選択公理なしの圏論

alg-d
http://alg-d.com/math/kan_extension/

2022 年 5 月 23 日

ここでは選択公理を仮定しない場合の圏論について基本的なこと (第 1 章程度の内容) を解説する．例えば第 1 章では以下のようなことを説明した．

(1) まず $G\colon D \to C$ を関手とする．
(2) $c \in C$ を対象としたとき，c から G への普遍射 $\langle d, f\rangle$ が普遍性により定義される．これは何の問題もない．
(3) 任意の $c \in C$ に対して c から G への普遍射が存在するとき，それを $\langle Fc, \eta_c\rangle$ と書けばこれは関手 $F\colon C \to D$ を与える．(Fc を取るときに選択公理を使う．)
(4) このとき $F \dashv G$ は随伴関手となる．

このように普遍性から関手を構成する際に選択公理を使う[*1]．この選択公理を避けるために考えられたのが anafunctor である．anafunctor は関手の一般化であり，anafunctor に対しても関手と同様のことが成り立つため関手の代わりに anafunctor を考えることで選択公理を避けることができる．

1 anafunctor

$F\colon A \to C$，$G\colon B \to C$ を関手とする．このとき充満部分圏 $P(F,G) \subset F{\downarrow}G$ を

$$\mathrm{Ob}(P(F,G)) := \{\langle a,b,f\rangle \in F{\downarrow}G \mid f \text{ は恒等射 }\}$$

で定める．即ち $\mathrm{Ob}(P(F,G)) = \{\langle a,b\rangle \mid a \in A,\ b \in B,\ Fa = Gb\}$ としてよい．またコンマ圏が定める射影 $F{\downarrow}G \to A$，$F{\downarrow}G \to B$ を $P(F,G)$ に制限して得られる関手をそれ

[*1] 逆に，このような構成が常にできると仮定すると選択公理を証明できるので，この選択公理は避けられない．http://alg-d.com/math/ac/category.html を参照．

それぞれ $P_0\colon P(F,G)\to A$，$P_1\colon P(F,G)\to B$ と書く．このとき次の図式は可換である．

$$\begin{tikzcd}
P(F,G) \arrow[r, "P_0"] \arrow[d, "P_1"'] & A \arrow[d, "F"] \\
B \arrow[r, "G"'] & C
\end{tikzcd}$$

定義． C,D を小圏とする．C から D への anafunctor とは組 $\langle |F|, \widehat{F}, F\rangle$ であって以下を満たすものを言う．

(1) $|F|$ は小圏である．
(2) $\widehat{F}\colon |F|\to C$，$F\colon |F|\to D$ は関手である．
(3) $\widehat{F}$ は忠実充満で，対象について全射である．

ここでは記号で $F\colon C\xrightarrow{\mathrm{a}} D$ と表す．

定義． $F,G\colon C\xrightarrow{\mathrm{a}} D$ を anafunctor とする．F から G への射とは，自然変換 $\theta\colon FP_0\Rightarrow GP_1$ のことをいう．

$$\begin{tikzcd}
 & {|F|} \arrow[dl, "\widehat{F}"'] \arrow[drr, bend left, "F"] & & \\
C & & P(\widehat{F},\widehat{G}) \arrow[ul, "P_0"'] \arrow[dl, "P_1"] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\theta"] & D \\
 & {|G|} \arrow[ul, "\widehat{G}"] \arrow[urr, bend right, "G"'] & &
\end{tikzcd}$$

記号では $\theta\colon F\overset{\mathrm{a}}{\Rightarrow} G$ と書く．

例 1． $F\colon C\to D$ を関手とする．このとき $|F| := C$，$\widehat{F} := \mathrm{id}_C$ と定義すれば明らかに $\langle |F|, \widehat{F}, F\rangle$ は anafunctor である．これにより関手 $C\to D$ は anafunctor $C\xrightarrow{\mathrm{a}} D$ とみなすことができる． $\square$

例 2． C を直積を持つ小圏とする．選択公理があれば，対象 $a,b\in C$ に対して直積 $a\times b\in C$ を取ることで関手 $C\times C\ni\langle a,b\rangle\mapsto a\times b\in C$ が定義できるのであった．選択公理がない場合，一般にはこのような関手を定義することはできない．そこで代わりに anafunctor $F\colon C\times C\xrightarrow{\mathrm{a}} C$ を次のように定義する．

- まず圏 $|F|$ を次のように定義する．
  - $\star$ $\mathrm{Ob}(|F|) := \{\langle a,b,u,p,q\rangle \mid a\xleftarrow{p} u\xrightarrow{q} b$，$\langle u,p,q\rangle$ は a と b の直積 $\}$．

⋆ $\mathrm{Hom}_{|F|}(\langle a,b,u,p,q\rangle,\langle a',b',u',p',q'\rangle) := \{\langle f_0,f_1,f_2\rangle \mid$ 次が可換 $\}$.

$$\begin{tikzcd} a \arrow[d, "f_0"'] & u \arrow[l, "p"'] \arrow[r, "q"] \arrow[d, "f_2"] & b \arrow[d, "f_1"] \\ a' & u' \arrow[l, "p'"] \arrow[r, "q'"'] & b' \end{tikzcd}$$

- 関手 $\widehat{F}\colon |F| \to C \times C$ を次のように定義する．
  - ⋆ $\langle a,b,u,p,q\rangle \in |F|$ に対して $\widehat{F}\langle a,b,u,p,q\rangle := \langle a,b\rangle$.
  - ⋆ $\langle f_0,f_1,f_2\rangle \in \mathrm{Mor}(|F|)$ に対して $\widehat{F}\langle f_0,f_1,f_2\rangle := \langle f_0,f_1\rangle$.

  任意の $a,b \in C$ に対して a と b の直積が存在するから，$\widehat{F}$ は対象について全射である．また直積の普遍性により $\widehat{F}$ は忠実充満である．
- 関手 $F\colon |F| \to D$ を次のように定義する．
  - ⋆ $\langle a,b,u,p,q\rangle \in |F|$ に対して $F\langle a,b,u,p,q\rangle := u$.
  - ⋆ $\langle f_0,f_1,f_2\rangle \in \mathrm{Mor}(|F|)$ に対して $F\langle f_0,f_1,f_2\rangle := f_2$. □

$F\colon C \xrightarrow{\mathrm{a}} D$ を anafunctor とする．$a \in C$，$s \in |F|$ で $\widehat{F}(s) = a$ のとき $F^s(a) := F(s)$ と書く．また断りなく $F^s(a)$ と書いたときは $\widehat{F}(s) = a$ となる s を任意に取っているものとする．$\widehat{F}$ が対象について全射だから，任意の $a \in C$ に対してこのような $s \in |F|$ は必ず存在する．

次に $f\colon a \to b$ を C の射とする．$s,t \in |F|$ を $\widehat{F}(s) = a$，$\widehat{F}(t) = b$ となるように取る．$\widehat{F}$ が忠実充満だから $k\colon s \to t$ で $\widehat{F}k = f$ となるものが一意に存在する．これを使って $F^{s|t}(f) := F(k)$ と書く．$F^{s|t}(f)\colon F^s(a) \to F^t(b)$ である．

$$\begin{tikzcd} a \arrow[d, "f"'] & s \arrow[l, bend right, "\widehat{F}"'] \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[d, "k"] & F^s(a) \arrow[d, "F^{s|t}(f)"] \\ b & t & F^t(b) \end{tikzcd}$$

$\widehat{F}$ が忠実充満であることから明らかに，$a \xrightarrow{f} b \xrightarrow{g} c$ のとき $F^{s|u}(g \circ f) = F^{t|u}(g) \circ F^{s|t}(f)$ である．従って例えば

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "h"] \arrow[d, "f"'] & c \arrow[d, "k"] \\ b \arrow[r, "g"'] & d \end{tikzcd}$$

が C の可換図式のとき

$$\begin{tikzcd}
F^s(a) \arrow[r, "F^{s|u}(h)"] \arrow[d, "F^{s|t}(f)"'] & F^u(c) \arrow[d, "F^{u|v}(k)"] \\
F^t(b) \arrow[r, "F^{t|v}(g)"'] & F^v(d)
\end{tikzcd}$$

は D の可換図式である．即ち anafunctor $F\colon C \xrightarrow{\mathrm{a}} D$ は C の可換図式を D の可換図式に写す．

