2-category

alg-d
http://alg-d.com/math/kan_extension/

2018 年 9 月 29 日

※ この PDF では $f \circ g$ のように，一部の記号で色を使用していますが，色が分からなくても問題無いようにはなっています．定義はここやここを参照.

圏の圏 $\mathbf{Cat}$ では，対象 $C, D \in \mathbf{Cat}$ に対して $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Cat}}(C, D)$ も圏になるのであった (関手が対象，自然変換が射)．このように Hom がまた圏となるような圏を 2-category という．

目次

1 定義

まずは定義を述べ，詳しい説明は追々していくことにする．

定義． bicategory (もしくは weak 2-category) $\mathcal{B}$ とは，以下を満たすことをいう．

(1) 集まり $\mathrm{Ob}(\mathcal{B})$ が与えられている．$\mathrm{Ob}(\mathcal{B})$ の元を対象 (もしくは 0-cell) と呼ぶ.

(2) 各対象 $a, b \in \mathcal{B}$ に対して圏 $\mathcal{B}(a, b)$ が与えられている.

(3) 各対象 $a, b, c \in \mathcal{B}$ に対して関手 $C^{abc} \colon \mathcal{B}(b, c) \times \mathcal{B}(a, b) \to \mathcal{B}(a, c)$ が与えられている.

(4) 各対象 $a \in \mathcal{B}$ に対して関手 $I^a \colon \mathbf{1} \to \mathcal{B}(a, a)$ が与えられている.

(5) 各対象 $a, b, c, d \in \mathcal{B}$ に対して次の自然同型 α^{abcd} が与えられている.

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathcal{B}(c,d) \times \mathcal{B}(b,c) \times \mathcal{B}(a,b) \arrow[dl, "C^{bcd}\times\mathrm{id}"'] \arrow[dr, "\mathrm{id}\times C^{abc}"] & \\
\mathcal{B}(b,d) \times \mathcal{B}(a,b) \arrow[dr, "C^{abd}"'] \arrow[rr, phantom, "\overset{\sim}{\Longrightarrow}_{\alpha^{abcd}}"] & & \mathcal{B}(c,d) \times \mathcal{B}(a,c) \arrow[dl, "C^{acd}"] \\
 & \mathcal{B}(a,d) &
\end{tikzcd}
$$

(6) 各対象 $a, b \in \mathcal{B}$ に対して次の自然同型 λ^{ab}, ρ^{ab} が与えられている.

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{1} \times \mathcal{B}(a,b) \arrow[rr, "\cong"] \arrow[dr, "I^b\times\mathrm{id}"'] & \arrow[d, phantom, "\lambda^{ab}\Uparrow\wr"] & \mathcal{B}(a,b) \\
 & \mathcal{B}(b,b) \times \mathcal{B}(a,b) \arrow[ur, "C^{abb}"'] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathcal{B}(a,b) \times \mathbf{1} \arrow[rr, "\cong"] \arrow[dr, "\mathrm{id}\times I^a"'] & \arrow[d, phantom, "\rho^{ab}\Uparrow\wr"] & \mathcal{B}(a,b) \\
 & \mathcal{B}(a,b) \times \mathcal{B}(a,a) \arrow[ur, "C^{aab}"'] &
\end{tikzcd}
$$

(7) 次の自然変換の等式が成り立つ．(スペースの都合上，$\mathcal{B}cba := \mathcal{B}(b, c) \times \mathcal{B}(a, b)$ 等の略記を行った．)

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & \mathcal{B}edcba \arrow[dll, "C^{cde}\times\mathrm{id}\times\mathrm{id}"'] \arrow[dd, "\mathrm{id}\times C^{bcd}\times\mathrm{id}"] \arrow[drr, "\mathrm{id}\times\mathrm{id}\times C^{abc}"] & & \\
\mathcal{B}ecba \arrow[dd, "C^{bce}\times\mathrm{id}"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\alpha^{bcde}\times\mathrm{id}}{\Longrightarrow}"] & & & \arrow[dl, phantom, "\overset{\mathrm{id}\times\alpha^{abcd}}{\Longrightarrow}"] & \mathcal{B}edca \arrow[dd, "\mathrm{id}\times C^{acd}"] \\
 & & \mathcal{B}edba \arrow[dll, "C^{bde}\times\mathrm{id}"] \arrow[drr, "\mathrm{id}\times C^{abd}"'] \arrow[dd, phantom, "\overset{\alpha^{abde}}{\Longrightarrow}"] & & \\
\mathcal{B}eba \arrow[dr, "C^{abe}"'] & & & & \mathcal{B}eda \arrow[dl, "C^{ade}"] \\
 & & \mathcal{B}ea & &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & \mathcal{B}edcba \arrow[dll, "C^{cde}\times\mathrm{id}\times\mathrm{id}"'] \arrow[drr, "\mathrm{id}\times\mathrm{id}\times C^{abc}"] \arrow[d, phantom, "="] & & \\
\mathcal{B}ecba \arrow[dd, "C^{bce}\times\mathrm{id}"'] \arrow[drr, "\mathrm{id}\times C^{abc}"] & & {} & & \mathcal{B}edca \arrow[dd, "\mathrm{id}\times C^{acd}"] \arrow[dll, "C^{cde}\times\mathrm{id}"'] \\
 & \arrow[d, phantom, "\overset{\alpha^{abce}}{\Longrightarrow}"] & \mathcal{B}ace \arrow[dd, "C^{ace}"] & \arrow[d, phantom, "\overset{\alpha^{acde}}{\Longrightarrow}"] & \\
\mathcal{B}eba \arrow[drr, "C^{abe}"'] & {} & & {} & \mathcal{B}eda \arrow[dll, "C^{ade}"] \\
 & & \mathcal{B}ea & &
\end{tikzcd}
$$

(8) 次の自然変換の等式が成り立つ．

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathcal{B}cba \arrow[d, "\mathrm{id}\times I^{b}\times\mathrm{id}"] \arrow[ddl, bend right=40, "\mathrm{id}"'] \arrow[ddr, bend left=40, "\mathrm{id}"] & \\
 {} \arrow[r, phantom, "\overset{(\rho^{bc})^{-1}\times\mathrm{id}}{\Longrightarrow}"] & \mathcal{B}cbba \arrow[dl, "C^{bbc}\times\mathrm{id}"'] \arrow[dr, "\mathrm{id}\times C^{abb}"] \arrow[r, phantom, "\overset{\mathrm{id}\times\lambda^{ab}}{\Longrightarrow}"] & {} \\
\mathcal{B}cba \arrow[dr, "C^{abc}"'] \arrow[rr, phantom, "\overset{\alpha^{abbc}}{\Longrightarrow}"] & & \mathcal{B}cba \arrow[dl, "C^{abc}"] \\
 & \mathcal{B}ca &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
 & \mathcal{B}cba \arrow[ddl, bend right=40, "\mathrm{id}"'] \arrow[ddr, bend left=40, "\mathrm{id}"] & \\
 & & \\
\mathcal{B}cba \arrow[dr, "C^{abc}"'] \arrow[rr, phantom, "="] & & \mathcal{B}cba \arrow[dl, "C^{abc}"] \\
 & \mathcal{B}ca &
\end{tikzcd}
$$

また $\alpha^{abcd}, \lambda^{ab}, \rho^{ab}$ が全て恒等変換のとき，strict 2-category という．*1

$\mathcal{B}$ を bicategory，$a, b \in \mathcal{B}$ を対象とするとき $\mathcal{B}(a, b)$ は圏である．この圏の対象 f を $\mathcal{B}$ の 1-morphism (もしくは 1-cell) と呼ぶ．このとき a を f の domain, b を f の codomain と呼び，記号では $f\colon a \to b$ と表す．また圏 $\mathcal{B}(a, b)$ の射 β を $\mathcal{B}$ の 2-morphism (もしくは 2-cell) と呼ぶ．β の (圏 $\mathcal{B}(a, b)$ の射としての) domain が f，codomain が g のとき記号では $\beta\colon f \Rightarrow g$ と表す．$f, g\colon a \to b$ であることも明示する場合は $\beta\colon f \Rightarrow g\colon a \to b$ と表す．図式では次のように書く．

$$
\begin{tikzcd}
a \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "g"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\beta"] & b
\end{tikzcd}
$$

$f, g, h\colon a \to b$ を 1-morphism，$\beta\colon f \Rightarrow g$，$\gamma\colon g \Rightarrow h$ を 2-morphism とする．β, γ は圏 $\mathcal{B}(a, b)$ の射だから合成することができる．この合成を垂直合成 (vertical composition) と呼び，ここでは $\gamma * \beta$ と書く*2．図式で書くと次のようになる．

$$
\begin{tikzcd}
a \arrow[r, bend left=50, "f"] \arrow[r, "g" near end] \arrow[r, bend right=50, "h"'] \arrow[r, phantom, shift left=3, "\beta\Downarrow"] \arrow[r, phantom, shift right=3, "\gamma\Downarrow"] & b
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
a \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "h"'] \arrow[r, phantom, "\gamma*\beta\Downarrow"] & b
\end{tikzcd}
$$

*1 strict 2-category を単に 2-category という事も多い．

*2 垂直合成 (や後に述べる水平合成) の決まった記号というのは特に無いようで，論文によっても記号が異なる．

今度は $f, g\colon a \to b$ と $k, l\colon b \to c$ を 1-morphism，$\beta\colon f \Rightarrow g$，$\gamma\colon k \Rightarrow l$ を 2-morphism とする．関手 C^{abc} により $C^{abc}(\gamma,\beta)\colon C^{abc}(k,f) \Rightarrow C^{abc}(l,h)$ を考えることができる．これを水平合成 (horizontal composition) と呼ぶ．$k \circ f := C^{abc}(k,f), \gamma \bullet \beta := C^{abc}(\gamma,\beta)$ と書く．

$$
\begin{tikzcd}
a \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "g"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\beta"] & b \arrow[r, bend left, "k"] \arrow[r, bend right, "l"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\gamma"] & c
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
a \arrow[rr, bend left, "k\circ f"] \arrow[rr, bend right, "l\circ g"'] \arrow[rr, phantom, "\Downarrow\gamma\bullet\beta"] & & c
\end{tikzcd}
$$

また $C^{abc}(k,-)\colon \mathcal{B}(a,b) \to \mathcal{B}(a,c)$，$C^{abc}(-,f)\colon \mathcal{B}(b,c) \to \mathcal{B}(a,c)$ も関手である．これを $k \bullet - := C^{abc}(k,-)$，$- \bullet f := C^{abc}(-,f)$ のように書くことにする．この記号を使えば $k \bullet \beta = \mathrm{id}_k \bullet \beta$，$\gamma \bullet f = \gamma \bullet \mathrm{id}_f$ である．

$C^{abc}(\gamma,-)\colon C^{abc}(k,-) \Rightarrow C^{abc}(l,-)$，$C^{abc}(-,\beta)\colon C^{abc}(-,f) \Rightarrow C^{abc}(-,g)$ は自然変換である．これも $\gamma \bullet - := C^{abc}(\gamma,-)$，$- \bullet \beta := C^{abc}(-,\beta)$ のように書くことにする．$(\gamma \bullet -)_f = \gamma \bullet f$，$(- \bullet \beta)_k = k \bullet \beta$ である．

また次の図式の状況の時

$$
\begin{tikzcd}[row sep=large]
a \arrow[r, bend left=50, "f"] \arrow[r, "g" description] \arrow[r, bend right=50, "h"'] \arrow[r, phantom, shift left=3, "\beta\Downarrow"] \arrow[r, phantom, shift right=3, "\gamma\Downarrow"] & b \arrow[r, bend left=50, "k"] \arrow[r, "l" description] \arrow[r, bend right=50, "m"'] \arrow[r, phantom, shift left=3, "\sigma\Downarrow"] \arrow[r, phantom, shift right=3, "\tau\Downarrow"] & c
\end{tikzcd}
$$

$C^{abc}\colon \mathcal{B}(b,c) \times \mathcal{B}(a,b) \to \mathcal{B}(a,c)$ が関手であることから $(\tau * \sigma) \bullet (\gamma * \beta) = (\tau \bullet \gamma) * (\sigma \bullet \beta)$ が成り立つことが分かる．(これを interchange law という．)

$$
\begin{tikzcd}
a \arrow[r, bend left=50, "f"] \arrow[r, bend right=50, "h"'] \arrow[r, phantom, "\gamma*\beta\Downarrow"] & b \arrow[r, bend left=50, "k"] \arrow[r, bend right=50, "m"'] \arrow[r, phantom, "\tau*\sigma\Downarrow"] & c
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
a \arrow[rr, bend left=30, "k\circ f"] \arrow[rr, "l\circ g" description] \arrow[rr, bend right=30, "m\circ h"'] \arrow[rr, phantom, shift left=3, "\sigma\bullet\beta\Downarrow"] \arrow[rr, phantom, shift right=3, "\tau\bullet\gamma\Downarrow"] & & c
\end{tikzcd}
$$

さて，bicategory の定義の条件 7 は自然変換の等式だから，自然変換の各成分が等しければよい．即ち，任意の対象 $\langle k,h,g,f \rangle \in \mathcal{B}(d,e) \times \mathcal{B}(c,d) \times \mathcal{B}(b,c) \times \mathcal{B}(a,b)$ に対して，圏 $\mathcal{B}(a,e)$ における射の等式

$$
\begin{aligned}
&C^{ade}(\mathrm{id}_k, \alpha^{abcd}_{hgf}) \circ \alpha^{abde}_{k,C^{bcd}(h,g),f} \circ C^{abe}(\alpha^{bcde}_{khg}, \mathrm{id}_f) \\
&= \alpha^{acde}_{k,h,C^{abc}(g,f)} \circ \alpha^{abce}_{C^{cde}(k,h),g,f}
\end{aligned}
$$

が成り立つという条件と同等である．これは上記の記号を使うと

$$
(k \bullet \alpha^{abcd}_{hgf}) * \alpha^{abde}_{k,h\circ g,f} * (\alpha^{bcde}_{khg} \bullet f) = \alpha^{acde}_{k,h,g\circ f} * \alpha^{abce}_{k\circ h,g,f}
$$

となる．これは圏 $\mathcal{B}(a,e)$ における図式として書けば，次の可換性を示している．

$$
\begin{tikzcd}
 & ((k\circ h)\circ g)\circ f \arrow[dl, "\alpha^{bcde}_{khg}\bullet f"'] \arrow[dr, "\alpha^{abce}_{k\circ h,g,f}"] & \\
(k\circ(h\circ g))\circ f \arrow[d, "\alpha^{abde}_{k,h\circ g,f}"'] & & (k\circ h)\circ(g\circ f) \arrow[d, "\alpha^{acde}_{k,h,g\circ f}"] \\
k\circ((h\circ g)\circ f) \arrow[rr, "k\bullet\alpha^{abcd}_{hgf}"'] & & k\circ(h\circ(g\circ f))
\end{tikzcd}
$$

同様に，8 は

$$(g\bullet\lambda_f)*\alpha^{abbc}_{g,\mathrm{id}_b,f}=\rho_g\bullet f$$

となり，図式として書けば次の可換性を示している．

$$
\begin{tikzcd}
(g\circ\mathrm{id}_b)\circ f \arrow[rr, "\alpha^{abbc}_{g,\mathrm{id}_b,f}"] \arrow[dr, "\rho_g\bullet f"'] & & g\circ(\mathrm{id}_b\circ f) \arrow[dl, "g\bullet\lambda_f"] \\
 & g\circ f &
\end{tikzcd}
$$

bicategory では，α により同型 $(h\circ g)\circ f\cong h\circ(g\circ f)$ 等が与えられることになる．この α により，例えば同型 $((l\circ k)\circ(h\circ g))\circ f\cong l\circ(k\circ((h\circ g)\circ f))$ などが得られるのであるが，一般にこのような同型を α から得る方法は複数あることになる．というのも，射が 4 つの場合でも既に，同型 $((k\circ h)\circ g)\circ f\cong k\circ(h\circ(g\circ f))$ は上記の五角形の図式のように二つあるからである．つまり，何も条件が無ければこのような同型は自然には定まらないことになる．λ と ρ についても同様である．そこで bicategory の条件として「α,λ,ρ によって複数の同型が得られる場合，それらは常に一致する」という条件を付け加えたいわけである．これを coherence 条件という．ところが実は，coherence 条件は上記の (五角形と三角形の) 二つの図式の可換性さえ認めてしまえば，証明できることが分かっている (coherence 定理)．そこで bicategory の条件としてこの二つを入れているのである．coherence 定理は後で証明する (系 28)．

例 1. **Cat** は strict 2-category になる．まず圏 A,B に対して $\mathbf{Cat}(A,B):=B^A$ と定義し，圏 A,B,C に対して関手 $C^{ABC}\colon\mathbf{Cat}(B,C)\times\mathbf{Cat}(A,B)\to\mathbf{Cat}(A,C)$ を自然変換

の水平合成で定義する．即ち

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, bend right, "G"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\beta"] & B \arrow[r, bend left, "K"] \arrow[r, bend right, "L"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\gamma"] & C \end{tikzcd}$$

のとき，$a \in A$ に対して $C^{ABC}(\gamma, \beta)_a := \gamma_{Ga} \circ K(\beta_a)$ である．このとき次の図式は可換である．

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & D^C \times C^B \times B^A \arrow[dl, "C^{BCD}\times\mathrm{id}"'] \arrow[dr, "\mathrm{id}\times C^{ABC}"] & \\ D^B \times B^A \arrow[dr, "C^{ABD}"'] & & D^C \times C^A \arrow[dl, "C^{ACD}"] \\ & D^A & \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} \mathbf{1} \times B^A \arrow[rr, "="] \arrow[dr, "I^B\times\mathrm{id}"'] & & B^A \\ & B^B \times B^A \arrow[ur, "C^{ABB}"'] & \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd} B^A \times \mathbf{1} \arrow[rr, "="] \arrow[dr, "\mathrm{id}\times I^A"'] & & B^A \\ & B^A \times A^A \arrow[ur, "C^{AAB}"'] & \end{tikzcd}$$

よって $\alpha^{ABCD}, \lambda^{AB}, \rho^{AB}$ として恒等変換を取ることができる．故に bicategory の定義の条件 7, 8 は明らかに成り立つから **Cat** は bicategory である．$\alpha^{ABCD}, \lambda^{AB}, \rho^{AB}$ が恒等変換だから **Cat** は strict 2-category である． □

例 2. 圏は Hom を離散圏と見なすことで strict 2-category になる． □

例 3 (fundamental 2-groupoid)**.** 位相空間 X に対して以下のように定めると bicategory $\Pi_2(X)$ が得られる．この bicategory を fundamental 2-groupoid という．

- 点 $a \in X$ を対象とする．即ち $\mathrm{Ob}(\Pi_2(X)) := X$ である．
- $a \in X$ から $b \in X$ への道 $f\colon [0,1] \to X$ を a から b への 1-morphism とする．
- 道 $f\colon a \to b$ から $g\colon a \to b$ へのホモトピーを 2-morphism とする (但しホモトピー同値な 2-morphism は同じものと見なす)．これにより $a, b \in X$ に対して圏 $\Pi_2(X)(a,b)$ が定まる．
- $f\colon a \to b,\ g\colon b \to c$ に対して合成 $g \circ f\colon a \to c$ を

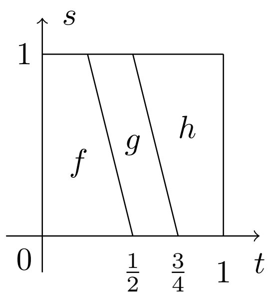
$$g \circ f(t) := \begin{cases} f(2t) & \left(0 \le t \le \dfrac{1}{2}\right) \\ g(2t-1) & \left(\dfrac{1}{2} < t \le 1\right) \end{cases}$$

で定義する．これは関手 $C^{abc}\colon \Pi_2(X)(b,c)\times\Pi_2(X)(a,b)\to\Pi_2(X)(a,c)$ を与える．

- $a\xrightarrow{f}b\xrightarrow{g}c\xrightarrow{h}d$ とする．連続写像 $\alpha_{hgf}\colon [0,1]\times[0,1]\to X$ を

$$\alpha_{hgf}(s,t):=\begin{cases} f\left(\dfrac{4t}{2-s}\right) & \left(0\le t\le\dfrac{2-s}{4}\right)\\ g(4t-2+s) & \left(\dfrac{2-s}{4}<t\le\dfrac{3-s}{4}\right)\\ h\left(\dfrac{4t-3+s}{1+s}\right) & \left(\dfrac{3-s}{4}<t\le 1\right)\end{cases}$$

により定める．



これは $\alpha_{hgf}\colon (h\circ g)\circ f\Rightarrow h\circ(g\circ f)$ である．この α_{hgf} は f,g,h について自然な同型である．

- $a\in X$ に対して $\mathrm{id}_a\colon a\to a$ は $\mathrm{id}_a(t):=a$ で定まる道 $\mathrm{id}_a\colon[0,1]\to X$ とする．
- $f\colon a\to b$ に対して $\lambda_f\colon \mathrm{id}_b\circ f\Rightarrow f$ と $\rho_f\colon f\circ\mathrm{id}_a\Rightarrow f$ を

$$\lambda_f(s,t):=\begin{cases} f\left(\dfrac{2t}{1+s}\right) & \left(0\le t\le\dfrac{1+s}{2}\right)\\ a & \left(\dfrac{1+s}{2}<t\le 1\right)\end{cases}$$

$$\rho_f(s,t):=\begin{cases} a & \left(0\le t\le\dfrac{1-s}{2}\right)\\ f(2t-1+s) & \left(\dfrac{1-s}{2}<t\le 1\right)\end{cases}$$

により定める．これは f について自然な同型である．

- これらは条件 7，8 を満たす．

以上により $\Pi_2(X)$ は bicategory である． $\square$

例 4. C を pullback を持つ圏とする．このとき圏 C の span がなす bicategory $\mathrm{Span}(C)$ を以下のように定めることができる．

- $\mathrm{Ob}(\mathrm{Span}(C)) := \mathrm{Ob}(C)$ とする．
- a から b への 1-morphism は a から b への span，即ち図式 $a \xleftarrow{f_0} f \xrightarrow{f_1} b$ とする．
- 2-morphism は span の射とする．これにより対象 $a, b \in C$ に対して $\mathrm{Span}(C)(a,b)$ は圏になる．
- $a \xleftarrow{f_0} f \xrightarrow{f_1} b$ と $b \xleftarrow{g_0} g \xrightarrow{g_1} c$ の合成 $a \leftarrow g \circ f \to c$ を，pullback を使って次の図式で定める．

$$\begin{tikzcd}
 & & g \circ f \arrow[dl] \arrow[dr] & & \\
 & f \arrow[dl, "f_0"'] \arrow[dr, "f_1"] \arrow[rr, phantom, "\text{p.b.}"] & & g \arrow[dl, "g_0"'] \arrow[dr, "g_1"] & \\
a & & b & & c
\end{tikzcd}$$

これは関手 $C^{abc} \colon \mathrm{Span}(C)(b,c) \times \mathrm{Span}(C)(a,b) \to \mathrm{Span}(C)(a,c)$ を与える．

∵) $\beta \colon f \Rightarrow g \colon a \to b$, $\gamma \colon k \Rightarrow l \colon b \to c$ に対して $C^{abc}(\gamma, \beta)$ を pullback の普遍性で得られる次の点線の射で定義する．

$$\begin{tikzcd}
 & & g \circ f \arrow[dl] \arrow[dr] \arrow[dddd, dashed, bend left] & & \\
 & f \arrow[dl] \arrow[dr] \arrow[dd, "\beta"] & & k \arrow[dl] \arrow[dr] \arrow[dd, "\gamma"] & \\
a & & b & & c \\
 & g \arrow[ul] \arrow[ur] & & l \arrow[ul] \arrow[ur] & \\
 & & g \circ f \arrow[ul] \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}$$

pullback の普遍性から，この C^{abc} が関手となることは容易に分かる．

- $a \xrightarrow{f} b \xrightarrow{g} c \xrightarrow{h} d$ とする．$\alpha_{hgf} \colon (h \circ g) \circ f \Rightarrow h \circ (g \circ f)$ を pullback の普遍性に

より定める．

$$
\begin{tikzcd}
 & & (h\circ g)\circ f \arrow[rr, dashed, "\alpha_{hgf}"] \arrow[ddl] \arrow[d, dashed] \arrow[drr] & & h\circ(g\circ f) \arrow[dll] \arrow[ddr] & & \\
 & & g\circ f \arrow[dl] \arrow[dr] & & h\circ g \arrow[dl] \arrow[dr] & & \\
 & f \arrow[dl] \arrow[dr] & & g \arrow[dl] \arrow[dr] & & h \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
a & & b & & c & & d
\end{tikzcd}
$$

これは f, g, h について自然である．

$\because$) $\beta\colon f \Rightarrow f'$, $\gamma\colon g \Rightarrow g'$, $\delta\colon h \Rightarrow h'$ として

$$
(\delta \bullet (\gamma \bullet \beta)) * \alpha_{hgf} = \alpha_{h'g'f'} * ((\delta \bullet \gamma) \bullet \beta)
$$

を示せばよいが，それは普遍性により分かる．

$$
\begin{tikzcd}
 & (h\circ g)\circ f \arrow[rrrr, "\alpha_{hgf}"] \arrow[dd] \arrow[drrr] \arrow[dddddd, "(\delta\bullet\gamma)\bullet\beta"] & & & & h\circ(g\circ f) \arrow[dlll] \arrow[dd] \arrow[dddddd, bend left, "\delta\bullet(\gamma\bullet\beta)"] & \\
 & & g\circ f \arrow[dl] \arrow[dr] \arrow[dddd, bend left, "\gamma\bullet\beta"] & & h\circ g \arrow[dl] \arrow[dr] \arrow[dddd, bend left, "\delta\bullet\gamma"] & & \\
 & f \arrow[dl] \arrow[dr] \arrow[dd, "\beta"] & & g \arrow[dl] \arrow[dr] \arrow[dd, "\gamma"] & & h \arrow[dl] \arrow[dr] \arrow[dd, "\delta"] & \\
a & & b & & c & & d \\
 & f' \arrow[ul] \arrow[ur] & & g' \arrow[ul] \arrow[ur] & & h' \arrow[ul] \arrow[ur] & \\
 & & g'\circ f' \arrow[ul] \arrow[ur] & & h'\circ g' \arrow[ul] \arrow[ur] & & \\
 & (h'\circ g')\circ f' \arrow[uu] \arrow[urrr] \arrow[rrrr, swap, "\alpha_{h'g'f'}"] & & & & h'\circ(g'\circ f') \arrow[ulll] \arrow[uu] &
\end{tikzcd}
$$

また普遍性から明らかに，α_{hgf} は同型である．

- $a \xleftarrow{\mathrm{id}_a} a \xrightarrow{\mathrm{id}_a} a$ を id_a とする．
- $f\colon a \to b$ に対して $\lambda_f\colon \mathrm{id}_b \circ f \Rightarrow f$ と $\rho_f\colon f \circ \mathrm{id}_a \Rightarrow f$ を pullback の射影により

定める．

$$
\begin{tikzcd}
 & & \mathrm{id}_b \circ f \arrow[dl, "\lambda_f"'] \arrow[dr] & & \\
 & f \arrow[dl] \arrow[dr] & & \mathrm{id}_b \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
a & & b & & b
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & & f \circ \mathrm{id}_a \arrow[dl] \arrow[dr, "\rho_f"] & & \\
 & \mathrm{id}_a \arrow[dl] \arrow[dr] & & f \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
a & & a & & b
\end{tikzcd}
$$

λ_f，ρ_f は f について自然な同型である．

- pullback の普遍性により，条件 7，8 が成り立つ．

以上により $\mathrm{Span}(C)$ は bicategory である． □

例 5. $\mathcal{B}$ を bicategory とする．このとき，次のように定めた $\langle \mathcal{B}^{\mathrm{op}}, C^{\mathrm{op}}, \alpha^{\mathrm{op}}, \lambda^{\mathrm{op}}, \rho^{\mathrm{op}} \rangle$ は bicategory を与える．

- $\mathrm{Ob}(\mathcal{B}^{\mathrm{op}}) := \mathrm{Ob}(\mathcal{B})$.
- $a, b \in \mathcal{B}$ に対して $\mathcal{B}^{\mathrm{op}}(a, b) := \mathcal{B}(b, a)$.
- $a, b, c \in \mathcal{B}$ に対して，関手 $(C^{\mathrm{op}})^{abc} \colon \mathcal{B}^{\mathrm{op}}(b, c) \times \mathcal{B}^{\mathrm{op}}(a, b) \to \mathcal{B}^{\mathrm{op}}(a, c)$ を

$$
\mathcal{B}(c, b) \times \mathcal{B}(b, a) = \mathcal{B}(b, a) \times \mathcal{B}(c, b) \xrightarrow{C^{cba}} \mathcal{B}(c, a)
$$

で定める．

- $a, b, c, d \in \mathcal{B}$ に対して，自然同型

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathcal{B}^{\mathrm{op}}(c,d) \times \mathcal{B}^{\mathrm{op}}(b,c) \times \mathcal{B}^{\mathrm{op}}(a,b) \arrow[dl, "(C^{\mathrm{op}})^{bcd} \times \mathrm{id}"'] \arrow[dr, "\mathrm{id} \times (C^{\mathrm{op}})^{abc}"] & \\
\mathcal{B}^{\mathrm{op}}(b,d) \times \mathcal{B}^{\mathrm{op}}(a,b) \arrow[rr, phantom, "\overset{\sim}{\Longrightarrow}"', "(\alpha^{\mathrm{op}})^{abcd}"] \arrow[dr, "(C^{\mathrm{op}})^{abd}"'] & & \mathcal{B}^{\mathrm{op}}(c,d) \times \mathcal{B}^{\mathrm{op}}(a,c) \arrow[dl, "(C^{\mathrm{op}})^{abd}"] \\
 & \mathcal{B}^{\mathrm{op}}(a,d) &
\end{tikzcd}
$$

を

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathcal{B}(b,a) \times \mathcal{B}(c,b) \times \mathcal{B}(d,c) \arrow[dl, "\mathrm{id} \times C^{dcb}"'] \arrow[dr, "C^{cba} \times \mathrm{id}"] & \\
\mathcal{B}(b,a) \times \mathcal{B}(d,b) \arrow[rr, phantom, "\overset{\sim}{\Longrightarrow}"', "(\alpha^{dcba})^{-1}"] \arrow[dr, "C^{dba}"'] & & \mathcal{B}(c,a) \times \mathcal{B}(d,c) \arrow[dl, "C^{dca}"] \\
 & \mathcal{B}(d,a) &
\end{tikzcd}
$$

で定義する．

- $(\lambda^{\mathrm{op}})^{ab} := \rho^{ba}$，$(\rho^{\mathrm{op}})^{ab} := \lambda^{ba}$ とする．

また，次のように定めた $\mathcal{B}^{\mathrm{co}}$ も bicategory である．

- $\mathrm{Ob}(\mathcal{B}^{\mathrm{co}}) := \mathrm{Ob}(\mathcal{B})$
- $\mathcal{B}^{\mathrm{co}}(a,b) := \mathcal{B}(a,b)^{\mathrm{op}}$

よって $\mathcal{B}^{\mathrm{coop}} := (\mathcal{B}^{\mathrm{co}})^{\mathrm{op}}$ も bicategory である． □

さて，後で必要となる補題をいくつか証明しておく．(これらは coherence 条件の例である．)

補題 6. bicategory $\mathcal{B}$ の 1-morphism $f\colon a \to b$，$g\colon b \to c$ に対して，圏 $\mathcal{B}(a,c)$ における次の図式は可換である．

$$
\begin{tikzcd}
(g \circ f) \circ \mathrm{id}_a \arrow[rr, "\alpha^{aabc}_{g,f,\mathrm{id}_a}"] \arrow[dr, "\rho^{ac}_{g \circ f}"'] & & g \circ (f \circ \mathrm{id}_a) \arrow[dl, "g \bullet \rho^{ab}_f"] \\
& g \circ f &
\end{tikzcd}
$$

証明. ρ^{ac} が自然同型だから，次の三角柱の図式の側面となる四角は全て可換である．

$$
\begin{tikzcd}
((g \circ f) \circ \mathrm{id}_a) \circ \mathrm{id}_a \arrow[rr, "\rho^{ac}_{g \circ f} \bullet \mathrm{id}_a"] \arrow[dr, "\alpha^{aabc}_{g,f,\mathrm{id}_a} \bullet \mathrm{id}_a"] \arrow[dd, "\rho^{ac}_{(g \circ f) \circ \mathrm{id}_a}"'] & & (g \circ f) \circ \mathrm{id}_a \arrow[dd, "\rho^{ac}_{g \circ f}"] \\
& (g \circ (f \circ \mathrm{id}_a)) \circ \mathrm{id}_a \arrow[ur, "(g \bullet \rho^{ab}_f) \bullet \mathrm{id}_a"'] \arrow[dd, "\rho^{ac}_{g \circ (f \circ \mathrm{id}_a)}" near end] & \\
(g \circ f) \circ \mathrm{id}_a \arrow[rr, "\rho^{ac}_{g \circ f}" near end] \arrow[dr, "\alpha^{aabc}_{g,f,\mathrm{id}_a}"'] & & g \circ f \\
& g \circ (f \circ \mathrm{id}_a) \arrow[ur, "g \bullet \rho^{ab}_f"'] &
\end{tikzcd}
$$

今示したいのは底面部分の三角形の可換性だから，上面部分の三角形の可換性を示せばよ

い．その為に次の図式を考える．($(**)$ が今可換性を示したい部分である．)

$$
\begin{tikzcd}
 & & (g\circ f)\circ(\mathrm{id}_a\circ\mathrm{id}_a) \arrow[drr, "\alpha^{aabc}_{g,f,\mathrm{id}_a\circ\mathrm{id}_a}"] \arrow[ddl, "(g\circ f)\bullet\lambda^{aa}_{\mathrm{id}_a}"] \arrow[d, phantom, "(\alpha)"] & & \\
((g\circ f)\circ\mathrm{id}_a)\circ\mathrm{id}_a \arrow[urr, "\alpha^{aaac}_{g\circ f,\mathrm{id}_a,\mathrm{id}_a}"] \arrow[dr, "\rho^{ac}_{g\circ f}\bullet\mathrm{id}_a"] \arrow[ddr, "\alpha^{aabc}_{g,f,\mathrm{id}_a}\bullet\mathrm{id}_a"'] \arrow[rr, phantom, "(*)"] \arrow[d, phantom, "(**)"] & & & & g\circ(f\circ(\mathrm{id}_a\circ\mathrm{id}_a)) \arrow[dl, "g\bullet(f\bullet\lambda^{aa}_{\mathrm{id}_a})"'] \\
 & (g\circ f)\circ\mathrm{id}_a \arrow[rr, "\alpha^{aabc}_{g,f,\mathrm{id}_a}"] \arrow[drr, phantom, "(\alpha)"] & & g\circ(f\circ\mathrm{id}_a) \arrow[r, phantom, "(*)"] & \\
 & (g\circ(f\circ\mathrm{id}_a))\circ\mathrm{id}_a \arrow[u, "(g\bullet\rho^{ab}_f)\bullet\mathrm{id}_a"'] \arrow[rr, "\alpha^{aabc}_{g,f\circ\mathrm{id}_a,\mathrm{id}_a}"'] & & g\circ((f\circ\mathrm{id}_a)\circ\mathrm{id}_a) \arrow[u, "g\bullet(\rho^{ab}_f\bullet\mathrm{id}_a)"] \arrow[uur, "g\bullet\alpha^{aaab}_{f,\mathrm{id}_a,\mathrm{id}_a}"'] &
\end{tikzcd}
$$

