1 つの等式による群の定義

alg-d
http://alg-d.com/math/

2022 年 5 月 14 日

群といえば，空でない集合 X と写像 $m\colon X \times X \to X$，$i\colon X \to X$ と元 $e \in X$ の 4 つ組 $\langle X, m, i, e\rangle$ であって 3 つの条件

- $(xy)z = x(yz)$
- $xe = x$
- $xx^{-1} = e$

を満たすものである．(ここで x, y, z は X の任意の元であり，また $x, y \in X$ に対して $xy := m(x, y)$，$x^{-1} := i(x)$ と書いた．以下常にそのようにする．)

この PDF では，群は一つの等式

$$w\big([(y^{-1}(w^{-1}x))^{-1}z](yz)^{-1}\big)^{-1} = x \tag{1}$$

で定義できることを示す．即ち，空でない集合 X と写像 $m\colon X \times X \to X$，$i\colon X \to X$ が等式 (1) を満たすとき，$x \in X$ を任意に 1 つ取り $e := xx^{-1}$ と定義すると $\langle X, m, i, e\rangle$ は群になる．逆に任意の群は等式 (1) を満たすことが分かるから，(1) は群の定義と同値であることが分かる．

まず写像に関する次の基本的な事実を確認しておく．

定義． $f\colon X \to X$ を写像とする．

(1) f の左逆写像とは，写像 $g\colon X \to X$ であって $g \circ f = \mathrm{id}_X$ となるものをいう．
(2) f の右逆写像とは，写像 $h\colon X \to X$ であって $f \circ h = \mathrm{id}_X$ となるものをいう．
(3) f の逆写像とは，写像 $k\colon X \to X$ であって $k \circ f = \mathrm{id}_X$ かつ $f \circ k = \mathrm{id}_X$ とな

るものをいう．ここでは f の逆写像を f^{-1} で表す．

命題 2. $f\colon X \to X$ が逆写像を持つ $\Longleftrightarrow$ f が全単射である．

証明. 明らか． $\square$

命題 3. $f, g\colon X \to X$ で $g \circ f$ が全単射のとき，f は左逆写像を持ち，g は右逆写像を持つ．

証明. $h := g \circ f$ とする．仮定より h が全単射だから命題 2 より逆写像 h^{-1} が存在する．このとき

$$(h^{-1} \circ g) \circ f = h^{-1} \circ (g \circ f) = h^{-1} \circ h = \mathrm{id}_X$$

となるから f は左逆写像 $h^{-1} \circ g$ を持つ．同様にして

$$g \circ (f \circ h^{-1}) = (g \circ f) \circ h^{-1} = h \circ h^{-1} = \mathrm{id}_X$$

となるから g は右逆写像 $f \circ h^{-1}$ を持つ． $\square$

命題 4. $f\colon X \to X$ が左逆写像 g と右逆写像 h を持つとき，f の逆写像 f^{-1} も存在して $f^{-1} = g = h$ である．

証明. $f\colon X \to X$ が左逆写像 g と右逆写像 h を持つとすると

$$g = g \circ \mathrm{id}_X = g \circ (f \circ h) = (g \circ f) \circ h = \mathrm{id}_X \circ h = h$$

となるから $g = h$ である．従って $g \circ f = \mathrm{id}_X$ かつ $f \circ g = \mathrm{id}_X$ となるから g が f の逆写像である． $\square$

以下，$\langle X, m, i \rangle$ は (1) を満たすとする．
$x \in X$ に対して写像 $L_x, R_x, O\colon X \to X$ を次のように定義する．

- $L_x(y) := xy$.
- $R_x(y) := yx$.
- $O(y) := y^{-1}$.

