] \arrow[r, "y_b"'] \arrow[u, phantom, shift left=4ex, "\chi^l\Uparrow"] & \widehat{b} \arrow[u, phantom, shift left=4ex, "\Uparrow\eta''"]
\end{tikzcd}
$$

定義より η'' が同型である．よって命題 32 により $c(g,1)_{\dagger} b(f,1) = \langle l, \eta' \rangle$ となる．このとき命題 36 により $f^{\dagger} g = \langle l, \eta \rangle$ である． $\square$

定義. $a \in \mathcal{C}$ が small $\Longleftrightarrow$ a と $\widehat{a}$ が admissible.

定理 38. $f \colon a \longrightarrow b$ で a を small，f を admissible だとする．各点左 Kan 拡張 $y_a^{\dagger} f$ が存在するならば $y_a^{\dagger} f \dashv b(f,1) \colon \widehat{a} \longrightarrow b$ である．

証明. 各点左 Kan 拡張 $y_a^{\dagger} f$ が存在すると，定義より次の図式の同型 η'' が存在する．

$$
\begin{tikzcd}
b \arrow[r, "{b(f,1)}"] & \widehat{a} \arrow[d, "{\widehat{a}(\mathrm{id},1)}"] \\
\widehat{a} \arrow[u, "y_a^{\dagger} f"] \arrow[ur, "\mathrm{id}_{\widehat{a}}"'] \arrow[r, "y_{\widehat{a}}"'] \arrow[u, phantom, shift left=4ex, "\eta'\Uparrow"] & \widehat{\widehat{a}} \arrow[u, phantom, shift left=4ex, "\chi^{\mathrm{id}}\Uparrow"]
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
b \arrow[r, "{b(f,1)}"] \arrow[dr, "{b(y_a^{\dagger} f,1)}"] & \widehat{a} \arrow[d, "{\widehat{a}(\mathrm{id},1)}"] \\
\widehat{a} \arrow[u, "y_a^{\dagger} f"] \arrow[r, "y_{\widehat{a}}"'] \arrow[u, phantom, shift left=4ex, "\chi^{y_a^{\dagger} f}\Uparrow"] & \widehat{\widehat{a}} \arrow[u, phantom, shift left=4ex, "\Uparrow\eta''"]
\end{tikzcd}
$$

η'' が同型だから，命題 32 により $b(f,1)_{\dagger} \mathrm{id}_{\widehat{a}} = \langle y_a^{\dagger} f, \eta' \rangle$ は絶対左 Kan リフトである．故に定理 10 より $y_a^{\dagger} f \dashv b(f,1)$ となる． $\square$

定義. $f \colon a \longrightarrow b$ が total
$\Longleftrightarrow$ a, f が admissible で，$b(f,1) \colon b \longrightarrow \widehat{a}$ が admissible な左随伴を持つ．

定理 38 によれば，a が small で $f\colon a \longrightarrow b$ が admissible で，各点左 Kan 拡張 $y_a^{\dagger} f$ が存在すれば，f は total である．実はこの逆も成り立つ (普遍随伴).

定理 39. a が small で $f\colon a \longrightarrow b$ が total のとき，$b(f,1)$ の admissible な左随伴 h_f は存在し，y_a に沿った f の各点左 Kan 拡張となる．

証明. $h_f \dashv b(f,1)\colon \widehat{a} \longrightarrow b$ で h_f が admissible だとすると，$\widehat{a}(y_a,1) \cong \mathrm{id}_{\hat{a}}$ だったから，命題 34 より $b(h_f,1) \cong \widehat{a}(\mathrm{id}_{\hat{a}}, b(f,1)) \cong \widehat{a}(\widehat{a}(y_a,1), b(f,1))$ となり，h_f は y_a に沿った f の各点左 Kan 拡張である． $\square$

定理 40. a を small, b を admissible とする．$\mathrm{Tot}(a,b) \subset \mathcal{C}(a,b)$ を total な 1-morphism からなる充満部分圏とする．このとき圏同値 $\mathrm{Tot}(a,b)^{\mathrm{op}} \cong \mathrm{Adj}(\widehat{a},b)$ が成り立つ．この圏同値は $f \longmapsto (y_a^{\dagger} f \dashv b(f,1))$ で与えられる．