今度は $\theta\colon F \overset{\mathrm{a}}{\Rightarrow} G\colon C \xrightarrow{\mathrm{a}} D$ を anafunctor の射とする．即ち θ は自然変換 $FP_0 \Rightarrow GP_1\colon P(\widehat{F}, \widehat{G}) \to D$ である．

$$\begin{tikzcd}
 & {|F|} \arrow[dl, "\widehat{F}"'] \arrow[drr, bend left, "F"] & & \\
C & & P(\widehat{F},\widehat{G}) \arrow[ul, "P_0"'] \arrow[dl, "P_1"] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\theta"] & D \\
 & {|G|} \arrow[ul, "\widehat{G}"] \arrow[urr, bend right, "G"'] & &
\end{tikzcd}$$

そこで対象 $x \in P(\widehat{F}, \widehat{G})$ を取る．$a := \widehat{F}P_0(x) = \widehat{G}P_1(x)$ と置けばこの x は $s \in |F|$, $t \in |G|$, $\widehat{F}s = \widehat{G}t = a$ を使って $x = \langle s, t\rangle$ と書ける．このとき $\theta_a^{s|t} := \theta_{\langle s,t\rangle}$ と書く．即ち $\theta_a^{s|t}\colon F^s(a) \to G^t(a)$ である．θ が自然変換であるから，$P(\widehat{F}, \widehat{G})$ の射 $\langle k, l\rangle\colon \langle s, t\rangle \to \langle s', t'\rangle$ に対して次の図式は可換である．

$$\begin{tikzcd}
Fs \arrow[r, "\theta_{\langle s,t\rangle}"] \arrow[d, "Fk"'] & Gt \arrow[d, "Gl"] \\
Fs' \arrow[r, "\theta_{\langle s',t'\rangle}"'] & Gt'
\end{tikzcd}$$

これは上で導入した記法を使うと次のようになる．(ここで $f := \widehat{F}k = \widehat{G}l$ と書いた．)

$$\begin{tikzcd}
F^s(a) \arrow[r, "\theta_a^{s|t}"] \arrow[d, "F^{s|s'}(f)"'] & G^t(a) \arrow[d, "G^{t|t'}(f)"] \\
F^{s'}(b) \arrow[r, "\theta_b^{s'|t'}"'] & G^{t'}(b)
\end{tikzcd} \tag{3}$$

逆に，集合 X を $X := \{\langle a, s, t\rangle \mid a \in C,\ s \in |F|,\ t \in |G|, \widehat{F}s = \widehat{G}t = a\}$ と定めたとき，射の族 $\{\theta_a^{s|t}\colon F^s(a) \to G^t(a)\}_{\langle a,s,t\rangle \in X}$ を考える．任意の $f\colon a \to b$ に対して図式 (3) が

可換になれば，これは射 $\theta\colon F \overset{\mathrm{a}}{\Rightarrow} G$ を与えることが分かる．そこでこの条件を「$\theta_a^{s|t}$ が $a \in C$ について ananatural」ということにする．

$F, G, H\colon C \overset{\mathrm{a}}{\to} D$ を anafunctor として $\theta\colon F \overset{\mathrm{a}}{\Rightarrow} G, \sigma\colon G \overset{\mathrm{a}}{\Rightarrow} H$ とする．$\theta_a^{s|t}\colon F^s(a) \to G^t(a)$，$\sigma_a^{t|u}\colon G^t(a) \to H^u(a)$ である．そこで $(\sigma * \theta)_a^{s|u} := \sigma_a^{t|u} \circ \theta_a^{s|t}$ と定義する．これは t によらず well-defined である．

∵) $\theta_a^{s|t}, \sigma_a^{t|u}$ が a について ananatural だから，次の図式が可換である．

$$\begin{tikzcd}
F^s(a) \arrow[r, "\theta_a^{s|t}"] \arrow[d, "\mathrm{id} = F^{s|s}(\mathrm{id}_a)"'] & G^t(a) \arrow[r, "\sigma_a^{t|u}"] \arrow[d, "G^{t|t'}(\mathrm{id}_a)"] & H^u(a) \arrow[d, "H^{u|u}(\mathrm{id}_a) = \mathrm{id}"] \\
F^s(a) \arrow[r, "\theta_a^{s|t'}"'] & G^{t'}(a) \arrow[r, "\sigma_a^{t'|u}"'] & H^u(a)
\end{tikzcd}$$

よって $\sigma_a^{t|u} \circ \theta_a^{s|t} = \sigma_a^{t'|u} \circ \theta_a^{s|t'}$ となり t の取り方によらないことが分かる．

この $(\sigma * \theta)_a^{s|u}$ は a について ananatural であることが容易に分かる．従ってこれは $\sigma * \theta\colon F \overset{\mathrm{a}}{\Rightarrow} H$ を定める．この合成は結合律を満たす．

∵) $\theta\colon F \overset{\mathrm{a}}{\Rightarrow} G$，$\sigma\colon G \overset{\mathrm{a}}{\Rightarrow} H$，$\tau\colon H \overset{\mathrm{a}}{\Rightarrow} K$ とする．このとき任意の $a \in C$，$s \in |F|$，$v \in |K|$，$\widehat{F}s = \widehat{K}v = a$ に対して $((\tau * \sigma) * \theta)_a^{s|v} = (\tau * (\sigma * \theta))_a^{s|v}$ を示せばよい．定義より，$t \in |G|$，$u \in |H|$ を $\widehat{G}t = \widehat{H}u = a$ となるように取れば

$$((\tau * \sigma) * \theta)_a^{s|v} = \tau_a^{u|v} \circ \sigma_a^{t|u} \circ \theta_a^{s|t} = (\tau * (\sigma * \theta))_a^{s|v}$$

である．

次に $\mathrm{id}_F\colon F \overset{\mathrm{a}}{\Rightarrow} F$ を $(\mathrm{id}_F)_a^{s|t} := F^{s|t}(\mathrm{id}_a)\colon F^s a \to F^t a$ で定義する．この id_F は恒等射となる．

∵) $\theta\colon F \overset{\mathrm{a}}{\Rightarrow} G$ とする．$a \in C$，$s \in |F|$，$v \in |G|$，$\widehat{F}s = \widehat{G}t = a$ に対して

$$(\theta * \mathrm{id}_F)_a^{s|t} = \theta_a^{s|t}, \quad \theta_a^{s|t} = (\mathrm{id}_G * \theta)_a^{s|t}$$

を示せばよい．そのためには定義より

$$\theta_a^{u|t} \circ F^{s|u}(\mathrm{id}_a) = \theta_a^{s|t}, \quad \theta_a^{s|t} = G^{v|t}(\mathrm{id}_a) \circ \theta_a^{s|v}$$

を示せばよい．これは $\theta_a^{s|t}$ が a について ananatural だから

$$
\begin{tikzcd}
F^s(a) \arrow[r, "\theta_a^{s|t}"] \arrow[d, "F^{s|u}(\mathrm{id}_a)"'] & G^t(a) \arrow[d, "G^{t|t}(\mathrm{id}_a)=\mathrm{id}"] \\
F^u(a) \arrow[r, "\theta_a^{u|t}"'] & G^t(a)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
F^s(a) \arrow[r, "\theta_a^{s|v}"] \arrow[d, "\mathrm{id}=F^{s|s}(\mathrm{id}_a)"'] & G^v(a) \arrow[d, "G^{v|t}(\mathrm{id}_a)"] \\
F^s(a) \arrow[r, "\theta_a^{s|t}"'] & G^t(a)
\end{tikzcd}
$$

が可換となり成り立つ．

従って C から D への anafunctor 全体 $\mathbf{Ana}(C, D)$ は圏となる．

命題 4. $\theta\colon F \overset{\mathrm{a}}{\Rightarrow} G\colon C \overset{\mathrm{a}}{\to} D$ に対して以下は同値．

(1) θ が $\mathbf{Ana}(C, D)$ における同型．
(2) θ が自然変換 $\theta\colon FP_0 \Rightarrow GP_1$ として同型．
(3) 任意の $a \in C$ に対して $\theta_a^{s|t}\colon F^s a \to G^t a$ が同型．

証明. 合成の定義より容易に分かる． □

$F, G\colon C \to D$ を関手として，これを anafunctor とみなす (例 1)．このとき $P(\widehat{F}, \widehat{G}) \cong C$ だから，射 $\theta\colon F \overset{\mathrm{a}}{\Rightarrow} G$ は (通常の関手としての) 自然変換 $F \Rightarrow G$ と同一視することができる．

$$
\begin{tikzcd}
 & C \arrow[dl, "\mathrm{id}_C"'] \arrow[rrd, bend left, "F"] & & \\
C & & C \arrow[ul, "\mathrm{id}_C"'] \arrow[dl, "\mathrm{id}_C"] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\theta"] & D \\
 & C \arrow[ul, "\mathrm{id}_C"] \arrow[rru, bend right, "G"'] & &
\end{tikzcd}
$$