このとき等式 (1) は，x を変数とみなすことで写像の等式

$$L_w \circ O \circ R_{(yz)^{-1}} \circ R_z \circ O \circ L_{y^{-1}} \circ L_{w^{-1}} = \mathrm{id}_X \tag{5}$$

と考えることができる．

補題 6. $L_x, R_x, O\colon X \to X$ は全単射である．

証明．等式 (5) より，L_w は右逆写像を持つ．従って w として w^{-1} を考えれば $L_{w^{-1}}$ は右逆写像を持つ．再び等式 (5) を考えれば $L_{w^{-1}}$ は左逆写像を持つ．故に命題 4 より $L_{w^{-1}}\colon X \to X$ は全単射である．そこで等式 (5) の w として w^{-1} を取れば

$$L_{w^{-1}} \circ O \circ R_{(yz)^{-1}} \circ R_z \circ O \circ L_{y^{-1}} \circ L_{(w^{-1})^{-1}} = \mathrm{id}_X$$

となるから，逆写像を考えれば

$$O \circ R_{(yz)^{-1}} \circ R_z \circ O = L_{w^{-1}}^{-1} \circ L_{(w^{-1})^{-1}}^{-1} \circ L_{y^{-1}}^{-1}$$

を得る．この右辺は全単射だから，命題 3 より O は左逆写像，右逆写像の両方を持つことが分かる．従って命題 4 より $O\colon X \to X$ は全単射である．すると任意の $x \in X$ に対して $x = O(w) = w^{-1}$ となる w を取ることができるから，$L_x\colon X \to X$ は全単射である．よって再び等式 (5) から

$$R_{(yz)^{-1}} \circ R_z = (\text{全単射})$$

と書けることが分かるので R_z は左逆写像，$R_{(yz)^{-1}}$ は右逆写像を持つ．ここで L_y と O が全単射だから，任意の x に対して $x = O \circ L_y(z) = (yz)^{-1}$ となる z が存在する．故に R_x は全単射である． □

命題 7. xx^{-1} は x によらず定まる．(即ち任意の $x, x' \in X$ に対して $xx^{-1} = x'(x')^{-1}$ である．)

証明．まず等式 (5) より

$$R_{(yz)^{-1}} \circ R_z = O^{-1} \circ L_w^{-1} \circ L_{w^{-1}}^{-1} \circ L_{y^{-1}}^{-1} \circ O^{-1}$$

である．この右辺は z に依存していないから，任意の $z, z' \in X$ に対して

$$R_{(yz)^{-1}} \circ R_z = R_{(yz')^{-1}} \circ R_{z'}$$

が成り立つ．y にこの両辺の写像を適用することで

$$(yz)(yz)^{-1} = R_{(yz)^{-1}} \circ R_z(y) = R_{(yz')^{-1}} \circ R_{z'}(y) = (yz')(yz')^{-1}$$

が分かる．故に $x, x' \in X$ を任意に取ったとき，$z := L_y^{-1}(x)$，$z' := L_y^{-1}(x')$ (即ち $x = yz$，$x' = yz'$) と定めれば

$$xx^{-1} = (yz)(yz)^{-1} = (yz')(yz')^{-1} = x'(x')^{-1}$$

である． □

そこで $e := xx^{-1}$ と書く.

補題 8. $L_{x^{-1}} \circ L_x = R_e$ である.

証明. 等式 (5) より

$$(O \circ R_{(yz)^{-1}} \circ R_z \circ O \circ L_{y^{-1}})^{-1} = L_{w^{-1}} \circ L_w$$

となるから，$L_{w^{-1}} \circ L_w$ は w によらず定まる写像である．従って $x, y \in X$ を任意に取ったとき，$z := O^{-1}(y)$ (即ち $z^{-1} = y$) とすると

$$L_{x^{-1}} \circ L_x(y) = L_{z^{-1}} \circ L_z(y) = z^{-1}(zy) = y(zz^{-1}) = ye = R_e(y)$$

となるから $L_{x^{-1}} \circ L_x = R_e$ である. $\square$

等式 (5) より

$$O \circ R_{(yz)^{-1}} \circ R_z \circ O \circ L_{y^{-1}} \circ L_{w^{-1}} = L_w^{-1}$$

だから $L_{w^{-1}} \circ L_w = R_e$ (補題 8) より

$$O \circ R_{(yz)^{-1}} \circ R_z \circ O \circ L_{y^{-1}} \circ R_e = \mathrm{id}_X \tag{9}$$

である．ここで $z := y^{-1}$ とすれば

$$O \circ R_{e^{-1}} \circ R_{y^{-1}} \circ O \circ L_{y^{-1}} \circ R_e = \mathrm{id}_X \tag{10}$$

を得る．$e' := O^{-1}(e)$ と置く．即ち $(e')^{-1} = e$ である．また e の定義から $ee^{-1} = e$, $e'e = e$ となる.