(α) の部分は α が自然変換だから可換である．また $(*)$ の部分は bicategory の定義の条件 8 により可換である．また外側の五角形は bicategory の定義の条件 7 により可換である．故に $(**)$ の部分も可換である． $\square$

また，同様にして次の補題が成り立つ．

補題 7. $f\colon a\to b$, $g\colon b\to c$ に対して次の図式は可換である．

$$
\begin{tikzcd}
(\mathrm{id}_c\circ g)\circ f \arrow[rr, "\alpha^{abcc}_{\mathrm{id}_c,g,f}"] \arrow[dr, "\lambda^{bc}_g\bullet f"'] & & \mathrm{id}_c\circ(g\circ f) \arrow[dl, "\lambda^{ac}_{g\circ f}"] \\
 & g\circ f &
\end{tikzcd}
$$

証明. 補題 6 と同じように次の図式から分かる．(ここで，上付きの添え字は省略した．以降，上付きの添え字は省略することがある．)

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{id}_c\circ((\mathrm{id}_c\circ g)\circ f) \arrow[rr, "\mathrm{id}_c\bullet\alpha_{\mathrm{id}_c,g,f}"] \arrow[dr, "\mathrm{id}_c\bullet(\lambda_g\bullet f)"] \arrow[dd, "\lambda_{(\mathrm{id}_c\circ g)\circ f}"'] & & \mathrm{id}_c\circ(\mathrm{id}_c\circ(g\circ f)) \arrow[dl, "\mathrm{id}_c\bullet\lambda_{g\circ f}"] \arrow[dd, "\mathrm{id}_c\bullet\lambda_{(g\circ f)}"] \\
 & \mathrm{id}_c\circ(g\circ f) \arrow[dd, "\lambda_{g\circ f}"] & \\
(\mathrm{id}_c\circ g)\circ f \arrow[rr, crossing over, "\alpha_{\mathrm{id}_c,g,f}"] \arrow[dr, "\lambda_g\bullet f"'] & & \mathrm{id}_c\circ(g\circ f) \arrow[dl, "\lambda_{g\circ f}"] \\
 & g\circ f &
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
 & & (\mathrm{id}_c \circ \mathrm{id}_c) \circ (g \circ f) \arrow[drrr, "\alpha_{\mathrm{id}_c, \mathrm{id}_c, g \circ f}"] \arrow[ddr, "\rho_{\mathrm{id}_c} \bullet (g \circ f)"] & & & \\
((\mathrm{id}_c \circ \mathrm{id}_c) \circ g) \circ f \arrow[urr, "\alpha_{\mathrm{id}_c \circ \mathrm{id}_c, g, f}"] \arrow[drr, "(\rho_{\mathrm{id}_c} \bullet g) \bullet f"] \arrow[ddr, "\alpha_{\mathrm{id}_c, \mathrm{id}_c, g} \bullet f"'] & & & & & \mathrm{id}_c \circ (\mathrm{id}_c \circ (g \circ f)) \arrow[dll, "\mathrm{id} \bullet \lambda_{g \circ f}"'] \\
 & & (\mathrm{id}_c \circ g) \circ f \arrow[r, "\alpha_{\mathrm{id}_c, g, f}"] & \mathrm{id}_c \circ (g \circ f) & & \\
 & (\mathrm{id}_c \circ (\mathrm{id}_c \circ g)) \circ f \arrow[ur, "(\mathrm{id} \bullet \lambda_g) \bullet f"'] \arrow[rrr, "\alpha_{\mathrm{id}_c, \mathrm{id}_c \circ g, f}"'] & & & \mathrm{id}_c \circ ((\mathrm{id}_c \circ g) \circ f) \arrow[ul, "\mathrm{id} \bullet (\lambda_g \bullet f)"] \arrow[uur, "\mathrm{id} \bullet \alpha_{\mathrm{id}_c, g, f}"'] &
\end{tikzcd}
$$

□

補題 8. $\lambda_{\mathrm{id}_a} = \rho_{\mathrm{id}_a} \colon \mathrm{id}_a \circ \mathrm{id}_a \Rightarrow \mathrm{id}_a$ である．

証明. 補題 6 と同様に，$\mathrm{id}_a \bullet \lambda_{\mathrm{id}_a} = \mathrm{id}_a \bullet \rho_{\mathrm{id}_a}$ を示せばよい．まず ρ の自然性から

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{id}_a \circ \mathrm{id}_a \arrow[d, "\rho_{\mathrm{id}_a}"] \\
\mathrm{id}_a
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
(\mathrm{id}_a \circ \mathrm{id}_a) \circ \mathrm{id}_a \arrow[r, "\rho_{\mathrm{id}_a \circ \mathrm{id}_a}"] \arrow[d, "\rho_{\mathrm{id}_a} \bullet \mathrm{id}_a"'] & \mathrm{id}_a \circ \mathrm{id}_a \arrow[d, "\rho_{\mathrm{id}_a}"] \\
\mathrm{id}_a \circ \mathrm{id}_a \arrow[r, "\rho_{\mathrm{id}_a}"'] & \mathrm{id}_a
\end{tikzcd}
$$

となるが，ρ_{id_a} は同型だから $\rho_{\mathrm{id}_a \circ \mathrm{id}_a} = \rho_{\mathrm{id}_a} \bullet \mathrm{id}_a$ が分かる．よって，bicategory の定義の条件 8 と補題 6 を使えば

$$
\begin{tikzcd}
 & (\mathrm{id}_a \circ \mathrm{id}_a) \circ \mathrm{id}_a \arrow[dl, "\alpha_{\mathrm{id}_a, \mathrm{id}_a, \mathrm{id}_a}"'] \arrow[dr, "\alpha_{\mathrm{id}_a, \mathrm{id}_a, \mathrm{id}_a}"] \arrow[dd, bend right, "\rho_{\mathrm{id}_a} \bullet \mathrm{id}_a"'] \arrow[dd, bend left, "\rho_{\mathrm{id}_a \circ \mathrm{id}_a}"] & \\
\mathrm{id}_a \circ (\mathrm{id}_a \circ \mathrm{id}_a) \arrow[dr, "\mathrm{id}_a \bullet \lambda_{\mathrm{id}_a}"'] & & \mathrm{id}_a \circ (\mathrm{id}_a \circ \mathrm{id}_a) \arrow[dl, "\mathrm{id}_a \bullet \rho_{\mathrm{id}_a}"] \\
 & \mathrm{id}_a \circ \mathrm{id}_a &
\end{tikzcd}
$$

が可換となる．$\alpha_{\mathrm{id}_a, \mathrm{id}_a, \mathrm{id}_a}$ が同型であることから $\mathrm{id}_a \bullet \lambda_{\mathrm{id}_a} = \mathrm{id}_a \bullet \rho_{\mathrm{id}_a}$ が分かる． □

関手の bicatgory 版が pseudofunctor である．

定義. $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ を bicategory とする．pseudofunctor (もしくは weak 2-functor もしくは homomorphism) $F \colon \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ とは以下を満たすことである．

(1) 関数 $F \colon \mathrm{Ob}(\mathcal{B}) \to \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ が与えられている．
(2) 各対象 $a, b \in \mathcal{B}$ に対して関手 $F^{ab} \colon \mathcal{B}(a, b) \to \mathcal{C}(Fa, Fb)$ が与えられている．

(3) 各対象 $a,b,c \in \mathcal{B}$ に対して次の自然同型 φ^{abc} が与えられている．

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{B}(b,c)\times\mathcal{B}(a,b) \arrow[dl, "F^{bc}\times F^{ab}"'] \arrow[dr, "C^{abc}"] & \\
\mathcal{C}(Fb,Fc)\times\mathcal{C}(Fa,Fb) \arrow[dr, "C^{Fa,Fb,Fc}"'] \arrow[rr, phantom, "\overset{\sim}{\Longrightarrow}_{\varphi^{abc}}"] & & \mathcal{B}(a,c) \arrow[dl, "F^{ac}"] \\
 & \mathcal{C}(Fa,Fc) &
\end{tikzcd}$$

よって $\langle g,f\rangle \in \mathcal{B}(b,c)\times\mathcal{B}(a,b)$ に対して $\varphi^{abc}_{gf}\colon Fg\circ Ff \Rightarrow F(g\circ f)$ は $\mathcal{C}$ の同型な 2-morphism である．

(4) 各対象 $a\in\mathcal{B}$ に対して $\mathcal{C}$ の同型な 2-morphism $\psi^a\colon \mathrm{id}_{Fa} \Rightarrow F^{aa}(\mathrm{id}_a)$ が与えられている．

(5) $\mathcal{B}$ の 1-morphism $a \xrightarrow{f} b \xrightarrow{g} c \xrightarrow{h} d$ に対して次の $\mathcal{C}(Fa,Fd)$ の図式が可換である．

$$\begin{tikzcd}
(Fh\circ Fg)\circ Ff \arrow[r, "\varphi_{hg}\bullet Ff"] \arrow[d, "\alpha_{Fh,Fg,Ff}"'] & F(h\circ g)\circ Ff \arrow[r, "\varphi_{h\circ g,f}"] & F((h\circ g)\circ f) \arrow[d, "F(\alpha_{hgf})"] \\
Fh\circ(Fg\circ Ff) \arrow[r, "Fh\bullet\varphi_{gf}"'] & Fh\circ F(g\circ f) \arrow[r, "\varphi_{h,g\circ f}"'] & F(h\circ(g\circ f))
\end{tikzcd}$$

これは，α を省略して書けば，次の $\mathcal{C}$ の図式で表される．

$$\begin{tikzcd}
 & Fb \arrow[r, "Fg"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\varphi^{abc}_{gf}"] & Fc \arrow[dr, "Fh"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\varphi^{acd}_{h,g\circ f}"] & \\
Fa \arrow[ur, "Ff"] \arrow[urr, "F(g\circ f)"] \arrow[rrr, "F(h\circ(g\circ f))"'] & & & Fd
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
 & Fb \arrow[r, "Fg"] \arrow[drr, "F(h\circ g)"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\varphi^{abd}_{h\circ g,f}"] & Fc \arrow[dr, "Fh"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\varphi^{bcd}_{hg}"] & \\
Fa \arrow[ur, "Ff"] \arrow[rrr, "F((h\circ g)\circ f)"'] & & & Fd
\end{tikzcd}$$

(6) $\mathcal{B}$ の 1-morphism $f\colon a\to b$ に対して次の $\mathcal{C}(Fa,Fb)$ の図式が可換である．

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{id}_{Fb}\circ Ff \arrow[r, "\lambda_{Ff}"] \arrow[d, "\psi^b\bullet Ff"'] & Ff \\
F(\mathrm{id}_b)\circ Ff \arrow[r, "\varphi^{abb}_{\mathrm{id}_b,f}"'] & F(\mathrm{id}_b\circ f) \arrow[u, "F(\lambda_f)"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
Ff\circ\mathrm{id}_{Fa} \arrow[r, "\rho_{Ff}"] \arrow[d, "Ff\bullet\psi^a"'] & Ff \\
Ff\circ F(\mathrm{id}_a) \arrow[r, "\varphi^{aab}_{f,\mathrm{id}_a}"'] & F(f\circ\mathrm{id}_a) \arrow[u, "F(\rho_f)"']
\end{tikzcd}$$

これは $\mathcal{C}$ の図式で書けば次のようになる．

$$
\begin{tikzcd}
& Fb \arrow[dr, "F(\mathrm{id}_b)"] \arrow[dr, bend left=60, "\mathrm{id}_{Fb}"] \arrow[dr, phantom, bend left=30, "\Swarrow \psi^b"] & \\
Fa \arrow[ur, "Ff"] \arrow[rr, "F(\mathrm{id}_b \circ f)"] \arrow[rr, bend right=40, "F(f)"'] \arrow[rr, phantom, bend right=20, "\Downarrow F(\lambda_f)"] \arrow[r, phantom, shift left=4, "\Downarrow \varphi^{abb}_{\mathrm{id}_b, f}"] & & Fb
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
& Fb \arrow[dr, bend left=60, "\mathrm{id}_{Fb}"] & \\
Fa \arrow[ur, "Ff"] \arrow[rr, bend right=40, "F(f)"'] \arrow[rr, phantom, "\Downarrow \lambda_{Ff}"] & & Fb
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
& & Fa \arrow[d, "Ff"] \\
Fa \arrow[urr, "F(\mathrm{id}_a)"] \arrow[urr, bend left=60, "\mathrm{id}_{Fa}"] \arrow[urr, phantom, bend left=30, "\Searrow \psi^a"] \arrow[rr, "F(f \circ \mathrm{id}_a)"] \arrow[rr, bend right=40, "Ff"'] \arrow[rr, phantom, bend right=20, "\Downarrow F(\rho_f)"] & & Fb \arrow[ul, phantom, "\varphi^{aab}_{f, \mathrm{id}_a} \Downarrow"]
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
& & Fa \arrow[d, "Ff"] \\
Fa \arrow[urr, bend left=60, "\mathrm{id}_{Fa}"] \arrow[rr, bend right=40, "Ff"'] \arrow[rr, phantom, "\Downarrow \rho_{Ff}"] & & Fb
\end{tikzcd}
$$

更に，各 φ^{abc} と ψ^a が id となるとき，F を strict 2-functor (もしくは strict homomorphism) と呼ぶ.

pseudofunctor では, 関手の条件 ($F(g \circ f) = Fg \circ Ff$, $F(\mathrm{id}) = \mathrm{id}$) が同型であればよいというように弱められており, 代わりに条件 5, 6 が追加されている．条件 5 は, bicategory の構造の 1 つである α を F が保つという条件である．つまり，$a \xrightarrow{f} b \xrightarrow{g} c \xrightarrow{h} d$ を $\mathcal{B}$ の 1-morphism としたとき α は 2-morphism $\alpha_{hgf} \colon (h \circ g) \circ f \Rightarrow h \circ (g \circ f)$ を与えるが，これを F で写した $F(\alpha_{hgf})$ が $\alpha_{Fh,Fg,Ff} \colon (Fh \circ Fg) \circ Ff \Rightarrow Fh \circ (Fg \circ Ff)$ と一致するという条件である．但し，$F(\alpha_{hgf})$ と $\alpha_{Fh,Fg,Ff}$ では domain と codomain が一致していないので φ を使った調整が必要で，結果として定義の条件が得られる.

条件 6 についても同様である.

例 9. $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ を bicategory，$F \colon \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ を pseudofunctor とする．F^{op} を次のように定義する.

- $a \in \mathcal{B}$ に対して $F^{\mathrm{op}}(a) := F(a)$.

- $a, b \in \mathcal{B}$ に対して $(F^{\mathrm{op}})^{ab}$ を

$$\mathcal{B}^{\mathrm{op}}(a,b) = \mathcal{B}(b,a) \xrightarrow{F^{ba}} \mathcal{C}(Fb, Fa) = \mathcal{C}^{\mathrm{op}}(Fa, Fb)$$

により定める．
- $a, b, c \in \mathcal{B}$ に対して，同型

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
& \mathcal{B}^{\mathrm{op}}(b,c) \times \mathcal{B}^{\mathrm{op}}(a,b) \arrow[dl, "(F^{\mathrm{op}})^{bc} \times (F^{\mathrm{op}})^{ab}"'] \arrow[dr, "(C^{\mathrm{op}})^{abc}"] & \\
\mathcal{C}^{\mathrm{op}}(Fb,Fc) \times \mathcal{C}^{\mathrm{op}}(Fa,Fb) \arrow[dr, "(C^{\mathrm{op}})^{Fa,Fb,Fc}"'] \arrow[rr, phantom, "\overset{\sim}{\Longrightarrow}_{(\varphi^{\mathrm{op}})^{abc}}"] & & \mathcal{B}^{\mathrm{op}}(a,c) \arrow[dl, "(F^{\mathrm{op}})^{ac}"] \\
& \mathcal{C}^{\mathrm{op}}(Fa,Fc) &
\end{tikzcd}$$

を

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
& \mathcal{B}(b,a) \times \mathcal{B}(c,b) \arrow[dl, "F^{ba} \times F^{cb}"'] \arrow[dr, "C^{cba}"] & \\
\mathcal{C}(Fb,Fa) \times \mathcal{C}(Fc,Fb) \arrow[dr, "C^{Fc,Fb,Fa}"'] \arrow[rr, phantom, "\overset{\sim}{\Longrightarrow}_{\varphi^{cba}}"] & & \mathcal{B}(c,a) \arrow[dl, "F^{ca}"] \\
& \mathcal{C}(Fc,Fa) &
\end{tikzcd}$$

により定める．
- $a \in \mathcal{A}$ に対して $(\psi^{\mathrm{op}})^a := \psi^a$ とする．

この F^{op} は pseudofunctor $\mathcal{B}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ を定める． $\square$

自然変換の bicategory 版となるのが pseudonatural transformation である．

定義． $F, G \colon \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ を pseudofunctor とする．F から G への pseudonatural transformation $\sigma \colon F \Rightarrow G$ とは以下を満たすことである．

(1) 各 $a \in \mathcal{B}$ に対して $\mathcal{C}$ の 1-morphism $\sigma_a \colon Fa \to Ga$ が与えられている．
(2) 各 $a, b \in \mathcal{B}$ に対して，次の自然同型 σ^{ab} が与えられている．

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
& \mathcal{B}(a,b) \arrow[dl, "G^{ab}"'] \arrow[dr, "F^{ab}"] & \\
\mathcal{C}(Ga,Gb) \arrow[dr, "- \bullet \sigma_a"'] \arrow[rr, phantom, "\overset{\sim}{\Longrightarrow}_{\sigma^{ab}}"] & & \mathcal{C}(Fa,Fb) \arrow[dl, "\sigma_b \bullet -"] \\
& \mathcal{C}(Fa,Gb) &
\end{tikzcd}$$

よって $f\colon a \to b$ に対して $\sigma_f^{ab}\colon Gf \circ \sigma_a \Rightarrow \sigma_b \circ Ff$ は $\mathcal{C}$ の同型な 2-morphism である．

(3) $\mathcal{B}$ の 1-morphism $a \xrightarrow{f} b \xrightarrow{g} c$ に対して，次の $\mathcal{C}(Fa, Gc)$ の図式は可換である．

$$
\begin{tikzcd}
(Gg \circ Gf) \circ \sigma_a \arrow[r, "\sim", "\alpha"'] \arrow[dddd, "\varphi_{gf} \bullet \sigma_a"'] & Gg \circ (Gf \circ \sigma_a) \arrow[r, "Gg \bullet \sigma_f"'] & Gg \circ (\sigma_b \circ Ff) \arrow[r, "\sim", "\alpha^{-1}"'] & (Gg \circ \sigma_b) \circ Ff \arrow[d, "\sigma_g \bullet Ff"'] \\
& & & (\sigma_c \circ Fg) \circ Ff \arrow[d, "\alpha"', "\wr"] \\
& & & \sigma_c \circ (Fg \circ Ff) \arrow[d, "\sigma_c \bullet \varphi_{gf}"'] \\
& & & \sigma_c \circ F(g \circ f) \\
G(g \circ f) \circ \sigma_a \arrow[rrr, "\sigma_{g \circ f}"'] & & & \sigma_c \circ F(g \circ f)
\end{tikzcd}
$$

これは，α を省略して書けば，次の $\mathcal{C}$ の図式で表される．

$$
\begin{tikzcd}
Fa \arrow[r, "\sigma_a"] \arrow[dr, "Ff"'] \arrow[dd, bend right=60, "F(g\circ f)"'] \arrow[d, phantom, "\overset{\varphi_{gf}}{\Longleftarrow}"] & Ga \arrow[dr, "Gf"] \arrow[d, phantom, "\Swarrow \sigma_f"] & \\
{} & Fb \arrow[r, "\sigma_b"] \arrow[dl, "Fg"'] \arrow[d, phantom, "\Swarrow \sigma_g"] & Gb \arrow[dl, "Gg"] \\
Fc \arrow[r, "\sigma_c"'] & Gc &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
Fa \arrow[r, "\sigma_a"] \arrow[dd, bend right=60, "F(g\circ f)"'] \arrow[dr, phantom, "\Swarrow \sigma_{g\circ f}"] & Ga \arrow[dr, "Gf"] \arrow[dd, bend right=60, "G(g\circ f)"'] \arrow[d, phantom, "\overset{\varphi_{gf}}{\Longleftarrow}"] & \\
& {} & Gb \arrow[dl, "Gg"] \\
Fc \arrow[r, "\sigma_c"'] & Gc &
\end{tikzcd}
$$

(4) $a \in \mathcal{B}$ に対して次の等式が成り立つ．

$$
\begin{tikzcd}
Fa \arrow[r, "\sigma_a"] \arrow[d, "\mathrm{id}_{Fa}"] \arrow[d, bend right=80, "F(\mathrm{id}_a)"'] \arrow[dr, "\sigma_a"] \arrow[d, phantom, shift right=3ex, "\overset{\psi^a}{\Leftarrow}"] & Ga \arrow[d, "\mathrm{id}_{Ga}"] \arrow[dl, phantom, shift left=2ex, "\Swarrow \lambda_{\sigma_a}"] \arrow[dl, phantom, shift right=2ex, "\Swarrow \rho^{-1}_{\sigma_a}"] \\
Fa \arrow[r, "\sigma_a"'] & Ga
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
Fa \arrow[r, "\sigma_a"] \arrow[d, bend right=80, "F(\mathrm{id}_a)"'] \arrow[dr, phantom, "\Swarrow \sigma_{\mathrm{id}_a}"] & Ga \arrow[d, "\mathrm{id}_{Ga}"] \arrow[d, bend right=80, "G(\mathrm{id}_a)"'] \arrow[d, phantom, shift right=2ex, "\overset{\psi^a}{\Leftarrow}"] \\
Fa \arrow[r, "\sigma_a"'] & Ga
\end{tikzcd}
$$

更に，各 σ^{ab} が恒等変換となるとき，σ を strict natural transformation と呼ぶ．

pseudonatural transformation も，自然変換の条件となる可換図式が同型であればよいというように弱められていて，代わりに σ^{ab} が合成等と可換になるという条件が付け加わっている．

命題 10. $\mathcal{B},\mathcal{C}$ を bicategory，$F,G,H\colon \mathcal{B}\to\mathcal{C}$ を pseudofunctor とする．pseudonatural transformation $\sigma\colon F\Rightarrow G$，$\tau\colon G\Rightarrow H$ に対して垂直合成 $\tau\mathbin{\widehat{\circ}}\sigma$ を，対象 $a\in\mathcal{B}$ に対して $(\tau\mathbin{\widehat{\circ}}\sigma)_a := \tau_a\circ\sigma_a$ で定めれば，$\tau\mathbin{\widehat{\circ}}\sigma$ は pseudonatural transformation $F\Rightarrow H$ となる．

証明．σ,τ が pseudonatural transformation だから，次の自然同型が得られる．

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & \mathcal{B}(a,b) \arrow[dl, "G"'] \arrow[dr, "F"] & \\
\mathcal{C}(Ga,Gb) \arrow[dr, "-\bullet\sigma_a"'] \arrow[rr, phantom, "\overset{\sim}{\Longrightarrow}_{\sigma^{ab}}"] & & \mathcal{C}(Fa,Fb) \arrow[dl, "\sigma_b\bullet-"] \\
 & \mathcal{C}(Fa,Gb) &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & \mathcal{B}(a,b) \arrow[dl, "H"'] \arrow[dr, "G"] & \\
\mathcal{C}(Ha,Hb) \arrow[dr, "-\bullet\tau_a"'] \arrow[rr, phantom, "\overset{\sim}{\Longrightarrow}_{\tau^{ab}}"] & & \mathcal{C}(Ga,Gb) \arrow[dl, "\tau_b\bullet-"] \\
 & \mathcal{C}(Ga,Hb) &
\end{tikzcd}
$$

次に bicategory $\mathcal{C}$ の定義から次の自然同型が得られる．

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathcal{C}(Ga,Gb) \arrow[dl, "\tau_b\bullet-"'] \arrow[dr, "-\bullet\sigma_a"] & \\
\mathcal{C}(Ga,Hb) \arrow[dr, "-\bullet\sigma_a"'] \arrow[rr, phantom, "\overset{\sim}{\Longrightarrow}_{\alpha_{\tau_b,-,\sigma_a}}"] & & \mathcal{C}(Fa,Gb) \arrow[dl, "\tau_b\bullet-"] \\
 & \mathcal{C}(Fa,Hb) &
\end{tikzcd}
$$

これをあわせて次の図式を得る．

$$
\begin{tikzcd}
 & & \mathcal{B}(a,b) \arrow[dll, "H"'] \arrow[d, "G"] \arrow[drr, "F"] & & \\
\mathcal{C}(Ha,Hb) \arrow[dr, "-\bullet\tau_a"] \arrow[rr, phantom, "\overset{\sim}{\Longrightarrow}_{\tau^{ab}}"] \arrow[ddrr, bend right, "-\bullet(\tau_a\circ\sigma_a)"'] & & \mathcal{C}(Ga,Gb) \arrow[dl, "\tau_b\bullet-"'] \arrow[dr, "-\bullet\sigma_a"] \arrow[rr, phantom, "\overset{\sim}{\Longrightarrow}_{\sigma^{ab}}"] & & \mathcal{C}(Fa,Fb) \arrow[dl, "\sigma_b\bullet-"'] \arrow[ddll, bend left, "(\tau_b\circ\sigma_b)\bullet-"] \\
\overset{\sim}{\Longrightarrow}_{\alpha^{-1}_{-,\tau_a,\sigma_a}} & \mathcal{C}(Ga,Hb) \arrow[dr, "-\bullet\sigma_a"'] \arrow[rr, phantom, "\overset{\sim}{\Longrightarrow}_{\alpha_{\tau_b,-,\sigma_a}}"] & & \mathcal{C}(Fa,Gb) \arrow[dl, "\tau_b\bullet-"] & \overset{\sim}{\Longrightarrow}_{\alpha^{-1}_{\tau_b,\sigma_b,-}} \\
 & & \mathcal{C}(Fa,Hb) & &
\end{tikzcd}
$$

この合成により $(\tau\mathbin{\widehat{\circ}}\sigma)^{ab}$ を定める．即ち $f\in\mathcal{B}(a,b)$ に対して

$$
(\tau\mathbin{\widehat{\circ}}\sigma)^{ab}_f := \alpha^{-1}_{\tau_b,\sigma_b,Ff} * (\tau_b\bullet\sigma^{ab}_f) * \alpha_{\tau_b,Gf,\sigma_a} * (\tau^{ab}_f\bullet\sigma_a) * \alpha^{-1}_{Hf,\tau_a,\sigma_a}
$$

である．α を省略して書けば，$(\tau\mathbin{\widehat{\circ}}\sigma)^{ab}_f$ は次の図式の合成で与えられる 2-morphism で

ある.

$$\begin{tikzcd}
Fa \arrow[r, "Ff"] \arrow[d, "\sigma_a"'] & Fb \arrow[d, "\sigma_b"] \\
Ga \arrow[r, "Gf"] \arrow[d, "\tau_a"'] \arrow[ur, phantom, "\sigma_f^{ab}\Nearrow"] & Gb \arrow[d, "\tau_b"] \\
Ha \arrow[r, "Hf"'] \arrow[ur, phantom, "\tau_f^{ab}\Nearrow"] & Hb
\end{tikzcd}$$

この $\tau \mathbin{\widehat{\circ}} \sigma$ が pseudonatural transformation となることを示そう．まず条件 3 を示す.

その為には次の図式が可換であることを示せばよい.

$$
\begin{tikzcd}
H(g\circ f)\circ(\tau_a\circ\sigma_a) \arrow[d, "\alpha^{-1}"'] \arrow[dr, phantom, "(\alpha)"] & (Hg\circ Hf)\circ(\tau_a\circ\sigma_a) \arrow[l, "\varphi\bullet(\tau_a\circ\sigma_a)"'] \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\alpha^{-1}"] & Hg\circ(Hf\circ(\tau_a\circ\sigma_a)) \arrow[dd, "Hg\bullet\alpha^{-1}"] \\
(H(g\circ f)\circ\tau_a)\circ\sigma_a \arrow[ddddd, "\tau_{g\circ f}\bullet\sigma_a"'] & ((Hg\circ Hf)\circ\tau_a)\circ\sigma_a \arrow[l, "(\varphi\bullet\tau_a)\circ\sigma_a"] \arrow[d, "\alpha\bullet\sigma_a"] \arrow[r, phantom, "(\mathcal{B})"] & \\
 & (Hg\circ(Hf\circ\tau_a))\circ\sigma_a \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "(Hg\bullet\tau_f)\bullet\sigma_a"] \arrow[dr, phantom, "(\alpha)"] & Hg\circ((Hf\circ\tau_a)\circ\sigma_a) \arrow[d, "Hg\bullet(\tau_f\bullet\sigma_a)"] \\
 \arrow[r, phantom, "(\tau)"] & (Hg\circ(\tau_b\circ Gf))\circ\sigma_a \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\alpha^{-1}\bullet\sigma_a"] & Hg\circ((\tau_b\circ Gf)\circ\sigma_a) \arrow[d, "Hg\bullet\alpha"] \\
 & ((Hg\circ\tau_b)\circ Gf)\circ\sigma_a \arrow[d, "(\tau_g\bullet Gf)\bullet\sigma_a"] & Hg\circ(\tau_b\circ(Gf\circ\sigma_a)) \arrow[d, "Hg\bullet(\tau_b\bullet\sigma_f)"] \\
 & ((\tau_c\circ Gg)\circ Gf)\circ\sigma_a \arrow[d, "\alpha\bullet\sigma_a"] & Hg\circ(\tau_b\circ(\sigma_b\circ Ff)) \arrow[d, "Hg\bullet\alpha^{-1}"] \\
(\tau_c\circ G(g\circ f))\circ\sigma_a \arrow[d, "\alpha"'] \arrow[dr, phantom, "(\alpha)"] & (\tau_c\circ(Gg\circ Gf))\circ\sigma_a \arrow[l, "(\tau_c\bullet\varphi)\bullet\sigma_a"'] \arrow[d, "\alpha"] \arrow[dr, phantom, "(*)"] & Hg\circ((\tau_b\circ\sigma_b)\circ Ff) \arrow[d, "\alpha^{-1}"] \\
\tau_c\circ(G(g\circ f)\circ\sigma_a) \arrow[ddddd, "\tau_c\bullet\sigma_{g\circ f}"'] & \tau_c\circ((Gg\circ Gf)\circ\sigma_a) \arrow[l, "\tau_c\bullet(\varphi\bullet\sigma_a)"] \arrow[d, "\tau_c\bullet\alpha"] & (Hg\circ(\tau_b\circ\sigma_b))\circ Ff \arrow[d, "\alpha^{-1}\bullet Ff"] \\
 & \tau_c\circ(Gg\circ(Gf\circ\sigma_a)) \arrow[d, "\tau_c\bullet(Gg\bullet\sigma_f)"] & ((Hg\circ\tau_b)\circ\sigma_b)\circ Ff \arrow[d, "(\tau_g\bullet\sigma_b)\bullet Ff"] \\
 \arrow[r, phantom, "(\sigma)"] & \tau_c\circ(Gg\circ(\sigma_b\circ Ff)) \arrow[d, "\tau_c\bullet\alpha^{-1}"] & ((\tau_c\circ Gg)\circ\sigma_b)\circ Ff \arrow[d, "\alpha\bullet Ff"] \\
 & \tau_c\circ((Gg\circ\sigma_b)\circ Ff) \arrow[r, "\alpha^{-1}"] \arrow[d, "\tau_c\bullet(\sigma_g\bullet Ff)"] \arrow[dr, phantom, "(\alpha)"] & (\tau_c\circ(Gg\circ\sigma_b))\circ Ff \arrow[d, "(\tau_c\bullet\sigma_g)\bullet Ff"] \\
 & \tau_c\circ((\sigma_c\circ Fg)\circ Ff) \arrow[r, "\alpha^{-1}"'] \arrow[d, "\tau_c\bullet\alpha"] & (\tau_c\circ(\sigma_c\circ Fg))\circ Ff \arrow[d, "\alpha^{-1}\bullet Ff"] \\
\tau_c\circ(\sigma_c\circ F(g\circ f)) \arrow[d, "\alpha^{-1}"'] \arrow[dr, phantom, "(\alpha)"] & \tau_c\circ(\sigma_c\circ(Fg\circ Ff)) \arrow[l, "\tau_c\bullet(\sigma_c\bullet\varphi)"'] \arrow[dr, "\alpha^{-1}"] \arrow[r, phantom, "(\mathcal{B})"] & ((\tau_c\circ\sigma_c)\circ Fg)\circ Ff \arrow[d, "\alpha"] \\
(\tau_c\circ\sigma_c)\circ F(g\circ f) & & (\tau_c\circ\sigma_c)\circ(Fg\circ Ff) \arrow[ll, "(\tau_c\circ\sigma_c)\bullet\varphi"]
\end{tikzcd}
$$

(α) は α が自然変換であるから可換である．$(\mathcal{B})$ は bicategory の定義より可換である．(σ)，(τ) は σ,τ が pseudonatural transformation であるから可換である．$(*)$ は次の図