これにより充満部分圏 $\mathbf{Cat}(C, D) \subset \mathbf{Ana}(C, D)$ とみなすことができる．

定義. $F\colon A \overset{\mathrm{a}}{\to} B$, $G\colon B \overset{\mathrm{a}}{\to} C$ を anafunctor とする．このとき anafunctor $GF\colon A \overset{\mathrm{a}}{\to} C$ を以下により定義する．

(1) $|GF| := P(F, \widehat{G})$
(2) $\widehat{GF} := \widehat{F}P_0\colon |GF| \to A,\ GF := GP_1\colon |GF| \to C$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & P(F,\widehat{G}) \arrow[dl, "P_0"'] \arrow[dr, "P_1"] & & \\
 & {|F|} \arrow[dl, "\widehat{F}"'] \arrow[dr, "F"] & & {|G|} \arrow[dl, "\widehat{G}"'] \arrow[dr, "G"] & \\
A & & B & & C
\end{tikzcd}$$

$F\colon A \xrightarrow{\mathrm{a}} B$, $G\colon B \xrightarrow{\mathrm{a}} C$ として，$a \in A$ に対して $(GF)^x(a)$ を考える．$x \in |GF| = P(F,\widehat{G})$ だから $s \in |F|$，$t \in |G|$，$Fs = \widehat{G}t$ を使って $x = \langle s,t \rangle$ と書ける．このとき $(GF)^x(a) = G^tF^s(a)$ である．以下，$(GF)^x(a)$ のことを $(GF)^{\langle s,t \rangle}(a)$ のように書く．

命題 5. anafunctor の合成は関手 $\mathbf{Ana}(B,C) \times \mathbf{Ana}(A,B) \to \mathbf{Ana}(A,C)$ を定める．

証明. まず $\theta\colon F \overset{\mathrm{a}}{\Rightarrow} G\colon A \xrightarrow{\mathrm{a}} B$ と $H\colon B \xrightarrow{\mathrm{a}} C$ に対して $(H \bullet \theta)_a^{\langle s,t \rangle | \langle u,v \rangle}\colon H^tF^s(a) \to H^uG^v(a)$ を $(H \bullet \theta)_a^{\langle s,t \rangle | \langle u,v \rangle} := H^{t|v}(\theta_a^{s|u})$ で定義する．これは a について ananatural である．

∵) まず $\theta_a^{s|u}$ が a について ananatural だから次の B における図式は可換である．

$$\begin{tikzcd}
F^s(a) \arrow[r, "\theta_a^{s|u}"] \arrow[d, "F^{s|s'}(f)"'] & G^u(a) \arrow[d, "G^{u|u'}(f)"] \\
F^{s'}(b) \arrow[r, "\theta_b^{s'|u'}"'] & G^{u'}(b)
\end{tikzcd}$$

よってこれを H で写した C の図式も可換である．

$$\begin{tikzcd}
H^tF^s(a) \arrow[r, "H^{t|v}(\theta_a^{s|u})"] \arrow[d, "H^{t|t'}F^{s|s'}(f)"'] & H^vG^u(a) \arrow[d, "H^{v|v'}G^{u|u'}(f)"] \\
H^{t'}F^{s'}(b) \arrow[r, "H^{t'|v'}(\theta_b^{s'|u'})"'] & H^{v'}G^{u'}(b)
\end{tikzcd}$$

これは $(H \bullet \theta)_a^{\langle s,t \rangle | \langle u,v \rangle}$ が a について ananatural であることを意味する．

よってこれは $H \bullet \theta\colon HF \overset{\mathrm{a}}{\Rightarrow} HG$ を定める．定義から明らかにこれは関手 $\mathbf{Ana}(A,B) \ni \theta \mapsto H \bullet \theta \in \mathbf{Ana}(A,C)$ を定める．

次に $H\colon A \xrightarrow{\mathrm{a}} B$ と $\theta\colon F \overset{\mathrm{a}}{\Rightarrow} G\colon B \xrightarrow{\mathrm{a}} C$ と対して $(\theta \bullet H)_a^{\langle s,t \rangle | \langle u,v \rangle}$ を合成

$$F^tH^sa \xrightarrow{\theta^{t|x}_{H^s(a)}} G^xH^sa \xrightarrow{G^{x|v}(H^{s|u}(\mathrm{id}_a))} G^vH^ua$$

により定める．これは x の取り方によらず well-defined である．

$\because$) 次の図式を考える．

$$\begin{tikzcd}
F^t H^s a \arrow[r, "\theta^{t|x}_{H^s a}"] \arrow[d, "\mathrm{id} = F^{t|t} H^{s|s}(\mathrm{id}_a)"'] & G^x H^s a \arrow[r, "G^{x|v} H^{s|u}(\mathrm{id}_a)"] \arrow[d, "G^{x|x'} H^{s|s}(\mathrm{id}_a)"] & G^v H^u a \arrow[d, "G^{v|v} H^{u|u}(\mathrm{id}_a) = \mathrm{id}"] \\
F^t H^s a \arrow[r, "\theta^{t|x'}_{H^s a}"'] & G^{x'} H^s a \arrow[r, "G^{x'|v} H^{s|u}(\mathrm{id}_b)"'] & G^v H^u a
\end{tikzcd}$$

まず左の四角は $\theta^{t|x}_b$ が $b \in B$ について ananatural だから可換である．右の四角は明らかに可換である．

従って特に $s = u$ のときは $x = v$ と取ることで $(\theta \bullet H)^{\langle s,t\rangle|\langle s,v\rangle}_a = \theta^{t|v}_{H^s a}$ が分かる．

この $(\theta \bullet H)^{\langle s,t\rangle|\langle u,v\rangle}_a$ は a について ananatural である．

$\because$) well-defined の証明と同様にして，$f\colon a \to b$ に対して

$$\begin{tikzcd}
F^t H^s a \arrow[r, "\theta^{t|x}_{H^s a}"] \arrow[d, "F^{t|t'} H^{s|s'}(f)"'] & G^x H^s a \arrow[r, "G^{x|v} H^{s|u}(\mathrm{id}_a)"] \arrow[d, "G^{x|x'} H^{s|s'}(f)"] & G^v H^u a \arrow[d, "G^{v|v'} H^{u|u'}(f)"] \\
F^{t'} H^{s'} b \arrow[r, "\theta^{t'|x'}_{H^{s'} a}"'] & G^{x'} H^{s'} b \arrow[r, "G^{x'|v'} H^{s'|u'}(\mathrm{id}_b)"'] & G^{v'} H^{u'} b
\end{tikzcd}$$

が可換であることが分かる．

定義から明らかにこれは関手 $\mathbf{Ana}(B, C) \ni \theta \mapsto \theta \bullet H \in \mathbf{Ana}(A, C)$ を定める．

$\theta\colon F \overset{\mathrm{a}}{\Rightarrow} G\colon A \overset{\mathrm{a}}{\to} B$, $\sigma\colon K \overset{\mathrm{a}}{\Rightarrow} L\colon B \overset{\mathrm{a}}{\to} C$ とする．

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, bend right, "G"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\theta"] & B \arrow[r, bend left, "K"] \arrow[r, bend right, "L"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\sigma"] & C
\end{tikzcd}$$

このとき $(\sigma \bullet G) * (K \bullet \theta) = (L \bullet \theta) * (\sigma \bullet F)$ である．

∵) $a \in A$ に対して

$$
\begin{aligned}
((\sigma \bullet G) * (K \bullet \theta))_a^{\langle s,t\rangle|\langle u,v\rangle} &= (\sigma \bullet G)_a^{\langle u,x\rangle|\langle u,v\rangle} \circ (K \bullet \theta)_a^{\langle s,t\rangle|\langle u,x\rangle} \\
&= \sigma_{G^u a}^{x|v} \circ K^{t|x}(\theta_a^{s|u}) \\
((L \bullet \theta) * (\sigma \bullet F))_a^{\langle s,t\rangle|\langle u,v\rangle} &= (L \bullet \theta)_a^{\langle s,z\rangle|\langle u,v\rangle} \circ (\sigma \bullet F)_a^{\langle s,t\rangle|\langle s,z\rangle} \\
&= L^{z|v}(\theta_a^{s|u}) \circ \sigma_{F^s a}^{t|z}
\end{aligned}
$$

となるが，$\sigma_b^{t|z}$ が b について ananatural だから

$$
\begin{tikzcd}
K^t F^s a \arrow[r, "\sigma_{F^s a}^{t|z}"] \arrow[d, "K^{t|x}(\theta_a^{s|u})"'] & L^z F^s a \arrow[d, "L^{z|v}(\theta_a^{s|u})"] \\
K^x G^u a \arrow[r, "\sigma_{G^u a}^{x|v}"'] & L^v G^u a
\end{tikzcd}
$$