補題 11. $O^2 = R_{e'}$ である.

証明. 任意の $x \in X$ を取る．e の定義と $L_{x^{-1}} \circ L_x = R_e$ (補題 8) を使うと

$$L_{x^{-1}}((x^{-1})^{-1}) = x^{-1}(x^{-1})^{-1} = e = e'e = R_e(e') = L_{x^{-1}} \circ L_x(e')$$

となるから，$L_{x^{-1}}$ が全単射であることより $(x^{-1})^{-1} = L_x(e')$ が分かる．よって

$$O^2(x) = (x^{-1})^{-1} = L_x(e') = xe' = R_{e'}(x)$$

となるから $O^2 = R_{e'}$ である. $\square$

補題 12. $ee = e^{-1} = e' = e$ である.

証明．等式 (10) より

$$R_{y^{-1}} \circ O \circ L_{y^{-1}} = R_{e^{-1}}^{-1} \circ O^{-1} \circ R_e^{-1}$$

となるから，$R_{y^{-1}} \circ O \circ L_{y^{-1}}$ は y によらない写像である．よって任意の $x, y \in X$ に対して $R_{y^{-1}} \circ O \circ L_{y^{-1}} = R_{x^{-1}} \circ O \circ L_{x^{-1}}$ となる．故に

$$R_{y^{-1}} \circ O \circ L_{y^{-1}}((x^{-1})^{-1}) = R_{x^{-1}} \circ O \circ L_{x^{-1}}((x^{-1})^{-1})$$

であるが，これは定義より

$$(y^{-1}(x^{-1})^{-1})^{-1}y^{-1} = (x^{-1}(x^{-1})^{-1})^{-1}x^{-1} = e^{-1}x^{-1}$$

となる．即ち

$$R_{y^{-1}} \circ O \circ L_{y^{-1}} \circ O^2(x) = L_{e^{-1}} \circ O(x)$$

となるから $R_{y^{-1}} \circ O \circ L_{y^{-1}} = L_{e^{-1}} \circ O^{-1}$ である．これを等式 (10) に適用すれば

$$O \circ R_{e^{-1}} \circ L_{e^{-1}} \circ O^{-1} \circ R_e = \mathrm{id}_X$$

となる．即ち

$$O \circ R_{e^{-1}} \circ L_{e^{-1}} = R_e^{-1} \circ O$$

だから，従って

$$R_e \circ O \circ R_{e^{-1}} \circ L_{e^{-1}} = O$$

である．$O^2 = R_{e'}$ (補題 11) を使えば

$$R_e \circ O \circ R_{e^{-1}} \circ L_{e^{-1}} \circ O = R_{e'}$$

となる．よって

$$\begin{aligned}
e^{-1}e' &= R_{e'}(e^{-1}) \\
&= R_e \circ O \circ R_{e^{-1}} \circ L_{e^{-1}} \circ O(e^{-1}) \\
&= ((e^{-1}(e^{-1})^{-1})e^{-1})^{-1}e \\
&= (ee^{-1})^{-1}e \\
&= e^{-1}e
\end{aligned}$$

となる．$L_{e^{-1}}$ が全単射だから $e = e'$ が分かる．よって $e^{-1} = (e')^{-1} = e$ である．従って $ee = ee^{-1} = e$ となる． □