式により可換であると分かる．((α), $(\mathcal{B})$ は上記と同じで，$(**)$ は明らかに可換である．)

$$
\begin{tikzcd}
(Hg\circ(\tau_b\circ Gf))\circ\sigma_a \arrow[rrrr, "\alpha"] \arrow[d, "\alpha^{-1}\bullet\sigma_a"'] & & \arrow[d, phantom, "(\mathcal{B})"] & & Hg\circ((\tau_b\circ Gf)\circ\sigma_a) \arrow[d, "Hg\bullet\alpha"] \\
((Hg\circ\tau_b)\circ Gf)\circ\sigma_a \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[d, "(\tau_g\bullet Gf)\bullet\sigma_a"'] \arrow[dr, phantom, "(\alpha)"] & & (Hg\circ\tau_b)\circ(Gf\circ\sigma_a) \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[ddl, "\tau_g\bullet(Gf\circ\sigma_a)"'] \arrow[dddr, "(Hg\circ\tau_b)\bullet\sigma_f"] & & Hg\circ(\tau_b\circ(Gf\circ\sigma_a)) \arrow[d, "Hg\bullet(\tau_b\bullet\sigma_f)"] \arrow[dl, phantom, "(\alpha)"] \\
((\tau_c\circ Gg)\circ Gf)\circ\sigma_a \arrow[d, "\alpha\bullet\sigma_a"'] \arrow[dr, "\alpha"] & & & & Hg\circ(\tau_b\circ(\sigma_b\circ Ff)) \arrow[d, "Hg\bullet\alpha^{-1}"] \\
(\tau_c\circ(Gg\circ Gf))\circ\sigma_a \arrow[d, "\alpha"'] \arrow[dr, phantom, "(\mathcal{B})"] & (\tau_c\circ Gg)\circ(Gf\circ\sigma_a) \arrow[dddr, "(\tau_c\circ Gg)\bullet\sigma_f"'] \arrow[drr, phantom, "(**)"] & & & Hg\circ((\tau_b\circ\sigma_b)\circ Ff) \arrow[d, "\alpha^{-1}"] \arrow[dl, phantom, "(\mathcal{B})"] \\
\tau_c\circ((Gg\circ Gf)\circ\sigma_a) \arrow[d, "\tau_c\bullet\alpha"'] & & & (Hg\circ\tau_b)\circ(\sigma_b\circ Ff) \arrow[uur, "\alpha"] \arrow[dr, "\alpha^{-1}"] \arrow[ddl, "\tau_g\bullet(\sigma_b\circ Ff)"'] & (Hg\circ(\tau_b\circ\sigma_b))\circ Ff \arrow[d, "\alpha^{-1}\bullet Ff"] \\
\tau_c\circ(Gg\circ(Gf\circ\sigma_a)) \arrow[d, "\tau_c\bullet(Gg\bullet\sigma_f)"'] \arrow[uur, "\alpha^{-1}"'] \arrow[r, phantom, "(\alpha)"] & \, & & \arrow[r, phantom, "(\alpha)"] & ((Hg\circ\tau_b)\circ\sigma_b)\circ Ff \arrow[d, "(\tau_g\bullet\sigma_b)\bullet Ff"] \\
\tau_c\circ(Gg\circ(\sigma_b\circ Ff)) \arrow[rr, "\alpha^{-1}"] \arrow[d, "\tau_c\bullet\alpha^{-1}"'] & & (\tau_c\circ Gg)\circ(\sigma_b\circ Ff) \arrow[rr, "\alpha^{-1}"] \arrow[d, phantom, "(\mathcal{B})"] & & ((\tau_c\circ Gg)\circ\sigma_b)\circ Ff \arrow[d, "\alpha\bullet Ff"] \\
\tau_c\circ((Gg\circ\sigma_b)\circ Ff) \arrow[rrrr, "\alpha^{-1}"'] & & \, & & (\tau_c\circ(Gg\circ\sigma_b))\circ Ff
\end{tikzcd}
$$

次に条件 4 を示す．即ち，$a\in\mathcal{B}$ に対して

$$
\begin{tikzcd}
Fa \arrow[r, "(\widehat{\tau\circ\sigma})_a"] \arrow[d, "\mathrm{id}_{Fa}"] \arrow[d, bend right=60, "F(\mathrm{id}_a)"'] \arrow[dr, "(\widehat{\tau\circ\sigma})_a" description] \arrow[d, phantom, shift right=3ex, "\overset{\psi}{\Leftarrow}"] & Ha \arrow[d, "\mathrm{id}_{Ga}"] \arrow[dl, phantom, shift right=2ex, "\lambda_{(\widehat{\tau\circ\sigma})_a}\ \Swarrow"] \\
Fa \arrow[r, "(\widehat{\tau\circ\sigma})_a"'] \arrow[ur, phantom, shift left=2ex, "\rho^{-1}_{(\widehat{\tau\circ\sigma})_a}\ \Swarrow"] & Ha
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
Fa \arrow[r, "(\widehat{\tau\circ\sigma})_a"] \arrow[d, bend right=60, "F(\mathrm{id}_a)"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{(\widehat{\tau\circ\sigma})_{\mathrm{id}_a}}{\Swarrow}"] & Ha \arrow[d, "\mathrm{id}_{Ga}"] \arrow[d, bend right=60, "G(\mathrm{id}_a)"'] \arrow[d, phantom, shift right=2ex, "\overset{\psi}{\Leftarrow}"] \\
Fa \arrow[r, "(\widehat{\tau\circ\sigma})_a"'] & Ha
\end{tikzcd}
$$

を示す．その為には次の図式が可換であることを示せばよい．

$$
\begin{tikzcd}[column sep=large]
H(\mathrm{id}_a)\circ(\tau_a\circ\sigma_a) \arrow[d, "\alpha^{-1}"'] \arrow[dr, phantom, "(\alpha)"] & \mathrm{id}_{Ha}\circ(\tau_a\circ\sigma_a) \arrow[l, "\psi\bullet(\tau_a\circ\sigma_a)"'] \arrow[d, "\alpha^{-1}"] \arrow[dddr, bend left, "\lambda_{\tau_a\circ\sigma_a}"] \arrow[ddr, phantom, "(**)"] & \\
(H(\mathrm{id}_a)\circ\tau_a)\circ\sigma_a \arrow[d, "\tau_{\mathrm{id}_a}\bullet\sigma_a"'] \arrow[dr, phantom, "(\tau)"] & (\mathrm{id}_{Ha}\circ\tau_a)\circ\sigma_a \arrow[l, "(\psi\bullet\tau_a)\circ\sigma_a"] \arrow[ddr, bend left, "\lambda_{\tau_a}\bullet\sigma_a"] & \\
(\tau_a\circ G(\mathrm{id}_a))\circ\sigma_a \arrow[d, "\alpha"'] \arrow[dr, phantom, "(\alpha)"] & (\tau_a\circ\mathrm{id}_{Ga})\circ\sigma_a \arrow[l, "(\tau_a\bullet\psi)\bullet\sigma_a"'] \arrow[d, "\alpha"] \arrow[dr, phantom, "(\mathcal{B})"] & \\
\tau_a\circ(G(\mathrm{id}_a)\circ\sigma_a) \arrow[d, "\tau_a\bullet\sigma_{\mathrm{id}_a}"'] \arrow[dr, phantom, "(\sigma)"] & \tau_a\circ(\mathrm{id}_{Ga}\circ\sigma_a) \arrow[l, "\tau_a\bullet(\psi\bullet\sigma_a)"] \arrow[r, "\tau_a\bullet\lambda_{\sigma_a}"'] & \tau_a\circ\sigma_a \arrow[ul, "\rho^{-1}_{\tau_a}\bullet\sigma_a"'] \arrow[dl, bend left, "\tau_a\bullet\rho^{-1}_{\sigma_a}"] \arrow[ddl, bend left, "\rho^{-1}_{\tau_a\circ\sigma_a}"] \\
\tau_a\circ(\sigma_a\circ F(\mathrm{id}_a)) \arrow[d, "\alpha"'] \arrow[dr, phantom, "(\alpha)"] & \tau_a\circ(\sigma_a\circ\mathrm{id}_{Fa}) \arrow[l, "\tau_a\bullet(\sigma_a\bullet\psi)"'] \arrow[d, "\alpha"] \arrow[r, phantom, "(*)"] & \\
(\tau_a\circ\sigma_a)\circ F(\mathrm{id}_a) & (\tau_a\circ\sigma_a)\circ\mathrm{id}_{Fa} \arrow[l, "(\tau_a\bullet\sigma_a)\bullet\psi"] &
\end{tikzcd}
$$

(α) は α が自然変換であるから可換である．$(\mathcal{B})$ は bicategory の定義より可換である．(σ)，(τ) は σ,τ が pseudonatural transformation であるから可換である．$(*)$ は補題 6 から，$(**)$ は補題 7 から可換である． □

bicategory の場合には更に，pseudonatural transformation の間の射である modification を定義することができる．

定義． $F,G\colon\mathcal{B}\to\mathcal{C}$ を pseudofunctor，$\sigma,\tau\colon F\Rightarrow G$ を pseudonatural transformation とする．σ から τ への modification $\Gamma\colon\sigma\Rrightarrow\tau$ とは以下を満たすことである．

(1) 各 $a\in\mathcal{B}$ に対して $\mathcal{C}$ の 2-morphism $\Gamma_a\colon\sigma_a\Rightarrow\tau_a$ が与えられている．

(2) $\mathcal{B}$ の 1-morphism $f\colon a\to b$ に対して，$\mathcal{C}$ の 2-morphism に関する次の等式が成り立つ．

$$
\begin{tikzcd}
Fa \arrow[r, bend left, "\sigma_a"] \arrow[d, "Ff"'] \arrow[dr, phantom, "\sigma_f^{ab}\,\swArrow"] & Ga \arrow[d, "Gf"] \\
Fb \arrow[r, bend left, "\sigma_b"] \arrow[r, bend right, "\tau_b"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\Gamma_b"] & Gb
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
Fa \arrow[r, bend left, "\sigma_a"] \arrow[r, bend right, "\tau_a"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\Gamma_a"] \arrow[d, "Ff"'] \arrow[dr, phantom, "\tau_f^{ab}\,\swArrow"] & Ga \arrow[d, "Gf"] \\
Fb \arrow[r, bend right, "\tau_b"'] & Gb
\end{tikzcd}
$$

命題 11. $F, G\colon \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ を pseudofunctor，$\sigma, \tau, \rho\colon F \Rightarrow G$ を pseudonatural transformation，$\Gamma\colon \sigma \Rrightarrow \tau$，$\Delta\colon \tau \Rrightarrow \rho$ を modification とする．modification の垂直合成 $\Delta \mathbin{\widehat{*}} \Gamma$ を，$a \in \mathcal{B}$ に対して $(\Delta \mathbin{\widehat{*}} \Gamma)_a := \Delta_a * \Gamma_a$ で定めれば，$\Delta \mathbin{\widehat{*}} \Gamma$ は modification $\sigma \Rrightarrow \rho$ となる．

証明. $\mathcal{B}$ の 1-morphism $f\colon a \to b$ に対して

$$
\begin{tikzcd}
Fa \arrow[r, bend left, "\sigma_a"] \arrow[d, "Ff"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\sigma_f}{\Swarrow}"] & Ga \arrow[d, "Gf"] \\
Fb \arrow[r, bend left, "\sigma_b"] \arrow[r, "\tau_b" description] \arrow[r, bend right, "\rho_b"'] \arrow[r, phantom, shift left=2, "\Downarrow\Gamma_b"] \arrow[r, phantom, shift right=2, "\Downarrow\Delta_b"] & Gb
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
Fa \arrow[r, bend left, "\sigma_a"] \arrow[r, "\tau_a"'] \arrow[r, phantom, shift left=2, "\Downarrow\Gamma_a"] \arrow[d, "Ff"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\tau_f}{\Swarrow}"] & Ga \arrow[d, "Gf"] \\
Fb \arrow[r, "\tau_b"] \arrow[r, bend right, "\rho_b"'] \arrow[r, phantom, shift right=2, "\Downarrow\Delta_b"] & Gb
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
Fa \arrow[r, bend left, "\sigma_a"] \arrow[r, "\tau_a" description] \arrow[r, bend right, "\rho_a"'] \arrow[r, phantom, shift left=2, "\Downarrow\Gamma_a"] \arrow[r, phantom, shift right=2, "\Downarrow\Delta_a"] \arrow[d, "Ff"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\rho_f}{\Swarrow}"] & Ga \arrow[d, "Gf"] \\
Fb \arrow[r, bend right, "\rho_b"'] & Gb
\end{tikzcd}
$$

□

定義. pseudonatural transformation $F \Rightarrow G$ を対象，modification を射として，垂直合成を射の合成とすれば圏となることが分かる．($\sigma\colon F \Rightarrow G$ の恒等射 id_σ は $(\mathrm{id}_\sigma)_a := \mathrm{id}_{\sigma_a}$ で与えられる．) この圏を $\mathrm{Nat}_{\mathrm{ps}}(F, G)$ と書くことにする．

命題 12. $F, G, H\colon \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ を pseudofunctor，$\sigma, \tau\colon F \Rightarrow G$，$\rho, \xi\colon G \Rightarrow H$ を pseudonatural transformation，$\Gamma\colon \sigma \Rrightarrow \tau$，$\Delta\colon \rho \Rrightarrow \xi$ を modification とする．modification の水平合成 $\Delta \mathbin{\widehat{\bullet}} \Gamma$ を，$a \in \mathcal{B}$ に対して $(\Delta \mathbin{\widehat{\bullet}} \Gamma)_a := \Delta_a \bullet \Gamma_a$ で定めれば，$\Delta \mathbin{\widehat{\bullet}} \Gamma$ は modification $\rho \mathbin{\widehat{\circ}} \sigma \Rrightarrow \xi \mathbin{\widehat{\circ}} \tau$ となる．

証明. 次の等式を示せばよい．

$$
\begin{tikzcd}
Fa \arrow[r, bend left, "(\rho\widehat{\circ}\sigma)_a"] \arrow[d, "Ff"'] \arrow[dr, phantom, "(\rho\widehat{\circ}\sigma)_f^{ab}\Swarrow"] & Ha \arrow[d, "Hf"] \\
Fb \arrow[r, bend left, "(\rho\widehat{\circ}\sigma)_b"] \arrow[r, bend right, "(\xi\widehat{\circ}\tau)_b"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow(\Delta\widehat{\bullet}\Gamma)_b"] & Hb
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
Fa \arrow[r, bend left, "(\rho\widehat{\circ}\sigma)_a"] \arrow[r, bend right, "(\xi\widehat{\circ}\tau)_a"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow(\Delta\widehat{\bullet}\Gamma)_a"] \arrow[d, "Ff"'] \arrow[dr, phantom, "(\xi\widehat{\circ}\tau)_f^{ab}\Swarrow"] & Ha \arrow[d, "Hf"] \\
Fb \arrow[r, bend right, "(\xi\widehat{\circ}\tau)_b"'] & Hb
\end{tikzcd}
$$

即ち

$$
\begin{aligned}
&((\Delta_b \bullet \Gamma_b) \bullet Ff) * \alpha^{-1}_{\rho_b, \sigma_b, Ff} * (\rho_b \bullet \sigma_f^{ab}) * \alpha_{\rho_b, Gf, \sigma_a} * (\rho_f^{ab} \bullet \sigma_a) * \alpha^{-1}_{Hf, \rho_a, \sigma_a} \\
&= \alpha^{-1}_{\xi_b, \tau_b, Ff} * (\xi_b \bullet \tau_f^{ab}) * \alpha_{\xi_b, Gf, \tau_a} * (\xi_f^{ab} \bullet \tau_a) * \alpha^{-1}_{Hf, \xi_a, \tau_a} * (Hf \bullet (\Delta_a \bullet \Gamma_a))
\end{aligned}
$$

を示す．その為には次の図式が可換であることを示せばよい．

$$
\begin{tikzcd}
Hf\circ(\rho_a\circ\sigma_a) \arrow[r, "Hf\bullet(\Delta_a\bullet\sigma_a)"] \arrow[d, "\alpha^{-1}"'] \arrow[dr, phantom, "(\alpha)"] & Hf\circ(\xi_a\circ\sigma_a) \arrow[r, "Hf\bullet(\xi_a\bullet\Gamma_a)"] \arrow[d, "\alpha^{-1}"] \arrow[dr, phantom, "(\alpha)"] & Hf\circ(\xi_a\circ\tau_a) \arrow[d, "\alpha^{-1}"] \\
(Hf\circ\rho_a)\circ\sigma_a \arrow[r, "(Hf\bullet\Delta_a)\bullet\sigma_a"] \arrow[d, "\rho_f\bullet\sigma_a"'] \arrow[dr, phantom, "(\Delta)"] & (Hf\circ\xi_a)\circ\sigma_a \arrow[r, "(Hf\circ\xi_a)\bullet\Gamma_a"] \arrow[d, "\xi_f\bullet\sigma_a"] \arrow[dr, phantom, "(*)"] & (Hf\circ\xi_a)\circ\tau_a \arrow[d, "\xi_f\bullet\tau_a"] \\
(\rho_b\circ Gf)\circ\sigma_a \arrow[r, "(\Delta_b\bullet Gf)\bullet\sigma_a"] \arrow[d, "\alpha"'] \arrow[dr, phantom, "(\alpha)"] & (\xi_b\circ Gf)\circ\sigma_a \arrow[r, "(\xi_b\circ Gf)\bullet\Gamma_a"] \arrow[d, "\alpha"] \arrow[dr, phantom, "(\alpha)"] & (\xi_b\circ Gf)\circ\tau_a \arrow[d, "\alpha"] \\
\rho_b\circ(Gf\circ\sigma_a) \arrow[r, "\Delta_b\bullet(Gf\circ\sigma_a)"] \arrow[d, "\rho_b\bullet\sigma_f"'] \arrow[dr, phantom, "(*)"] & \xi_b\circ(Gf\circ\sigma_a) \arrow[r, "\xi_b\bullet(Gf\bullet\Gamma_a)"] \arrow[d, "\xi_b\bullet\sigma_f"] \arrow[dr, phantom, "(\Gamma)"] & \xi_b\circ(Gf\circ\tau_a) \arrow[d, "\xi_b\bullet\tau_f"] \\
\rho_b\circ(\sigma_b\circ Ff) \arrow[r, "\Delta_b\bullet(\sigma_b\circ Ff)"] \arrow[d, "\alpha^{-1}"'] \arrow[dr, phantom, "(\alpha)"] & \xi_b\circ(\sigma_b\circ Ff) \arrow[r, "\xi_b\bullet(\Gamma_b\bullet Ff)"] \arrow[d, "\alpha^{-1}"] \arrow[dr, phantom, "(\alpha)"] & \xi_b\circ(\tau_b\circ Ff) \arrow[d, "\alpha^{-1}"] \\
(\rho_b\circ\sigma_b)\circ Ff \arrow[r, "(\Delta_b\bullet\sigma_b)\bullet Ff"'] & (\xi_b\circ\sigma_b)\circ Ff \arrow[r, "(\xi_b\bullet\Gamma_b)\bullet Ff"'] & (\xi_b\circ\tau_b)\circ Ff
\end{tikzcd}
$$

(α) は α が自然変換であるから可換である．(Δ)，(Γ) は Δ,Γ が modification であるから可換である．$(*)$ は明らかに可換である． □

命題 13. $F,G,H\colon\mathcal{B}\to\mathcal{C}$ を pseudofunctor とするとき，pseudonatural transformation の垂直合成は関手 $\mathrm{Nat}_{\mathrm{ps}}(G,H)\times\mathrm{Nat}_{\mathrm{ps}}(F,G)\to\mathrm{Nat}_{\mathrm{ps}}(F,H)$ を与える．

証明. $\Gamma\colon\sigma\Rrightarrow\tau\colon F\Rightarrow G$, $\Delta\colon\rho\Rrightarrow\xi\colon G\Rightarrow H$ を modification とする．$C(\Delta,\Gamma):=\Delta\mathbin{\widehat{\bullet}}\Gamma$ と定める．この C が関手になればよい．明らかに $\mathrm{id}\mathbin{\widehat{\bullet}}\mathrm{id}=\mathrm{id}$ であるから $(\Delta\mathbin{\widehat{*}}\Delta')\mathbin{\widehat{\bullet}}(\Gamma\mathbin{\widehat{*}}\Gamma')=(\Delta\mathbin{\widehat{\bullet}}\Gamma)\mathbin{\widehat{*}}(\Delta'\mathbin{\widehat{\bullet}}\Gamma')$ を示せばよいが，それは bicategory の条件から従う． □

定理 14. bicategory $\mathcal{B},\mathcal{C}$ に対して bicategory $\mathrm{Fun}_{\mathrm{ps}}(\mathcal{B},\mathcal{C})$ を以下のように定義することができる．

- pseudofunctor $\mathcal{B}\to\mathcal{C}$ を対象とする．
- $\mathrm{Fun}_{\mathrm{ps}}(\mathcal{B},\mathcal{C})(F,G):=\mathrm{Nat}_{\mathrm{ps}}(F,G)$ とする．即ち pseudonatural transformation が 1-morphism で modification が 2-morphism である．また 1-morphism の合成は $\widehat{\circ}$ であり，2-morphism の水平合成・垂直合成は $\widehat{\bullet},\widehat{*}$ である．

証明. $F,G,H,K\colon\mathcal{B}\to\mathcal{C}$ を pseudofunctor，$\sigma\colon F\Rightarrow G$，$\tau\colon G\Rightarrow H$，$\rho\colon H\Rightarrow K$ を pseudonatural transformation とする．対象 $a\in\mathcal{B}$ に対して σ_a,τ_a,ρ_a は 1-morphism である．よって同型な 2-morphism $\alpha_{\rho_a,\tau_a,\sigma_a}\colon(\rho_a\circ\tau_a)\circ\sigma_a\Rightarrow\rho_a\circ(\tau_a\circ\sigma_a)$ が得られ

る．$\Gamma_a := \alpha_{\rho_a,\tau_a,\sigma_a}$ とすれば，これは modification $\Gamma\colon (\rho \mathbin{\widehat{\circ}} \tau) \mathbin{\widehat{\circ}} \sigma \Rrightarrow \rho \mathbin{\widehat{\circ}} (\tau \mathbin{\widehat{\circ}} \sigma)$ を与えることが分かる． □

定理 15. $\mathcal{C}$ が strict 2-category ならば $\mathrm{Fun}_{\mathrm{ps}}(\mathcal{B},\mathcal{C})$ も strict 2-category である．

証明. 定理 14 の証明から明らか． □

系 16. bicategory $\mathcal{B}$ に対して $\widehat{\mathcal{B}} := \mathrm{Fun}_{\mathrm{ps}}(\mathcal{B}^{\mathrm{op}}, \mathbf{Cat})$ は strict 2-category である． □

2 米田

さて，$\widehat{\mathcal{B}}$ が定義できたので，米田埋込 $y\colon \mathcal{B} \to \widehat{\mathcal{B}}$ も定義できるのではないか，という疑問が出てくるが，実際これは定義できて「米田の補題」が成り立つ (定理 25)．それを示すのが目的である．まず米田埋込 y を定義する．

$\mathcal{B}$ を bicategory として $a \in \mathcal{B}$ を対象とする．$s \in \mathcal{B}$ に対して $Fs := \mathcal{B}(s,a) \in \mathbf{Cat}$ とする．随伴 $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Cat}}(A \times B, C) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Cat}}(B, C^A)$ を思い出せば，$t \in \mathcal{B}$ に対して関手 $C^{tsa}\colon \mathcal{B}(s,a) \times \mathcal{B}(t,s) \to \mathcal{B}(t,a)$ から

$$F^{st}\colon \mathcal{B}^{\mathrm{op}}(s,t) = \mathcal{B}(t,s) \to \mathbf{Cat}(\mathcal{B}(s,a), \mathcal{B}(t,a)) = \mathbf{Cat}(Fs, Ft)$$

が得られる．$f\colon t \to s$ とするとき，定義より $F^{st}(f) = - \bullet f\colon \mathcal{B}(s,a) \to \mathcal{B}(t,a)$ である．即ち，$\mathcal{B}$ の $\delta\colon k \Rightarrow l\colon s \to a$ に対して $F^{st}(f)(k) = k \circ f$，$F^{st}(f)(\delta) = \delta \bullet f$ となる．また $\beta\colon f \Rightarrow g\colon t \to s$ とするとき $F^{st}(\beta) = - \bullet \beta\colon\ - \bullet f \Rightarrow - \bullet g$ は自然変換であり，$F^{st}(\beta)_k = k \bullet \beta\colon k \bullet f \Rightarrow k \bullet g$ となる．

命題 17. $F := \mathcal{B}(-,a)$ は上記の F^{st} により pseudofunctor $\mathcal{B}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Cat}$ となる．

証明.

※ その為には $s,t,r \in \mathcal{B}$ に対して自然同型

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & \mathcal{B}^{\mathrm{op}}(t,r) \times \mathcal{B}^{\mathrm{op}}(s,t) \arrow[dl, "F^{tr} \times F^{st}"'] \arrow[dr, "C"] & \\ \mathbf{Cat}(Ft,Fr) \times \mathbf{Cat}(Fs,Ft) \arrow[dr, "C"'] \arrow[rr, phantom, "\overset{\sim}{\underset{\varphi}{\Longrightarrow}}"] & & \mathcal{B}^{\mathrm{op}}(s,r) \arrow[dl, "F^{sc}"] \\ & \mathbf{Cat}(Fs,Fr) & \end{tikzcd}$$

を定義しなければならない．このような φ がもし存在すれば，$p\colon t\to s$，$q\colon r\to t$ に対して

$$\varphi_{gp}\colon (-\bullet q)\circ(-\bullet p)\Rightarrow -\bullet(p\circ q)\colon Fs\to Fr$$

は自然同型である．(ここで，関手の合成を緑色の記号 $\circ$ で表した．以下，関手・自然変換の合成は緑色で表す．) 即ち $g\in Fs=\mathcal{B}(s,a)$ に対して

$$(\varphi_{qp})_g\colon (g\circ p)\circ q\Rightarrow g\circ(p\circ q)\colon c\to a$$

は $\mathcal{B}$ の同型な 2-morphism である．

また $\psi^s\colon \mathrm{id}_{Fs}\Rightarrow F(\mathrm{id}_s)\colon Fs\to Fs$ も定義する必要がある．これは即ち自然変換 $\mathrm{id}_{\mathcal{B}(s,a)}\Rightarrow -\bullet\mathrm{id}_s$ である．

$s,t,r\in\mathcal{B}$ を対象，$r\xrightarrow{q}t\xrightarrow{p}s\xrightarrow{g}a$ を $\mathcal{B}$ の 1-morphism としたとき $(\varphi_{qp})_g:=\alpha_{gpq}$ と定義する．α が自然同型だから $\varphi_{qp}=\alpha_{-pq}\colon(-\bullet q)\circ(-\bullet p)\Rightarrow -\bullet(p\circ q)$ も自然同型である．更に φ も自然同型である．

また $\psi^s:=(\rho^{sa})^{-1}$ と定める．

条件 5 を示す．即ち次の可換図式を示す．

$$\begin{tikzcd}
(Fh\circ Fq)\circ Fp \arrow[r, "\varphi_{hq}\bullet Fp"] \arrow[d, "\alpha_{Fh,Fq,Fp}"'] & F(q\circ h)\circ Fp \arrow[r, "\varphi_{h\circ q,p}"] & F(p\circ(q\circ h)) \arrow[d, "F(\alpha^{-1}_{pqh})"] \\
Fh\circ(Fq\circ Fp) \arrow[r, "Fh\bullet\varphi_{qp}"'] & Fh\circ F(p\circ q) \arrow[r, "\varphi_{h,q\circ p}"'] & F((p\circ q)\circ h)
\end{tikzcd}$$

つまり，$g\colon s\to a$ に対して次の可換図式を示せばよい．

$$\begin{tikzcd}
((g\circ p)\circ q)\circ h \arrow[r, "\alpha_{g\circ p,q,h}"] \arrow[d, equal] & (g\circ p)\circ(q\circ h) \arrow[r, "\alpha_{g,p,q\circ h}"] & g\circ(p\circ(q\circ h)) \arrow[d, "g\bullet\alpha^{-1}_{pqh}"] \\
((g\circ p)\circ q)\circ h \arrow[r, "\alpha_{gpq}\bullet h"'] & (g\circ(p\circ q))\circ h \arrow[r, "\alpha_{g,p\circ q,h}"'] & g\circ((p\circ q)\circ h)
\end{tikzcd}$$

これは bicategory の定義の条件 7 から成り立つ．

条件 6 を示す．即ち $p\colon t\to s$ に対して次の二つが可換であることを示せばよい．

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{id}_{Ft}\circ Fp \arrow[r, "\lambda_{Fp}"] \arrow[d, "\psi\bullet Fp"'] & Fp \\
F(\mathrm{id}_t)\circ Fp \arrow[r, "\varphi_{\mathrm{id}_t,p}"'] & F(p\circ\mathrm{id}_t) \arrow[u, "F(\rho_p)"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
Fp\circ\mathrm{id}_{Fs} \arrow[r, "\rho_{Fp}"] \arrow[d, "Fp\bullet\psi"'] & Fp \\
Fp\circ F(\mathrm{id}_s) \arrow[r, "\varphi_{p,\mathrm{id}_s}"'] & F(\mathrm{id}_s\circ p) \arrow[u, "F(\lambda_p)"']
\end{tikzcd}$$

定義から，$g\colon s \to a$ に対して次の図式の可換性を示せばよい．

$$\begin{tikzcd}
g\circ p \arrow[r, equal] \arrow[d, "\rho^{-1}_{g\circ p}"'] & g\circ p \\
(g\circ p)\circ \mathrm{id}_t \arrow[r, "\alpha_{g,p,\mathrm{id}_t}"'] & g\circ(p\circ \mathrm{id}_t) \arrow[u, "g\bullet\rho_p"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
g\circ p \arrow[r, equal] \arrow[d, "\rho^{-1}_{g}\bullet p"'] & g\circ p \\
(g\circ \mathrm{id}_s)\circ p \arrow[r, "\alpha_{g,\mathrm{id}_s,p}"'] & g\circ(\mathrm{id}_s\circ p)) \arrow[u, "g\bullet\lambda_p"']
\end{tikzcd}$$

右の図式は bicategory の定義の条件 8 であり，左の図式は補題 6 である． □

命題 17 の F を $y(a)$ もしくは $\mathcal{B}(-,a)$ で表す．証明から明らかに

系 18. $\mathcal{B}$ が strict 2-category のとき $y(a)\colon \mathcal{B}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Cat}$ は strict 2-functor である． □

$\mathcal{B}$ の 1-morphism $f\colon a \to b$ と $s \in \mathcal{B}$ を取る．$C^{sab}\colon \mathcal{B}(a,b)\times\mathcal{B}(s,a) \to \mathcal{B}(s,b)$ は関手だから $y(f)_s := C^{sab}(f,-) = f\bullet -\colon \mathcal{B}(s,a)\to\mathcal{B}(s,b)$ も関手である．

命題 19. $y(f)\colon y(a) \Rightarrow y(b)$ は psuedonatural transformation である．

証明.

※ $s,t\in\mathcal{B}$ に対して自然同型

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{B}^{\mathrm{op}}(s,t) \arrow[dl, "y(b)"'] \arrow[dr, "y(a)"] & \\
\mathbf{Cat}(\mathcal{B}(s,b),\mathcal{B}(t,b)) \arrow[dr, "-\bullet y(f)_s"'] \arrow[rr, phantom, "\overset{\sim}{\Longrightarrow}_{y(f)^{st}}"] & & \mathbf{Cat}(\mathcal{B}(s,a),\mathcal{B}(t,a)) \arrow[dl, "y(f)_t\bullet -"] \\
 & \mathbf{Cat}(\mathcal{B}(s,a),\mathcal{B}(t,b)) &
\end{tikzcd}$$

を定義しなければならない．もしこのような $y(f)^{st}$ が存在すれば，$p\colon t\to s$ に対して $y(f)^{st}_p\colon (-\bullet p)\circ(f\bullet -)\Rightarrow (f\bullet -)\circ(-\bullet p)$ は自然同型である．よって $g\colon s\to a$ に対して $(y(f)^{st}_p)_g\colon (f\circ g)\circ p \Rightarrow f\circ(g\circ p)$ は $\mathcal{B}$ の 2-morphism である．

$s,t\in\mathcal{B}$ を対象，$t\xrightarrow{p} s\xrightarrow{g} a$ を 1-morphism とする．$(y(f)_p)_g := \alpha_{fgp}$ と置く．α が自然同型だから $y(f)_p$ は自然同型であり，$y(f)$ も自然同型である．

条件 3 を示す．$p\colon t\to s$，$q\colon r\to t$ に対して次の自然変換の等式を示せばよい．

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{B}(s,a) \arrow[rr, "f\bullet-"] \arrow[dr, "-\bullet p"'] \arrow[dd, bend right=60, "-\bullet(p\circ q)"'] \arrow[dd, phantom, "\overset{\varphi_{qp}}{\Longleftarrow}"] & & \mathcal{B}(s,b) \arrow[dr, "-\bullet p"] \arrow[d, phantom, "\overset{y(f)_p}{\Swarrow}"] & \\
& \mathcal{B}(t,a) \arrow[rr, "f\bullet-"] \arrow[dl, "-\bullet q"'] & {} & \mathcal{B}(t,b) \arrow[dl, "-\bullet q"] \\
\mathcal{B}(r,a) \arrow[rr, "f\bullet-"'] & & \mathcal{B}(r,b) \arrow[u, phantom, "\overset{y(f)_q}{\Swarrow}"] &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
\mathcal{B}(s,a) \arrow[r, "f\bullet-"] \arrow[dd, bend right=60, "-\bullet(p\circ q)"'] \arrow[dd, phantom, "\overset{y(f)_{p\circ q}}{\Swarrow}"] & \mathcal{B}(s,b) \arrow[dr, "-\bullet p"] \arrow[dd, bend right=60, "-\bullet(p\circ q)"'] \arrow[dd, phantom, "\overset{\varphi_{qp}}{\Longleftarrow}"] & \\
& & \mathcal{B}(t,b) \arrow[dl, "-\bullet q"] \\
\mathcal{B}(r,a) \arrow[r, "f\bullet-"'] & \mathcal{B}(r,b) &
\end{tikzcd}
$$

即ち，$g\colon s\to a$ に対して $\mathcal{B}$ での等式

$$
(f\bullet\alpha_{gpq})*\alpha_{f,g\circ p,q}*(\alpha_{fgp}\bullet q)=\alpha_{f,g,p\circ q}*\alpha_{f\circ g,p,q}
$$

を示せばよいが，これは bicategory の定義の条件 7 から成り立つ．

条件 4 を示す．$s\in\mathcal{B}$ に対して自然変換の等式

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{B}(s,a) \arrow[r, "f\bullet-"] \arrow[d, "\mathrm{id}"'] \arrow[dr, "f\bullet-" description] \arrow[d, bend right=80, "-\bullet\mathrm{id}_s"', ""{name=L}] \arrow[d, phantom, bend right=40, "\overset{\rho^{-1}}{\Leftarrow}"] & \mathcal{B}(s,b) \arrow[d, "\mathrm{id}"] \arrow[dl, phantom, "\mathrel{/\!/}"] \\
\mathcal{B}(s,a) \arrow[r, "f\bullet-"'] \arrow[ur, phantom, "\mathrel{/\!/}"] & \mathcal{B}(s,b)
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
\mathcal{B}(s,a) \arrow[r, "f\bullet-"] \arrow[d, bend right=60, "-\bullet\mathrm{id}_s"'] \arrow[d, phantom, "\overset{y(f)_{\mathrm{id}_s}}{\Swarrow}"] & \mathcal{B}(s,b) \arrow[d, "\mathrm{id}"] \arrow[d, bend right=60, "-\bullet\mathrm{id}_s"'] \arrow[d, phantom, bend right=30, "\overset{\rho^{-1}}{\Leftarrow}"] \\
\mathcal{B}(s,a) \arrow[r, "f\bullet-"'] & \mathcal{B}(s,b)
\end{tikzcd}
$$

を示せばよい．即ち $g\colon s\to a$ に対して $f\bullet\rho_g^{-1}=\alpha_{f,g,\mathrm{id}_s}*\rho_{f\circ g}^{-1}$ を示せばよい．

$$
\begin{tikzcd}
(f\circ g)\circ\mathrm{id}_a \arrow[rr, "\alpha_{f,g,\mathrm{id}_a}"] \arrow[dr, "\rho_{f\circ g}"'] & & f\circ(g\circ\mathrm{id}_a) \arrow[dl, "f\bullet\rho_g"] \\
& f\circ g &
\end{tikzcd}
$$

これは補題 6 より成り立つ． □

定理 20. 上記で定めた $y(a),y(f)$ は pseudofunctor $y\colon\mathcal{B}\to\widehat{\mathcal{B}}$ を与える．これを米田埋込と呼ぶ．

証明.