が可換となり $((\sigma \bullet G) * (K \bullet \theta))_a^{\langle s,t\rangle|\langle u,v\rangle} = ((L \bullet \theta) * (\sigma \bullet F))_a^{\langle s,t\rangle|\langle u,v\rangle}$ である．

以上を組み合わせて関手 $\mathbf{Ana}(B,C) \times \mathbf{Ana}(A,B) \to \mathbf{Ana}(A,C)$ を得る． □

定理 6. 圏を対象，anafunctor を 1-morphism，anafunctor の射を 2-morphism とすれば bicategory になる．

証明. まず圏 A, B, C, D に対して次の自然同型 α を定義する．

$$
\begin{tikzcd}
& \mathbf{Ana}(C,D) \times \mathbf{Ana}(B,C) \times \mathbf{Ana}(A,B) \arrow[dl, "M \times \mathrm{id}"'] \arrow[dr, "\mathrm{id} \times M"] & \\
\mathbf{Ana}(B,D) \times \mathbf{Ana}(A,B) \arrow[rr, Rightarrow, "\sim", "\alpha"'] \arrow[dr, "M"'] & & \mathbf{Ana}(C,D) \times \mathbf{Ana}(A,C) \arrow[dl, "M"] \\
& \mathbf{Ana}(A,D) &
\end{tikzcd}
$$

そこで $F\colon A \xrightarrow{\mathrm{a}} B$，$G\colon B \xrightarrow{\mathrm{a}} C$，$H\colon C \xrightarrow{\mathrm{a}} D$ を anafunctor とすると，$a \in A$ に対して

$$
\begin{aligned}
((HG)F)^{\langle s,\langle t,u\rangle\rangle}(a) &= (HG)^{\langle t,u\rangle} F^s a = H^u G^t F^s a \\
(H(GF))^{\langle\langle s,t\rangle,u\rangle}(a) &= H^u (GF)^{\langle s,t\rangle} a = H^u G^t F^s a
\end{aligned}
$$

である．そこで

$$
(\alpha_{HGF})_a^{\langle s,t,u\rangle|\langle v,w,x\rangle} := H^{u|x} G^{t|w} F^{s|v}(\mathrm{id}_a)\colon H^u G^t F^s a \to H^x G^w F^v a
$$

と定める．これは a について ananatural である．よって $\alpha_{HGF}\colon (HG)F \overset{\mathrm{a}}{\Rightarrow} H(GF)$ が定まる[*2]．これは F, G, H について自然である．

∵) $\beta\colon F \overset{\mathrm{a}}{\Rightarrow} F'$, $\gamma\colon G \overset{\mathrm{a}}{\Rightarrow} G'$, $\sigma\colon H \overset{\mathrm{a}}{\Rightarrow} H'$ に対して

$$\begin{tikzcd}
(HG)F \arrow[r, "\alpha_{HGF}"] \arrow[d, "(\sigma\bullet\gamma)\bullet\beta"'] & H(GF) \arrow[d, "\sigma\bullet(\gamma\bullet\beta)"] \\
(H'G')F' \arrow[r, "\alpha_{H'G'F'}"'] & H'(G'F')
\end{tikzcd}$$

が可換であることを示せばよい．そのためには $a \in A$ に対して

$$\begin{tikzcd}
H^u G^t F^s a \arrow[r, "H^{u|x} G^{t|w} F^{s|v}(\mathrm{id}_a)"] \arrow[d, "H^{u|x_1} G^{t|x_0}(\beta_a^{s|s'})"'] & H^x G^w F^v a \arrow[d, "H^{x|x_4} G^{w|x_3}(\beta_a^{v|v'})"] \\
H^{x_1} G^{x_0} F'^{s'} a \arrow[r, "H^{x_1|x_4} G^{x_0|x_3} F'^{s'|v'}(\mathrm{id}_a)"'] \arrow[d, "H^{x_1|x_2}(\gamma^{x_0|t'}_{F'^{s'}a})"'] & H^{x_4} G^{x_3} F'^{v'} a \arrow[d, "H^{x_4|x_5}(\gamma^{x_3|w'}_{F'^{v'}a})"] \\
H^{x_2} G'^{t'} F'^{s'} a \arrow[r, "H^{x_2|x_5} G'^{t'|w'} F'^{s'|v'}(\mathrm{id}_a)"'] \arrow[d, "\sigma^{x_2|u'}_{G'^{t'}F'^{s'}a}"'] & H^{x_5} G'^{w'} F'^{v'} a \arrow[d, "\sigma^{x_5|x'}_{G'^{w'}F'^{v'}a}"] \\
H'^{u'} G'^{t'} F'^{s'} a \arrow[r, "H'^{u'|x'} G'^{t'|w'} F'^{s'|v'}(\mathrm{id}_a)"'] & H'^{x'} G'^{w'} F'^{v'} a
\end{tikzcd}$$

が可換であることを示せばよいが，それは明らか．

$(\alpha_{HGF})_a^{\langle s,t,u\rangle|\langle v,w,x\rangle}$ は同型だから α は自然同型である．

次に自然同型 λ, ρ を定義する．

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{1} \times \mathbf{Ana}(A,B) \arrow[rr, "\cong"] \arrow[dr, "I^B \times \mathrm{id}"'] & \arrow[d, phantom, "\lambda \Uparrow \wr"] & \mathbf{Ana}(A,B) \\
& \mathbf{Ana}(B,B) \times \mathbf{Ana}(A,B) \arrow[ur, "M"'] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathbf{Ana}(A,B) \times \mathbb{1} \arrow[rr, "\cong"] \arrow[dr, "\mathrm{id} \times I^A"'] & \arrow[d, phantom, "\rho \Uparrow \wr"] & \mathbf{Ana}(A,B) \\
& \mathbf{Ana}(A,B) \times \mathbf{Ana}(A,A) \arrow[ur, "M"'] &
\end{tikzcd}$$

[*2] $|(HG)F| = |H(GF)|$ ではない ($|(HG)F| \cong |H(GF)|$ ではある)．よって $(HG)F \neq H(GF)$ であり $\alpha_{HGF} \neq \mathrm{id}$ である．

そこで anafunctor $F\colon A \xrightarrow{\mathrm{a}} B$ に対して

$$(\lambda_F)_a^{s|t} := F^{s|t}(\mathrm{id}_a)\colon F^s a \to F^t a, \quad (\rho_F)_a^{s|t} := F^{s|t}(\mathrm{id}_a)\colon F^s a \to F^t a$$

と定義する．これは a について ananatural だから $\lambda_F\colon \mathrm{id}_F \circ F \overset{\mathrm{a}}{\Rightarrow} F$，$\rho_F\colon F \circ \mathrm{id}_F \overset{\mathrm{a}}{\Rightarrow} F$ である．

以上の α, λ, ρ は coherence 条件を満たすことが容易に分かるから **Ana** は bicategory である． □

従って特に anafunctor の間の随伴が定義される．

命題 7. $F \dashv G\colon C \xrightarrow{\mathrm{a}} D$ を随伴とするとき，$c \in C$，$d \in D$ について ananatural な全単射

$$\varphi_{cd}^{s|t}\colon \mathrm{Hom}_D(F^s c, d) \to \mathrm{Hom}_C(c, G^t d)$$

が存在する．

証明. $F \dashv G$ の unit, counit を η, ε とする．つまり $\eta\colon \mathrm{id}_C \overset{\mathrm{a}}{\Rightarrow} GF\colon C \xrightarrow{\mathrm{a}} C$ である．よって $\eta_c^{c|\langle s,u\rangle}\colon c \to G^u F^s c$ は $c \in C$ について ananatural である．そこで $c \in C$，$d \in D$，$k\colon F^s c \to d$ とする．$\varphi_{cd}^{s|t}(k) := G^{t|u}(k) \circ \eta_c^{c|\langle s,u\rangle}$ と定める．

$$\begin{tikzcd}
c \arrow[r, "\eta_c^{c|\langle s,u\rangle}"] \arrow[dr, "\varphi_{cd}^{s|t}(k)"'] & G^u F^s c \arrow[d, "G^{u|t}(k)"] & u \arrow[l, bend right, "G"'] \arrow[r, bend left, "\widehat{G}"] \arrow[d] & F^s c \arrow[d, "k"] \\
 & G^t d & t & d
\end{tikzcd}$$