証明. $\mathrm{Adj}(\widehat{a},b) \subset \mathcal{C}(b,\widehat{a})$ とみなす．このとき $f \longmapsto b(f,1)$ は忠実充満である．故に $b(-,1)$ が本質的全射であればよいがそれは前定理から分かる． $\square$

定理 41. $f\colon a \longrightarrow b$ で $a, b, b(f,1)$ が admissible とするとき，$f^{-1}\colon \widehat{b} \longrightarrow \widehat{a}$ は右随伴 $\forall f\colon \widehat{a} \longrightarrow \widehat{b}$ を持つ．

証明. $\forall f := \widehat{a}(f^{-1} \circ y_b, 1)$ とおく．次の図式で $(f^{-1} \circ y_b)^{\dagger} y_b = \langle \forall f, \chi^{f^{-1} \circ y_b} \rangle$，$y_b^{\dagger} y_b = \langle \mathrm{id}_b, \mathrm{id}_{y_b} \rangle$ である．

$$
\begin{tikzcd}
\widehat{a} \arrow[ddr, "\forall f := \hat{a}(f^{-1} \circ y_b, 1)"] & \\
\widehat{b} \arrow[u, "f^{-1}"] \arrow[dr, phantom, "\Uparrow \chi^{f^{-1} \circ y_b}"] & \\
b \arrow[u, "y_b"] \arrow[r, "y_b"'] & \widehat{b}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\widehat{a} \arrow[ddr, "\forall f"] \arrow[d, phantom, "\Uparrow \eta"] & \\
\widehat{b} \arrow[u, "f^{-1}"] \arrow[dr, "\mathrm{id}_{\hat{b}}"] \arrow[d, phantom, "\Uparrow \mathrm{id}_{y_b}"] & \\
b \arrow[u, "y_b"] \arrow[r, "y_b"'] & \widehat{b}
\end{tikzcd}
$$

故に定理 12 から，ある η が存在して $(f^{-1})^{\dagger} \mathrm{id}_b = \langle \forall f, \eta \rangle$ となり，この二つの図式は等し

くなる．故に次の等式が成り立つ．

$$
\begin{tikzcd}
\widehat{a} \arrow[ddr, "\forall f"] & \\
\widehat{b} \arrow[u, "f^{-1}"] \arrow[dr, phantom, "\Uparrow\chi^{f^{-1}\circ y_b}"] & \\
b \arrow[u, "y_b"] \arrow[r, "y_b"'] \arrow[dr, phantom, "\Uparrow\chi^{y_b\circ f}"] & \widehat{b} \arrow[d, "f^{-1}"] \\
a \arrow[u, "f"] \arrow[r, "y_a"'] & \widehat{a}
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
\widehat{a} \arrow[ddr, "\forall f"] \arrow[d, phantom, "\Uparrow\eta"] & \\
\widehat{b} \arrow[u, "f^{-1}"] \arrow[dr, "\mathrm{id}_{\hat{b}}"] \arrow[d, phantom, "\Uparrow\mathrm{id}_{y_b}"] & \\
b \arrow[u, "y_b"] \arrow[r, "y_b"'] \arrow[dr, phantom, "\Uparrow\chi^{y_b\circ f}"] & \widehat{b} \arrow[d, "f^{-1}"] \\
a \arrow[u, "f"] \arrow[r, "y_a"'] & \widehat{a}
\end{tikzcd}
$$

米田構造の条件 4 より左辺全体と，右辺の $(y_b \circ f)^\dagger y_b = f^{-1} \circ \mathrm{id}_b$ は左 Kan 拡張になる．よって再び定理 12 により $(f^{-1})^\dagger(f^{-1} \circ \mathrm{id}_b) = f^{-1} \circ \forall f$ が左 Kan 拡張になる．即ち，左 Kan 拡張 $(f^{-1})^\dagger \mathrm{id}_b = \langle \forall f, \mathrm{id}_b \rangle$ は f^{-1} と交換する．故に定理 2 より $f^{-1} \dashv \forall f$ である． $\square$

$y_b = b(\mathrm{id}, 1)$ だから $f^{-1} \circ y_b = b(f, 1)$ である．故に $\forall f \cong \widehat{a}(b(f,1),1)$ となる．

系 42. $a \in \mathcal{C}$ が small のとき $y_a^{-1} \dashv y_{\hat{a}} \colon \widehat{\widehat{a}} \longrightarrow \widehat{a}$.