※ その為にはまず φ^{abc} と ψ^{a} を定義しなければならない．φ^{abc} は次の自然同型で

あった．

$$\begin{tikzcd}
& \mathcal{B}(b,c)\times\mathcal{B}(a,b) \arrow[dl, "y\times y"'] \arrow[dr, "C"] & \\
\widehat{\mathcal{B}}(y(b),y(c))\times\widehat{\mathcal{B}}(y(a),y(b)) \arrow[dr, "C"'] \arrow[rr, phantom, "\overset{\sim}{\Rrightarrow}_{\varphi^{abc}}"] & & \mathcal{B}(a,c) \arrow[dl, "y"] \\
& \widehat{\mathcal{B}}(y(a),y(c)) &
\end{tikzcd}$$

よって $\mathcal{B}$ の 1-morphism $f\colon a\to b$，$g\colon b\to c$ に対して φ^{abc}_{gf} は modification $y(g)\circ y(f)\Rrightarrow y(g\circ f)$ である．y の定義より，$s\in\mathcal{B}$ に対して

$$(\varphi^{abc}_{gf})_s\colon (g\bullet -)\circ(f\bullet -)\Rightarrow(g\circ f)\bullet -\colon \mathcal{B}(s,a)\to\mathcal{B}(s,c)$$

は自然変換で，$h\colon s\to a$ に対して

$$((\varphi^{abc}_{gf})_s)_h\colon g\circ(f\circ h)\Rightarrow(g\circ f)\circ h\colon s\to c$$

は $\mathcal{B}$ の 2-morphism である．また $\psi^a\colon \mathrm{id}_{y(a)}\Rrightarrow y(\mathrm{id}_a)$ は modification $\mathrm{id}_{y(a)}\Rrightarrow \mathrm{id}_a\bullet -\colon y(a)\Rightarrow y(a)$ である．よって $s\in\mathcal{B}$ に対して $\psi^a_s\colon \mathrm{id}\Rightarrow\mathrm{id}_a\bullet -\colon\mathcal{B}(s,a)\to\mathcal{B}(s,a)$ は自然変換である．

$s\xrightarrow{h}a\xrightarrow{f}b\xrightarrow{g}c$ に対して $((\varphi_{gf})_s)_h:=(\alpha_{gfh})^{-1}$ と定義する．α が自然同型だから $(\varphi_{gf})_s$ も自然同型である．

$\varphi_{gf}\colon y(g)\mathbin{\widehat{\circ}}y(f)\Rrightarrow y(g\circ f)\colon y(a)\Rightarrow y(c)$ は同型な modification である．

$\because$) 1-morphism $p\colon t\to s$ に対して次の自然変換の等号を示せばよい．

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{B}(s,a) \arrow[r, bend left, "f\bullet -"] \arrow[d, "-\bullet p"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{y(f)_p}{\swarrow}"] & \mathcal{B}(s,b) \arrow[r, bend left, "g\bullet -"] \arrow[d, "-\bullet p"] \arrow[dr, phantom, "\overset{y(g)_p}{\swarrow}"] & \mathcal{B}(s,c) \arrow[d, "-\bullet p"] \\
\mathcal{B}(t,a) \arrow[r, bend left, "f\bullet -"] \arrow[rr, bend right, "(g\circ f)\bullet -"'] \arrow[rr, phantom, "\Downarrow(\varphi_{gf})_t"] & \mathcal{B}(t,b) \arrow[r, bend left, "g\bullet -"] & \mathcal{B}(t,c)
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
\mathcal{B}(s,a) \arrow[r, bend left, "f\bullet -"] \arrow[rr, bend right, "(g\circ f)\bullet -"'] \arrow[rr, phantom, "\Downarrow(\varphi_{gf})_s"] \arrow[d, "-\bullet p"'] \arrow[drr, phantom, "\overset{y(g\circ f)_p}{\swarrow}"] & \mathcal{B}(s,b) \arrow[r, bend left, "g\bullet -"] & \mathcal{B}(s,c) \arrow[d, "-\bullet p"] \\
\mathcal{B}(t,a) \arrow[rr, bend right, "(g\circ f)\bullet -"'] & & \mathcal{B}(t,c)
\end{tikzcd}$$

即ち，$h\in\mathcal{B}(s,a)$ に対して $\alpha^{-1}_{g,f,h\circ p}*(g\bullet\alpha_{fhp})*\alpha_{g,f\circ h,p}=\alpha_{g\circ f,h,p}*(\alpha^{-1}_{gfh}\bullet p)$ を示せばよいが，それは bicategory の定義の条件 7 から成り立つ．

φ は自然同型である．

∵) $\beta\colon f \Rightarrow f'\colon a \to b$, $\gamma\colon g \Rightarrow g'\colon b \to c$ とする．次が可換であることを示せばよい．

$$\begin{tikzcd}
y(g) \mathbin{\widehat{\circ}} y(f) \arrow[r, Rightarrow, "\varphi_{gf}"] \arrow[d, Rightarrow, "y(\gamma)\widehat{\bullet}y(\beta)"'] & y(g \circ f) \arrow[d, Rightarrow, "y(\gamma\bullet\beta)"] \\
y(g') \mathbin{\widehat{\circ}} y(f') \arrow[r, Rightarrow, "\varphi_{g'f'}"'] & y(g' \circ f')
\end{tikzcd}$$

即ち $s \in \mathcal{B}$ に対して，自然変換の図式

$$\begin{tikzcd}
(g \bullet -) \circ (f \bullet -) \arrow[r, Rightarrow, "(\varphi_{gf})_s"] \arrow[d, Rightarrow, "y(\gamma)_u\bullet y(\beta)_s"'] & (g \circ f) \bullet - \arrow[d, Rightarrow, "y(\gamma\bullet\beta)_s"] \\
(g' \bullet -) \circ (f' \bullet -) \arrow[r, Rightarrow, "(\varphi_{g'f'})_s"'] & (g' \circ f') \bullet -
\end{tikzcd}$$

の可換性を示せばよい．故に，$k\colon s \to a$ に対して

$$\begin{tikzcd}
g \circ (f \circ k) \arrow[r, Rightarrow, "\alpha^{-1}_{gfk}"] \arrow[d, Rightarrow, "\gamma\bullet(\beta\bullet k)"'] & (g \circ f) \circ k \arrow[d, Rightarrow, "(\gamma\bullet\beta)\bullet k"] \\
g' \circ (f' \circ k) \arrow[r, Rightarrow, "\alpha^{-1}_{g'f'k}"'] & (g' \circ f') \circ k
\end{tikzcd}$$

の可換性を示せばよい．これは α が自然同型であることから明らか．

$f\colon s \to a$ に対して $(\psi^a_s)_f := \lambda^{-1}_f\colon f \Rightarrow \mathrm{id} \circ f$ と置く．λ が自然同型だから，ψ^a_s も自然同型である．ψ^a は modification である．

∵) $p\colon t \to s$ に対して自然変換の等式

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{B}(s,a) \arrow[r, bend left, "\mathrm{id}"] \arrow[d, "-\bullet p"'] \arrow[dr, phantom, "\swarrow \mathrm{id}_p"] & \mathcal{B}(s,a) \arrow[d, "-\bullet p"] \\
\mathcal{B}(t,a) \arrow[r, bend left, "\mathrm{id}"] \arrow[r, bend right, "\mathrm{id}_a\bullet-"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\psi^a_t"] & \mathcal{B}(t,a)
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
\mathcal{B}(s,a) \arrow[r, bend left, "\mathrm{id}"] \arrow[r, bend right, "\mathrm{id}_a\bullet-"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\psi^a_s"] \arrow[d, "-\bullet p"'] \arrow[dr, phantom, "\swarrow (\mathrm{id}_a\bullet-)_p"] & \mathcal{B}(s,a) \arrow[d, "-\bullet p"] \\
\mathcal{B}(t,a) \arrow[r, bend right, "\mathrm{id}_a\bullet-"'] & \mathcal{B}(t,a)
\end{tikzcd}$$

を示せばよい．即ち $g\colon s\to a$ に対して $\lambda_{g\circ p}^{-1} = \alpha_{\mathrm{id}_a,g,p} * (\lambda_g^{-1}\bullet p)$ を示せばよい．

$$
\begin{tikzcd}
(\mathrm{id}_a\circ g)\circ p \arrow[rr, "\alpha_{\mathrm{id}_a,g,p}"] \arrow[dr, "\lambda_g\bullet p"'] & & \mathrm{id}_a\circ(g\circ p) \arrow[dl, "\lambda_{g\circ p}"] \\
& g\circ p &
\end{tikzcd}
$$

これは補題 7 より成り立つ．

条件 5 を示す．$a\xrightarrow{f} b\xrightarrow{g} c\xrightarrow{h} d$ に対して

$$
\begin{tikzcd}
(y(h)\mathbin{\widehat{\circ}}y(g))\mathbin{\widehat{\circ}}y(f) \arrow[r, Rightarrow, "\varphi_{hg}\mathbin{\widehat{\bullet}}y(f)"] \arrow[d, Rightarrow, "\alpha"'] & y(h\circ g)\mathbin{\widehat{\circ}}y(f) \arrow[r, Rightarrow, "\varphi_{h\circ g,f}"] & y((h\circ g)\circ f) \arrow[d, Rightarrow, "y(\alpha)"] \\
y(h)\mathbin{\widehat{\circ}}(y(g)\mathbin{\widehat{\circ}}y(f)) \arrow[r, Rightarrow, "y(h)\mathbin{\widehat{\bullet}}\varphi_{gf}"'] & y(h)\mathbin{\widehat{\circ}}y(g\circ f) \arrow[r, Rightarrow, "\varphi_{h,g\circ f}"'] & y(h\circ(g\circ f))
\end{tikzcd}
$$

が可換であることを示せばよい．即ち $s\in\mathcal{B}$，$k\colon s\to a$ に対して

$$
\begin{tikzcd}
h\circ(g\circ(f\circ k)) \arrow[r, Rightarrow, "\alpha^{-1}_{h,g,f\circ k}"] \arrow[d, equal] & (h\circ g)\circ(f\circ k) \arrow[r, Rightarrow, "\alpha^{-1}_{h\circ g,f,k}"] & ((h\circ g)\circ f)\circ k \arrow[d, Rightarrow, "\alpha_{hgf}\bullet k"] \\
h\circ(g\circ(f\circ k)) \arrow[r, Rightarrow, "h\bullet\alpha^{-1}_{gfk}"'] & h\circ((g\circ f)\circ k) \arrow[r, Rightarrow, "\alpha^{-1}_{h,g\circ f,k}"'] & (h\circ(g\circ f))\circ k
\end{tikzcd}
$$

が可換となればよいが，それは bicategory の定義の条件 7 から分かる．

条件 6 を示す．まず $f\colon a\to b$ に対して次の等号を示す．

$$
\begin{tikzcd}
& y(b) \arrow[dr, "y(\mathrm{id}_b)"] \arrow[dr, bend left=60, "\mathrm{id}_{y(b)}"] \arrow[dr, phantom, bend left=30, "\psi\Swarrow"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\varphi_{\mathrm{id}_b,f}"] & \\
y(a) \arrow[ur, "y(f)"] \arrow[rr, "y(\mathrm{id}_b\circ f)"] \arrow[rr, bend right=50, "y(f)"'] \arrow[rr, phantom, yshift=-4ex, "\Downarrow y(\lambda_f)"] & & y(b)
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
& y(b) \arrow[dr, bend left=60, "\mathrm{id}_{y(b)}"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\lambda_{y(f)}"] & \\
y(a) \arrow[ur, "y(f)"] \arrow[rr, bend right=50, "y(f)"'] & & y(b)
\end{tikzcd}
$$

その為には $s \in \mathcal{B}$ に対して次の自然変換の等号を示せばよい．

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathcal{B}(s,b) \arrow[dr, "\mathrm{id}_b\bullet-"] \arrow[dr, bend left=60, "\mathrm{id}_{\mathcal{B}(s,b)}"] \arrow[dr, phantom, bend left=30, "\Downarrow\psi_s"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow(\varphi_{\mathrm{id}_b,f})_s"] & \\
\mathcal{B}(s,a) \arrow[ur, "f\bullet-"] \arrow[rr, "(\mathrm{id}_b\circ f)\bullet-"] \arrow[rr, bend right=50, "f\bullet-"'] \arrow[rr, phantom, bend right=25, "\Downarrow\lambda_f\bullet-"] & & \mathcal{B}(s,b)
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
 & \mathcal{B}(s,b) \arrow[dr, bend left=60, "\mathrm{id}_{\mathcal{B}(s,b)}"] \arrow[d, phantom, "\parallel"] & \\
\mathcal{B}(s,a) \arrow[ur, "f\bullet-"] \arrow[rr, bend right=50, "f\bullet-"'] & {} & \mathcal{B}(s,b)
\end{tikzcd}
$$

即ち，$g\colon s \to a$ に対して $(\lambda_f \bullet g) * \alpha^{-1}_{\mathrm{id}_b,f,g} * \lambda^{-1}_{f\circ g} = \mathrm{id}$ を示せばよい．

$$
\begin{tikzcd}
(\mathrm{id}_b \circ f)\circ g \arrow[rr, "\alpha_{\mathrm{id}_b,f,g}"] \arrow[dr, "\lambda_f\bullet g"'] & & \mathrm{id}_b \circ (f \circ g) \arrow[dl, "\lambda_{f\circ g}"] \\
 & f \circ g &
\end{tikzcd}
$$

これは補題 7 より成り立つ．ρ についても同様で，$f\colon a \to b$ に対して

$$
\begin{tikzcd}
 & y(a) \arrow[dr, "y(f)"] \arrow[d, phantom, "\varphi_{f,\mathrm{id}_a}\Downarrow"] & \\
y(a) \arrow[ur, "y(\mathrm{id}_a)"] \arrow[ur, bend left=60, "\mathrm{id}_{y(a)}"] \arrow[ur, phantom, bend left=30, "\Downarrow\psi"] \arrow[rr, "y(f\circ\mathrm{id}_a)"] \arrow[rr, bend right=50, "y(f)"'] \arrow[rr, phantom, bend right=25, "\Downarrow y(\rho_f)"] & & y(b)
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
 & y(a) \arrow[dr, "y(f)"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\rho_{y(f)}"] & \\
y(a) \arrow[ur, bend left=60, "\mathrm{id}_{y(a)}"] \arrow[rr, bend right=50, "y(f)"'] & {} & y(b)
\end{tikzcd}
$$

即ち $s \in \mathcal{B}$ に対して

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathcal{B}(s,a) \arrow[dr, "f\bullet-"] \arrow[d, phantom, "(\varphi_{f,\mathrm{id}_a})_s\Downarrow"] & \\
\mathcal{B}(s,a) \arrow[ur, "\mathrm{id}_a\bullet-"] \arrow[ur, bend left=60, "\mathrm{id}_{\mathcal{B}(s,a)}"] \arrow[ur, phantom, bend left=30, "\Downarrow\psi_s"] \arrow[rr, "(f\circ\mathrm{id}_a)\bullet-"] \arrow[rr, bend right=50, "f\bullet-"'] \arrow[rr, phantom, bend right=25, "\Downarrow\rho_f\bullet-"] & & \mathcal{B}(s,b)
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
 & \mathcal{B}(s,a) \arrow[dr, "f\bullet-"] \arrow[d, phantom, "\parallel"] & \\
\mathcal{B}(s,a) \arrow[ur, bend left=60, "\mathrm{id}_{\mathcal{B}(s,a)}"] \arrow[rr, bend right=50, "f\bullet-"'] & {} & \mathcal{B}(s,b)
\end{tikzcd}
$$

を示せばよい．従って $g\colon s \to a$ に対して $(\rho_f \bullet g) * \alpha^{-1}_{f,\mathrm{id}_a,g} * (f \bullet \lambda_g^{-1}) = \mathrm{id}$ を示せばよい．

$$\begin{tikzcd}
(f \circ \mathrm{id}_a) \circ g \arrow[rr, "\alpha_{f,\mathrm{id}_a,g}"] \arrow[dr, "\rho_f \bullet g"'] & & f \circ (\mathrm{id}_a \circ g) \arrow[dl, "f \bullet \lambda_g"] \\
& f \circ g &
\end{tikzcd}$$

これは bicategory の定義の条件 8 である． □

命題 21. $\mathcal{A},\mathcal{B},\mathcal{C}$ を bicategory，$F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$，$G\colon \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ を pseudofunctor とする．このとき $\mathcal{A}$ の $\beta\colon f \Rightarrow g\colon a \to b$ に対して

- $GF(a) := G(F(a))$
- $GF(f) := G(F(f))$
- $GF(\beta) := G(F(\beta))$

と定義すれば pseudofunctor $GF\colon \mathcal{A} \to \mathcal{C}$ が得られる．

証明.

※ その為には自然同型

$$\begin{tikzcd}
& \mathcal{A}(b,c) \times \mathcal{A}(a,b) \arrow[dl, "GF \times GF"'] \arrow[dr, "C"] & \\
\mathcal{C}(GFb, GFc) \times \mathcal{C}(GFa, GFb) \arrow[dr, "C"'] \arrow[rr, phantom, "\overset{\sim}{\underset{\varphi^{abc}}{\Longrightarrow}}"] & & \mathcal{A}(a,c) \arrow[dl, "GF"] \\
& \mathcal{C}(GFa, GFc) &
\end{tikzcd}$$

と同型 $\psi^a\colon \mathrm{id}_{GFa} \Rightarrow GF(\mathrm{id}_a)$ を定義しなければならない．もしこのような φ^{abc} が存在すれば，$a \xrightarrow{f} b \xrightarrow{g} c$ に対して $\varphi^{abc}_{gf}\colon GF(g) \circ GF(f) \Rightarrow GF(g \circ f)$ は同型な 2-morphism である．

pseudofunctor $F\colon \mathcal{A}\to\mathcal{B}$, $G\colon \mathcal{B}\to\mathcal{C}$ が与える自然同型を φ^F, φ^G と書くことにする．

$$
\begin{tikzcd}
& \mathcal{A}(b,c)\times\mathcal{A}(a,b) \arrow[dl, "F\times F"'] \arrow[dr, "C"] & \\
\mathcal{B}(Fb,Fc)\times\mathcal{B}(Fa,Fb) \arrow[rr, phantom, "\overset{\sim}{\Longrightarrow}_{\varphi^F}"] \arrow[dr, "C"'] & & \mathcal{A}(a,c) \arrow[dl, "F"] \\
& \mathcal{B}(Fa,Fc) &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& \mathcal{B}(b,c)\times\mathcal{B}(a,b) \arrow[dl, "G\times G"'] \arrow[dr, "C"] & \\
\mathcal{C}(Gb,Gc)\times\mathcal{C}(Ga,Gb) \arrow[rr, phantom, "\overset{\sim}{\Longrightarrow}_{\varphi^G}"] \arrow[dr, "C"'] & & \mathcal{B}(a,c) \arrow[dl, "G"] \\
& \mathcal{C}(Ga,Gc) &
\end{tikzcd}
$$

この二つの合成

$$
\begin{tikzcd}
& & \mathcal{A}(b,c)\times\mathcal{A}(a,b) \arrow[dl, "F\times F"'] \arrow[dr, "C"] & \\
& \mathcal{B}(Fb,Fc)\times\mathcal{B}(Fa,Fb) \arrow[rr, phantom, "\overset{\sim}{\Longrightarrow}_{\varphi^F}"] \arrow[dl, "G\times G"'] \arrow[dr, "C"] & & \mathcal{A}(a,c) \arrow[dl, "F"] \\
\mathcal{C}(GFb,GFc)\times\mathcal{C}(GFa,GFb) \arrow[rr, phantom, "\overset{\sim}{\Longrightarrow}_{\varphi^G}"] \arrow[dr, "C"'] & & \mathcal{B}(Fa,Fc) \arrow[dl, "G"] & \\
& \mathcal{C}(GFa,GFc) & &
\end{tikzcd}
$$

を φ^{GF} と定める．また F,G が与える同型な 2-morphism を ψ^F，ψ^G と書く．このとき $a\in\mathcal{A}$ に対して $\psi^{GF} := G(\psi^F)*\psi^G\colon \mathrm{id}_{GFa}\Rightarrow G(\mathrm{id}_{Fa})\Rightarrow GF(\mathrm{id}_a)$ と定める．

これらが pseudofunctor の定義を満たすことを示す．まず条件 5 を示す．即ち，$\mathcal{A}$ の 1-morphism $a\xrightarrow{f} b\xrightarrow{g} c\xrightarrow{h} d$ に対して次の $\mathcal{C}(GFa,GFd)$ での図式が可換であることを示せばよい．(φ の下付きの添え字は省略した．)

$$
\begin{tikzcd}
(GFh\circ GFg)\circ GFf \arrow[rrr, "\varphi^{GF}\bullet GFf"] \arrow[dr, "\varphi^G\bullet GFf"] \arrow[ddddd, "\alpha"'] & & \arrow[d, phantom, "(*)"] & GF(h\circ g)\circ GFf \arrow[rrr, "\varphi^{GF}"] \arrow[dr, "\varphi^G"'] \arrow[dd, phantom, "(\varphi^G)"] & \arrow[d, phantom, "(*)"] & & GF((h\circ g)\circ f) \arrow[ddddd, "GF(\alpha)"] \\
& G(Fh\circ Fg)\circ GFf \arrow[ur, "G(\varphi^F)\bullet GFf"'] \arrow[dr, "\varphi^G"'] & & & G(F(h\circ g)\circ Ff) \arrow[urr, "G(\varphi^F)"'] & & \\
& \arrow[d, phantom, "(G)"] & & G((Fh\circ Fg)\circ Ff) \arrow[ur, "G(\varphi^F\bullet Ff)"'] \arrow[d, "G(\alpha)"] & & \arrow[d, phantom, "(F)"] & \\
& & & G(Fh\circ(Fg\circ Ff)) \arrow[dr, "G(Fh\bullet\varphi^F)"] \arrow[dd, phantom, "(\varphi^G)"] & & & \\
& GFh\circ G(Fg\circ Ff) \arrow[urr, "\varphi^G"] \arrow[drr, "GFh\bullet G(\varphi^F)"] \arrow[d, phantom, "(*)"] & & & G(Fh\circ F(g\circ f)) \arrow[drr, "G(\varphi^F)"] \arrow[d, phantom, "(*)"] & & \\
GFh\circ(GFg\circ GFf) \arrow[ur, "GFh\bullet\varphi^G"'] \arrow[rrr, "GFh\bullet\varphi^{GF}"'] & \, & & GFh\circ GF(g\circ f) \arrow[ur, "\varphi^G"] \arrow[rrr, "\varphi^{GF}"'] & \, & & GF(h\circ(g\circ f))
\end{tikzcd}
$$

$(*)$ の部分は φ^{GF} の定義だからよい．$(F),(G)$ は F,G が pseudofunctor だから可換である．(φ^G) は φ^G が自然変換であるから可換である．

　条件 6 を示す．即ち $f\colon a\to b$ に対して次の $\mathcal{C}(GFa,GFb)$ の図式が可換であることを示す．

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{id}_{GFb}\circ GFf \arrow[r, "\lambda_{GFf}"] \arrow[d, "\psi^{GF}\bullet GFf"'] & GFf \\
GF(\mathrm{id}_b)\circ GFf \arrow[r, "\varphi^{GF}_{\mathrm{id}_b,f}"'] & GF(\mathrm{id}_b\circ f) \arrow[u, "GF(\lambda_f)"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
GFf\circ\mathrm{id}_{GFa} \arrow[r, "\rho_{GFf}"] \arrow[d, "GFf\bullet\psi^{GF}"'] & GFf \\
GFf\circ GF(\mathrm{id}_a) \arrow[r, "\varphi^{GF}_{f,\mathrm{id}_a}"'] & GF(f\circ\mathrm{id}_a) \arrow[u, "GF(\rho_f)"']
\end{tikzcd}
$$

まず左の図式については，次の図式が可換であることを示せばよい．

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{id}_{GFb}\circ GFf \arrow[r, "\lambda_{GFf}"] \arrow[d, "\psi^G\bullet GFf"] \arrow[dd, bend right=60, "\psi^{GF}\bullet GFf"'] \arrow[dr, phantom, "(G)"] & GFf & \\
G(\mathrm{id}_{Fb})\circ GFf \arrow[r, "\varphi^G_{\mathrm{id}_{Fb},Ff}"'] \arrow[d, "G(\psi^F)\bullet GFf"] \arrow[dr, phantom, "(\varphi^G)"] & G(\mathrm{id}_{Fb}\circ Ff) \arrow[u, "G(\lambda_{Ff})"'] \arrow[d, "G(\psi^F\bullet Ff)"] \arrow[r, phantom, "(F)"] & \\
GF(\mathrm{id}_b)\circ GFf \arrow[r, "\varphi^G_{F\mathrm{id}_b,Ff}"'] \arrow[rr, bend right=20, "\varphi^{GF}_{\mathrm{id}_b,f}"'] & G(F(\mathrm{id}_b)\circ Ff) \arrow[r, "G(\varphi^F_{\mathrm{id}_b,f})"'] \arrow[d, phantom, "(*)"] & GF(\mathrm{id}_b\circ f) \arrow[uul, bend right=30, "GF(\lambda_f)"'] \\
 & &
\end{tikzcd}
$$

$(*)$ は定義，$(F),(G)$ は pseudofunctor の定義の条件 6，(φ^G) は φ^G の自然性により可換となる．右の図式についても同様で

$$
\begin{tikzcd}
GFf\circ\mathrm{id}_{GFa} \arrow[r, "\rho_{GFf}"] \arrow[d, "GFf\bullet\psi^G"] \arrow[dd, bend right=60, "GFf\bullet\psi^{GF}"'] \arrow[dr, phantom, "(G)"] & GFf & \\
GFf\circ G(\mathrm{id}_{Fa}) \arrow[r, "\varphi^G_{Ff,\mathrm{id}_{Fa}}"'] \arrow[d, "GFf\bullet G(\psi^F)"] \arrow[dr, phantom, "(\varphi^G)"] & G(Ff\circ\mathrm{id}_{Fa}) \arrow[u, "G(\rho_{Ff})"'] \arrow[d, "G(Ff\bullet\psi^F)"] \arrow[r, phantom, "(F)"] & \\
GFf\circ GF(\mathrm{id}_a) \arrow[r, "\varphi^G_{Ff,F\mathrm{id}_a}"'] \arrow[rr, bend right=20, "\varphi^{GF}_{f,\mathrm{id}_a}"'] & G(Ff\circ F(\mathrm{id}_a)) \arrow[r, "G(\varphi^F_{f,\mathrm{id}_a})"'] \arrow[d, phantom, "(*)"] & GF(f\circ\mathrm{id}_a) \arrow[uul, bend right=30, "GF(\rho_f)"'] \\
 & &
\end{tikzcd}
$$

が可換となり成り立つ． □

故に pseudofunctor $F\colon \mathcal{B}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Cat}$ に対して，合成

$$\widehat{\mathcal{B}}(y(-), F) := (\mathcal{B}^{\mathrm{op}} \xrightarrow{y^{\mathrm{op}}} (\widehat{\mathcal{B}})^{\mathrm{op}} \xrightarrow{\widehat{\mathcal{B}}(-,F)} \mathbf{Cat})$$

も pseudofunctor である．$\widehat{B}$ は strict 2-category だから $\widehat{\mathcal{B}}(-,F)$ は strict 2-functor となり (系 18)，$\widehat{\mathcal{B}}(y(-),F)$ の自然同型 φ は $c \xrightarrow{g} b \xrightarrow{f} a$ に対して

$$\varphi_{gf} = \widehat{\mathcal{B}}(\varphi^{y^{\mathrm{op}}}_{gf}, F) = (- \mathbin{\widehat{\bullet}} \varphi^{y}_{fg})\colon (- \mathbin{\widehat{\bullet}} y(g)) \bullet (- \mathbin{\widehat{\bullet}} y(f)) \Rightarrow (- \mathbin{\widehat{\bullet}} y(f \circ g))$$

で与えられる．

$$\begin{tikzcd}
 & & \mathcal{B}^{\mathrm{op}}(b,c) \times \mathcal{B}^{\mathrm{op}}(a,b) \arrow[dl, "y^{\mathrm{op}} \times y^{\mathrm{op}}"'] \arrow[dr, "C"] & \\
 & (\widehat{\mathcal{B}})^{\mathrm{op}}(y(b),y(c)) \times (\widehat{\mathcal{B}})^{\mathrm{op}}(y(a),y(b)) \arrow[dl, "\widehat{\mathcal{B}}(-,F) \times \widehat{\mathcal{B}}(-,F)"'] \arrow[dr, "C"] \arrow[rr, phantom, "\overset{\sim}{\Longrightarrow}_{\varphi^{y^{\mathrm{op}}}}"] & & \mathcal{B}^{\mathrm{op}}(a,c) \arrow[dl, "y^{\mathrm{op}}"] \\
 \begin{array}{c}\mathbf{Cat}(\widehat{\mathcal{B}}(y(b),F), \widehat{\mathcal{B}}(y(c),F)) \\ \times \mathbf{Cat}(\widehat{\mathcal{B}}(y(a),F), \widehat{\mathcal{B}}(y(b),F))\end{array} \arrow[dr, "C"'] \arrow[rr, phantom, "\underset{\mathrm{id}}{\Longrightarrow}"] & & (\widehat{\mathcal{B}})^{\mathrm{op}}(y(a),y(c)) \arrow[dl, "\widehat{\mathcal{B}}(-,F)"] & \\
 & \mathbf{Cat}(\widehat{\mathcal{B}}(y(a),F), \widehat{\mathcal{B}}(y(c),F)) & &
\end{tikzcd}$$

即ち $\sigma\colon y(a) \Rightarrow F$ に対して

$$(\varphi_{gf})_{\sigma} = \sigma \mathbin{\widehat{\bullet}} \varphi^{y}_{fg}\colon (\sigma \mathbin{\widehat{\circ}} y(g)) \mathbin{\widehat{\circ}} y(f) \Rightarrow \sigma \mathbin{\widehat{\circ}} y(f \circ g)\colon y(a) \Rightarrow F$$

である．$d \in \mathcal{B}$ に対して

$$\begin{aligned}
\big((\sigma \mathbin{\widehat{\circ}} y(g)) \mathbin{\widehat{\circ}} y(f)\big)_d &= \sigma_d \circ y(g)_d \circ y(f)_d = \sigma_d \circ (g \bullet -) \circ (f \bullet -) \\
\big(\sigma \mathbin{\widehat{\circ}} y(f \circ g)\big)_d &= \sigma_d \circ y(f \circ g)_d = \sigma_d \circ ((f \circ g) \bullet -)
\end{aligned}$$

だから $((\varphi_{gf})_{\sigma})_d\colon \sigma_d \circ (g \bullet -) \circ (f \bullet -) \Rightarrow \sigma_d \circ ((f \circ g) \bullet -)\colon \mathcal{B}(d,c) \to Fd$ であり，$h\colon d \to c$ に対して $(((\varphi_{gf})_{\sigma})_d)_h\colon \sigma_d(g \circ (f \circ h)) \Rightarrow \sigma_d((g \circ f) \circ h)$ となる．定義より

$$\begin{aligned}
(((\varphi_{gf})_{\sigma})_d)_h = (\sigma \mathbin{\widehat{\bullet}} \varphi^{y}_{fg})_d)_h &= (\sigma_d \bullet (\varphi^{y}_{fg})_d)_h = \sigma_d(((\varphi^{y}_{fg})_d)_h) \\
&= \sigma_d(\alpha^{-1}_{gfh})
\end{aligned}$$

となる．

定義． bicategory $\mathcal{B}$ の対象 $a, b \in \mathcal{B}$ が同値
$\iff$ ある 1-morphism $f\colon a \to b$，$g\colon b \to a$ と，2-morphism $\mathrm{id}_a \cong g \circ f$，$f \circ g \cong \mathrm{id}_b$ が存在する．

例 **22.** **Cat** における同値とは圏同値のことである． □

今の目標である「米田の補題」とは，$\widehat{\mathcal{B}}$ の対象 $\widehat{\mathcal{B}}(y(-), F)$ と F が同値となることを主張する．これを示すため，まずはこの同値を与える $\theta\colon \widehat{\mathcal{B}}(y(-), F) \Rightarrow F$ を定義する．

補題 23. $\mathcal{B}$ を bicategory，$F\colon \mathcal{B}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Cat}$ を pseudofunctor とする．対象 $a \in \mathcal{B}$ に対して関手 $\theta_a\colon \widehat{\mathcal{B}}(y(a), F) \to Fa$ を以下のように定める．

- $\sigma\colon y(a) \Rightarrow F$ に対して $\theta_a(\sigma) := \sigma_a(\mathrm{id}_a)$.
- $\Gamma\colon \sigma \Rrightarrow \tau\colon y(a) \Rightarrow F$ に対して $\theta_a(\Gamma) := (\Gamma_a)_{\mathrm{id}_a}$.

$$
\begin{tikzcd}
y(a) \arrow[r, Rightarrow, bend left, "\sigma"] \arrow[r, Rightarrow, bend right, "\tau"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\Gamma"] & F
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathcal{B}(a,a) \arrow[r, bend left, "\sigma_a"] \arrow[r, bend right, "\tau_a"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\Gamma_a"] & Fa
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\sigma_a(\mathrm{id}_a) \arrow[d, "(\Gamma_a)_{\mathrm{id}_a}"] \\
\tau_a(\mathrm{id}_a)
\end{tikzcd}
$$

この θ は pseudonatural transformation $\widehat{\mathcal{B}}(y(-), F) \Rightarrow F$ を与える．

証明.