これは u の取り方によらず well-defined である．

∵) $u, v \in |G|$ が $\widehat{G}u = \widehat{G}v = F^s c$ を満たすとする．このとき明らかに次の図式は可換である．

$$\begin{tikzcd}
c \arrow[r, "\eta_c^{c|\langle s,u\rangle}"] \arrow[d, "\mathrm{id}"'] & G^u F^s c \arrow[r, "G^{u|t}(f)"] \arrow[d, "G^{u|v}(\mathrm{id}_{F^s c})"] & G^t d \arrow[d, "G^{t|t}(\mathrm{id}_d) = \mathrm{id}"] \\
c \arrow[r, "\eta_c^{c|\langle s,v\rangle}"'] & G^v F^s c \arrow[r, "G^{v|t}(f)"'] & G^t d
\end{tikzcd}$$

従って写像 $\varphi_{cd}^{s|t}\colon \mathrm{Hom}_D(F^s c, d) \to \mathrm{Hom}_C(c, G^t d)$ が定まる．これは $c \in C$，$d \in D$ について ananatural である．

$\because$) $f\colon c' \to c,\ \ g\colon d \to d'$ に対して

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_D(F^s c, d) \arrow[r, "\varphi^{s|t}_{cd}"] \arrow[d, "g\circ - \circ F^{s'|s}(f)"'] & \mathrm{Hom}_C(c, G^t d) \arrow[d, "G^{t|t'}(g)\circ - \circ f"] \\ \mathrm{Hom}_D(F^{s'} c', d') \arrow[r, "\varphi^{s'|t'}_{c'd'}"'] & \mathrm{Hom}_C(c', G^{t'} d') \end{tikzcd}$$

が可換であることを示せばよい．そこで $k \in \mathrm{Hom}_D(F^s c, d)$ の行き先を考えると次のようになる．

$$\begin{tikzcd} k \arrow[r, mapsto, "\varphi^{s|t}_{cd}"] \arrow[d, mapsto, "g\circ - \circ F^{s'|s}(f)"'] & G^{u|t}(k) \circ \eta^{c|\langle s,u\rangle}_c \arrow[d, mapsto, "G^{t|t'}(g)\circ - \circ f"] \\ & G^{t|t'}(g) \circ G^{u|t}(k) \circ \eta^{c|\langle s,u\rangle}_c \circ f \\ g \circ k \circ F^{s'|s}(f) \arrow[r, mapsto, "\varphi^{s'|t'}_{c'd'}"'] & G^{u'|t'}(g \circ k \circ F^{s'|s}(f)) \circ \eta^{c'|\langle s',u'\rangle}_{c'} \arrow[d, equal] \\ & G^{t|t'}(g) \circ G^{u|t}(k) \circ G^{u'|u} F^{s'|s}(f) \circ \eta^{c'|\langle s',u'\rangle}_{c'} \end{tikzcd}$$

ここで $\eta^{c|\langle s',u'\rangle}_c$ が c について ananatural だから次の図式が可換である．

$$\begin{tikzcd} c' \arrow[r, "\eta^{c'|\langle s',u'\rangle}_{c'}"] \arrow[d, "f"'] & G^{u'} F^{s'} c' \arrow[d, "G^{u'|u} F^{s'|s}(f)"] \\ c \arrow[r, "\eta^{c|\langle s,u\rangle}_c"'] & G^u F^s c \end{tikzcd}$$

よって $\eta^{c|\langle s,u\rangle}_c \circ f = G^{u'|u} F^{s'|s}(f) \circ \eta^{c'|\langle s',u'\rangle}_{c'}$ である．

同様にして写像 $\psi^{t|s}_{cd}\colon \mathrm{Hom}_C(c, G^t d) \to \mathrm{Hom}_D(F^s c, d)$ を

$$\begin{tikzcd} c \arrow[d, "k"'] & s \arrow[l, bend right, "\widehat{F}"'] \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[d] & F^s c \arrow[d, "F^{s|v} k"'] \arrow[dr, "\psi^{t|s}_{cd}(k)"] & \\ G^t d & v & F^v G^t d \arrow[r, "\varepsilon^{\langle v,t\rangle|d}_d"'] & d \end{tikzcd}$$

により定義する．

このとき $\psi^{t|s}_{cd} \circ \varphi^{s|t}_{cd} = \mathrm{id}$ と $\varphi^{s|t}_{cd} \circ \psi^{t|s}_{cd} = \mathrm{id}$ を示せばよい．どちらも同様であるから前者を示す．そこで $k\colon F^s c \to d$ とする．定義より $\varphi^{s|t}_{cd}(k) = G^{t|u}(k) \circ \eta^{c|\langle s,t\rangle}_c$ である．次に $v \in |F|$ を $\widehat{F}v = G^t d$ となるように，$w \in |F|$ を $\widehat{F}w = G^u F^s c$ となるように取れば

$$\begin{aligned}
\psi^{t|s}_{cd}(\varphi^{s|t}_{cd}(k)) &= \varepsilon^{\langle t,v\rangle|d}_d \circ F^{s|v}(G^{u|t}(k) \circ \eta^{c|\langle s,u\rangle}_c) \\
&= \varepsilon^{\langle t,v\rangle|d}_d \circ F^{w|v} G^{u|t}(k) \circ F^{s|w}(\eta^{c|\langle s,u\rangle}_c)
\end{aligned}$$

となる．

$$\begin{tikzcd}
 & & \overset{G}{\curvearrowleft} \quad \overset{\widehat{G}}{\curvearrowright} & \\
c \arrow[r, "\eta^{c|\langle s,u\rangle}_c"] \arrow[dr, "\varphi^{s|t}_{cd}(k)"'] & G^u F^s c \arrow[d, "G^{u|t}(k)"] & u \arrow[d] & F^s c \arrow[d, "k"] \\
 & G^t d & t & d
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\overset{\widehat{F}}{\curvearrowleft} \quad \overset{F}{\curvearrowright} & & & \\
c \arrow[d, "\eta^{c|\langle s,u\rangle}_c"'] & s \arrow[d] & F^s c \arrow[d] \arrow[ddr, "\psi^{t|s}_{cd}(\varphi^{s|t}_{cd}(k))"] & \\
G^u F^s c \arrow[d, "G^{u|t}(k)"'] & w \arrow[d] & F^w G^u F^s c \arrow[d] & \\
G^t d & v & F^v G^t d \arrow[r, "\varepsilon^{\langle t,v\rangle|d}_d"'] & d
\end{tikzcd}$$

また $\varepsilon^{\langle t,v\rangle|d}_d$ が d について ananatural であるから次の図式は可換である．

$$\begin{tikzcd}
F^w G^u F^s c \arrow[r, "\varepsilon^{\langle u,w\rangle|F^s c}_{F^s c}"] \arrow[d, "F^{w|v}G^{ut}(k)"'] & F^s c \arrow[d, "k"] \\
F^v G^t d \arrow[r, "\varepsilon^{\langle t,v\rangle|d}_d"'] & d
\end{tikzcd}$$

ここで η, ε は随伴 $F \dashv G$ の unit, counit だから $(\varepsilon \bullet F) * (F \bullet \eta) = \mathrm{id}_F$ である．即ち

$$\begin{aligned}
(\mathrm{id}_F)^{s|s}_c &= (\varepsilon \bullet F)^{\langle s,u,w\rangle|\langle s\rangle}_c * (F \bullet \eta)^{s|\langle s,u,w\rangle}_c \\
&= \varepsilon^{\langle u,w\rangle|F^s c}_{F^s c} \circ F^{s|w}(\eta^{c|\langle s,u\rangle}_c)
\end{aligned}$$

となる．よって

$$
\begin{aligned}
\psi_{cd}^{t|s}(\varphi_{cd}^{s|t}(k)) &= \varepsilon_d^{\langle t,v\rangle|d} \circ F^{w|v}G^{u|t}(k) \circ F^{s|w}(\eta_c^{c|\langle s,t\rangle}) \\
&= k \circ \varepsilon_{F^s c}^{\langle u,w\rangle|F^s c} \circ F^{s|w}(\eta_c^{c|\langle s,u\rangle}) \\
&= k \circ (\mathrm{id}_F)_c^{s|s} \\
&= k
\end{aligned}
$$

である． $\square$

命題 8. $F\colon C \xrightarrow{\mathrm{a}} D$, $G\colon D \xrightarrow{\mathrm{a}} C$ とする．$c \in C$, $d \in D$ について ananatural な全単射

$$
\varphi_{cd}^{s|t}\colon \mathrm{Hom}_D(F^s c, d) \to \mathrm{Hom}_C(c, G^t d)
$$

が存在するとき $F \dashv G$ である．

証明. $c \in C$ に対して $\eta_c^{c|\langle s,t\rangle} := \varphi_{c,F^s c}^{s|t}(\mathrm{id}_{F^s c})$ と定める．この $\eta_c^{c|\langle s,t\rangle}\colon c \to G^t F^s c$ は c について ananatural である．