従って特に $L_e = L_{e'} = L_{e^{-1}}$，$R_e = R_{e'} = R_{e^{-1}}$ も分かる．

等式 (10) において $e^{-1} = e$ (補題 12) を使えば

$$R_e \circ R_{y^{-1}} \circ O \circ L_{y^{-1}} \circ R_e = O^{-1} \tag{13}$$

を得る．

補題 14. $L_e = R_e = \mathrm{id}_X$ である．

証明. e に対して等式 (13) の両辺を適用すれば

$$((y^{-1}(ee))^{-1}y^{-1})e = e'$$

となる．$ee = e' = e$ (補題 12) と e の定義を使えば

$$((y^{-1}e)^{-1}y^{-1})e = ee = (yy^{-1})e$$

が分かる．R_e が全単射だから

$$(y^{-1}e)^{-1}y^{-1} = yy^{-1}$$

である．$R_{y^{-1}}$ が全単射であるから

$$(y^{-1}e)^{-1} = y$$

となる．即ち $O \circ R_e \circ O = \mathrm{id}_X$ である．よって $R_e = O^2$ (補題 11, 12) を使えば

$$R_e^3 = O \circ O \circ R_e \circ O \circ O = O^2 = R_e$$

となるから，R_e が全単射であることより $R_e^2 = \mathrm{id}_X$ である．そこで等式 (13) において $y := e$ とすれば $e^{-1} = e$ (補題 12) より

$$L_e \circ R_e = O^{-2}$$

を得る．$O^2 = R_e$ (補題 11, 12) から

$$L_e = R_e^{-2} = \mathrm{id}_X$$

である．従って $L_{x^{-1}} \circ L_x = R_e$ (補題 8) と $e^{-1} = e$ (補題 12) より

$$R_e = L_{e^{-1}} \circ L_e = L_e^2 = \mathrm{id}_X$$

が分かる． □

命題 15. $xe = x$ である．

証明．補題 14 より明らか． □

補題 16. $O^2 = \mathrm{id}_X$ である．

証明．補題 11, 12, 14 より明らか． □

補題 17. $R_x^{-1} = R_{x^{-1}}$ である．

証明．等式 (9) において $y = e$ とすれば

$$O \circ R_{z^{-1}} \circ R_z \circ O \circ L_{e^{-1}} \circ R_e = \mathrm{id}_X$$

を得る．$L_{e^{-1}} = R_e = \mathrm{id}_X$ (補題 12, 14) と $O^2 = \mathrm{id}_X$ (補題 16) より $R_{z^{-1}} \circ R_z = \mathrm{id}_X$ となる．R_z は全単射だから $R_z^{-1} = R_{z^{-1}}$ である． □

命題 18. X が (1) を満たすとき $(xy)z = x(yz)$ である．

証明．等式 (13) に $R_e = \mathrm{id}_x$ (補題 14) と $O^{-1} = O$ (補題 16) と $R_{y^{-1}}^{-1} = R_y$ (補題 16, 17) を適用して

$$O \circ L_{y^{-1}} = R_y \circ O$$

を得る．よって等式 (9) より

$$\begin{aligned} \mathrm{id}_X &= O \circ R_{(yz)^{-1}} \circ R_z \circ O \circ L_{y^{-1}} \\ &= O \circ R_{(yz)^{-1}} \circ R_z \circ R_y \circ O \end{aligned}$$

となるから $O^2 = \mathrm{id}_X$ (補題 16) より $R_z \circ R_y = R_{yz}$ が分かる．従って $x \in X$ に対して

$$(xy)z = x(yz)$$

となる． □

定理 19. 等式 (1) は通常の群の定義と同値である．

証明．命題 15, 18 と e の定義より，X が (1) を満たせば X は群である．逆に X が群であるとすると

$$\begin{aligned} w\big([(y^{-1}(w^{-1}x))^{-1}z](yz)^{-1}\big)^{-1} &= w\big((yz)[(y^{-1}(w^{-1}x))^{-1}z]^{-1}\big) \\ &= w\big((yz)[z^{-1}(y^{-1}(w^{-1}x))]\big) \\ &= x \end{aligned}$$

となるから (1) を満たす． □

参考文献

[1] K. Kunen, Single Axioms For Groups, Journal of Automated Reasoning volume 9 (1992), 291–308, https://doi.org/10.1007/BF00245293

[2] B. H. Neumann, Another Single Law For Groups, Bell. Australian Math. Soc. 23 (1981), 81–102 ,https://doi.org/10.1017/S0004972700006912