※ その為には $a, b \in \mathcal{B}$ に対して自然同型

$$
\begin{tikzcd}
& \mathcal{B}^{\mathrm{op}}(a,b) \arrow[dl, "F"'] \arrow[dr, "\widehat{\mathcal{B}}(y(-),F)"] & \\
\mathbf{Cat}(Fa, Fb) \arrow[dr, "-\bullet\theta_a"'] \arrow[rr, phantom, "\overset{\sim}{\Longrightarrow}_{\theta^{ab}}"] & & \mathbf{Cat}(\widehat{\mathcal{B}}(y(a),F), \widehat{\mathcal{B}}(y(b),F)) \arrow[dl, "\theta_b\bullet-"] \\
& \mathbf{Cat}(\widehat{\mathcal{B}}(y(a),F), Fb) &
\end{tikzcd}
$$

を定義しなければならない．もしこのような θ^{ab} が存在すれば，$f\colon b \to a$ に対して

$$
\begin{tikzcd}
& \widehat{\mathcal{B}}(y(a),F) \arrow[dl, "\theta_a"'] \arrow[dr, "\widehat{\mathcal{B}}(y(f),F) = -\widehat{\bullet}y(f)"] & \\
Fa \arrow[dr, "Ff"'] \arrow[rr, phantom, "\overset{\sim}{\Longrightarrow}_{\theta^{ab}_f}"] & & \widehat{\mathcal{B}}(y(b),F) \arrow[dl, "\theta_b"] \\
& Fb &
\end{tikzcd}
$$

は自然同型である．よって $\sigma \in \widehat{\mathcal{B}}(y(a), F)$ に対して

$$(\theta^{ab}_f)_\sigma\colon Ff(\theta_a(\sigma)) \to \theta_b(\sigma \,\widehat{\circ}\, y(f))$$

は圏 Fb の同型射である．ここで

$$\begin{aligned} Ff(\theta_a(\sigma)) &= Ff(\sigma_a(\mathrm{id}_a)) \\ \theta_b(\sigma \mathbin{\widehat{\circ}} y(f)) &= (\sigma \mathbin{\widehat{\circ}} y(f))_b(\mathrm{id}_b) = (\sigma_b \circ y(f)_b)(\mathrm{id}_b) \\ &= \sigma_b(f \circ \mathrm{id}_b) \end{aligned}$$

である．

$a, b \in \mathcal{B}$ を対象，$\sigma\colon y(a) \Rightarrow F$ を pseudonatural transformation とすると次の自然同型が与えられる．

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{B}^{\mathrm{op}}(a,b) \arrow[dl, "F"'] \arrow[dr, "y(a)"] & \\
\mathbf{Cat}(Fa,Fb) \arrow[dr, "-\bullet\sigma_a"'] \arrow[rr, phantom, "\overset{\sim}{\underset{\sigma^{ab}}{\Longrightarrow}}"] & & \mathbf{Cat}\big(\mathcal{B}(a,a),\mathcal{B}(b,a)\big) \arrow[dl, "\sigma_b\bullet-"] \\
 & \mathbf{Cat}\big(\mathcal{B}(a,a),Fb\big) &
\end{tikzcd}$$

即ち $f\colon b \to a$ に対して自然同型

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{B}(a,a) \arrow[dl, "\sigma_a"'] \arrow[dr, "-\bullet f"] & \\
Fa \arrow[dr, "Ff"'] \arrow[rr, phantom, "\overset{\sim}{\underset{\sigma^{ab}_f}{\Longrightarrow}}"] & & \mathcal{B}(b,a) \arrow[dl, "\sigma_b"] \\
 & Fb &
\end{tikzcd}$$

が成り立つ．$\mathrm{id}_a \in \mathcal{B}(a,a)$ を考えれば圏 Fb の同型

$$(\sigma^{ab}_f)_{\mathrm{id}_a}\colon Ff(\sigma_a(\mathrm{id}_a)) \to \sigma_b(\mathrm{id}_a \circ f)$$

を得る．そこで圏 Fb の射 $(\theta^{ab}_f)_\sigma$ を合成

$$Ff(\sigma_a(\mathrm{id}_a)) \xrightarrow{(\sigma^{ab}_f)_{\mathrm{id}_a}} \sigma_b(\mathrm{id}_a \circ f) \xrightarrow{\sigma_b(\lambda_f)} \sigma_b(f) \xrightarrow{\sigma_b(\rho_f^{-1})} \sigma_b(f \circ \mathrm{id}_b)$$

で定義する．上で注意したように，$(\theta^{ab}_f)_\sigma\colon Ff(\theta_a(\sigma)) \to \theta_b(\sigma \mathbin{\widehat{\circ}} y(f))$ である．これは自然同型 $\theta^{ab}_f\colon Ff \circ \theta_a \Rightarrow \theta_b \circ (- \mathbin{\widehat{\bullet}} y(f))$ を与える．

$$\begin{tikzcd}
 & \widehat{\mathcal{B}}(y(a),F) \arrow[dl, "\theta_a"'] \arrow[dr, "-\widehat{\bullet}y(f)"] & \\
Fa \arrow[dr, "Ff"'] \arrow[rr, phantom, "\overset{\sim}{\underset{\theta^{ab}_f}{\Longrightarrow}}"] & & \widehat{\mathcal{B}}(y(b),F) \arrow[dl, "\theta_b"] \\
 & Fb &
\end{tikzcd}$$

$\because$) $\sigma, \tau \in \widehat{\mathcal{B}}(y(a), F)$ として $\Gamma\colon \sigma \Rrightarrow \tau$ を modification とする．圏 Fb における次の図式の可換性を示せばよい．

$$
\begin{tikzcd}
Ff(\theta_a(\sigma)) \arrow[r, "(\theta_f^{ab})_\sigma"] \arrow[d, "Ff(\theta_a(\Gamma))"'] & \theta_b(\sigma \mathbin{\widehat{\circ}} y(f)) \arrow[d, "\theta_b(\Gamma \mathbin{\widehat{\bullet}} y(f))"] \\
Ff(\theta_a(\tau)) \arrow[r, "(\theta_f^{ab})_\tau"'] & \theta_b(\tau \mathbin{\widehat{\circ}} y(f))
\end{tikzcd}
$$

定義より

$$
\begin{aligned}
\theta_b(\Gamma \mathbin{\widehat{\bullet}} y(f)) &= ((\Gamma \mathbin{\widehat{\bullet}} y(f))_b)_{\mathrm{id}_b} = (\Gamma_b \bullet y(f)_b)_{\mathrm{id}_b} \\
&= (\Gamma_b)_{y(f)_b(\mathrm{id}_b)} = (\Gamma_b)_{f \circ \mathrm{id}_b} \\
(\theta_f^{ab})_\sigma &= \sigma_b(\rho_f^{-1}) \circ \sigma_b(\lambda_f) \circ (\sigma_f^{ab})_{\mathrm{id}_a} \\
(\theta_f^{ab})_\tau &= \tau_b(\rho_f^{-1}) \circ \tau_b(\lambda_f) \circ (\tau_f^{ab})_{\mathrm{id}_a} \\
Ff(\theta_a(\Gamma)) &= Ff((\Gamma_a)_{\mathrm{id}_a})
\end{aligned}
$$

である．(ここで，圏 Fb における合成を赤色の記号 $\circ$ で表した．以降，このような合成はこの記号で表す．) よって

$$
\begin{aligned}
&(\Gamma_b)_{f \circ \mathrm{id}_b} \circ \sigma_b(\rho_f^{-1}) \circ \sigma_b(\lambda_f) \circ (\sigma_f^{ab})_{\mathrm{id}_a} \\
&= \tau_b(\rho_f^{-1}) \circ \tau_b(\lambda_f) \circ (\tau_f^{ab})_{\mathrm{id}_a} \circ Ff((\Gamma_a)_{\mathrm{id}_a})
\end{aligned}
$$

を示せばよい．今 $\Gamma\colon \sigma \Rrightarrow \tau$ が modification だから

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{B}(a,a) \arrow[r, bend left, "\sigma_a"] \arrow[d, "-\bullet f"'] \arrow[dr, phantom, "\swArrow \sigma_f^{ab}"] & Fa \arrow[d, "Ff"] \\
\mathcal{B}(b,a) \arrow[r, bend left, "\sigma_b"] \arrow[r, bend right, "\tau_b"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\Gamma_b"] & Fb
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
\mathcal{B}(a,a) \arrow[r, bend left, "\sigma_a"] \arrow[r, bend right, "\tau_a"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\Gamma_a"] \arrow[d, "-\bullet f"'] \arrow[dr, phantom, "\swArrow \tau_f^{ab}"] & Fa \arrow[d, "Ff"] \\
\mathcal{B}(b,a) \arrow[r, bend right, "\tau_b"'] & Fb
\end{tikzcd}
$$

となり $(\Gamma_b)_{\mathrm{id}_a \circ f} \circ (\sigma_f^{ab})_{\mathrm{id}_a} = (\tau_f^{ab})_{\mathrm{id}_a} \circ Ff((\Gamma_a)_{\mathrm{id}_a})$ である．また $\Gamma_b\colon \sigma_b \Rightarrow \tau_b$ は自

然変換だから

$$\begin{tikzcd}
\sigma_b(\mathrm{id}_a \circ f) \arrow[r, "(\Gamma_b)_{\mathrm{id}_a \circ f}"] \arrow[d, "\sigma_b(\lambda_f)"'] & \tau_b(\mathrm{id}_a \circ f) \arrow[d, "\tau_b(\lambda_f)"] \\
\sigma_b(f) \arrow[r, "(\Gamma_b)_f"'] \arrow[d, "\sigma_b(\rho_f^{-1})"'] & \tau_b(f) \arrow[d, "\tau_b(\rho_f^{-1})"] \\
\sigma_b(f \circ \mathrm{id}_b) \arrow[r, "(\Gamma_b)_{f \circ \mathrm{id}_b}"'] & \tau_b(f \circ \mathrm{id}_b)
\end{tikzcd}$$

が可換である．この二つを組み合わせて可換図式

$$\begin{tikzcd}
Ff(\sigma_a(\mathrm{id}_a)) \arrow[r, "Ff((\Gamma_a)_{\mathrm{id}_a})"] \arrow[d, "(\sigma_f^{ab})_{\mathrm{id}_a}"'] & Ff(\tau_a(\mathrm{id}_a)) \arrow[d, "(\tau_f^{ab})_{\mathrm{id}_a}"] \\
\sigma_b(\mathrm{id}_a \circ f) \arrow[r, "(\Gamma_b)_{\mathrm{id}_a \circ f}"] \arrow[d, "\sigma_b(\lambda_f)"'] & \tau_b(\mathrm{id}_a \circ f) \arrow[d, "\tau_b(\lambda_f)"] \\
\sigma_b(f) \arrow[r, "(\Gamma_b)_f"'] \arrow[d, "\sigma_b(\rho_f^{-1})"'] & \tau_b(f) \arrow[d, "\tau_b(\rho_f^{-1})"] \\
\sigma_b(f \circ \mathrm{id}_b) \arrow[r, "(\Gamma_b)_{f \circ \mathrm{id}_b}"'] & \tau_b(f \circ \mathrm{id}_b)
\end{tikzcd}$$

を得る．この外側の四角が今示したかった可換性である．

この θ_f^{ab} が自然同型 θ^{ab} を与える．

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{B}^{\mathrm{op}}(a,b) \arrow[dl, "F"'] \arrow[dr, "\widehat{\mathcal{B}}(y(-),F)"] & \\
\mathbf{Cat}(Fa,Fb) \arrow[dr, "-\bullet\theta_a"'] \arrow[rr, phantom, "\overset{\sim}{\Longrightarrow}_{\theta^{ab}}"] & & \mathbf{Cat}(\widehat{\mathcal{B}}(y(a),F),\widehat{\mathcal{B}}(y(b),F)) \arrow[dl, "\theta_b\bullet-"] \\
 & \mathbf{Cat}(\widehat{\mathcal{B}}(y(a),F),Fb) &
\end{tikzcd}$$

$\because$) $\beta\colon f \Rightarrow g\colon b \to a$ を 2-morphism とする．次が可換であることを示せばよい．

$$
\begin{tikzcd}
f \arrow[d, Rightarrow, "\beta"'] & Ff \circ \theta_a \arrow[r, Rightarrow, "\theta^{ab}_f"] \arrow[d, Rightarrow, "F\beta \bullet \theta_a"'] & \theta_b \circ (- \mathbin{\widehat{\bullet}} y(f)) \arrow[d, Rightarrow, "\theta_b \bullet (- \widehat{\bullet} y(\beta))"] \\
g & Fg \circ \theta_a \arrow[r, Rightarrow, "\theta^{ab}_g"'] & \theta_b \circ (- \mathbin{\widehat{\bullet}} y(g))
\end{tikzcd}
$$

その為には $\sigma \in \widehat{\mathcal{B}}(y(a), F)$ に対して

$$(\theta_b \bullet (- \mathbin{\widehat{\bullet}} y(\beta)))_\sigma \circ (\theta^{ab}_f)_\sigma = (\theta^{ab}_g)_\sigma \circ ((F\beta)_{\theta_a})_\sigma$$

を示せばよい．定義より

$$
\begin{aligned}
(\theta_b \bullet (- \mathbin{\widehat{\bullet}} y(\beta)))_\sigma &= \theta_b((- \mathbin{\widehat{\bullet}} y(\beta))_\sigma) = \theta_b(\sigma \mathbin{\widehat{\bullet}} y(\beta)) \\
&= (\sigma \mathbin{\widehat{\bullet}} y(\beta))_b(\mathrm{id}_b) = (\sigma_b \bullet y(\beta)_b)(\mathrm{id}_b) = \sigma_b(\beta \bullet \mathrm{id}_b) \\
(\theta^{ab}_f)_\sigma &= \sigma_b(\rho_f^{-1}) \circ \sigma_b(\lambda_f) \circ (\sigma^{ab}_f)_{\mathrm{id}_a} \\
(\theta^{ab}_g)_\sigma &= \sigma_b(\rho_g^{-1}) \circ \sigma_b(\lambda_g) \circ (\sigma^{ab}_g)_{\mathrm{id}_a} \\
((F\beta)_{\theta_a})_\sigma &= (F\beta)_{\theta_a(\sigma)} = (F\beta)_{\sigma_a(\mathrm{id}_a)}
\end{aligned}
$$

となるから

$$
\begin{aligned}
&\sigma_b(\beta \bullet \mathrm{id}_b) \circ \sigma_b(\rho_f^{-1}) \circ \sigma_b(\lambda_f) \circ (\sigma^{ab}_f)_{\mathrm{id}_a} \\
&= \sigma_b(\rho_g^{-1}) \circ \sigma_b(\lambda_g) \circ (\sigma^{ab}_g)_{\mathrm{id}_a} \circ (F\beta)_{\sigma_a(\mathrm{id}_a)}
\end{aligned}
$$

を示せばよい．まず σ^{ab}_f が f について自然だから

$$
\begin{tikzcd}
f \arrow[d, Rightarrow, "\beta"'] & Ff \circ \sigma_a \arrow[r, Rightarrow, "\sigma^{ab}_f"] \arrow[d, Rightarrow, "F\beta \bullet \sigma_a"'] & \sigma_b \circ (- \bullet f) \arrow[d, Rightarrow, "\sigma_b \bullet (- \bullet \beta)"] \\
g & Fg \circ \sigma_a \arrow[r, Rightarrow, "\sigma^{ab}_g"'] & \sigma_b \circ (- \bullet g)
\end{tikzcd}
$$

は可換である．また λ, ρ は自然同型だから

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{id}_a \circ f \arrow[r, "\lambda_f"] \arrow[d, "\mathrm{id}_a \bullet \beta"'] & f \arrow[r, "\rho_f^{-1}"] \arrow[d, "\beta"] & f \circ \mathrm{id}_b \arrow[d, "\beta \bullet \mathrm{id}_b"] \\
\mathrm{id}_a \circ g \arrow[r, "\lambda_g"'] & g \arrow[r, "\rho_g^{-1}"'] & f \circ \mathrm{id}_b
\end{tikzcd}$$

も可換である．この二つから可換図式

$$\begin{tikzcd}
Ff(\sigma_a(\mathrm{id}_a)) \arrow[r, "(\sigma_f^{ab})_{\mathrm{id}_a}"] \arrow[d, "F\beta_{\sigma_a(\mathrm{id}_a)}"'] & \sigma_b(\mathrm{id}_a \circ f) \arrow[r, "\sigma_b(\lambda_f)"] \arrow[d, "\sigma_b(\mathrm{id}_a \bullet \beta)"'] & \sigma_b(f) \arrow[r, "\sigma_b(\rho_f^{-1})"] \arrow[d, "\sigma_b(\beta)"] & \sigma_b(f \circ \mathrm{id}_b) \arrow[d, "\sigma_b(\beta \bullet \mathrm{id}_b)"] \\
Fg(\sigma_a(\mathrm{id}_a)) \arrow[r, "(\sigma_g^{ab})_{\mathrm{id}_a}"'] & \sigma_b(\mathrm{id}_a \circ g) \arrow[r, "\sigma_b(\lambda_g)"'] & \sigma_b(g) \arrow[r, "\sigma_b(\rho_g^{-1})"'] & \sigma_b(g \circ \mathrm{id}_b)
\end{tikzcd}$$

が得られる．この外側の四角が今示したかった可換性である．

θ が pseudonatural transformation であることを示すため，まず条件 3 を示す．$c \xrightarrow{g} b \xrightarrow{f} a$ に対して自然変換の等式

$$\begin{tikzcd}
\widehat{\mathcal{B}}(y(a), F) \arrow[r, "\theta_a"] \arrow[d, "-\widehat{\bullet}y(f)"] \arrow[dd, bend right=60, "-\widehat{\bullet}y(f \circ g)"'] \arrow[dr, phantom, "\Swarrow \theta_f"] & Fa \arrow[d, "Ff"] \\
\widehat{\mathcal{B}}(y(b), F) \arrow[r, "\theta_b"] \arrow[d, "-\widehat{\bullet}y(g)"'] \arrow[l, phantom, "\overset{\varphi_{gf}}{\Leftarrow}"] \arrow[dr, phantom, "\Swarrow \theta_g"] & Fb \arrow[d, "Fg"] \\
\widehat{\mathcal{B}}(y(c), F) \arrow[r, "\theta_c"'] & Fc
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
\widehat{\mathcal{B}}(y(a), F) \arrow[r, "\theta_a"] \arrow[dd, bend right=60, "-\widehat{\bullet}y(f \circ g)"'] \arrow[ddr, phantom, "\Swarrow \theta_{f \circ g}"] & Fa \arrow[dd, bend right=60, "F(f \circ g)"'] \arrow[dr, "Ff"] & \\
& \overset{\varphi_{gf}}{\Leftarrow} & Fb \arrow[dl, "Fg"] \\
\widehat{\mathcal{B}}(y(c), F) \arrow[r, "\theta_c"'] & Fc &
\end{tikzcd}$$

を示せばよい．即ち $\sigma \in \widehat{\mathcal{B}}(y(a), F)$ に対して，圏 Fc での等式

$$\theta_c((\varphi_{gf})_\sigma) \circ (\theta_g)_{\sigma \widehat{\circ} y(f)} \circ Fg((\theta_f)_\sigma) = (\theta_{f \circ g})_\sigma \circ (\varphi_{gf})_{\theta_a(\sigma)}$$

を示せばよい．定義より

$$
\begin{aligned}
\theta_c((\varphi_{gf})_\sigma) &= (((\varphi_{gf})_\sigma)_c)_{\mathrm{id}_c} = \sigma_c(\alpha^{-1}_{f,g,\mathrm{id}_c}) \\
(\theta_g)_{\sigma \mathbin{\widehat{\circ}} y(f)} &= (\sigma \mathbin{\widehat{\circ}} y(f))_c(\rho_g^{-1}) \circ (\sigma \mathbin{\widehat{\circ}} y(f))_c(\lambda_g) \circ ((\sigma \mathbin{\widehat{\circ}} y(f))_g)_{\mathrm{id}_b} \\
&= \sigma_c(f \bullet \rho_g^{-1}) \circ \sigma_c(f \bullet \lambda_g) \circ \sigma_c(\alpha_{f,\mathrm{id}_b,g}) \circ (\sigma_g)_{f\circ \mathrm{id}_b} \\
&= \sigma_c(f \bullet \rho_g^{-1}) \circ \sigma_c\big((f \bullet \lambda_g) * \alpha_{f,\mathrm{id}_b,g}\big) \circ (\sigma_g)_{f\circ \mathrm{id}_b} \\
&= \sigma_c(f \bullet \rho_g^{-1}) \circ \sigma_c(\rho_f \bullet g) \circ (\sigma_g)_{f\circ \mathrm{id}_b} \\
Fg((\theta_f)_\sigma) &= Fg(\sigma_b(\rho_f^{-1}) \circ \sigma_b(\lambda_f) \circ (\sigma_f)_{\mathrm{id}_a}) \\
(\theta_{f\circ g})_\sigma &= \sigma_c(\rho^{-1}_{f\circ g}) \circ \sigma_c(\lambda_{f\circ g}) \circ (\sigma_{f\circ g})_{\mathrm{id}_a} \\
(\varphi_{gf})_{\theta_a(\sigma)} &= (\varphi_{gf})_{\sigma_a(\mathrm{id}_a)}
\end{aligned}
$$

だから示すべき等式は

$$
\begin{aligned}
&\sigma_c(\alpha^{-1}_{f,g,\mathrm{id}_c}) \circ \sigma_c(f \bullet \rho_g^{-1}) \circ \sigma_c(\rho_f \bullet g) \circ (\sigma_g)_{f\circ \mathrm{id}_b} \\
&\quad \circ Fg(\sigma_b(\rho_f^{-1})) \circ Fg(\sigma_b(\lambda_f)) \circ Fg((\sigma_f)_{\mathrm{id}_a}) \\
&= \sigma_c(\rho^{-1}_{f\circ g}) \circ \sigma_c(\lambda_{f\circ g}) \circ (\sigma_{f\circ g})_{\mathrm{id}_a} \circ (\varphi_{gf})_{\sigma_a(\mathrm{id}_a)}
\end{aligned}
$$

である．補題 6 より $\sigma_c(\alpha^{-1}_{f,g,\mathrm{id}_c}) \circ \sigma_c(f \bullet \rho_g^{-1}) = \sigma_c(\rho^{-1}_{f\circ g})$ だから

$$
\begin{aligned}
&\sigma_c(\rho_f \bullet g) \circ (\sigma_g)_{f\circ \mathrm{id}_b} \circ Fg(\sigma_b(\rho_f^{-1})) \circ Fg(\sigma_b(\lambda_f)) \circ Fg((\sigma_f)_{\mathrm{id}_a}) \\
&= \sigma_c(\lambda_{f\circ g}) \circ (\sigma_{f\circ g})_{\mathrm{id}_a} \circ (\varphi_{gf})_{\sigma_a(\mathrm{id}_a)}
\end{aligned}
$$

を示せばよい．まず $\sigma_g \colon Fg \circ \sigma_b \Rightarrow \sigma_s \circ (- \bullet g)$ が自然変換だから

$$
\begin{tikzcd}
Fg(\sigma_b(\mathrm{id}_a \circ f)) \arrow[r, "(\sigma_g)_{\mathrm{id}_a \circ f}"] \arrow[d, "Fg(\sigma_b(\lambda_f))"'] & \sigma_s((\mathrm{id}_a \circ f) \circ g) \arrow[d, "\sigma_s(\lambda_f \bullet g)"] \\
Fg(\sigma_b(f)) \arrow[r, "(\sigma_g)_f"'] & \sigma_s(f \circ g) \\
Fg(\sigma_b(f \circ \mathrm{id}_b)) \arrow[r, "(\sigma_g)_{f\circ \mathrm{id}_b}"'] \arrow[u, "Fg(\sigma_b(\rho_f))"] & \sigma_s((f \circ \mathrm{id}_b) \circ g) \arrow[u, "\sigma_s(\rho_f \bullet g)"']
\end{tikzcd}
$$

が可換である．次に σ が pseudonatural transformation だから次の自然変換の等号が成

り立つ.

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{B}(a,a) \arrow[r, "\sigma_a"] \arrow[d, "-\bullet f"'] \arrow[dd, bend right=60, "-\bullet(f\circ g)"'] \arrow[dr, phantom, "\sigma_f \Swarrow"] & Fa \arrow[d, "Ff"] \\
\mathcal{B}(b,a) \arrow[r, "\sigma_b"] \arrow[d, "-\bullet g"'] \arrow[dr, phantom, "\sigma_g \Swarrow"] & Fb \arrow[d, "Fg"] \\
\mathcal{B}(c,a) \arrow[r, "\sigma_c"'] & Fc
\end{tikzcd}
\quad \overset{\alpha_{-fg}}{\Longleftarrow} \quad = \quad
\begin{tikzcd}
\mathcal{B}(a,a) \arrow[r, "\sigma_a"] \arrow[dd, bend right=60, "-\bullet(f\circ g)"'] \arrow[ddr, phantom, "\sigma_{f\circ g} \Swarrow"] & Fa \arrow[d, "Ff"] \arrow[dd, bend right=60, "F(f\circ g)"'] \\
 & Fb \arrow[d, "Fg"] \arrow[l, phantom, "\overset{\varphi_{gf}}{\Longleftarrow}"] \\
\mathcal{B}(c,a) \arrow[r, "\sigma_c"'] & Fc
\end{tikzcd}
$$

故に $\mathrm{id}_a \in \mathcal{B}(a,a)$ を考えれば次が可換である.

$$
\begin{tikzcd}
Fg(Ff(\sigma_a(\mathrm{id}_a))) \arrow[r, "(\varphi_{gf})_{\sigma_a(\mathrm{id}_a)}"] \arrow[dd, "Fg((\sigma_f)_{\mathrm{id}_a})"'] & F(f\circ g)(\sigma_a(\mathrm{id}_a)) \arrow[d, "(\sigma_{f\circ g})_{\mathrm{id}_a}"] \\
 & \sigma_s(\mathrm{id}_a \circ (f\circ g)) \\
Fg(\sigma_b(\mathrm{id}_a \circ f)) \arrow[r, "(\sigma_g)_{\mathrm{id}_a\circ f}"'] & \sigma_s((\mathrm{id}_a \circ f)\circ g) \arrow[u, "\sigma_s(\alpha_{\mathrm{id}_a,f,g})"']
\end{tikzcd}
$$

この二つと補題 7 を組み合わせて

$$
\begin{tikzcd}
Fg(Ff(\sigma_a(\mathrm{id}_a))) \arrow[rr, "(\varphi_{gf})_{\sigma_a(\mathrm{id}_a)}"] \arrow[dd, "Fg((\sigma_f)_{\mathrm{id}_a})"'] & & F(f\circ g)(\sigma_a(\mathrm{id}_a)) \arrow[d, "(\sigma_{f\circ g})_{\mathrm{id}_a}"] \\
 & & \sigma_s(\mathrm{id}_a \circ (f\circ g)) \arrow[dl, "\sigma_s(\alpha^{-1}_{\mathrm{id}_a,f,g})"'] \arrow[dd, "\sigma_s(\lambda_{f\circ g})"] \\
Fg(\sigma_b(\mathrm{id}_a \circ f)) \arrow[r, "(\sigma_g)_{\mathrm{id}_a\circ f}"'] \arrow[d, "Fg(\sigma_b(\lambda_f))"'] & \sigma_s((\mathrm{id}_a \circ f)\circ g) \arrow[dr, "\sigma_s(\lambda_f \bullet g)"'] & \\
Fg(\sigma_b(f)) \arrow[rr, "(\sigma_g)_f"'] \arrow[d, "Fg(\sigma_b(\rho_f^{-1}))"'] & & \sigma_s(f\circ g) \\
Fg(\sigma_b(f\circ \mathrm{id}_b)) \arrow[rr, "(\sigma_g)_{f\circ \mathrm{id}_b}"'] & & \sigma_s((f\circ \mathrm{id}_b)\circ g) \arrow[u, "\sigma_s(\rho_f \bullet g)"']
\end{tikzcd}
$$

を得る．この外側の四角が今示したい可換性である.

条件 4 を示す．即ち次の自然変換の等式を示せばよい．

$$
\begin{tikzcd}
\widehat{\mathcal{B}}(y(a),F) \arrow[r, "\theta_a"] \arrow[d, "\mathrm{id}"'] \arrow[d, bend right=60, "-\widehat{\bullet}y(\mathrm{id}_a)"'] \arrow[dr, "\theta_a" description] & Fa \arrow[d, "\mathrm{id}_{Fa}"] \arrow[dl, phantom, "/\!/" near start] \\
\widehat{\mathcal{B}}(y(a),F) \arrow[r, "\theta_a"'] \arrow[ur, phantom, "/\!/" near start] & Fa
\end{tikzcd}
\quad \underset{\Leftarrow}{-\widehat{\bullet}\psi}
=
\begin{tikzcd}
\widehat{\mathcal{B}}(y(a),F) \arrow[r, "\theta_a"] \arrow[d, bend right=60, "-\widehat{\bullet}y(\mathrm{id}_a)"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\theta_{\mathrm{id}_a}}{\Swarrow}"] & Fa \arrow[d, "\mathrm{id}_{Fa}"] \arrow[d, bend right=60, "F(\mathrm{id}_a)"', "\overset{\psi}{\Leftarrow}"] \\
\widehat{\mathcal{B}}(y(a),F) \arrow[r, "\theta_a"'] & Fa
\end{tikzcd}
$$

即ち $\sigma \in \widehat{\mathcal{B}}(y(a),F)$ に対して，圏 Fa での等式

$$\theta_a(\sigma \mathbin{\widehat{\bullet}} \psi) = (\theta_{\mathrm{id}_a})_\sigma \circ \psi_{\theta_a(\sigma)}$$

を示せばよい．定義より

$$
\begin{aligned}
\theta_a(\sigma \mathbin{\widehat{\bullet}} \psi) &= ((\sigma \mathbin{\widehat{\bullet}} \psi)_a)_{\mathrm{id}_a} = (\sigma_a \bullet \psi_a)_{\mathrm{id}_a} = \sigma_a((\psi_a)_{\mathrm{id}_a}) = \sigma_a(\lambda_{\mathrm{id}_a}^{-1}) \\
(\theta_{\mathrm{id}_a})_\sigma &= \sigma_a(\rho_{\mathrm{id}_a}^{-1}) \circ \sigma_a(\lambda_{\mathrm{id}_a}) \circ (\sigma_{\mathrm{id}_a})_{\mathrm{id}_a} \\
\psi_{\theta_a(\sigma)} &= \psi_{\sigma_a(\mathrm{id}_a)}
\end{aligned}
$$

で，補題 8 より $\lambda_{\mathrm{id}_a} = \rho_{\mathrm{id}_a}$ だから $\sigma_a(\lambda_{\mathrm{id}_a}^{-1}) = (\sigma_{\mathrm{id}_a})_{\mathrm{id}_a} \circ \psi_{\sigma_a(\mathrm{id}_a)}$ を示せばよい．これは $\sigma\colon y(a) \Rightarrow F$ が pseudonatural transformation だから

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{B}(a,a) \arrow[r, "\sigma_a"] \arrow[d, "\mathrm{id}"'] \arrow[d, bend right=60, "-\bullet\mathrm{id}_a"', "\overset{\lambda^{-1}}{\Leftarrow}"] \arrow[dr, "\sigma_a" description] & Fa \arrow[d, "\mathrm{id}_{Fa}"] \arrow[dl, phantom, "/\!/" near start] \\
\mathcal{B}(a,a) \arrow[r, "\sigma_a"'] \arrow[ur, phantom, "/\!/" near start] & Fa
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
\mathcal{B}(a,a) \arrow[r, "\sigma_a"] \arrow[d, bend right=60, "-\bullet\mathrm{id}_a"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\sigma_{\mathrm{id}_a}}{\Swarrow}"] & Fa \arrow[d, "\mathrm{id}_{Fa}"] \arrow[d, bend right=60, "F(\mathrm{id}_a)"', "\overset{\psi}{\Leftarrow}"] \\
\mathcal{B}(a,a) \arrow[r, "\sigma_a"'] & Fa
\end{tikzcd}
$$

となり成り立つ． □

さて，「米田の補題」を示すためには，今定義した θ の「逆」$\omega\colon F \Rightarrow \widehat{\mathcal{B}}(y(-),F)$ を定義しなければならない．ひとまずこのような pseudonatural transformation が存在するとしよう．すると $a \in \mathcal{B}$ に対して $\omega_a\colon Fa \to \widehat{\mathcal{B}}(y(a),F)$ は関手である．よって対象 $u \in Fa$ に対して $\omega_a(u)\colon y(a) \Rightarrow F$ は pseudonatural transformation である．即ち $\mathcal{B}$ の 1-morphism $p\colon t \to s$ に対して $\omega_a(u)_s\colon \mathcal{B}(s,a) \to Fs$ は関手で，$\omega_a(u)_p$ は自然同型

$$
\begin{tikzcd}
& \mathcal{B}(s,a) \arrow[dl, "\omega_a(u)_s"'] \arrow[dr, "-\bullet p"] & \\
Fs \arrow[dr, "Fp"'] & \overset{\sim}{\Longrightarrow}_{\omega_a(u)_p} & \mathcal{B}(t,a) \arrow[dl, "\omega_a(u)_t"] \\
& Ft &
\end{tikzcd}
$$

である．つまり $g\colon s \to a$ に対して $(\omega_a(u)_p)_g\colon Fp(\omega_a(u)_s(g)) \to \omega_a(u)_t(g\circ p)$ は Ft の射である．

さて，$a, s \in \mathcal{B}$，$u \in Fa$ とする．関手 $\omega_a(u)_s\colon \mathcal{B}(s,a) \to Fs$ を

- $g\colon s \to a$ に対して $\omega_a(u)_s(g) := Fg(u)$．
- $\beta\colon g \Rightarrow h\colon s \to a$ に対して $\omega_a(u)_s(\beta) := (F\beta)_u$．

$$
\begin{tikzcd}
a & s \arrow[l, bend right, "g"'] \arrow[l, bend left, "h"] \arrow[l, phantom, "\Downarrow\beta"]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
u \in Fa \arrow[r, bend left, "Fg"] \arrow[r, bend right, "Fh"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow F\beta"] & Fs
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
Fg(u) \arrow[d, "(F\beta)_u"] \\
Fh(u)
\end{tikzcd}
$$

により定義することができる．

∵) F が pseudofunctor だから $F\colon \mathcal{B}(s,a) \to \mathbf{Cat}(Fa, Fs)$ は関手である．故に $F(\gamma*\beta) = F\gamma * F\beta$，$F(\mathrm{id}) = \mathrm{id}$ となるので $\omega_a(u)_s(\gamma*\beta) = \omega_a(u)_s(\beta)\circ\omega_a(u)_s(\beta)$ と $\omega_a(u)_s(\mathrm{id}) = \mathrm{id}$ が分かる．

これにより $\omega_a(u)\colon y(a) \Rightarrow F$ は pseudonatural transformation になる．

∵) $g\colon s \to a$ と $p\colon t \to s$ に対して次が成り立つ．

$$\omega_a(u)_t(g\circ p) = F(g\circ p)(u) \cong Fp(Fg(u)) = Fp(\omega_a(u)_s(g)).$$

そこで $(\omega_a(u)_p)_g := (\varphi_{pg})_u$ と定義する．$\omega_a(u)_p\colon Fp\circ\omega_a(u)_s \Rightarrow \omega_a(u)_t\circ(-\bullet p)$ は自然変換である．

∵) $\beta\colon g \Rightarrow h\colon s \to a$ に対して，圏 Ft の図式

$$
\begin{tikzcd}
Fp(\omega_a(u)_s(g)) \arrow[r, "(\omega_a(u)_p)_g"] \arrow[d, "Fp(\omega_a(u)_b(\beta))"'] & \omega_a(u)_t(g\circ p) \arrow[d, "\omega_a(u)_c(\beta\bullet p)"] \\
Fp(\omega_a(u)_s(h)) \arrow[r, "(\omega_a(u)_h)_h"'] & \omega_a(u)_t(h\circ p)
\end{tikzcd}
$$

が可換であることを示せばよい．定義より

$$
\begin{tikzcd}
Fp(Fg(u)) \arrow[r, "(\varphi_{pg})_u"] \arrow[d, "Fp((F\beta)_u)"'] & F(g\circ p)(u) \arrow[d, "F(\beta\bullet p)_u"] \\
Fp(Fh(u)) \arrow[r, "(\varphi_{ph})_u"'] & F(h\circ p)(u)
\end{tikzcd}
$$

の可換性，即ち

$$
\begin{tikzcd}
Fp\circ Fg \arrow[r, Rightarrow, "\varphi_{pg}"] \arrow[d, Rightarrow, "Fp\bullet F\beta"'] & F(g\circ p) \arrow[d, Rightarrow, "F(\beta\bullet p)"] \\
Fp\circ Fh \arrow[r, Rightarrow, "\varphi_{ph}"'] & F(h\circ p)
\end{tikzcd}
$$