$\because$) $f\colon c \to c'$ に対して

$$
\begin{tikzcd}
c \arrow[r, "\eta_c^{c|\langle s,t\rangle}"] \arrow[d, "f"'] & G^t F^s c \arrow[d, "G^{t|t'}F^{s|s'}(f)"] \\
c' \arrow[r, "\eta_{c'}^{c'|\langle s',t'\rangle}"'] & G^{t'} F^{s'} c'
\end{tikzcd}
$$

が可換であることを示せばよい．これは $\varphi_{cd}^{s|t}$ が ananatural だから

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_D(F^s c, F^s c) \arrow[r, "\varphi_{c,F^s c}^{s|t}"] \arrow[d, "F^{s|s'}(f)\circ-"'] & \mathrm{Hom}_C(c, G^t F^s c) \arrow[d, "G^{t|t'}F^{s|s'}(f)\circ-"] \\
\mathrm{Hom}_D(F^s c, F^{s'} c') \arrow[r, "\varphi_{c,F^{s'} c'}^{s|t'}"'] & \mathrm{Hom}_C(c, G^{t'} F^{s'} c') \\
\mathrm{Hom}_D(F^{s'} c', F^{s'} c') \arrow[r, "\varphi_{c',F^{s'} c'}^{s'|t'}"'] \arrow[u, "-\circ F^{s|s'}(f)"] & \mathrm{Hom}_C(c', G^{t'} F^{s'} c') \arrow[u, "-\circ f"']
\end{tikzcd}
$$

が可換となり，よって id の行き先を調べれば

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{id}_{F^s c} \arrow[r, mapsto, "\varphi^{s|t}_{c,F^s c}"] \arrow[d, mapsto, "F^{s|s'}(f)\circ -"'] & \eta_c^{c|\langle s,t\rangle} \arrow[d, mapsto, "G^{u|u'}F^{s|s'}(f)\circ -"] \\
F^{s|s'}(f) \arrow[r, mapsto, "\varphi^{s|t'}_{c,F^{s'}c'}"'] & \varphi^{s|t'}_{c,F^{s'}c'}(f) \\
\mathrm{id}_{F^{s'}c'} \arrow[r, mapsto, "\varphi^{s'|t'}_{c',F^{s'}c'}"'] \arrow[u, mapsto, "-\circ F^{s|s'}(f)"] & \eta_{c'}^{c'|\langle s't'\rangle} \arrow[u, mapsto, "-\circ f"']
\end{tikzcd}$$

$G^{u|u'}F^{s|s'}(f)\circ\eta_c^{c|\langle s,t\rangle} = \eta_{c'}^{c'|\langle s',t'\rangle}\circ f$ が分かる．

従って $\eta\colon \mathrm{id}_C \overset{\mathrm{a}}{\Rightarrow} GF$ となる．

同様にして $\varepsilon_d^{\langle t,s\rangle|d} := (\varphi^{s|t}_{G^t d,d})^{-1}(\mathrm{id}_{G^t d})\colon F^s G^t d \to d$ も $d \in D$ について ananatural である．

この η,ε が

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[rr, "\mathrm{id}_D"] \arrow[dr, "G"'] & \arrow[d, phantom, "\Uparrow\varepsilon"] & D \arrow[dr, "G"] & \\
& C \arrow[ur, "F"] \arrow[rr, "\mathrm{id}_C"'] & \arrow[u, phantom, "\Uparrow\eta"] & C
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
D \arrow[rr, "\mathrm{id}_D"] \arrow[dr, "G"'] & & D \arrow[dr, "G"] & \\
& C \arrow[rr, "\mathrm{id}_C"'] \arrow[ur, phantom, "\Uparrow\mathrm{id}_G"] & & C
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
& D \arrow[rr, "\mathrm{id}_D"] \arrow[dr, "G"'] & \arrow[d, phantom, "\varepsilon\Uparrow"] & D \\
C \arrow[ur, "F"] \arrow[rr, "\mathrm{id}_C"'] & \arrow[u, phantom, "\eta\Uparrow"] & C \arrow[ur, "F"'] &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
& D \arrow[rr, "\mathrm{id}_D"] & & D \\
C \arrow[ur, "F"] \arrow[rr, "\mathrm{id}_C"'] & & C \arrow[ur, "F"'] \arrow[ul, phantom, "\Uparrow\mathrm{id}_F"] &
\end{tikzcd}$$

を満たすことを示せばよい．まず 1 つ目の等式については

$$\begin{aligned}
((G\bullet\varepsilon)*(\eta\bullet G))_d^{u|v} &= (G\bullet\varepsilon)_d^{\langle u,w,x\rangle|v}\circ(\eta\bullet G)_d^{u|\langle u,w,x\rangle} \\
&= G^{\langle x,v\rangle}(\varepsilon_d^{\langle u,w\rangle|d})\circ\eta_{G^u d}^{u|\langle w,x\rangle}
\end{aligned}$$

となるが，ここで $\varphi^{s|t}_{cd}$ が d について ananatural だから

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_D(F^w G^u d, F^w G^u d) \arrow[r, "\varphi^{w|x}_{G^u d,F^w G^u d}"] \arrow[d, "\varepsilon_d^{\langle u,w\rangle|d}\circ -"'] & \mathrm{Hom}_C(G^u d, G^x F^w G^u d) \arrow[d, "G^{x|u}(\varepsilon_d^{\langle u,w\rangle|d})\circ -"] \\
\mathrm{Hom}_D(F^w G^u d, d) \arrow[r, "\varphi^{w|u}_{G^u d,d}"'] & \mathrm{Hom}_C(G^u d, G^u d)
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{id}_{F^wG^ud} \arrow[r, mapsto, "\varphi^{w|x}_{G^ud,F^wG^ud}"] \arrow[dd, mapsto, "\varepsilon^{\langle u,w\rangle|d}_d\circ-"'] & \eta^{u|\langle w,x\rangle}_{G^ud} \arrow[d, mapsto, "G^{x|u}(\varepsilon^{\langle u,w\rangle|d}_d)\circ-"] \\
& G^{x|u}(\varepsilon^{\langle u,w\rangle|d}_d)\circ\eta^{u|\langle w,x\rangle}_{G^ud} \\
\varepsilon^{\langle u,w\rangle|d}_d \arrow[r, mapsto, "\varphi^{w|u}_{G^ud,d}"'] & \mathrm{id}
\end{tikzcd}$$

が可換である．従って

$$\begin{aligned}
G^{\langle x,v\rangle}(\varepsilon^{\langle u,w\rangle|d}_d)\circ\eta^{u|\langle w,x\rangle}_{G^ud} &= G^{\langle u,v\rangle}(\mathrm{id}_d)\circ G^{\langle x,u\rangle}(\varepsilon^{\langle u,w\rangle|d}_d)\circ\eta^{u|\langle w,x\rangle}_{G^ud} \\
&= G^{\langle u,v\rangle}(\mathrm{id}_d) \\
&= (\mathrm{id}_G)^{u|v}_d
\end{aligned}$$

である．

もう 1 つの等式も同様である． □

定義. $G\colon D\xrightarrow{\mathrm{a}} C$ を anafunctor，$c\in C$ を対象とする．このとき c から G への普遍射とは組 $\langle u,p\rangle$ であって以下の条件を満たすものをいう．

(1) $u\in|G|$ は対象で，$p\colon c\to Gu$ は C の射である．
(2) $t\in|G|$ が対象で，$k\colon c\to Gt$ が C の射ならば，$|G|$ の射 h が一意に存在して $Gh\circ p=k$ となる．

$$\begin{tikzcd}
c \arrow[r, "p"] \arrow[dr, "k"'] & Gu \arrow[d, dashed, "Gh"] & u \arrow[d, dashed, "h"] \\
& Gt & t
\end{tikzcd}$$

$G\colon D\to C$ が関手のとき，$c\in C$ から G への (通常の意味での) 普遍射は，G を anafunctor と見なしたときの普遍射と一致する．

定理 9. $F\dashv G\colon C\xrightarrow{\mathrm{a}} D$ の unit を η とする．$c\in C$ に対して $\eta^{c|\langle s,u\rangle}_c\colon c\to G^uF^sc=Gu$ は c から G への普遍射 $\langle u,\eta^{c|\langle s,u\rangle}_c\rangle$ を与える．