証明. $y_a^{-1} \dashv \forall y_a$ で $\forall y_a \cong \widehat{a}(\widehat{a}(y_a, 1), 1) = \widehat{a}(\mathrm{id}_{\hat{a}}, 1) \cong y_{\hat{a}}$ となる． $\square$

定理 43. $f \colon a \longrightarrow b$ で a, b が admissible とする．各点左 Kan 拡張 $y_a^\dagger(y_b \circ f)$ が存在するならば $f^{-1} \colon \widehat{b} \longrightarrow \widehat{a}$ は左随伴 $\exists f \colon \widehat{a} \longrightarrow \widehat{b}$ を持つ．

証明. $\exists f := y_a^\dagger(y_b \circ f)$ とすれば定理 38 より $\exists f \dashv \widehat{b}(y_b \circ f, 1) = f^{-1}$ である． $\square$

定義. $s \colon a \longrightarrow b$, $j \colon x \longrightarrow \widehat{a}$ を 1-morphism で[*3]，a, x, s, j が admissible とする．s の j-weighted colimit とは admissible な $\mathrm{colim}^j\, s \colon x \longrightarrow b$ で，$b(\mathrm{colim}^j\, s, 1) \cong \widehat{a}(j, b(s,1))$ となるものをいう (下記図式参照).

$\mathrm{colim}^j\, s$ が存在するとすると，命題 32 で同型 $b(\mathrm{colim}^j\, s, 1) \cong \widehat{a}(j, b(s,1))$ に対応する

[*3] j は $\hat{a}$ の generalized element だと思うとよい

η を取れば，$b(s,1)_\dagger j = \langle \mathrm{colim}^j\, s, \eta \rangle$ は絶対左 Kan リフトである．

$$
\begin{tikzcd}
b \arrow[r, "b(s,1)"] & \widehat{a} \arrow[d, "\hat{a}(j,1)"] \\
x \arrow[u, "\mathrm{colim}^j\, s"] \arrow[ur, "j"'] \arrow[u, phantom, shift left=4ex, "\eta\Uparrow"] \arrow[r, "y_a"'] \arrow[ur, phantom, shift right=3ex, "\chi^j\Uparrow"] & \widehat{a}
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
b \arrow[r, "b(s,1)"] \arrow[dr, "b(\mathrm{colim}^j\, s,1)"] \arrow[dr, phantom, shift left=4ex, "\Uparrow\wr"] & \widehat{a} \arrow[d, "\hat{a}(j,1)"] \\
x \arrow[u, "\mathrm{colim}^j\, s"] \arrow[r, "y_a"'] \arrow[ur, phantom, shift right=6ex, "\Uparrow\chi^{\mathrm{colim}^j\, s}"] & \widehat{a}
\end{tikzcd}
$$

故に $\mathrm{colim}^j\, s$ は同型を除いて一意である．

例 44. $s\colon a \longrightarrow b$ を 1-morphism で a, s を admissible とする．このとき $\mathrm{colim}^{y_a}\, s$ は存在し，$\mathrm{colim}^{y_a}\, s \cong s$ である．実際 s は admissible で $\widehat{a}(y_a, b(s,1)) = b(s,1)$ となる． $\square$

定理 45. l が f に沿った g の各点左 Kan 拡張 $\Longleftrightarrow l \cong \mathrm{colim}^{b(f,1)}\, g$

証明. l が f に沿った g の各点左 Kan 拡張 $\Longleftrightarrow c(l,1) \cong \widehat{a}(b(f,1), c(g,1))$ だから明らか． $\square$