の可換性を示せばよいが，これは φ が自然変換だから成り立つ．

pseudonatural transformation の条件 3 を示す．つまり $r \xrightarrow{q} t \xrightarrow{p} s$ に対して自然変換の等式

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{B}(s,a) \arrow[rr, "\omega_a(u)_s"] \arrow[dr, "-\bullet p"'] \arrow[dd, bend right=60, "-\bullet(p\circ q)"'] & & Fs \arrow[dr, "Fp"] \arrow[d, phantom, "\swArrow\ \omega_a(u)_p"] & \\
\arrow[r, phantom, "\overset{\alpha^{-1}_{-pq}}{\Longleftarrow}"] & \mathcal{B}(t,a) \arrow[rr, "\omega_a(u)_t"] \arrow[dl, "-\bullet q"] & \arrow[d, phantom, "\swArrow\ \omega_a(u)_q"] & Ft \arrow[dl, "Fq"] \\
\mathcal{B}(r,a) \arrow[rr, "\omega_a(u)_r"'] & & Fr &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
\mathcal{B}(s,a) \arrow[rr, "\omega_a(u)_s"] \arrow[dd, bend right=60, "-\bullet(p\circ q)"'] \arrow[ddrr, phantom, "\swArrow\ \omega_a(u)_{p\circ q}"] & & Fs \arrow[dr, "Fp"] \arrow[dd, bend right=60, "F(p\circ q)"'] \arrow[ddr, phantom, "\overset{\varphi_{qp}}{\Longleftarrow}"] & \\
& & & Ft \arrow[dl, "Fq"] \\
\mathcal{B}(r,a) \arrow[rr, "\omega_a(u)_r"'] & & Fr &
\end{tikzcd}
$$

を示せばよい．即ち $g \in \mathcal{B}(s,a)$ に対して，圏 Fr での等式

$$
\omega_a(u)_r(\alpha^{-1}_{gpq}) \circ (\omega_a(u)_q)_{g\circ p} \circ Fq((\omega_a(u)_p)_g) = (\omega_a(u)_{p\circ q})_g \circ (\varphi_{qp})_{\omega_a(u)_s(g)}
$$

を示す．定義より

$$
\begin{aligned}
\omega_a(u)_r(\alpha_{gpq}^{-1}) &= (F\alpha_{gpq}^{-1})_u \\
(\omega_a(u)_q)_{g\circ p} &= (\varphi_{q,g\circ p})_u \\
Fq((\omega_a(u)_p)_g) &= Fq((\varphi_{pg})_u) \\
(\omega_a(u)_{p\circ q})_g &= (\varphi_{p\circ q,g})_u \\
(\varphi_{qp})_{\omega_a(u)_s(g)} &= (\varphi_{qp})_{Fg(u)}
\end{aligned}
$$

であるが，$F\colon \mathcal{B}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Cat}$ が pseudofunctor だから条件 5 より

$$F(\alpha_{gpq}) * \varphi_{p\circ q,g} * (\varphi_{qp} \bullet Fg) = \varphi_{q,g\circ p} * (Fq \bullet \varphi_{pg})$$

となるので 3 が成り立つ．

条件 4 を示す．$s \in \mathcal{B}$ に対して次の自然変換の等式

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{B}(s,a) \arrow[r, "\omega_a(u)_s"] \arrow[d, "\mathrm{id}"'] \arrow[d, bend right=60, "-\bullet\mathrm{id}_a"'] \arrow[d, phantom, shift right=6ex, "\overset{\psi^s}{\Leftarrow}"] \arrow[dr, "\omega_a(u)_s"] & Fs \arrow[d, "\mathrm{id}_{Fa}"] \\
\mathcal{B}(s,a) \arrow[r, "\omega_a(u)_s"'] & Fs
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
\mathcal{B}(s,a) \arrow[r, "\omega_a(u)_s"] \arrow[d, bend right=60, "-\bullet\mathrm{id}_a"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\omega_a(u)_{\mathrm{id}_a}}{\Swarrow}"] & Fs \arrow[d, "\mathrm{id}_{Fa}"] \arrow[d, bend right=60, "F(\mathrm{id}_a)"'] \arrow[d, phantom, shift right=2ex, "\overset{\psi^s}{\Leftarrow}"] \\
\mathcal{B}(s,a) \arrow[r, "\omega_a(u)_s"'] & Fs
\end{tikzcd}
$$

を示す．即ち $g\colon s \to a$ に対して $\omega_a(u)_s(\rho_g^{-1}) = (\omega_a(u)_{\mathrm{id}_a})_g \circ \psi^s_{\omega_a(u)_s(g)}$ を示す．定義より

$$
\begin{aligned}
\omega_a(u)_s(\rho_g^{-1}) &= (F\rho_g^{-1})_u \\
(\omega_a(u)_{\mathrm{id}_a})_g &= (\varphi_{\mathrm{id}_a,g})_u \\
\psi^s_{\omega_a(u)_s(g)} &= \psi^s_{Fg(u)}
\end{aligned}
$$

であるが，F が pseudofunctor だから条件 6 より $F(\rho_g) * \varphi_{\mathrm{id},g} * (\psi^s \bullet Fg) = \mathrm{id}$ となり，4 が成り立つ．

$\omega_a\colon Fa \to \widehat{\mathcal{B}}(y(a), F)$ が関手となることを示そう．その為には Fa の射 $k\colon u \to v$ に対して modification $\omega_a(k)\colon \omega_a(u) \Rrightarrow \omega_a(v)\colon y(a) \Rightarrow F$ を定義する必要がある．

$g\colon s \to a$ に対して，Fs の射 $(\omega_a(k)_s)_g\colon (\omega_a(u)_s)(g) = Fg(u) \to Fg(v) = (\omega_a(v)_s)(g)$ を $(\omega_a(k)_s)_g := Fg(k)$ で定める．$\omega_a(k)_s\colon \omega_a(u)_s \Rightarrow \omega_a(v)_s\colon \mathcal{B}(s,a) \to Fs$ は自然変換である．

∵) $\beta\colon g \Rightarrow h$ に対して次が可換であることを示せばよい．

$$
\begin{tikzcd}
\omega_a(u)_s(g) \arrow[r, "(\omega_a(k)_s)_g"] \arrow[d, "\omega_a(u)_s(\beta)"'] & \omega_a(v)_s(g) \arrow[d, "\omega_a(v)_s(\beta)"] \\
\omega_a(u)_s(h) \arrow[r, "(\omega_a(k)_s)_h"'] & \omega_a(v)_s(h)
\end{tikzcd}
$$

これは定義より

$$
\begin{tikzcd}
Fg(u) \arrow[r, "Fg(k)"] \arrow[d, "(F\beta)_u"'] & Fg(v) \arrow[d, "(F\beta)_v"] \\
Fh(u) \arrow[r, "Fg(h)"'] & Fh(v)
\end{tikzcd}
$$

となるから，$F\beta\colon Fg \Rightarrow Fh$ が自然変換であることより可換である．

これにより $\omega_a(k)\colon \omega_a(u) \Rrightarrow \omega_a(v)\colon y(a) \Rightarrow F$ は modification となる．

∵) $p\colon t \to s$ に対して自然変換の等式

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{B}(s,a) \arrow[r, bend left, "\omega_a(u)_s"] \arrow[d, "-\bullet p"'] \arrow[dr, phantom, "\omega_a(u)_p \swArrow"] & Fs \arrow[d, "Fp"] \\
\mathcal{B}(t,a) \arrow[r, bend left, "\omega_a(u)_t"] \arrow[r, bend right, "\omega_a(v)_t"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\omega_a(k)_t"] & Ft
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
\mathcal{B}(s,a) \arrow[r, bend left, "\omega_a(u)_s"] \arrow[r, bend right, "\omega_a(v)_s"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\omega_a(k)_s"] \arrow[d, "-\bullet p"'] \arrow[dr, phantom, "\omega_a(v)_p \swArrow"] & Fs \arrow[d, "Fp"] \\
\mathcal{B}(t,a) \arrow[r, bend right, "\omega_a(v)_t"'] & Ft
\end{tikzcd}
$$

を示せばよい．即ち $g\colon s \to a$ に対して，圏 Ft での等式

$$(\omega_a(k)_t)_{g\circ p} \circ (\omega_a(u)_p)_g = (\omega_a(v)_p)_g \circ Fp((\omega_a(k)_s)_g)$$

を示せばよい．定義より

$$
\begin{aligned}
(\omega_a(k)_t)_{g\circ p} &= F(g\circ p)(k) \\
(\omega_a(u)_p)_g &= (\varphi_{pg})_u \\
(\omega_a(v)_p)_g &= (\varphi_{pg})_v \\
Fp((\omega_a(k)_s)_g) &= Fp(Fg(k))
\end{aligned}
$$

だから $F(g\circ p)(k)\circ(\varphi_{pg})_u=(\varphi_{pg})_v\circ(Fp(Fg(k)))$ を示せばよいが，これは F が pseudofunctor だからよい．

定義から明らかに $\omega_a\colon Fa\to\widehat{\mathcal{B}}(y(a),F)$ は関手である．

$\omega\colon F\Rightarrow\widehat{\mathcal{B}}(y(-),F)$ が pseudonatural transformation であることを示そう．

※ その為には $a,b\in\mathcal{B}$ に対して自然同型

$$\begin{tikzcd}
& \mathcal{B}^{\mathrm{op}}(a,b) \arrow[dl, "\widehat{\mathcal{B}}(y(-),F)"'] \arrow[dr, "F"] & \\
\mathbf{Cat}(\widehat{\mathcal{B}}(y(a),F),\widehat{\mathcal{B}}(y(b),F)) \arrow[dr, "-\bullet\omega_a"'] \arrow[rr, phantom, "\overset{\sim}{\underset{\omega^{ab}}{\Longrightarrow}}"] & & \mathbf{Cat}(Fa,Fb) \arrow[dl, "\omega_b\bullet-"] \\
& \mathbf{Cat}(Fa,\widehat{\mathcal{B}}(y(b),F)) &
\end{tikzcd}$$

を定義しなければならない．もしこのような ω^{ab} が存在すれば，$f\colon b\to a$ に対して自然同型

$$\begin{tikzcd}
& Fa \arrow[dl, "\omega_a"'] \arrow[dr, "Ff"] & \\
\widehat{\mathcal{B}}(y(a),F) \arrow[dr, "-\widehat{\bullet}y(f)"'] \arrow[rr, phantom, "\overset{\sim}{\underset{\omega_f^{ab}}{\Longrightarrow}}"] & & Fb \arrow[dl, "\omega_b"] \\
& \widehat{\mathcal{B}}(y(b),F) &
\end{tikzcd}$$

が得られる．よって対象 $u\in Fa$ に対して

$$(\omega_f^{ab})_u\colon\omega_a(u)\mathbin{\widehat{\circ}}y(f)\Rightarrow\omega_b(Ff(u))\colon y(b)\Rightarrow F$$

は同型な modification である．故に $s\in\mathcal{B}$ に対して

$$((\omega_f^{ab})_u)_s\colon\omega_a(u)_s\circ(f\bullet-)\Rightarrow\omega_b(Ff(u))_s\colon\mathcal{B}(s,b)\to Fs$$

は自然同型となる．従って $g\colon s\to b$ に対して

$$(((\omega_f^{ab})_u)_s)_g\colon\omega_a(u)_s(f\circ g)\to\omega_b(Ff(u))_s(g)$$

は圏 Fs の射である．ω_a の定義から $(((\omega_f^{ab})_u)_s)_g\colon F(f\circ g)(u)\to Fg(Ff(u))$ である．

$a,b,s\in\mathcal{B}$ と $s\xrightarrow{g}b\xrightarrow{f}a$ に対して $(((\omega_f)_u)_s)_g:=(\varphi_{gf}^{-1})_u$ と定義する．先と同様にして，これは自然同型 $((\omega_f)_u)_s\colon\omega_a(u)_s\circ(f\bullet-)\Rightarrow\omega_b(Ff(u))_s$ を定めることが分かる．

$(\omega_f)_u \colon \omega_a(u) \mathbin{\widehat{\circ}} y(f) \Rrightarrow \omega_b(Ff(u))$ は modification である．

∵) $p \colon t \to s$ に対して自然変換の等式

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathcal{B}(s,a) \arrow[dr, "\omega_a(u)_s"] \arrow[dd, "-\bullet p"] & \\
\mathcal{B}(s,b) \arrow[ur, "f\bullet-"] \arrow[dd, "-\bullet p"'] \arrow[dr, phantom, "\alpha_{f-p}\ \Swarrow"] & & Fs \arrow[dd, "Fp"] \arrow[dl, phantom, "\omega_a(u)_p\ \Swarrow"] \\
 & \mathcal{B}(t,a) \arrow[dr, "\omega_a(u)_t"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow((\omega_f)_u)_t"] & \\
\mathcal{B}(t,b) \arrow[ur, "f\bullet-"] \arrow[rr, bend right, "\omega_b(Ff(u))_t"'] & {} & Ft
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
 & \mathcal{B}(s,a) \arrow[dr, "\omega_a(u)_s"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow((\omega_f)_u)_s"] & \\
\mathcal{B}(s,b) \arrow[ur, "f\bullet-"] \arrow[rr, bend right, "\omega_b(Ff(u))_s"'] \arrow[dd, "-\bullet p"'] & {} \arrow[dd, phantom, "\omega_b(Ff(u))_p\ \Swarrow"] & Fs \arrow[dd, "Fp"] \\
 & & \\
\mathcal{B}(t,b) \arrow[rr, bend right, "\omega_b(Ff(u))_t"'] & {} & Ft
\end{tikzcd}
$$

を示せばよい．即ち $g \colon s \to b$ に対して，圏 Ft での等式

$$(((\omega_f)_u)_t)_{g\circ p} \circ \omega_a(u)_t(\alpha_{fgp}) \circ (\omega_a(u)_p)_{f\circ g} = (\omega_b(Ff(u))_p)_g \circ Fp((((\omega_f)_u)_s)_g)$$

を示せばよい．定義から

$$
\begin{aligned}
(((\omega_f)_u)_t)_{g\circ p} &= (\varphi^{-1}_{g\circ p,f})_u \\
\omega_a(u)_t(\alpha_{fgp}) &= (F\alpha_{fgp})_u \\
(\omega_a(u)_p)_{f\circ g} &= (\varphi_{p,f\circ g})_u \\
(\omega_b(Ff(u))_p)_g &= (\varphi_{pg})_{Ff(u)} \\
Fp((((\omega_f)_u)_s)_g) &= Fp((\varphi^{-1}_{gf})_u)
\end{aligned}
$$

であるが，$F \colon \mathcal{B}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Cat}$ が pseudofunctor だから条件 5 より

$$F(\alpha^{-1}_{fgp}) * \varphi_{g\circ p,f} * (\varphi_{pg} \bullet Ff) = \varphi_{p,f\circ g} * (Fp \bullet \varphi_{gf})$$

となり成り立つ．

$\omega_f \colon (- \mathbin{\widehat{\bullet}} y(f)) \circ \omega_a \Rightarrow \omega_b \circ Ff$ は自然同型である．

∵) その為には Fa の射 $k \colon u \to v$ に対して

$$
\begin{tikzcd}
\omega_a(u) \mathbin{\widehat{\circ}} y(f) \arrow[r, Rrightarrow, "(\omega_f)_u"] \arrow[d, Rrightarrow, "\omega_a(k)\widehat{\bullet}y(f)"'] & \omega_b(Ff(u)) \arrow[d, Rrightarrow, "\omega_b(Ff(k))"] \\
\omega_a(v) \mathbin{\widehat{\circ}} y(f) \arrow[r, Rrightarrow, "(\omega_f)_v"'] & \omega_b(Ff(v))
\end{tikzcd}
$$

が可換であることを示せばよい．その為には $s \in \mathcal{B}$ に対して，自然変換の可換図式

$$
\begin{tikzcd}
\omega_a(u)_s \circ (f \bullet -) \arrow[r, Rightarrow, "((\omega_f)_u)_s"] \arrow[d, Rightarrow, "\omega_a(k)_s \bullet (f \bullet -)"'] & \omega_b(Ff(u))_s \arrow[d, Rightarrow, "\omega_b(Ff(k))_s"] \\
\omega_a(v)_s \circ (f \bullet -) \arrow[r, Rightarrow, "((\omega_f)_v)_s"'] & \omega_b(Ff(v))_s
\end{tikzcd}
$$

を示せばよい．即ち $g\colon s \to b$ に対して，圏 Fs での図式

$$
\begin{tikzcd}
F(f \circ g)(u) \arrow[r, "(\varphi_{gf}^{-1})_u"] \arrow[d, "F(f \circ g)(k)"'] & Fg(Ff(u)) \arrow[d, "Fg(Ff(k))"] \\
F(f \circ g)(v) \arrow[r, "(\varphi_{gf}^{-1})_v"'] & Fg(Ff(v))
\end{tikzcd}
$$

の可換性を示せばよいが，これは $\varphi_{gf}^{-1}\colon F(f \circ g) \Rightarrow Fg \circ Ff$ が自然同型であることから明らか．

あとは $\omega\colon F \Rightarrow \widehat{\mathcal{B}}(y(-), F)$ が pseudonatural transformation であることを示せばよい．まず条件 3 を示す．$c \xrightarrow{g} b \xrightarrow{f} a$ に対して自然変換の等式

$$
\begin{tikzcd}
Fa \arrow[rr, "\omega_a"] \arrow[dr, "Ff"'] \arrow[dd, bend right=50, "F(f \circ g)"'] & & \widehat{\mathcal{B}}(y(a), F) \arrow[dr, "- \mathbin{\widehat{\bullet}} y(f)"] \arrow[d, phantom, "\Swarrow \omega_f"] & \\
\arrow[r, phantom, "\overset{\varphi_{gf}}{\Longleftarrow}"] & Fb \arrow[rr, "\omega_b"] \arrow[dl, "Fg"] & \arrow[d, phantom, "\Swarrow \omega_g"] & \widehat{\mathcal{B}}(y(b), F) \arrow[dl, "- \mathbin{\widehat{\bullet}} y(g)"] \\
Fc \arrow[rr, "\omega_c"'] & & \widehat{\mathcal{B}}(y(c), F) &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
Fa \arrow[r, "\omega_a"] \arrow[dd, bend right=50, "F(f \circ g)"'] \arrow[ddr, phantom, "\Swarrow \omega_{f \circ g}"] & \widehat{\mathcal{B}}(y(a), F) \arrow[dr, "- \mathbin{\widehat{\bullet}} y(f)"] \arrow[dd, bend right=50, "- \mathbin{\widehat{\bullet}} y(f \circ g)"'] & \\
& \arrow[r, phantom, "\overset{\varphi_{gf}}{\Longleftarrow}"] & \widehat{\mathcal{B}}(y(b), F) \arrow[dl, "- \mathbin{\widehat{\bullet}} y(g)"] \\
Fc \arrow[r, "\omega_c"'] & \widehat{\mathcal{B}}(y(c), F) &
\end{tikzcd}
$$

を示せばよい．即ち，$u \in Fa$ に対して modification の等式

$$
\omega_c((\varphi_{gf})_u) \mathbin{\widehat{*}} (\omega_g)_{Ff(u)} \mathbin{\widehat{*}} ((\omega_f)_u \mathbin{\widehat{\bullet}} y(g)) = (\omega_{f \circ g})_u \mathbin{\widehat{*}} (\varphi_{gf})_{\omega_a(u)}
$$

を示せばよい．つまり $s \in \mathcal{B}$ と $h\colon s \to c$ に対して，圏 Fs での等式

$$
\begin{aligned}
&((\omega_c((\varphi_{gf})_u))_s)_h \circ (((\omega_g)_{Ff(u)})_s)_h \circ (((\omega_f)_u \mathbin{\widehat{\bullet}} y(g))_s)_h \\
&= (((\omega_{f \circ g})_u)_s)_h \circ (((\varphi_{gf})_{\omega_a(u)})_s)_h
\end{aligned}
$$

を示せばよい．定義より

$$
\begin{aligned}
((\omega_c((\varphi_{gf})_u))_s)_h &= Fh((\varphi_{gf})_u) \\
(((\omega_g)_{Ff(u)})_s)_h &= (\varphi_{h,g}^{-1})_{Ff(u)} \\
(((\omega_f)_u \mathbin{\widehat{\bullet}} y(g))_s)_h &= (((\omega_f)_u)_s \bullet y(g)_s)_h = (((\omega_f)_u)_s)_{y(g)_s(h)} \\
&= (((\omega_f)_u)_s)_{g\circ h} = (\varphi_{g\circ h,f}^{-1})_u \\
(((\omega_{f\circ g})_u)_s)_h &= (\varphi_{h,f\circ g}^{-1})_u \\
(((\varphi_{gf})_{\omega_a(u)})_s)_h &= \omega_a(u)_s(\alpha_{fgh}^{-1}) = (F(\alpha_{fgh}^{-1}))_u
\end{aligned}
$$

であるが，$F\colon \mathcal{B}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Cat}$ が pseudofunctor だから条件 5 より

$$
F(\alpha_{fgh}^{-1}) * \varphi_{g\circ h,f} * (\varphi_{hg} \bullet Ff) = \varphi_{h,f\circ g} * (Fh \bullet \varphi_{gf})
$$

となり成り立つ．

最後に条件 4 を示す．$a \in \mathcal{B}$ に対して自然変換の等号

$$
\begin{tikzcd}
Fa \arrow[r, "\omega_a"] \arrow[d, "\mathrm{id}_{Fa}"] \arrow[d, bend right=60, "F(\mathrm{id}_a)"'] \arrow[d, phantom, bend right=30, "\overset{\psi^a}{\Leftarrow}"] \arrow[dr, "\omega_a"] & \widehat{\mathcal{B}}(y(a), F) \arrow[d, "\mathrm{id}"] \arrow[dl, phantom, "="] \\
Fa \arrow[r, "\omega_a"'] \arrow[ur, phantom, "="] & \widehat{\mathcal{B}}(y(a), F)
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
Fa \arrow[r, "\omega_a"] \arrow[d, bend right=60, "F\mathrm{id}_a"'] & \widehat{\mathcal{B}}(y(a), F) \arrow[d, "\mathrm{id}"] \arrow[d, bend right=50] \arrow[d, phantom, bend right=25, "\overset{\psi^a}{\Leftarrow}"] \arrow[dl, phantom, "\overset{\omega_{\mathrm{id}_a}}{\Swarrow}\, -\widehat{\bullet} y(\mathrm{id}_a)"] \\
Fa \arrow[r, "\omega_a"'] & \widehat{\mathcal{B}}(y(a), F)
\end{tikzcd}
$$

を示せばよい．即ち，$u \in Fa$ に対して $\omega_a(\psi_u) = (\omega_{\mathrm{id}_a})_u \mathbin{\widehat{*}} \psi_{\omega_a(u)}$ を示せばよい．定義より

$$
\begin{aligned}
((\omega_a(\psi_u))_s)_g &= Fg(\psi_u) \\
(((\omega_{\mathrm{id}_a})_u)_s)_g &= (\varphi_{g,\mathrm{id}_a}^{-1})_u \\
((\psi_{\omega_a(u)})_s)_g &= F(\mathrm{id} \circ g)(u)
\end{aligned}
$$

だからこれは成立する．

以上により次の補題が得られた．

補題 24. 上記のように定義された $\omega\colon F \Rightarrow \widehat{\mathcal{B}}(y(-), F)$ は pseudonatural transformation である． □

定義を復習しておくと，$a, b, s, t \in \mathcal{B}$，$f\colon b \to a$，$\beta\colon g \Rightarrow h\colon s \to a$，$p\colon t \to s$，$\Gamma\colon \sigma \Rrightarrow \tau\colon y(a) \Rightarrow F\colon \mathcal{B}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Cat}$，$u, v \in Fa$，$k\colon v \to u$ として

- $\theta\colon \widehat{\mathcal{B}}(y(-), F) \Rightarrow F$ は pseudonatural transformation である．

- $\theta_a(\sigma) := \sigma_a(\mathrm{id}_a)$.
- $\theta_a(\Gamma) := (\Gamma_a)_{\mathrm{id}_a}$.
- $(\theta_f)_\sigma := \sigma_b(\rho_f^{-1}) \circ \sigma_b(\lambda_f) \circ (\sigma_f)_{\mathrm{id}_a}$.
- $\omega\colon F \Rightarrow \widehat{\mathcal{B}}(y(-), F)$ は pseudonatural transformation である.
- $\omega_a(u)_s(g) := Fg(u)$.
- $\omega_a(u)_s(\beta) := (F\beta)_u$.
- $(\omega_a(u)_p)_g := (\varphi_{pg})_u$.
- $(\omega_a(k)_s)_g := Fg(k)$.
- $(((\omega_f)_u)_s)_g := (\varphi_{gf}^{-1})_u$.

さて，我々が示したい「米田の補題」とは，$\widehat{\mathcal{B}}(y(-), F)$ と F が (bicategory $\widehat{\mathcal{B}}$ の対象として) 同値であることである．即ち，先の補題で定義した $\theta\colon \widehat{\mathcal{B}}(y(-), F) \Rightarrow F$ と $\omega\colon F \Rightarrow \widehat{\mathcal{B}}(y(-), F)$ に対して，同型な modification $\Sigma\colon \omega \mathbin{\widehat{\circ}} \theta \Rrightarrow \mathrm{id}$ と $\Delta\colon \mathrm{id} \Rrightarrow \theta \mathbin{\widehat{\circ}} \omega$ を定義すればよい．

まずそのような $\Delta\colon \mathrm{id} \Rrightarrow \theta \mathbin{\widehat{\circ}} \omega$ が存在したとする．$a \in \mathcal{B}$ に対して

$$\Delta_a\colon \mathrm{id} \Rightarrow \theta_a \circ \omega_a\colon Fa \to Fa$$

は自然変換である．よって $u \in Fa$ に対して $(\Delta_a)_u\colon u \to \theta_a(\omega_a(u))$ は Fa の射である．定義より $\theta_a(\omega_a(u)) = \omega_a(u)_a(\mathrm{id}_a) = F(\mathrm{id}_a)(u)$ となる．

そこで $a \in \mathcal{B}$，$u \in Fa$ に対して $(\Delta_a)_u := \psi_u\colon u \to F(\mathrm{id}_a)(u)$ と定義する．ψ は自然同型だから Δ_a も自然同型である．$\Delta\colon \mathrm{id} \Rrightarrow \theta \mathbin{\widehat{\circ}} \omega$ は同型な modification である．

$\because$) $f\colon b \to a$ に対して自然変換の等号

$$\begin{tikzcd}
Fa \arrow[rr, bend left, "\mathrm{id}_{Fa}"] \arrow[d, "Ff"'] \arrow[rr, phantom, "\swarrow \mathrm{id}_f"] & & Fa \arrow[d, "Ff"] \\
Fb \arrow[rr, bend left, "\mathrm{id}_{Fb}"] \arrow[dr, "\omega_b"'] \arrow[rr, phantom, shift right=3, "\Downarrow \Delta_b"] & & Fb \\
& \widehat{\mathcal{B}}(y(b), F) \arrow[ur, "\theta_b"'] &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
Fa \arrow[rr, bend left, "\mathrm{id}_{Fa}"] \arrow[dr, "\omega_a"] \arrow[dd, "Ff"'] \arrow[rr, phantom, "\Downarrow \Delta_a"] \arrow[ddr, phantom, "\swarrow \omega_f"] & & Fa \arrow[dd, "Ff"] \\
& \widehat{\mathcal{B}}(y(a), F) \arrow[ur, "\theta_a"'] \arrow[dd, "-\bullet \widehat{y}(f)"] \arrow[dr, phantom, "\swarrow \theta_f"] & \\
Fb \arrow[dr, "\omega_b"'] & & Fb \\
& \widehat{\mathcal{B}}(y(b), F) \arrow[ur, "\theta_b"'] &
\end{tikzcd}$$

を示せばよい．即ち $u \in Fa$ に対して，圏 Fb での等式

$$(\Delta_b)_{Ff(u)} = \theta_b((\omega_f)_u) \circ (\theta_f)_{\omega_a(u)} \circ Ff((\Delta_a)_u)$$

を示せばよい．定義より

$$
\begin{aligned}
(\Delta_b)_{Ff(u)} &= \psi_{Ff(u)} \\
\theta_b((\omega_f)_u) &= (((\omega_f)_u)_b)_{\mathrm{id}_a} = (\varphi^{-1}_{\mathrm{id}_a,f})_u \\
(\theta_f)_{\omega_a(u)} &= \omega_a(u)_b(\rho_f^{-1}) \circ \omega_a(u)_b(\lambda_f) \circ (\omega_a(u)_f)_{\mathrm{id}_a} \\
&= (F\rho_f^{-1})_u \circ (F\lambda_f)_u \circ (\varphi_{f,\mathrm{id}_a})_u \\
Ff((\Delta_a)_u) &= Ff(\psi_u)
\end{aligned}
$$

だから，圏 Fb での等式

$$
\psi_{Ff(u)} = (\varphi^{-1}_{\mathrm{id}_a,f})_u \circ (F\rho_f^{-1})_u \circ (F\lambda_f)_u \circ (\varphi_{f,\mathrm{id}_a})_u \circ Ff(\psi_u)
$$

を示せばよい．今 $F\colon \mathcal{B}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Cat}$ が pseudofunctor だから

$$
\begin{tikzcd}
 & Fb \arrow[dr, "F(\mathrm{id}_b)"] \arrow[dr, bend left=60, "\mathrm{id}_{Fb}"] \arrow[dr, phantom, bend left=30, "\psi\Downarrow"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\varphi_{\mathrm{id}_b,f}"] & \\
Fa \arrow[ur, "Ff"] \arrow[rr, "F(f\circ\mathrm{id}_b)"] \arrow[rr, bend right=40, "Ff"'] \arrow[rr, phantom, bend right=20, "\Downarrow F(\rho_f)"] & & Fb
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
 & Fb \arrow[dr, bend left=60, "\mathrm{id}_{Fb}"] \arrow[d, phantom, "\parallel"] & \\
Fa \arrow[ur, "Ff"] \arrow[rr, bend right=40, "Ff"'] & & Fb
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
 & Fa \arrow[dr, "Ff"] \arrow[d, phantom, "\varphi_{f,\mathrm{id}_a}\Downarrow"] & \\
Fa \arrow[ur, "F(\mathrm{id}_a)"] \arrow[ur, bend left=60, "\mathrm{id}_{Fa}"] \arrow[ur, phantom, bend left=30, "\Downarrow\psi"] \arrow[rr, "F(\mathrm{id}_a\circ f)"] \arrow[rr, bend right=40, "Ff"'] \arrow[rr, phantom, bend right=20, "\Downarrow F(\lambda_f)"] & & Fb
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
 & Fa \arrow[dr, "Ff"] \arrow[d, phantom, "\parallel"] & \\
Fa \arrow[ur, bend left=60, "\mathrm{id}_{Fa}"] \arrow[rr, bend right=40, "Ff"'] & & Fb
\end{tikzcd}
$$

となり，$(F\rho_f)_u \circ (\varphi_{\mathrm{id}_a,f})_u \circ \psi_{Ff(u)} = \mathrm{id}_{Ff(u)} = (F\lambda_f)_u \circ (\varphi_{f,\mathrm{id}_a})_u \circ Ff(\psi_u)$ だから成り立つ．

故に $\mathrm{id} \cong \theta \mathbin{\hat{\circ}} \omega$ である．

よって，後は同型な $\Sigma\colon \omega \mathbin{\hat{\circ}} \theta \Rrightarrow \mathrm{id}$ を定義すればよい．そのような Σ が存在したとする

と $a \in \mathcal{B}$ に対して

$$\Sigma_a \colon \omega_a \circ \theta_a \Rightarrow \mathrm{id} \colon \widehat{\mathcal{B}}(y(a), F) \to \widehat{\mathcal{B}}(y(a), F)$$

は自然変換である．$\sigma \in \widehat{\mathcal{B}}(y(a), F)$ に対して

$$(\Sigma_a)_\sigma \colon \omega_a \circ \theta_a(\sigma) \Rrightarrow \sigma \colon y(a) \Rightarrow F$$

は modification である．$\omega_a \circ \theta_a(\sigma) = \omega_a(\sigma_a(\mathrm{id}_a))$ であり，$s \in \mathcal{B}$ に対して

$$((\Sigma_a)_\sigma)_s \colon \omega_a(\sigma_a(\mathrm{id}_a))_s \Rightarrow \sigma_s \colon \mathcal{B}(s, a) \to Fs$$

は自然変換である．従って $g \colon s \to a$ に対して

$$(((\Sigma_a)_\sigma)_s)_g \colon \omega_a(\sigma_a(\mathrm{id}_a))_s(g) \to \sigma_s(g)$$

は圏 Fs の射で $\omega_a(\sigma_a(\mathrm{id}_a))_s(g) = Fg(\sigma_a(\mathrm{id}_a))$ となる．また σ は pseudonatural transformation だから自然同型

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{B}(a,a) \arrow[dl, "\sigma_a"'] \arrow[dr, "-\bullet g"] & \\
Fa \arrow[dr, "Fg"'] \arrow[rr, phantom, "\overset{\sim}{\Longrightarrow}_{\sigma_g}"] & & \mathcal{B}(s,a) \arrow[dl, "\sigma_s"] \\
 & Fs &
\end{tikzcd}$$

が与えられている．

そこで $a, s \in \mathcal{B}$，$g \colon s \to a$，$\sigma \colon y(a) \Rightarrow F$ に対して

$$(((\Sigma_a)_\sigma)_s)_g := \sigma_s(\lambda_g) \circ (\sigma_g)_{\mathrm{id}_a} \colon \omega_a(\sigma_a(\mathrm{id}_a))_s(g) = Fg(\sigma_a(\mathrm{id}_a)) \to \sigma_s(g)$$

と定義する．$((\Sigma_a)_\sigma)_s$ は自然同型である．

∵) $(((\Sigma_a)_\sigma)_s)_g$ は同型射である．よって $\beta \colon g \Rightarrow h \colon s \to a$ に対して，圏 Fs の図式

$$\begin{tikzcd}
\omega_a(\sigma_a(\mathrm{id}_a))_s(g) \arrow[r, "(((\Sigma_a)_\sigma)_s)_g"] \arrow[d, "\omega_a(\sigma_a(\mathrm{id}_a))_s(\beta)"'] & \sigma_s(g) \arrow[d, "\sigma_s(\beta)"] \\
\omega_a(\sigma_a(\mathrm{id}_a))_s(h) \arrow[r, "(((\Sigma_a)_\sigma)_s)_h"'] & \sigma_s(h)
\end{tikzcd}$$

が可換であることを示せばよい．それには定義より

$$
\begin{tikzcd}
Fg(\sigma_a(\mathrm{id}_a)) \arrow[r, "(\sigma_g)_{\mathrm{id}_a}"] \arrow[d, "(F\beta)_{\sigma_a(\mathrm{id}_a)}"'] & \sigma_s(\mathrm{id}\circ g) \arrow[r, "\sigma_s(\lambda_g)"] \arrow[d, "\sigma_s(\mathrm{id}\bullet\beta)"] & \sigma_s(g) \arrow[d, "\sigma_s(\beta)"] \\
Fh(\sigma_a(\mathrm{id}_a)) \arrow[r, "(\sigma_h)_{\mathrm{id}_a}"'] & \sigma_s(\mathrm{id}\circ h) \arrow[r, "\sigma_s(\lambda_h)"'] & \sigma_s(h)
\end{tikzcd}
$$