証明. 普遍射であることを示すため，$t\in|G|$，$k\colon c\to Gt$ とする．$d:=\widehat{G}t$ とすれば $k\colon c\to G^td$ である．随伴 $F\dashv G$ による全単射

$$\varphi^{s|t}_{cd}\colon \mathrm{Hom}_D(F^sc,d)\to\mathrm{Hom}_C(c,G^td)$$

で k に対応する射を $h\colon F^s c \to d$ とすると，$\varphi^{s|t}_{cd}$ が $d \in D$ について自然だから次の図式が可換である．

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_D(F^s c, F^s c) \arrow[r, "\varphi^{s|u}_{c,F^s c}"] \arrow[d, "h\circ-"'] & \mathrm{Hom}_C(c, G^u F^s c) \arrow[d, "G^{u|t}(h)\circ-"] \\
\mathrm{Hom}_D(F^s c, d) \arrow[r, "\varphi^{s|t}_{cd}"'] & \mathrm{Hom}_C(c, G^t d)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathrm{id}_{F^s c} \arrow[r, mapsto, "\varphi^{s|u}_{cd}"] \arrow[d, mapsto, "h\circ-"'] & \eta_c^{c|\langle s,u\rangle} \arrow[d, mapsto, "G^{u|t}(h)\circ-"] \\
h \arrow[r, mapsto, "\varphi^{s|t}_{cd}"'] & k
\end{tikzcd}
$$

よって $\mathrm{id}_{F^s c}$ の行き先を考えれば $G^{u|t}(h) \circ \eta_c^{c|\langle s,u\rangle} = k$ である．$\varphi^{s|t}_{cd}$ が全単射だから h の一意性も明らかである．よって $\langle u, \eta_c^{c|\langle s,u\rangle}\rangle$ は c から G への普遍射である． □

定理 10. $G\colon D \xrightarrow{\mathrm{a}} C$ を anafunctor とする．任意の $c \in C$ に対して c から G への普遍射が存在するとき，G の左随伴 $F\colon C \xrightarrow{\mathrm{a}} D$ が存在する．

証明. $F\colon C \xrightarrow{\mathrm{a}} D$ を次のように定義する．

- まず圏 $|F|$ を次のように定義する．
  - ⋆ $\mathrm{Ob}(|F|) := \{\langle c, u, p\rangle \mid c \in C, \langle u, p\rangle$ は c から G への普遍射 $\}$.
  - ⋆ $\mathrm{Hom}_{|F|}(\langle c, u, p\rangle, \langle c', u', p'\rangle) := \{\langle f, g\rangle \mid$ 次の図式が可換となる $\}$.

$$
\begin{tikzcd}
c \arrow[r, "p"] \arrow[d, "f"'] & Gu \arrow[d, "Gg"] \\
c' \arrow[r, "p'"'] & Gu'
\end{tikzcd}
$$

- 関手 $\widehat{F}\colon |F| \to C$ を次のように定義する．
  - ⋆ $\langle c, t, p\rangle \in |F|$ に対して $\widehat{F}\langle c, u, p\rangle := c$.
  - ⋆ $\langle f, g\rangle \in \mathrm{Mor}(|F|)$ に対して $\widehat{F}\langle f, g\rangle := f$.

  任意の $c \in C$ に対して c から G への普遍射が存在するから，$\widehat{F}$ は対象について全射である．また普遍射の普遍性により $\widehat{F}$ は忠実充満である．
- 関手 $F\colon |F| \to D$ を次のように定義する．
  - ⋆ $\langle c, u, p\rangle \in |F|$ に対して $F\langle c, u, p\rangle := \widehat{G}u$.
  - ⋆ $\langle f, g\rangle \in \mathrm{Mor}(|F|)$ に対して $F\langle f, g\rangle := \widehat{G}g$.

このとき $F \dashv G$ であることを示せばよい．

そこで $c \in C$，$d \in D$，$k\colon F^s c \to d$ とする．このとき F の定義より $s = \langle c, u, p\rangle$ と書

けて，$F^{\langle c,u,p\rangle}c = \widehat{G}u$ である．そこで $\varphi^{s|t}_{cd}(k) := G^{u|t}(k) \circ p$ と定める．

$$
\begin{tikzcd}
c \arrow[r, "p"] \arrow[dr, "\varphi^{s|t}_{cd}(k)"'] & G^u\widehat{G}u = Gu \arrow[d, "G^{u|t}k"] & u \arrow[d] \arrow[l, bend right, "G"'] \arrow[r, bend left, "\widehat{G}"] & \widehat{G}u = F^{\langle c,u,k\rangle}c \arrow[d, "k"] \\
& G^t d & t & d
\end{tikzcd}
$$

これにより写像 $\varphi^{s|t}_{cd}\colon \mathrm{Hom}_D(F^s c, d) \to \mathrm{Hom}_C(c, G^t d)$ が定まる．これは $c \in C$，$d \in D$ について自然である．

∵) $f\colon c' \to c$，$g\colon d \to d'$ に対して

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_D(F^s c, d) \arrow[r, "\varphi^{s|t}_{cd}"] \arrow[d, "g\circ - \circ F^{s'|s}(f)"'] & \mathrm{Hom}_C(c, G^t d) \arrow[d, "G^{t|t'}(g)\circ - \circ f"] \\
\mathrm{Hom}_D(F^{s'} c', d') \arrow[r, "\varphi^{s'|t'}_{c'd'}"'] & \mathrm{Hom}_C(c', G^{t'} d')
\end{tikzcd}
$$

が可換であることを示せばよい．$s = \langle c, u, p\rangle$，$s' = \langle c', u', p'\rangle$ と書いて k の行き先を考えると

$$
\begin{tikzcd}
k \arrow[r, mapsto, "\varphi^{s|t}_{cd}"] \arrow[dd, mapsto, "g\circ - \circ F^{s'|s}(f)"'] & G^{u|t}(k) \circ p \arrow[d, mapsto, "G^{t|t'}(g)\circ - \circ f"] \\
& G^{t|t'}(g) \circ G^{u|t}(k) \circ p \circ f \\
g \circ k \circ F^{s'|s}(f) \arrow[r, mapsto, "\varphi^{s'|t'}_{c'd'}"'] & G^{u'|t'}(g \circ k \circ F^{s'|s}(f)) \circ p' \arrow[d, equal] \\
& G^{t|t'}(g) \circ G^{u|t}(k) \circ G^{u'|u}F^{s'|s}(f) \circ p'
\end{tikzcd}
$$

となる．ここで $p'\colon c' \to Gu' = G^{u'}F^{s'}c$ が普遍射だから

$$
\begin{tikzcd}
c' \arrow[r, "p'"] \arrow[d, "f"'] & G^{u'}F^{s'}c' \arrow[d, dashed, "G^{u'|u}(h)"] & F^{s'}c' \arrow[d, dashed, "h"] \\
c \arrow[r, "p"'] & G^u F^s c & F^{s'}c'
\end{tikzcd}
$$

が可換となるような h が存在する．このとき $\langle f,h\rangle\colon s=\langle c,u,p\rangle\to\langle c',u',p'\rangle=s'$ は $|F|$ の射である．また定義より $\widehat{F}\langle f,h\rangle=f$，$F\langle f,h\rangle=h$ となる．よって $F^{s'|s}(f)=h$ となるから $p\circ f=G^{u'|u}F^{s'|s}(f)\circ p'$ が分かる．

普遍射の普遍性により，$\varphi^{s|t}_{cd}$ は明らかに全単射である．よって $F\dashv G$ が分かった． $\square$

例 11. J,C を小圏として任意の $T\colon J\to C$ に対して余極限 $\operatorname{colim}T$ が存在するとする．このとき対角関手 $\Delta\colon C\to C^J$ は (anafunctor としての) 左随伴 $F\colon C^J\xrightarrow{\mathrm{a}}C$ が存在する．$T\in C^J$ に対して $F^s(T)$ は T の余極限である． $\square$

定義. $F\colon C\xrightarrow{\mathrm{a}}D$ を anafunctor とする．

(1) F が本質的全射 $\Longleftrightarrow$ $F\colon|F|\to D$ が本質的全射.
(2) F が忠実 $\Longleftrightarrow$ $F\colon|F|\to D$ が忠実.
(3) F が充満 $\Longleftrightarrow$ $F\colon|F|\to D$ が充満.