定理 46. $s\colon a \longrightarrow b$ が total で，$j\colon x \longrightarrow \widehat{a}$ を 1-morphism, a を small, x, j を admissible とする．このとき $\mathrm{colim}^j\, s$ は存在し，$\mathrm{colim}^j\, s \cong y_a^\dagger s \circ j$ である．

証明. $y_a^\dagger s \circ j$ は admissible なので $b(y_a^\dagger s \circ j, 1) \cong \widehat{a}(j, b(s,1))$ を示せばよいが，それは

$$b(y_a^\dagger s \circ j, 1) \cong j^{-1} \circ b(y_a^\dagger s, 1) \cong j^{-1} \circ \widehat{a}(\mathrm{id}_{\hat{a}}, b(s,1)) \cong \widehat{a}(j, b(s,1))$$

となり成り立つ． $\square$

定理 47. 左随伴は weighted colimit と交換する．

証明. $s\colon a \longrightarrow b$，$j\colon x \longrightarrow \widehat{a}$ を 1-morphism で，a, x, s, j が admissible として，$\mathrm{colim}^j\, s$ が存在するとする．$f \dashv u\colon b \longrightarrow c$ を随伴とするとき

$$
\begin{aligned}
\widehat{a}(j, c(f \circ s, 1)) &\cong \widehat{a}(j, b(s, u)) \\
&\cong \widehat{a}(j, b(s,1) \circ u) \\
&\cong \widehat{a}(j, b(s,1)) \circ u \\
&\cong b(\mathrm{colim}^j\, s, 1) \circ u \\
&\cong b(\mathrm{colim}^j\, s, u) \\
&\cong b(f \circ \mathrm{colim}^j\, s, 1)
\end{aligned}
$$

となるから，$f \circ \mathrm{colim}^j\, s \cong \mathrm{colim}^j (f \circ s)$ である． $\square$

命題 48. $s\colon a \longrightarrow b$, $j\colon x \longrightarrow \widehat{a}$, $i\colon x' \longrightarrow \widehat{x}$ で a, x, x', s, j, i が admissible だとする．$\operatorname{colim}^j s$ と $\operatorname{colim}^i j$ が存在するとする．このとき $\operatorname{colim}^i(\operatorname{colim}^j s) \cong \operatorname{colim}^{\operatorname{colim}^i j} s$ である．(但し，等式はどちらか一方が存在すればもう一方も存在し同型となることを意味する．)

証明.

$$
\begin{aligned}
\widehat{a}(\operatorname{colim}^i j, b(s,1)) &= \widehat{a}(\operatorname{colim}^i j, 1) \circ b(s,1) \\
&\cong \widehat{x}(i, \widehat{a}(j,1)) \circ b(s,1) \\
&= \widehat{x}(i, \widehat{a}(j,1) \circ b(s,1)) \\
&= \widehat{x}(i, \widehat{a}(j, b(s,1))) \\
&\cong \widehat{x}(i, b(\operatorname{colim}^j s, 1)).
\end{aligned}
$$

よって $\operatorname{colim}^i(\operatorname{colim}^j s) \cong \operatorname{colim}^{\operatorname{colim}^i j} s$ である． □

参考文献

[1] Ross Street, Fibrations and Yoneda's Lemma in a 2-category, Lecture Notes in Mathematics 420, Springer-Verlag (1974), 104–133

[2] Ross Street and R.F.C. Walters, Yoneda Structures on 2-categories, J. Algebra 50 (1978), 350–379

[3] Mark Weber, Yoneda structures from 2-toposes, Applied Categorical Structures, Vol. 15 (2007), 259–323, `https://sites.google.com/site/markwebersmaths/home/yoneda-structures-from-2-toposes`

[4] R. Street and W. Tholen and M. Wischnewsky and H. Wolff, Semi-Topological Functors III: Lifting of Monads and Adjoint Functors, Journal of Pure and Applied Algebra 16 (1980), 299-314, `http://dx.doi.org/10.1016/0022-4049(80)90035-3`