が可換であることを示せばよいが，これは σ_g と λ_g が g について自然だから明らか．

$(\Sigma_a)_\sigma\colon \omega_a \circ \theta_a(\sigma) \Rrightarrow \sigma$ は同型な modification である．

∵) $p\colon t \to s$ に対して自然変換の等号

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{B}(s,a) \arrow[rr, bend left, "(\omega_a\circ\theta_a(\sigma))_s"] \arrow[d, "-\bullet p"'] \arrow[drr, phantom, "\Swarrow (\omega_a\circ\theta_a(\sigma))_p"] & & Fs \arrow[d, "Fp"] \\
\mathcal{B}(t,a) \arrow[rr, bend left, "(\omega_a\circ\theta_a(\sigma))_t"] \arrow[rr, bend right, "\sigma_t"'] \arrow[rr, phantom, "\Downarrow((\Sigma_a)_\sigma)_t"] & & Ft
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
\mathcal{B}(s,a) \arrow[rr, bend left, "(\omega_a\circ\theta_a(\sigma))_s"] \arrow[rr, bend right, "\sigma_s"'] \arrow[rr, phantom, "\Downarrow((\Sigma_a)_\sigma)_s"] \arrow[d, "-\bullet p"'] \arrow[drr, phantom, "\Swarrow \sigma_p"] & & Fs \arrow[d, "Fp"] \\
\mathcal{B}(t,a) \arrow[rr, bend right, "\sigma_t"'] & & Ft
\end{tikzcd}
$$

を示せばよい．即ち $g\colon s \to a$ に対して，圏 Ft での等式

$$(((\Sigma_a)_\sigma)_t)_{g\circ p} \circ ((\omega_a(\theta_a(\sigma)))_p)_g = (\sigma_p)_g \circ Fp((((\Sigma_a)_\sigma)_s)_g)$$

を示せばよい．定義より

$$
\begin{aligned}
(((\Sigma_a)_\sigma)_t)_{g\circ p} &= \sigma_t(\lambda_{g\circ p}) \circ (\sigma_{g\circ p})_{\mathrm{id}_a} \\
((\omega_a(\theta_a(\sigma)))_p)_g &= ((\omega_a(\sigma_a(\mathrm{id}_a)))_p)_g = (\varphi_{pg})_{\sigma_a(\mathrm{id}_a)} \\
Fp((((\Sigma_a)_\sigma)_s)_g) &= Fp(\sigma_s(\lambda_g) \circ (\sigma_g)_{\mathrm{id}_a})
\end{aligned}
$$

だから，圏 Ft での等式

$$\sigma_t(\lambda_{g\circ p}) \circ (\sigma_{g\circ p})_{\mathrm{id}_a} \circ (\varphi_{pg})_{\sigma_a(\mathrm{id}_a)} = (\sigma_p)_g \circ Fp(\sigma_s(\lambda_g)) \circ Fp((\sigma_g)_{\mathrm{id}_a})$$

を示せばよい．まず $\sigma_p\colon Fp \circ \sigma_s \Rightarrow \sigma_t \circ (- \bullet p)$ が自然変換だから

$$
\begin{tikzcd}
Fp(\sigma_s(\mathrm{id}_a \circ g)) \arrow[r, "(\sigma_p)_{\mathrm{id}_a \circ g}"] \arrow[d, "Fg(\sigma_s(\lambda_g))"'] & \sigma_t((\mathrm{id}_a \circ g) \circ p) \arrow[d, "\sigma_t(\lambda_g \bullet p)"] \\
Fp(\sigma_s(g)) \arrow[r, "(\sigma_p)_g"'] & \sigma_t(g \circ p)
\end{tikzcd}
$$

が可換である．次に $\sigma\colon y(a) \Rightarrow F$ が pseudonatural transformation だから自然変換の等式

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{B}(a,a) \arrow[r, "\sigma_a"] \arrow[d, "-\bullet g"] \arrow[dd, bend right=70, "-\bullet(g\circ p)"'] & Fa \arrow[d, "Fg"] \arrow[dl, phantom, "\overset{\sigma_g}{\Swarrow}"] \\
\mathcal{B}(s,a) \arrow[r, "\sigma_s"] \arrow[d, "-\bullet p"] \arrow[l, phantom, "\overset{\alpha_{-gp}}{\Longleftarrow}"] & Fs \arrow[d, "Fp"] \arrow[dl, phantom, "\overset{\sigma_p}{\Swarrow}"] \\
\mathcal{B}(t,a) \arrow[r, "\sigma_t"'] & Ft
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
\mathcal{B}(a,a) \arrow[r, "\sigma_a"] \arrow[dd, bend right=50, "-\bullet(g\circ p)"'] & Fa \arrow[dd, bend right=50, "F(g\circ p)"'] \arrow[d, "Fg"] \\
 & Fs \arrow[d, "Fp"] \arrow[l, phantom, "\overset{\varphi_{pg}}{\Longleftarrow}"] \\
\mathcal{B}(t,a) \arrow[r, "\sigma_t"'] \arrow[ur, phantom, "\overset{\sigma_{g\circ p}}{\Swarrow}"] & Ft
\end{tikzcd}
$$

が成り立つ．よって $\mathrm{id}_a \in \mathcal{B}(a,a)$ を考えれば

$$
\begin{tikzcd}
Fp(Fg(\sigma_a(\mathrm{id}_a))) \arrow[r, "(\varphi_{pg})_{\sigma_a(\mathrm{id}_a)}"] \arrow[dd, "Fp((\sigma_g)_{\mathrm{id}_a})"'] & F(g\circ p)(\sigma_a(\mathrm{id}_a)) \arrow[d, "(\sigma_{g\circ p})_{\mathrm{id}_a}"] \\
 & \sigma_t(\mathrm{id}_a \circ (g \circ p)) \\
Fp(\sigma_s(\mathrm{id}_a \circ g)) \arrow[r, "(\sigma_p)_{\mathrm{id}_a \circ g}"'] & \sigma_t((\mathrm{id}_a \circ g) \circ p) \arrow[u, "\sigma_t(\alpha_{\mathrm{id}_a, g, p})"']
\end{tikzcd}
$$

が可換となる．この二つと補題 7 を組み合わせて可換図式

$$
\begin{tikzcd}
Fp(Fg(\sigma_a(\mathrm{id}_a))) \arrow[rr, "(\varphi_{pg})_{\sigma_a(\mathrm{id}_a)}"] \arrow[dd, "Fp((\sigma_g)_{\mathrm{id}_a})"'] & & F(g\circ p)(\sigma_a(\mathrm{id}_a)) \arrow[d, "(\sigma_{g\circ p})_{\mathrm{id}_a}"] \\
 & & \sigma_t(\mathrm{id}_a \circ (g\circ p)) \arrow[dd, "\sigma_t(\lambda_{g\circ p})"] \\
Fp(\sigma_s(\mathrm{id}_a\circ g)) \arrow[r, "(\sigma_p)_{\mathrm{id}_a\circ g}"] \arrow[d, "Fg(\sigma_s(\lambda_g))"'] & \sigma_t((\mathrm{id}_a\circ g)\circ p) \arrow[ur, "\sigma_t(\alpha_{\mathrm{id}_a,g,p})"] \arrow[dr, "\sigma_t(\lambda_g\circ p)"'] & \\
Fg(\sigma_s(f)) \arrow[rr, "(\sigma_p)_g"'] & & \sigma_t(g\circ p)
\end{tikzcd}
$$

を得る．一番外側が今示したかった可換性である．

$\Sigma_a \colon \omega_a \circ \theta_a \Rightarrow \mathrm{id} \colon \widehat{\mathcal{B}}(y(a), F) \to \widehat{\mathcal{B}}(y(a), F)$ は自然同型である．

$\because$) $\Phi \colon \sigma \Rrightarrow \tau \colon y(a) \Rightarrow F$ を modification とする．次の可換図式を示せばよい．

$$
\begin{tikzcd}
\omega_a(\theta_a(\sigma)) \arrow[r, Rrightarrow, "(\Sigma_a)_\sigma"] \arrow[d, Rrightarrow, "\omega_a(\theta_a(\Phi))"'] & \sigma \arrow[d, Rrightarrow, "\Phi"] \\
\omega_a(\theta_a(\tau)) \arrow[r, Rrightarrow, "(\Sigma_a)_\tau"'] & \tau
\end{tikzcd}
$$

即ち $s \in \mathcal{B}$, $g \colon s \to a$ に対して，圏 Fs の図式

$$
\begin{tikzcd}
\omega_a(\theta_a(\sigma))_s(g) \arrow[r, "(((\Sigma_a)_\sigma)_s)_g"] \arrow[d, "(\omega_a(\theta_a(\Phi))_s)_g"'] & \sigma_s(g) \arrow[d, "(\Phi_s)_g"] \\
\omega_a(\theta_a(\tau))_s(g) \arrow[r, "(((\Sigma_a)_\tau)_s)_g"'] & \tau_s(g)
\end{tikzcd}
$$

が可換であることを示せばよい．定義より

$$
\begin{aligned}
(((\Sigma_a)_\sigma)_s)_g &= \sigma_s(\lambda_g) \circ (\sigma_g)_{\mathrm{id}_a} \\
(((\Sigma_a)_\tau)_s)_g &= \tau_s(\lambda_g) \circ (\tau_g)_{\mathrm{id}_a} \\
(\omega_a(\theta_a(\Phi))_s)_g &= (\omega_a((\Phi_a)_{\mathrm{id}_a})_s)_g = Fg((\Phi_a)_{\mathrm{id}_a})
\end{aligned}
$$

だから

$$
\begin{tikzcd}
Fg(\sigma_a(\mathrm{id}_a)) \arrow[r, "(\sigma_g)_{\mathrm{id}_a}"] \arrow[d, "Fg((\Phi_a)_{\mathrm{id}_a})"'] & \sigma_s(\mathrm{id}_a \circ g) \arrow[r, "\sigma_s(\lambda_g)"] \arrow[d, "(\Phi_a)_{\mathrm{id}_a \circ g}"'] & \sigma_s(g) \arrow[d, "(\Phi_s)_g"] \\
Fg(\tau_a(\mathrm{id}_a)) \arrow[r, "(\tau_g)_{\mathrm{id}_a}"'] & \sigma_s(\mathrm{id}_a \circ g) \arrow[r, "\tau_s(\lambda_g)"'] & \tau_s(g)
\end{tikzcd}
$$

が可換であることを示せばよい．左の四角は $\Phi\colon \sigma \Rrightarrow \tau$ が modification だから

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{B}(a,a) \arrow[r, bend left, "\sigma_a"] \arrow[d, "-\bullet g"'] \arrow[dr, phantom, "\sigma_g \swArrow"] & Fa \arrow[d, "Fg"] \\
\mathcal{B}(s,a) \arrow[r, bend left, "\sigma_s"] \arrow[r, bend right, "\sigma_t"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \Phi_s"] & Fs
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
\mathcal{B}(a,a) \arrow[r, bend left, "\sigma_a"] \arrow[r, bend right, "\tau_a"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \Phi_a"] \arrow[d, "-\bullet g"'] \arrow[dr, phantom, "\tau_g \swArrow"] & Fa \arrow[d, "Fg"] \\
\mathcal{B}(s,a) \arrow[r, bend right, "\tau_s"'] & Fs
\end{tikzcd}
$$

となり成り立つ．右の四角は $\Phi_s\colon \sigma_s \Rightarrow \tau_s$ が自然変換だから成り立つ．

$\Sigma\colon \omega \mathbin{\widehat{\circ}} \theta \Rrightarrow \mathrm{id}\colon \widehat{\mathcal{B}}(y(-), F) \Rightarrow \widehat{\mathcal{B}}(y(-), F)$ は同型な modification である．

$\because$) $f\colon b \to a$ に対して自然変換の等号

$$
\begin{tikzcd}
\widehat{\mathcal{B}}(y(a),F) \arrow[r, "\theta_a"] \arrow[d, "-\widehat{\bullet} y(f)"'] \arrow[dr, phantom, "\theta_f \swArrow"] & Fa \arrow[r, "\omega_a"] \arrow[d, "Ff"] \arrow[dr, phantom, "\swArrow \omega_f"] & \widehat{\mathcal{B}}(y(a),F) \arrow[d, "-\widehat{\bullet} y(f)"] \\
\widehat{\mathcal{B}}(y(b),F) \arrow[r, "\theta_b"] \arrow[rr, bend right, "\mathrm{id}"'] & Fb \arrow[r, "\omega_b"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow \Sigma_b"] & \widehat{\mathcal{B}}(y(b),F)
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
\widehat{\mathcal{B}}(y(a),F) \arrow[r, "\theta_a"] \arrow[rr, bend right, "\mathrm{id}"'] \arrow[d, "-\widehat{\bullet} y(f)"'] & Fa \arrow[r, "\omega_a"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow \Sigma_a"] \arrow[d, phantom, "\mathrm{id}_f \swArrow"'] & \widehat{\mathcal{B}}(y(a),F) \arrow[d, "-\widehat{\bullet} y(f)"] \\
\widehat{\mathcal{B}}(y(b),F) \arrow[rr, bend right, "\mathrm{id}"'] & & \widehat{\mathcal{B}}(y(b),F)
\end{tikzcd}
$$

を示せばよい．即ち $\sigma\colon y(a) \Rightarrow F$ に対して modification の等式

$$
(\Sigma_b)_{\sigma * y(f)} \mathbin{\widehat{*}} \omega_b((\theta_f)_\sigma) \mathbin{\widehat{*}} (\omega_f)_{\theta_a(\sigma)} = (\Sigma_a)_\sigma \mathbin{\widehat{\bullet}} y(f)
$$

を示せばよい．即ち $s \in \mathcal{B}$，$g\colon s \to b$ に対して，圏 Fs の等式

$$
(((\Sigma_b)_{\sigma * y(f)})_s)_g \circ ((\omega_b((\theta_f)_\sigma))_s)_g \circ (((\omega_f)_{\theta_a(\sigma)})_s)_g = (((\Sigma_a)_\sigma \mathbin{\widehat{\bullet}} y(f))_s)_g
$$

を示せばよい．定義より

$$
\begin{aligned}
(((\Sigma_b)_{\sigma * y(f)})_s)_g &= (\sigma * y(f))_s(\lambda_g) \circ ((\sigma * y(f))_g)_{\mathrm{id}_b} \\
&= \sigma_s(y(f)_s(\lambda_g)) \circ \big(\sigma_s((y(f)_g)_{\mathrm{id}_b}) \circ (\sigma_g)_{y(f)_b(\mathrm{id}_b)}\big) \\
&= (\sigma_s(f \bullet \lambda_g)) \circ \sigma_s(\alpha_{f,\mathrm{id}_b,g}) \circ (\sigma_g)_{f\circ \mathrm{id}_b} \\
&= \sigma_s((f \bullet \lambda_g) * \alpha_{f,\mathrm{id}_b,g}) \circ (\sigma_g)_{f\circ \mathrm{id}_b} \\
&= \sigma_s(\rho_f \bullet g) \circ (\sigma_g)_{f\circ \mathrm{id}_b} \\
((\omega_b((\theta_f)_\sigma))_s)_g &= (\omega_b(\sigma_b(\rho_f^{-1}) \circ \sigma_b(\lambda_f) \circ (\sigma_f)_{\mathrm{id}_a})_s)_g \\
&= Fg(\sigma_b(\rho_f^{-1}) \circ \sigma_b(\lambda_f) \circ (\sigma_f)_{\mathrm{id}_a}) \\
(((\omega_f)_{\theta_a(\sigma)})_s)_g &= (((\omega_f)_{\sigma_a(\mathrm{id}_a)})_s)_g = (\varphi_{gf}^{-1})_{\sigma_a(\mathrm{id}_a)} \\
(((\Sigma_a)_\sigma \mathbin{\widehat{\bullet}} y(f))_s)_g &= (((\Sigma_a)_\sigma)_s \bullet y(f)_s)_g = (((\Sigma_a)_\sigma)_s)_{y(f)_s(g)} \\
&= (((\Sigma_a)_\sigma)_s)_{f\circ g} = \sigma_s(\lambda_{f\circ g}) \circ (\sigma_{f\circ g})_{\mathrm{id}_a}
\end{aligned}
$$

だから，圏 Fs の等式

$$
\begin{aligned}
&\sigma_s(\rho_f \bullet g) \circ (\sigma_g)_{f\circ \mathrm{id}_b} \circ Fg(\sigma_b(\rho_f^{-1})) \circ Fg(\sigma_b(\lambda_f)) \circ Fg((\sigma_f)_{\mathrm{id}_a}) \circ (\varphi_{gf}^{-1})_{\sigma_a(\mathrm{id}_a)} \\
&= \sigma_s(\lambda_{f\circ g}) \circ (\sigma_{f\circ g})_{\mathrm{id}_a}
\end{aligned}
$$

を示せばよい．まず $\sigma_g \colon Fg \circ \sigma_b \Rightarrow \sigma_s \circ (- \bullet g)$ が自然変換だから

$$
\begin{tikzcd}
Fg(\sigma_b(\mathrm{id}_a \circ f)) \arrow[r, "(\sigma_g)_{\mathrm{id}_a\circ f}"] \arrow[d, "Fg(\sigma_b(\lambda_f))"'] & \sigma_s((\mathrm{id}_a \circ f) \circ g) \arrow[d, "\sigma_s(\lambda_f \bullet g)"] \\
Fg(\sigma_b(f)) \arrow[r, "(\sigma_g)_f"'] & \sigma_s(f \circ g) \\
Fg(\sigma_b(f \circ \mathrm{id}_b)) \arrow[r, "(\sigma_g)_{f\circ \mathrm{id}_b}"'] \arrow[u, "Fg(\sigma_b(\rho_f))"] & \sigma_s((f \circ \mathrm{id}_b) \circ g) \arrow[u, "\sigma_s(\rho_f \bullet g)"']
\end{tikzcd}
$$

が可換である．次に $\sigma\colon y(a) \Rightarrow F$ が pseudonatural transformation だったから

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{B}(a,a) \arrow[rr, "\sigma_a"] \arrow[dr, "-\bullet f"'] \arrow[dd, bend right=60, "-\bullet(p\circ q)"'] & & Fa \arrow[dr, "Ff"] \arrow[dl, phantom, "\overset{\sigma_f}{\swarrow}"] & \\
\arrow[r, phantom, "\overset{\alpha_{-fg}}{\Longleftarrow}"] & \mathcal{B}(b,a) \arrow[rr, "\sigma_s"] \arrow[dl, "-\bullet g"'] & & Fb \arrow[dl, "Fg"] \arrow[dl, phantom, near start, "\overset{\sigma_g}{\swarrow}"'] \\
\mathcal{B}(s,a) \arrow[rr, "\sigma_t"'] & & Fs &
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
\mathcal{B}(a,a) \arrow[r, "\sigma_a"] \arrow[dd, bend right=60, "-\bullet(f\circ g)"'] & Fa \arrow[dr, "Ff"] \arrow[dd, bend right=60, "F(f\circ g)"'] \arrow[dl, phantom, "\overset{\sigma_{f\circ g}}{\swarrow}"] & \\
& \arrow[r, phantom, "\overset{\varphi_{gf}}{\Longleftarrow}"] & Fb \arrow[dl, "Fg"] \\
\mathcal{B}(s,a) \arrow[r, "\sigma_t"'] & Fs &
\end{tikzcd}
$$

となる．よって $\mathrm{id}_a \in \mathcal{B}(a,a)$ を考えれば次が可換である．

$$
\begin{tikzcd}
Fg(Ff(\sigma_a(\mathrm{id}_a))) \arrow[r, "(\varphi_{gf})_{\sigma_a(\mathrm{id}_a)}"] \arrow[dd, "Fg((\sigma_f)_{\mathrm{id}_a})"'] & F(f\circ g)(\sigma_a(\mathrm{id}_a)) \arrow[d, "(\sigma_{f\circ g})_{\mathrm{id}_a}"] \\
& \sigma_s(\mathrm{id}_a\circ(f\circ g)) \\
Fg(\sigma_b(\mathrm{id}_a\circ f)) \arrow[r, "(\sigma_g)_{\mathrm{id}_a\circ f}"'] & \sigma_s((\mathrm{id}_a\circ f)\circ g) \arrow[u, "\sigma_s(\alpha_{\mathrm{id}_a,f,g})"']
\end{tikzcd}
$$

この二つと補題 7 を組み合わせて可換図式

$$
\begin{tikzcd}
Fg(Ff(\sigma_a(\mathrm{id}_a))) \arrow[dd, "Fg((\sigma_f)_{\mathrm{id}_a})"'] & & F(f\circ g)(\sigma_a(\mathrm{id}_a)) \arrow[ll, "(\varphi_{gf}^{-1})_{\sigma_a(\mathrm{id}_a)}"'] \arrow[d, "(\sigma_{f\circ g})_{\mathrm{id}_a}"] \\
& & \sigma_s(\mathrm{id}_a\circ(f\circ g)) \arrow[dl, "\sigma_s(\alpha^{-1}_{\mathrm{id}_a,f,g})"'] \arrow[dd, "\sigma_s(\lambda_{f\circ g})"] \\
Fg(\sigma_b(\mathrm{id}_a\circ f)) \arrow[r, "(\sigma_g)_{\mathrm{id}_a\circ f}"'] \arrow[d, "Fg(\sigma_b(\lambda_f))"'] & \sigma_s((\mathrm{id}_a\circ f)\circ g) \arrow[dr, "\sigma_s(\lambda_f\bullet g)"'] & \\
Fg(\sigma_b(f)) \arrow[rr, "(\sigma_g)_f"'] \arrow[d, "Fg(\sigma_b(\rho_f^{-1}))"'] & & \sigma_s(f\circ g) \\
Fg(\sigma_b(f\circ\mathrm{id}_b)) \arrow[rr, "(\sigma_g)_{f\circ\mathrm{id}_b}"'] & & \sigma_s((f\circ\mathrm{id}_b)\circ g) \arrow[u, "\sigma_s(\rho_f\bullet g)"']
\end{tikzcd}
$$

を得る．この外側の四角が今示したかった可換性である．

以上により $\omega \,\widehat{\circ}\, \theta \cong \mathrm{id}$ が分かり，次の定理が証明できた．

定理 25 (米田の補題)**.** $\mathcal{B}$ を bicategory，$F\colon \mathcal{B}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Cat}$ を pseudofunctor とするとき bicategory $\widehat{\mathcal{B}}$ での同値 $\widehat{\mathcal{B}}(y(-), F) \cong F$ が成り立つ．よって $a \in \mathcal{B}$ に対して圏同値 $\widehat{\mathcal{B}}(y(a), F) \cong Fa$ が成り立つ． □

系 26. $\mathcal{B}$ を bicategory とする．$a, b \in \mathcal{B}$ に対して $y\colon \mathcal{B}(a,b) \to \widehat{\mathcal{B}}(y(a), y(b))$ は圏同値を与える．

証明. 米田の補題により $\widehat{\mathcal{B}}(y(a), y(b)) \cong y(b)(a) = \mathcal{B}(a,b)$ である．この圏同値は，米田の補題の証明での記号を使うと $\omega_b\colon \mathcal{B}(a,b) \to \widehat{\mathcal{B}}(y(a), y(b))$ で与えられる．故に $\omega_b = y$ を示せばよい．

まず $f\colon a \to b$ に対して $\omega_b(f) = y(f)$ を示す．$s \in \mathcal{B}$ に対して $\omega_b(f)_s\colon \mathcal{B}(s,a) \to \mathcal{B}(s,b)$ であり，定義より $g\colon s \to a$ に対して $\omega_b(f)_s(g) = y(b)(g)(f) = f \circ g$ である．よって $\omega_b(f) = y(f)$ となる．

次に $\beta\colon f \Rightarrow f'\colon a \to b$ に対して $\omega_b(\beta) = y(\beta)$ を示す．$s \in \mathcal{B}$ に対して $\omega_b(\beta)_s\colon f \bullet - \Rightarrow f' \bullet -$ であり，$g\colon s \to a$ に対して $(\omega_b(\beta)_s)_g = (y(b)(g))(\beta) = \beta \bullet g$ である．よって $\omega_b(\beta) = y(\beta)$ となる． □

3 Coherence

定義. bicategory $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ が biequivalence
$\iff$ ある pseudofunctor $F\colon \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ が存在して以下を満たす．

(1) 任意の $c \in \mathcal{C}$ に対して，ある $b \in \mathcal{B}$ が存在して，同値 $Fb \cong c$ が成り立つ．
(2) 任意の $a, b \in \mathcal{B}$ に対して $F\colon \mathcal{B}(a,b) \to \mathcal{C}(Fa, Fb)$ は圏同値である．

定理 27 (coherence 定理)**.** 任意の bicategory はある strict 2-category と biequivalence である．

証明. $\mathcal{B}$ を bicategory，$y\colon \mathcal{B} \to \widehat{\mathcal{B}}$ を米田埋込とする．strict 2-category $\mathcal{C}$ を以下のように定める．

- $\mathrm{Ob}(\mathcal{C}) := \{y(a) \mid a \in \mathcal{B}\}$
- $\mathcal{C}(y(a), y(b)) := \widehat{\mathcal{B}}(y(a), y(b))$

このとき pseudofunctor $y\colon \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ が得られる．明らかにこの y は対象に関して全射で，また各 $a, b \in \mathcal{B}$ に対して $y\colon \mathcal{B}(a,b) \to \mathcal{C}(y(a), y(b))$ は系 26 により圏同値である． □

系 28. α, λ, ρ から得られる図式は可換である．即ち，σ, τ を α, λ, ρ を合成して作られた 2-morphism とするとき，$\mathrm{dom}(\sigma) = \mathrm{dom}(\tau)$，$\mathrm{cod}(\sigma) = \mathrm{cod}(\tau)$ ならば $\sigma = \tau$ である．

証明. coherence 定理 (定理 27) の証明で得られた biequivalence を $y\colon \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ とする．$y(\sigma) = y(\tau)$ を示せばよい．

$\because$) $f := \mathrm{dom}(\sigma)$ として $a := \mathrm{dom}(f)$, $b := \mathrm{cod}(f)$ とする．y は biequivalence だから $y\colon \mathcal{B}(a, b) \to \mathcal{C}(y(a), y(b))$ は圏同値，従って忠実関手である．故に $\sigma, \tau \in \mathcal{B}(a, b)$ だから，$y(\sigma) = y(\tau)$ ならば $\sigma = \tau$ である．

$$
\begin{aligned}
&\sigma = \beta_n * \cdots * \beta_0, \\
&\tau = \gamma_m * \cdots * \gamma_0 \\
&\beta_i\colon f^i_{s_i} \circ \cdots \circ f^i_0 \Rightarrow f^{i+1}_{s_{i+1}} \circ \cdots \circ f^{i+1}_0 \\
&\gamma_i\colon g^i_{t_i} \circ \cdots \circ g^i_0 \Rightarrow g^{i+1}_{t_{i+1}} \circ \cdots \circ g^{i+1}_0
\end{aligned}
$$

と書く．次の図式を考える．

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & y(f^0_{s_0} \circ \cdots \circ f^0_0) \arrow[dll, "y(\beta_0)"'] \arrow[drr, "y(\gamma_0)"] \arrow[d, "\wr"] & & \\
y(f^1_{s_1} \circ \cdots \circ f^1_0) \arrow[dr, "\sim"] \arrow[dd] & & y(f^0_{s_0}) \circ \cdots \circ y(f^0_0) \arrow[dl, "\beta'_0"] \arrow[dr, "\gamma'_0"'] & & y(g^1_{t_1} \circ \cdots \circ g^1_0) \arrow[dl, "\sim"'] \arrow[dd] \\
 & y(f^1_{s_1}) \circ \cdots \circ y(f^1_0) \arrow[d] & & y(g^1_{t_1}) \circ \cdots \circ y(g^1_0) \arrow[d] & \\
\vdots \arrow[dd] & \vdots \arrow[d] & & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[dd] \\
 & y(f^{n-1}_{s_{n-1}}) \circ \cdots \circ y(f^{n-1}_0) \arrow[dr, "\beta'_n"] & & y(g^{m-1}_{t_{m-1}}) \circ \cdots \circ y(g^{n-1}_0) \arrow[dl, "\gamma'_m"'] & \\
y(f^{n-1}_{s_{n-1}} \circ \cdots \circ f^{n-1}_0) \arrow[ur, "\sim"] \arrow[drr, "y(\beta_n)"'] & & y(f^n_{s_n}) \circ \cdots \circ y(f^n_0) & & y(g^{m-1}_{t_{m-1}} \circ \cdots \circ g^{n-1}_0) \arrow[ul, "\sim"'] \arrow[dll, "y(\gamma_m)"] \\
 & & y(f^n_{s_n} \circ \cdots \circ f^n_0) \arrow[u, "\wr"] & &
\end{tikzcd}
$$

ここで $\xrightarrow{\sim}$ となっている 1-morphism は，y が pseudofunctor であることから得られる同型である．また β'_i は，β_i に現れる α, λ, ρ (これらは $\mathcal{B}$ の α, λ, ρ である) を $\mathcal{C}$ の α, λ, ρ

に置き換えたものである．$\mathcal{C}$ の α, λ, ρ は全て id だから，この図式の真ん中は明らかに可換である．故に

$$\begin{tikzcd}
y(f^i_{s_i} \circ \cdots \circ f^i_0) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "y(\beta_i)"'] & y(f^i_{s_i}) \circ \cdots \circ y(f^i_0) \arrow[d, "\beta'_i"] \\
y(f^{i+1}_{s_{i+1}} \circ \cdots \circ f^{i+1}_0) \arrow[r, "\sim"] & y(f^{i+1}_{s_{i+1}}) \circ \cdots \circ y(f^{i+1}_0)
\end{tikzcd} \tag{$*$}$$

が可換であることが分かれば，一番外側が可換になり $y(\sigma) = y(\tau)$ が分かる．y が pseudofunctor であるから，次の 3 つの図式は可換である．

$$\begin{tikzcd}
y((h \circ g) \circ f) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "y(\alpha)"'] & y(h \circ g) \circ y(f) \arrow[r, "\sim"] & (y(h) \circ y(g)) \circ y(f) \arrow[d, "\alpha'"] \\
y(h \circ (g \circ f)) \arrow[r, "\sim"] & y(h) \circ y(g \circ f) \arrow[r, "\sim"] & y(h) \circ (y(g) \circ y(f))
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
y(\mathrm{id} \circ f) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "y(\lambda)"'] & y(\mathrm{id}) \circ y(f) \arrow[r, "\sim"] & \mathrm{id} \circ y(f) \arrow[d, "\lambda'"] \\
y(f) \arrow[rr, "\sim"] & & y(f)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
y(f \circ \mathrm{id}) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "y(\rho)"'] & y(y) \circ y(\mathrm{id}) \arrow[r, "\sim"] & y(f) \circ \mathrm{id} \arrow[d, "\rho'"] \\
y(f) \arrow[rr, "\sim"] & & y(f)
\end{tikzcd}$$

図式 $(*)$ はこれらの可換図式を組み合わせて得られるから，やはり可換である． $\square$

4 lax, oplax

定義． pseudofunctor の定義において，φ^{abc} と ψ^a が同型でなくともよい，としたものを lax 2-functor という．更に，φ^{abc} と ψ^a の向きを逆にしたものを oplax 2-functor という．

定義． $F, G\colon \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ を lax 2-functor とする．F から G への pseudonatural transformation $\sigma\colon F \Rightarrow G$ を，psuedofunctor の場合と同じ方法で定義する．更に，この pseudonatural transformation の定義において σ^{ab} が同型でなくともよい，としたものを lax natural transformation という．更に，σ^{ab} の向きを逆にしたものを oplax natural transformation という．

定義． $F, G\colon \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ を lax 2-functor，$\sigma, \tau\colon F \Rightarrow G$ を lax natural transformation とする．σ から τ への modification $\Gamma\colon \sigma \Rrightarrow \tau$ を pseudonatural transformation の場合と同じ方法で定義する．

このとき，pseudofunctor，pseudonatural transformation，modification の場合と同様にして以下の命題を示すことができる．

命題 29. $F, G, H\colon \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ を lax 2-functor とする．lax natural transformation $\sigma\colon F \Rightarrow G$，$\tau\colon G \Rightarrow H$ に対して垂直合成 $\tau \mathbin{\widehat{\circ}} \sigma$ を，$a \in \mathcal{B}$ に対して $(\tau \mathbin{\widehat{\circ}} \sigma)_a := \tau_a \circ \sigma_a$ で定めれば，$\tau \mathbin{\widehat{\circ}} \sigma$ は lax natural transformation $F \Rightarrow H$ となる． □

命題 30. $F, G\colon \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ を lax 2-functor，$\sigma, \tau, \rho\colon F \Rightarrow G$ を lax natural transformation，$\Gamma\colon \sigma \Rrightarrow \tau$，$\Delta\colon \tau \Rrightarrow \rho$ を modification とする．modification の垂直合成 $\Delta \mathbin{\widehat{*}} \Gamma$ を，$a \in \mathcal{B}$ に対して $(\Delta \mathbin{\widehat{*}} \Gamma)_a := \Delta_a * \Gamma_a$ で定めれば，$\Delta \mathbin{\widehat{*}} \Gamma$ は modification $\sigma \Rrightarrow \rho$ となる． □

命題 31. lax natural transformation $F \Rightarrow G$ を対象，modification を射とすれば圏となる．この圏を $\mathrm{Nat}_{\mathrm{lax}}(F, G)$ と書く． □

命題 32. $F, G, H\colon \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ を lax 2-functor，$\sigma, \tau\colon F \Rightarrow G$，$\rho, \xi\colon G \Rightarrow H$ を lax natural transformation，$\Gamma\colon \sigma \Rrightarrow \tau$，$\Delta\colon \rho \Rrightarrow \xi$ を modification とする．modification の水平合成 $\Delta \mathbin{\widehat{\bullet}} \Gamma$ を，$a \in \mathcal{B}$ に対して $(\Delta \mathbin{\widehat{\bullet}} \Gamma)_a := \Delta_a \bullet \Gamma_a$ で定めれば，$\Delta \mathbin{\widehat{\bullet}} \Gamma$ は modification $\rho \bullet \sigma \Rrightarrow \xi \bullet \tau$ となる．

命題 33. $F, G, H\colon \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ に対して，lax natural transformation の合成は関手 $\mathrm{Nat}_{\mathrm{lax}}(G, H) \times \mathrm{Nat}_{\mathrm{lax}}(F, G) \to \mathrm{Nat}_{\mathrm{lax}}(F, H)$ を与える． □

定理 34. bicategory $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ に対して bicategory $\mathrm{Fun}_{\mathrm{lax}}(\mathcal{B}, \mathcal{C})$ を以下のように定義することができる．

- lax 2-functor $\mathcal{B} \to \mathcal{C}$ を対象とする．
- $\mathrm{Fun}_{\mathrm{lax}}(\mathcal{B}, \mathcal{C})(F, G) := \mathrm{Nat}_{\mathrm{lax}}(F, G)$ とする．即ち lax natural transformation が 1-morphism で modification が 2-morphism である． □

$\mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}$ を bicategory，$F\colon \mathcal{B} \to \mathcal{C}$，$G\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ を lax 2-functor とする．このとき F と G を合成した lax 2-functor GF を命題 21 と同様にして定義することができる．即ち

- $a \in \mathcal{B}$ に対して $GF(a) := G(F(a))$．
- $a, b \in \mathcal{B}$ に対して $(GF)^{ab} := \big(\mathcal{B} \xrightarrow{F^{ab}} \mathcal{C}(Fa, Fb) \xrightarrow{G^{FaFb}} \mathcal{D}(GFa, GFb)\big)$．

- $a,b,c\in\mathcal{B}$ に対して自然変換

$$\begin{tikzcd}
& \mathcal{B}(b,c)\times\mathcal{B}(a,b) \arrow[dl, "GF^{bc}\times GF^{ab}"'] \arrow[dr, "C"] & \\
\mathcal{D}(GFb,GFc)\times\mathcal{D}(GFa,GFb) \arrow[dr, "C"'] \arrow[rr, phantom, "\underset{\varphi^{GF}}{\Longrightarrow}"] & & \mathcal{B}(a,c) \arrow[dl, "GF^{ac}"] \\
& \mathcal{D}(GFa,GFc) &
\end{tikzcd}$$

を合成

$$\begin{tikzcd}
& & \mathcal{A}(b,c)\times\mathcal{A}(a,b) \arrow[dl, "F\times F"'] \arrow[dr, "C"] & \\
& \mathcal{B}(Fb,Fc)\times\mathcal{B}(Fa,Fb) \arrow[dl, "G\times G"'] \arrow[dr, "C"] \arrow[rr, phantom, "\underset{\varphi^{F}}{\Longrightarrow}"] & & \mathcal{A}(a,c) \arrow[dl, "F"] \\
\mathcal{C}(GFb,GFc)\times\mathcal{C}(GFa,GFb) \arrow[dr, "C"'] \arrow[rr, phantom, "\underset{\varphi^{G}}{\Longrightarrow}"] & & \mathcal{B}(Fa,Fc) \arrow[dl, "G"] & \\
& \mathcal{C}(GFa,GFc) & &
\end{tikzcd}$$

で定める．
- $a\in\mathcal{B}$ に対して $\psi^{GF}:=G(\psi^F)*\psi^G\colon \mathrm{id}_{GFa}\Rightarrow G(\mathrm{id}_{Fa})\Rightarrow GF(\mathrm{id}_a)$ と定める．

が GF の定義である．

命題 35. この合成により，対象を bicategory，射を lax 2-functor とすると圏になる．

証明. まず lax 2-functor F に対して $F\circ\mathrm{id}=F$，$\mathrm{id}\circ F=F$ が定義から容易に分かる．よって結合律を示せばよい．

$F\colon\mathcal{A}\to\mathcal{B}$，$G\colon\mathcal{B}\to\mathcal{C}$，$H\colon\mathcal{C}\to\mathcal{D}$ を lax 2-functor とする．定義から明らかに $\varphi^{(HG)F}=\varphi^{H(GF)}$ である．また

$$\psi^{(HG)F}=HG(\psi^F)*\psi^{HG}=HG(\psi^F)*H(\psi^G)*\psi^H$$
$$\psi^{H(GF)}=H(\psi^{GF})*\psi^H=H(G(\psi^F)*\psi^G)*\psi^H$$

だから $\psi^{(HG)F}=\psi^{H(GF)}$ である． □

5 2-category の中での Kan 拡張

ここでは簡単のため $\mathcal{C}$ を strict 2-category とする．

定義. $f\colon a\to b$, $u\colon b\to a$ を $\mathcal{C}$ の 1-morphism とする．組 $\langle f,u\rangle$ が随伴であるとは，$\mathcal{C}$ の 2-morphism $\eta\colon \mathrm{id}_a\Rightarrow u\circ f$, $\varepsilon\colon f\circ u\Rightarrow \mathrm{id}_b$ が存在して，次の等号が成り立つことを言う．

$$
\begin{tikzcd}
 & b \arrow[rr, "\mathrm{id}_b"] \arrow[dr, "u"] \arrow[d, phantom, "\Uparrow\eta"] & \arrow[d, phantom, "\Uparrow\varepsilon"] & b \\
a \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "\mathrm{id}_a"'] & {} & a \arrow[ur, "f"'] &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
 & b \arrow[rr, "\mathrm{id}_b"] & \arrow[d, phantom, "\Uparrow\mathrm{id}_f"] & b \\
a \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "\mathrm{id}_a"'] & & a \arrow[ur, "f"'] &
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
b \arrow[rr, "\mathrm{id}_b"] \arrow[dr, "u"'] & \arrow[d, phantom, "\Uparrow\varepsilon"] & b \arrow[dr, "u"] \arrow[d, phantom, "\Uparrow\eta"] & \\
 & a \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "\mathrm{id}_a"'] & {} & a
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
b \arrow[rr, "\mathrm{id}_b"] \arrow[dr, "u"'] & & b \arrow[dr, "u"] \arrow[d, phantom, "\Uparrow\mathrm{id}_u"] & \\
 & a \arrow[rr, "\mathrm{id}_a"'] & {} & a
\end{tikzcd}
$$

随伴を記号 $f\dashv u\colon a\to b$ もしくは単に $f\dashv u$ で表し，f を u の左随伴，u を f の右随伴，η を unit，ε を counit と呼ぶ．

命題 36. $f\colon a\to b$ の右随伴は，もし存在すれば，同型を除いて一意である．

証明. $f\dashv u$, $f\dashv u'$ を随伴として，それぞれの unit，counit を $\eta,\varepsilon,\eta',\varepsilon'$ とする．このとき $\varphi\colon u\Rightarrow u'$, $\psi\colon u'\Rightarrow u$ を

$$
\begin{tikzcd}
b \arrow[rr, "\mathrm{id}_b"] \arrow[dr, "u"'] & & b \arrow[dr, "u'"] \arrow[d, phantom, "\Uparrow\varphi"] & \\
 & a \arrow[rr, "\mathrm{id}_a"'] & {} & a
\end{tikzcd}
:=
\begin{tikzcd}
b \arrow[rr, "\mathrm{id}_b"] \arrow[dr, "u"'] & \arrow[d, phantom, "\Uparrow\varepsilon"] & b \arrow[dr, "u'"] \arrow[d, phantom, "\Uparrow\eta'"] & \\
 & a \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "\mathrm{id}_a"'] & {} & a
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
b \arrow[rr, "\mathrm{id}_b"] \arrow[dr, "u'"'] & & b \arrow[dr, "u"] \arrow[d, phantom, "\Uparrow\psi"] & \\
 & a \arrow[rr, "\mathrm{id}_a"'] & {} & a
\end{tikzcd}
:=
\begin{tikzcd}
b \arrow[rr, "\mathrm{id}_b"] \arrow[dr, "u'"'] & \arrow[d, phantom, "\Uparrow\varepsilon'"] & b \arrow[dr, "u"] \arrow[d, phantom, "\Uparrow\eta"] & \\
 & a \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "\mathrm{id}_a"'] & {} & a
\end{tikzcd}
$$

で定義すれば，$\psi\circ\varphi=\mathrm{id}_u$, $\varphi\circ\psi=\mathrm{id}_{u'}$ となることが分かる．実際，$\psi\circ\varphi=\mathrm{id}_u$ については

$$
\begin{tikzcd}
b \arrow[rr, "\mathrm{id}_b"] \arrow[dr, "u"'] & & b \arrow[rr, "\mathrm{id}_b"] \arrow[dr, "u'"] \arrow[d, phantom, "\Uparrow\varphi"] & & b \arrow[dr, "u"] \arrow[d, phantom, "\Uparrow\psi"] & \\
 & a \arrow[rr, "\mathrm{id}_a"'] & {} & a \arrow[rr, "\mathrm{id}_a"'] & {} & a
\end{tikzcd}
$$

$$
= \begin{tikzcd}
b \arrow[rr, "\mathrm{id}_b"] \arrow[dr, "u"'] & & b \arrow[rr, "\mathrm{id}_b"] \arrow[dr, "u'"] & & b \arrow[dr, "u"] & \\
& a \arrow[u, phantom, "\Uparrow\varepsilon"] \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "\mathrm{id}_a"'] & \arrow[u, phantom, "\Uparrow\eta'"] & a \arrow[u, phantom, "\Uparrow\varepsilon'"] \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "\mathrm{id}_a"'] & \arrow[u, phantom, "\Uparrow\eta"] & a
\end{tikzcd}
$$

$$
= \begin{tikzcd}
b \arrow[rr, "\mathrm{id}_b"] \arrow[dr, "u"'] & & b \arrow[rr, "\mathrm{id}_b"] & & b \arrow[dr, "u"] & \\
& a \arrow[rr, "\mathrm{id}_a"'] & & a \arrow[u, phantom, "\Uparrow\mathrm{id}_u"] \arrow[rr, "\mathrm{id}_a"'] & & a
\end{tikzcd}
$$

となる．$\varphi \circ \psi = \mathrm{id}_{u'}$ についても同様である．故に $u \cong u'$ である． □

命題 37. $f \dashv u \colon a \to b$，$f' \dashv u' \colon b \to c$ とするとき $f' \circ f \dashv u \circ u' \colon a \to c$ である．

$$
\begin{tikzcd}
a \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & b \arrow[l, bend left, "u"] \arrow[r, bend left, "f'"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & c \arrow[l, bend left, "u'"]
\end{tikzcd}
$$

証明. $f \dashv u$，$f' \dashv u'$ の unit，counit をそれぞれ $\eta, \varepsilon, \eta', \varepsilon'$ とする．η'', ε'' を以下の合成で定める．

$$
\begin{tikzcd}
& & c \arrow[dr, "u'"] & & \\
& b \arrow[ur, "f'"] & \arrow[d, phantom, "\Uparrow\eta''"] & b \arrow[dr, "u"] & \\
a \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "\mathrm{id}_a"'] & & a \arrow[rr, "\mathrm{id}_a"'] & & a
\end{tikzcd}
:=
\begin{tikzcd}
& & c \arrow[dr, "u'"] & & \\
& b \arrow[ur, "f'"] \arrow[rr, "\mathrm{id}_b"] \arrow[dr, "u"] & \arrow[u, phantom, "\Uparrow\eta'"] & b \arrow[dr, "u"] & \\
a \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "\mathrm{id}_a"'] & \arrow[u, phantom, "\Uparrow\eta"] & a \arrow[u, phantom, "\Uparrow\varepsilon"] \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "\mathrm{id}_a"'] & \arrow[u, phantom, "\Uparrow\eta"] & a
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
c \arrow[rr, "\mathrm{id}_c"] \arrow[dr, "u'"] & & c \arrow[rr, "\mathrm{id}_c"] & & c \\
& b \arrow[dr, "u"] & \arrow[u, phantom, "\Uparrow\varepsilon''"] & b \arrow[ur, "f'"'] & \\
& & a \arrow[ur, "f"'] & &
\end{tikzcd}
:=
\begin{tikzcd}
c \arrow[rr, "\mathrm{id}_c"] \arrow[dr, "u'"] & \arrow[d, phantom, "\Uparrow\varepsilon'"] & c \arrow[rr, "\mathrm{id}_c"] \arrow[dr, "u'"] & \arrow[d, phantom, "\Uparrow\varepsilon'"] & c \\
& b \arrow[ur, "f'"] \arrow[rr, "\mathrm{id}_b"] \arrow[dr, "u"] & \arrow[u, phantom, "\Uparrow\eta'"] & b \arrow[ur, "f'"'] & \\
& & a \arrow[u, phantom, "\Uparrow\varepsilon"] \arrow[ur, "f"'] & &
\end{tikzcd}
$$

このとき明らかに，η'', ε'' が $f' \circ f \dashv u \circ u'$ の unit，counit を与える． □

命題 38. $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ を strict 2-category，$F \colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ を pseudofunctor とする．$f \dashv u \colon a \to b$ が $\mathcal{C}$ での随伴のとき, $\mathcal{D}$ での随伴 $Ff \dashv Fu \colon Fa \to Fb$ が成り立つ．(即ち pseudofunctor は随伴を保つ．)

証明. $f \dashv u \colon a \to b$ を随伴として unit, counit を η, ε とする．$F \colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ を pseudofunctor とすると，自然な同型 $\varphi_{gf} \colon Fg \circ Ff \Rightarrow F(g \circ f)$ と同型 $\psi_a \colon \mathrm{id}_{Fa} \Rightarrow F(\mathrm{id}_a)$ が与えられているのであった．$\eta' \colon \mathrm{id}_{Fa} \Rightarrow Fu \circ Ff$ と $\varepsilon' \colon Ff \circ Fu \Rightarrow \mathrm{id}_{Fb}$ を $\eta' := \varphi_{uf}^{-1} \circ F\eta \circ \psi_a$, $\varepsilon' := \psi_b^{-1} \circ F\varepsilon \circ \varphi_{fu}$ で定める．この η', ε' が $Ff \dashv Fu$ の unit, counit を与える． □

系 39. $f \dashv u \colon a \to b$ ならば $x \in \mathcal{C}$ に対して $\mathcal{C}(x, f) \dashv \mathcal{C}(x, u) \colon \mathcal{C}(x, a) \to \mathcal{C}(x, b)$. □

定義. $a, b, c \in \mathcal{C}$ を対象，$f \colon a \to b$，$g \colon a \to c$ を 1-morphism とする．f に沿った g の左 Kan 拡張とは組 $\langle l, \eta \rangle$ であって，以下の条件を満たすものである．

(1) l は 1-morphism $b \to c$ で，η は 2-morphism $g \Rightarrow l \circ f$ である．

$$\begin{tikzcd} b \arrow[dr, "l"] & \\ a \arrow[u, "f"] \arrow[r, "g"'] \arrow[ur, phantom, "\eta\Uparrow"] & c \end{tikzcd}$$

(2) 他に 1-morphism $k \colon b \to c$ と 2-morphism $\theta \colon g \Rightarrow k \circ f$ が存在したとき，2-morphism $\tau \colon l \Rightarrow k$ が一意に存在して次の等式が成り立つ．

$$\begin{tikzcd} b \arrow[dr, "l"'] \arrow[dr, bend left, "k"] \arrow[dr, phantom, bend left=20, "\tau"] & \\ a \arrow[u, "f"] \arrow[r, "g"'] \arrow[ur, phantom, "\eta\Uparrow"] & c \end{tikzcd} = \begin{tikzcd} b \arrow[dr, bend left, "k"] & \\ a \arrow[u, "f"] \arrow[r, "g"'] \arrow[ur, phantom, "\theta\Uparrow"] & c \end{tikzcd}$$

$\langle l, \eta \rangle$ が f に沿った g の左 Kan 拡張のとき，記号で $f^\dagger g = \langle l, \eta \rangle$ と書くことにする．もしくは単に，l のことを $f^\dagger g$ で表すこともある．また $\mathcal{C}^{\mathrm{co}}$ での左 Kan 拡張を右 Kan 拡張，$\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ での左 Kan 拡張を左 Kan リフト，$\mathcal{C}^{\mathrm{coop}}$ での左 Kan 拡張を右 Kan リフトという．記号ではそれぞれ $f^\ddagger g, f_\dagger g, f_\ddagger g$ で表すことにする．

$$\begin{tikzcd} b \arrow[dr, "f^\ddagger g"] & \\ a \arrow[u, "f"] \arrow[r, "g"'] \arrow[ur, phantom, "\Downarrow"] & c \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} b \arrow[d, "f"'] & \\ a \arrow[ur, phantom, "\Uparrow"] & c \arrow[ul, "f_\dagger g"'] \arrow[l, "g"] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} b \arrow[d, "f"'] & \\ a \arrow[ur, phantom, "\Downarrow"] & c \arrow[ul, "f_\ddagger g"'] \arrow[l, "g"] \end{tikzcd}$$

定義. $f \colon a \to b$，$g \colon a \to c$ を 1-morphism として左 Kan 拡張 $f^\dagger g = \langle l, \eta \rangle$ が存在するとする．1-morphism $h \colon c \to x$ が左 Kan 拡張 $f^\dagger g$ と交換するとは，$\langle h \circ l, h \bullet \eta \rangle$ が f に

沿った $h \circ g$ の左 Kan 拡張になることを言う．

$$\begin{tikzcd}
b \arrow[dr, "l"] & & \\
& c \arrow[dr, "h"] & \\
a \arrow[uu, "f"] \arrow[r, "g"'] \arrow[ur, phantom, "h\bullet\eta\Uparrow"] & c \arrow[r, "h"'] & x
\end{tikzcd}$$

右 Kan 拡張・左 Kan リフト・右 Kan リフトと交換する，も同様に定義する．[*3]

定義． $f\colon a \to b$, $g\colon a \to c$ を 1-morphism とする．任意の 1-morphism $h\colon c \to x$ と交換する左 Kan 拡張 $f^{\dagger}g$ を絶対左 Kan 拡張という．また絶対右 Kan 拡張，絶対左 Kan リフト，絶対右 Kan リフトも同様に定義する．

定義から次の同値が分かる．

命題 40． $f\colon a \to b$, $g\colon a \to c$, $l\colon b \to c$ を 1-morphism, $\eta\colon g \Rightarrow l \circ f$ を 2-morphism とする．

$$\begin{tikzcd}
b \arrow[dr, "l"] & \\
a \arrow[u, "f"] \arrow[r, "g"'] \arrow[ur, phantom, "\eta\Uparrow"] & c
\end{tikzcd}$$

$\langle l, \eta \rangle$ が f に沿った g の絶対左 Kan 拡張である
$\Longleftrightarrow$ 任意の $x \in \mathcal{C}$ と 1-morphism $k\colon b \to x$, $h\colon c \to x$, 2-morphism $\theta\colon h \circ g \Rightarrow k \circ f$ に対して，ある 2-morphism $\tau\colon h \circ l \Rightarrow k$ が一意に存在して，次の等式が成り立つ．

$$\begin{tikzcd}
b \arrow[r, "k"] \arrow[dr, "l"'] & x \\
a \arrow[u, "f"] \arrow[r, "g"'] & c \arrow[u, "h"']
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
b \arrow[r, "k"] & x \\
a \arrow[u, "f"] \arrow[r, "g"'] \arrow[ur, phantom, "\theta\Uparrow"] & c \arrow[u, "h"']
\end{tikzcd}$$

$\square$

定理 41． $f\colon a \to b$ を 1-morphism とするとき，以下の条件は同値である．

(1) f が右随伴を持つ．

[*3] 英語だと Kan 拡張と交換するは preserved by で Kan リフトと交換するは respected by と言うようだが，ここでは気にせずどちらも交換すると言う事にする．

(2) 絶対左 Kan 拡張 $\langle f^\dagger \mathrm{id}_a, \eta\rangle$ が存在する．

(3) 左 Kan 拡張 $\langle f^\dagger \mathrm{id}_a, \eta\rangle$ が存在し，f が $f^\dagger \mathrm{id}_a$ と交換する．

$$
\begin{tikzcd}
b \arrow[dr, "f^\dagger \mathrm{id}_a"] & & \\
a \arrow[u, "f"] \arrow[r, "\mathrm{id}_a"'] \arrow[u, phantom, shift left=4ex, "\eta\Uparrow"] & a \arrow[r, "f"] & b
\end{tikzcd}
$$

またこのとき $f \dashv f^\dagger \mathrm{id}_a$ であり η がその unit である．

証明．$(1 \Longrightarrow 2)$ f の右随伴を u，unit を η，counit を ε とする．u が f に沿った id_a の絶対左 Kan 拡張であることを示せばよい．その為に任意の対象 $x \in \mathcal{C}$ と 1-morphism $k\colon a \to x$，$h\colon b \to x$，2-morphism $\theta\colon k \Rightarrow h \circ f$ を取る．$\tau\colon k \circ u \Rightarrow h$ を合成

$$
\begin{tikzcd}
b \arrow[r, "\mathrm{id}_b"] \arrow[dr, "u"'] & b \arrow[r, "h"] & x \\
 & a \arrow[u, "f"] \arrow[r, "\mathrm{id}_a"'] \arrow[ul, phantom, "\varepsilon\Uparrow"] \arrow[ur, phantom, "\theta\Uparrow"] & a \arrow[u, "k"']
\end{tikzcd}
$$

で定めれば

$$
\begin{tikzcd}
b \arrow[r, "h"] \arrow[dr, "u"] & x \\
a \arrow[u, "f"] \arrow[r, "\mathrm{id}_a"'] \arrow[ur, phantom, near start, "\eta\Uparrow"] & a \arrow[u, "k"'] \arrow[ul, phantom, near start, "\tau\Uparrow"]
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
b \arrow[r, "\mathrm{id}_b"] \arrow[dr, "u"] & b \arrow[r, "h"] & x \\
a \arrow[u, "f"] \arrow[r, "\mathrm{id}_a"'] \arrow[ur, phantom, near start, "\eta\Uparrow"] & a \arrow[u, "f"] \arrow[r, "\mathrm{id}_a"'] \arrow[ul, phantom, near start, "\varepsilon\Uparrow"] \arrow[ur, phantom, "\theta\Uparrow"] & a \arrow[u, "k"']
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
b \arrow[r, "h"] & x \\
a \arrow[u, "f"] \arrow[r, "\mathrm{id}_a"'] \arrow[ur, phantom, "\theta\Uparrow"] & a \arrow[u, "k"']
\end{tikzcd}
$$

である．逆に τ が

$$
\begin{tikzcd}
b \arrow[r, "h"] \arrow[dr, "u"] & x \\
a \arrow[u, "f"] \arrow[r, "\mathrm{id}_a"'] \arrow[ur, phantom, near start, "\eta\Uparrow"] & a \arrow[u, "k"'] \arrow[ul, phantom, near start, "\tau\Uparrow"]
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
b \arrow[r, "h"] & x \\
a \arrow[u, "f"] \arrow[r, "\mathrm{id}_a"'] \arrow[ur, phantom, "\theta\Uparrow"] & a \arrow[u, "k"']
\end{tikzcd}
$$

を満たせば

$$
\begin{tikzcd}
b \arrow[r, "h"] \arrow[dr, "u"'] & x \arrow[dl, phantom, "\tau\Uparrow"] \\
& a \arrow[u, "k"']
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
b \arrow[r, "\mathrm{id}_b"] \arrow[dr, "u"'] & b \arrow[dl, phantom, "\varepsilon\Uparrow"] \arrow[r, "h"] \arrow[dr, "u"] & b \arrow[dl, phantom, "\tau\Uparrow"] \\
& a \arrow[u, "f"'] \arrow[r, "\mathrm{id}_a"'] \arrow[ur, phantom, "\eta\Uparrow"] & a \arrow[u, "k"']
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
b \arrow[r, "\mathrm{id}_b"] \arrow[dr, "u"'] & b \arrow[dl, phantom, "\varepsilon\Uparrow"] \arrow[r, "h"] & x \\
& a \arrow[u, "f"'] \arrow[r, "\mathrm{id}_a"'] \arrow[ur, phantom, "\theta\Uparrow"] & a \arrow[u, "k"']
\end{tikzcd}
$$

となるから，このような τ は一意である．故に絶対左 Kan 拡張 $f^{\dagger}\mathrm{id}_a$ は存在し，$f^{\dagger}\mathrm{id}_a = \langle u, \eta \rangle$ である．

(2 $\Longrightarrow$ 3) 明らか．

(3 $\Longrightarrow$ 1) $u := f^{\dagger}\mathrm{id}_a$ が f と交換するから，$\varepsilon\colon f \circ u \Rightarrow \mathrm{id}_b$ が一意に存在して次の等式が成り立つ．

$$
\begin{tikzcd}
b \arrow[r, "\mathrm{id}_b"] \arrow[dr, "u"] & b \arrow[dl, phantom, "\varepsilon\Uparrow"] \\
a \arrow[u, "f"] \arrow[r, "\mathrm{id}_a"'] \arrow[ur, phantom, "\eta\Uparrow"] & a \arrow[u, "f"']
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
b \arrow[r, "\mathrm{id}_b"] & b \\
a \arrow[u, "f"] \arrow[r, "\mathrm{id}_a"'] \arrow[ur, phantom, "\mathrm{id}_f\Uparrow"] & a \arrow[u, "f"']
\end{tikzcd}
$$

故に後は $(u \bullet \varepsilon) * (\eta \bullet u) = \mathrm{id}_u$ を示せばよい．その為には，左 Kan 拡張 $\langle u, \eta \rangle$ の普遍性から

$$
\begin{tikzcd}
b \arrow[r, "\mathrm{id}_b"] \arrow[dr, "u"] & b \arrow[dl, phantom, "\varepsilon\Uparrow"] \arrow[dr, "u"] & \\
a \arrow[u, "f"] \arrow[r, "\mathrm{id}_a"'] \arrow[ur, phantom, "\eta\Uparrow"] & a \arrow[u, "f"] \arrow[r, "\mathrm{id}_a"'] \arrow[ur, phantom, "\Uparrow\eta"] & a
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
b \arrow[r, "\mathrm{id}_b"] \arrow[dr, "u"] & b \arrow[dr, "u"] & \\
a \arrow[u, "f"] \arrow[r, "\mathrm{id}_a"'] \arrow[ur, phantom, "\eta\Uparrow"] & a \arrow[r, "\mathrm{id}_a"'] \arrow[ur, phantom, "\Uparrow\mathrm{id}_u"] & a
\end{tikzcd}
$$

を示せばよいが，それは明らか． □

系 **42.** 左随伴に沿った左 Kan 拡張は存在し，絶対左 Kan 拡張である．

証明． $f\colon a \to b$，$g\colon a \to c$ で f が右随伴を持つとする．

$$
\begin{tikzcd}
b \arrow[dr, "l"] & \\
a \arrow[u, "f"] \arrow[r, "g"'] \arrow[ur, phantom, "\eta\Uparrow"] & c
\end{tikzcd}
$$

このとき絶対左 Kan 拡張 $f^{\dagger}\mathrm{id}_a$ が存在するから $g \circ f^{\dagger}\mathrm{id}_a = f^{\dagger}g$ となり左 Kan 拡

張 $f^\dagger g$ が存在することが分かる．また $h\colon c \to x$ を任意の 1-morphism とするとき，$h \circ f^\dagger g = h \circ g \circ (f^\dagger \mathrm{id}_a) = f^\dagger (h \circ g)$ となって h が $f^\dagger g$ と交換することが分かる． □

$\mathcal{C}^{\mathrm{op}}, \mathcal{C}^{\mathrm{co}}, \mathcal{C}^{\mathrm{coop}}$ を考えれば次の定理が分かる．

定理 43. $u\colon b \to a$ を 1-morphism とするとき，以下の条件は同値である．

(1) u が左随伴を持つ．
(2) 絶対右 Kan 拡張 $\langle u^\ddagger \mathrm{id}_b, \varepsilon \rangle$ が存在する．
(3) 右 Kan 拡張 $\langle u^\ddagger \mathrm{id}_b, \varepsilon \rangle$ が存在し，u が $u^\ddagger \mathrm{id}_b$ と交換する．

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[drr, "u^\ddagger \mathrm{id}_b"] \arrow[dr, phantom, "\varepsilon \Downarrow"] & & & \\
b \arrow[u, "u"] \arrow[rr, "\mathrm{id}_b"'] & & b \arrow[r, "u"] & a
\end{tikzcd}$$

またこのとき $u^\ddagger \mathrm{id}_b \dashv u$ であり ε がその counit である． □

定理 44. $f\colon a \to b$ を 1-morphism とするとき，以下の条件は同値である．

(1) f が右随伴を持つ．
(2) 絶対右 Kan リフト $\langle f_\ddagger \mathrm{id}_b, \varepsilon \rangle$ が存在する．
(3) 右 Kan リフト $\langle f_\ddagger \mathrm{id}_b, \varepsilon \rangle$ が存在し，f が $f_\ddagger \mathrm{id}_b$ と交換する．

$$\begin{tikzcd}
 & & & a \arrow[d, "f"] \\
a \arrow[r, "f"] & b \arrow[urr, "f_\ddagger \mathrm{id}_b"] \arrow[rr, "\mathrm{id}_b"'] & \arrow[ur, phantom, "\Downarrow \varepsilon"] & b
\end{tikzcd}$$

またこのとき $f \dashv f_\ddagger \mathrm{id}_b$ であり ε がその counit である． □

定理 45. $u\colon b \to a$ を 1-morphism とするとき，以下の条件は同値である．

(1) u が左随伴を持つ．
(2) 絶対左 Kan リフト $\langle u_\dagger \mathrm{id}_a, \eta \rangle$ が存在する．

(3) 左 Kan リフト $\langle u_\dagger \mathrm{id}_a, \eta\rangle$ が存在し，u が $u_\dagger \mathrm{id}_a$ と交換する．

$$
\begin{tikzcd}
 & & b \arrow[d, "u"] \\
b \arrow[r, "u"] & a \arrow[ur, "u_\dagger \mathrm{id}_a"] \arrow[r, "\mathrm{id}_a"'] \arrow[ur, phantom, "\Uparrow\eta", shift right=3ex] & a
\end{tikzcd}
$$

またこのとき $u_\dagger \mathrm{id}_a \dashv u$ であり η がその unit である． □

定理 46. 左随伴は左 Kan 拡張と交換する．

証明. $f\colon a \to b$，$g\colon a \to c$ で左 Kan 拡張 $f^\dagger g$ が存在し，$h \dashv u\colon c \to x$ を随伴とする．

$$
\begin{tikzcd}
b \arrow[dr, "f^\dagger g"] & & \\
a \arrow[u, "f"] \arrow[r, "g"'] \arrow[ur, phantom, "\eta\Uparrow", near start] & c \arrow[r, bend left, "h"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & x \arrow[l, bend left, "u"]
\end{tikzcd}
$$

$f^\dagger(h \circ g) = \langle h \circ f^\dagger g, h \bullet \eta\rangle$ であることを示すため，任意の $k\colon b \to x$ と $\theta\colon h \circ g \Rightarrow k \circ f$ を取る．

$$
\begin{tikzcd}
b \arrow[drr, bend left, "k"] & & \\
a \arrow[u, "f"] \arrow[r, "g"'] \arrow[ur, phantom, "\theta\Uparrow"] & c \arrow[r, bend left, "h"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & x \arrow[l, bend left, "u"]
\end{tikzcd}
$$

$h \dashv u$ の unit を η' とすると，次の図式を得る．

$$
\begin{tikzcd}
b \arrow[rrr, bend left, "k"] & & & x \arrow[dr, "u"] & \\
a \arrow[u, "f"] \arrow[rr, "g"'] \arrow[urr, phantom, "\theta\Uparrow"] & & c \arrow[ur, "h"] \arrow[rr, "\mathrm{id}_c"'] \arrow[rr, phantom, "\eta'\Uparrow", shift left=3ex] & & c
\end{tikzcd}
$$

左 Kan 拡張 $f^\dagger g$ の普遍性から，$\tau\colon f^\dagger g \Rightarrow u \circ k$ が存在して次の等式が成り立つ．

$$
\begin{tikzcd}
b \arrow[rrr, bend left, "k"] \arrow[drr, "f^\dagger g"] & & & x \arrow[dr, "u"] & \\
a \arrow[u, "f"] \arrow[rr, "g"'] \arrow[ur, phantom, "\eta\Uparrow"] & & c \arrow[rr, "\mathrm{id}_c"'] \arrow[ur, phantom, "\tau\Uparrow"] & & c
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
b \arrow[rrr, bend left, "k"] & & & x \arrow[dr, "u"] & \\
a \arrow[u, "f"] \arrow[rr, "g"'] \arrow[urr, phantom, "\theta\Uparrow"] & & c \arrow[ur, "h"] \arrow[rr, "\mathrm{id}_c"'] \arrow[rr, phantom, "\eta'\Uparrow", shift left=3ex] & & c
\end{tikzcd}
$$

$h \dashv u$ だから $u_\dagger \mathrm{id}_c = \langle h, \eta' \rangle$ であり，これは絶対左 Kan リフトである．よって σ が存在して次の等式が成り立つ．

$$
\begin{tikzcd}
b \arrow[rr, bend left, "k"] \arrow[dr, "f^\dagger g"'] & \arrow[d, phantom, "\sigma\Uparrow"] & x \arrow[dr, "u"] & \\
& c \arrow[ur, "h"] \arrow[rr, "\mathrm{id}_c"'] & \arrow[u, phantom, "\eta'\Uparrow"] & c
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
b \arrow[rr, bend left, "k"] \arrow[dr, "f^\dagger g"'] & \arrow[d, phantom, "\tau\Uparrow"] & x \arrow[dr, "u"] & \\
& c \arrow[rr, "\mathrm{id}_c"'] & & c
\end{tikzcd}
$$

このとき

$$
\begin{tikzcd}
b \arrow[rr, bend left, "k"] \arrow[dr, "f^\dagger g"] & \arrow[d, phantom, "\sigma\Uparrow"] & x \arrow[dr, "u"] & \\
a \arrow[u, "f"] \arrow[r, "g"'] \arrow[ur, phantom, "\eta\Uparrow"] & c \arrow[ur, "h"] \arrow[rr, "\mathrm{id}_c"'] & \arrow[u, phantom, "\eta'\Uparrow"] & c
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
b \arrow[rr, bend left, "k"] \arrow[dr, "f^\dagger g"] & \arrow[d, phantom, "\tau\Uparrow"] & x \arrow[dr, "u"] & \\
a \arrow[u, "f"] \arrow[r, "g"'] \arrow[ur, phantom, "\eta\Uparrow"] & c \arrow[rr, "\mathrm{id}_c"'] & & c
\end{tikzcd}
$$

$$
=
\begin{tikzcd}
b \arrow[rr, bend left, "k"] & \arrow[d, phantom, "\theta\Uparrow"] & x \arrow[dr, "u"] & \\
a \arrow[u, "f"] \arrow[r, "g"'] & c \arrow[ur, "h"] \arrow[rr, "\mathrm{id}_c"'] & \arrow[u, phantom, "\eta'\Uparrow"] & c
\end{tikzcd}
$$

となるから，絶対左 Kan リフト $u_\dagger \mathrm{id}_c = \langle h, \eta' \rangle$ の普遍性より

$$
\begin{tikzcd}
b \arrow[rr, bend left, "k"] \arrow[dr, "f^\dagger g"] & \arrow[d, phantom, "\sigma\Uparrow"] & x \\
a \arrow[u, "f"] \arrow[r, "g"'] \arrow[ur, phantom, "\eta\Uparrow"] & c \arrow[ur, "h"'] &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
b \arrow[rr, bend left, "k"] & \arrow[d, phantom, "\theta\Uparrow"] & x \\
a \arrow[u, "f"] \arrow[r, "g"'] & c \arrow[ur, "h"'] &
\end{tikzcd}
$$

である．このような σ は一意だとわかるから，$f^\dagger(h \circ g) = \langle h \circ f^\dagger g, h \bullet \eta \rangle$ である． $\square$

参考文献

[1] Igor Bakovic, Bicategorical Yoneda lemma,
`http://www.irb.hr/users/ibakovic/`

[2] Katrina Honigs, Coherence Theorems in Two-Dimensional Category Theory,
`http://www.math.utah.edu/~honigs/`