定理 12. anafunctor $F\colon C\xrightarrow{\mathrm{a}}D$ に対して

$$F\text{ が }\mathbf{Ana}\text{ におけるの同値となる}\Longleftrightarrow F\text{ が本質的全射かつ忠実充満である．}$$

証明. ($\Longrightarrow$) F が同値だとすると，ある anafunctor $G\colon D\xrightarrow{\mathrm{a}}C$ と同型射 $\eta\colon\mathrm{id}_C\overset{\mathrm{a}}{\Rightarrow}GF$，$\varepsilon\colon FG\overset{\mathrm{a}}{\Rightarrow}\mathrm{id}_D$ が存在する．

まず本質的全射であることを示す．$d\in D$ とすると $\mathrm{id}_D\cong FG$ より $d\cong F^s(G^t(d))$ となるから F は本質的全射である．

次に忠実であることを示す．そのために $|F|$ の射 $f,g\colon s\to s'$ が $Ff=Fg$ を満たすとする．$c:=\widehat{F}s$，$c':=\widehat{F}s'$ とすると，$\eta_c^{c|\langle s,t\rangle}\colon c\to G^tF^sc$ が c について ananatural だから

$$\begin{tikzcd}
c \arrow[r, "\eta_c^{c|\langle s,t\rangle}"] \arrow[d, "\widehat{F}f"'] & G^tF^sc \arrow[d, "G^{t|t'}Ff"] \\
c' \arrow[r, "\eta_{c'}^{c'|\langle s',t'\rangle}"'] & G^{t'}F^{s'}c'
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
c \arrow[r, "\eta_c^{c|\langle s,t\rangle}"] \arrow[d, "\widehat{F}g"'] & G^tF^sc \arrow[d, "G^{t|t'}Fg"] \\
c' \arrow[r, "\eta_{c'}^{c'|\langle s',t'\rangle}"'] & G^{t'}F^{s'}c'
\end{tikzcd}$$

が可換である．今 $Ff=Fg$ かつ $\eta_c^{c|\langle s,t\rangle}$ が同型だから

$$\widehat{F}f=(\eta_{c'}^{c'|\langle s',t'\rangle})^{-1}\circ G^{t|t'}Ff\circ\eta_c^{c|\langle s,t\rangle}=(\eta_{c'}^{c'|\langle s',t'\rangle})^{-1}\circ G^{t|t'}Fg\circ\eta_c^{c|\langle s,t\rangle}=\widehat{F}g$$

となる．$\widehat{F}$ が忠実だから $f=g$ が分かった．

最後に充満であることを示す．$s, s' \in |F|$ として $f\colon Fs \to Fs'$ を D の射とする．$c := \widehat{F}s$，$c' := \widehat{F}s'$ として $g := (\eta_{c'}^{c'|\langle s',t'\rangle})^{-1} \circ G^{t|t'}Ff \circ \eta_c^{c|\langle s,t\rangle}$ と定める．

$$\begin{tikzcd}
c \arrow[r, "\eta_c^{c|\langle s,t\rangle}"] \arrow[d, "g"'] & G^tF^sc \arrow[d, "G^{t|t'}(f)"] \\
c' \arrow[r, "\eta_{c'}^{c'|\langle s',t'\rangle}"'] & G^{t'}F^{s'}c'
\end{tikzcd}$$

このとき

$$\begin{tikzcd}
c \arrow[r, "\eta_c^{c|\langle s,t\rangle}"] \arrow[d, "g"'] & G^tF^sc \arrow[d, "G^{t|t'}F^{s|s'}(g)"] \\
c' \arrow[r, "\eta_{c'}^{c'|\langle s',t'\rangle}"'] & G^{t'}F^{s'}c'
\end{tikzcd}$$

が可換だから $G^{t|t'}F^{s|s'}(g) = G^{t|t'}f$ が分かる．F が忠実なのと同様にして G も忠実だから $F^{s|s'}(g) = f$ が分かる．

($\Longleftarrow$) $G\colon D \xrightarrow{\mathrm{a}} C$ を次のように定義する．

- まず圏 $|G|$ を次のように定義する．
  - ⋆ $\mathrm{Ob}(|G|) := \{\langle u, d, k\rangle \mid u \in |F|, d \in D, k\colon d \to Fu$ は同型 $\}$.
  - ⋆ $\mathrm{Hom}_{|G|}(\langle u, d, k\rangle, \langle u', d', k'\rangle) := \{\langle p, q\rangle \mid$ 次の図式が可換となる $\}$.

$$\begin{tikzcd}
d \arrow[r, "k"] \arrow[d, "p"'] & Fu \arrow[d, "Fq"] \\
d' \arrow[r, "k'"'] & Fu'
\end{tikzcd}$$

- 関手 $\widehat{G}\colon |G| \to D$ を次のように定義する．
  - ⋆ $\langle u, d, k\rangle \in |G|$ に対して $\widehat{G}\langle u, d, k\rangle := d$.
  - ⋆ $\langle p, q\rangle \in \mathrm{Mor}(|G|)$ に対して $\widehat{G}\langle p, q\rangle := q$.
- 関手 $G\colon |G| \to C$ を次のように定義する．
  - ⋆ $\langle u, d, k\rangle \in |G|$ に対して $G\langle u, d, k\rangle := \widehat{F}u$.
  - ⋆ $\langle p, q\rangle \in \mathrm{Mor}(|G|)$ に対して $G\langle p, q\rangle := \widehat{F}p$.

このとき $\mathrm{id}_C \cong GF$，$FG \cong \mathrm{id}_D$ となることを示せばよい．

まず $c\in C$ に対して G^tF^sc を考える．G の定義より $t=\langle u,F^sc,k\rangle$ と書ける．このとき $G^tF^sc=\widehat{F}u$ かつ $k\colon F^sc\to Fu=F^u(\widehat{F}u)$ である．F が忠実充満であるから，$|F|$ の射 $\widetilde{k}\colon s\to u$ が一意に存在して $F\widetilde{k}=k$ となる．このとき $\widehat{F}\widetilde{k}\colon c=\widehat{F}(s)\to\widehat{F}(u)=G^tF^sc$ である．そこで $\eta_c^{c|\langle s,t\rangle}:=\widehat{F}\widetilde{k}$ と定める．これは $c\in C$ について ananatural である．

∵) $f\colon c\to c'$ に対して次の図式が可換であることを示せばよい．

$$\begin{tikzcd}
c \arrow[r, "\eta_c^{c|\langle s,t\rangle}"] \arrow[d, "f"'] & G^tF^s(c) \arrow[d, "G^{t|t'}(F^{s|s'}(f))"] \\
c' \arrow[r, "\eta_{c'}^{c'|\langle s',t'\rangle}"'] & G^{t'}F^{s'}(c')
\end{tikzcd}$$

$t=\langle u,F^sc,k\rangle$，$t'=\langle u',F^{s'}c',k'\rangle$ と書いて，$|G|$ の射 $g\colon t\to t'$ を $\widehat{G}(g)=F^{s|s'}(f)$ となるように取る．$g=\langle p,q\rangle$ と書くと $F^{s|s'}(f)=\widehat{G}(g)=q$，$G(g)=p$ であり

$$\begin{tikzcd}
Fu \arrow[r, "k"] \arrow[d, "Fp"'] & F^sc \arrow[d, "F^{s|s'}(f)"] \\
Fu' \arrow[r, "k'"'] & F^{s'}c'
\end{tikzcd}$$

が可換である．

$$\begin{tikzcd}
C & {|F|} \arrow[l, "\widehat{F}"'] \arrow[r, "F"] & D & {|G|} \arrow[l, "\widehat{G}"'] \arrow[r, "G"] & C
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
 & u \arrow[ddd, bend left=60, "p"] & Fu & & \\
c \arrow[d, "f"] & s \arrow[u, "\widetilde{k}"] \arrow[d] & F^sc \arrow[u, "k"'] \arrow[d, "F^{s|s'}(f)"] & t=\langle u,F^sc,k\rangle \arrow[d, "g=\langle p,F^{s|s'}(f)\rangle"] & \widehat{F}u \arrow[d, "\widehat{F}p"] \\
c' & s' \arrow[d, "\widetilde{k'}"'] & F^{s'}c' \arrow[d, "k'"] & t'=\langle u',F^{s'}c',k'\rangle & \widehat{F}u' \\
 & u' & Fu' & &
\end{tikzcd}$$

従って可換図式

$$\begin{tikzcd} c \arrow[r, "\widetilde{\widehat{F}k}"] \arrow[d, "f"'] & \widehat{F}u \arrow[d, "\widehat{F}(p)"] \\ c' \arrow[r, "\widetilde{\widehat{F}k'}"'] & \widehat{F}u' \end{tikzcd}$$

を得る．これは最初の図式である．

k が同型射だから $\eta_c^{c|\langle s,t\rangle}$ も同型である．よって $\mathrm{id}_C \cong GF$ が分かった．

次に $d \in D$ に対して $F^s G^t d$ を考える．G の定義より $t = \langle u, d, k\rangle$ と書けて，またこのとき $G^t d = \widehat{F}u = \widehat{F}s$ である．よって $k\colon F^u G^t d = Fu \to d$ となる．そこで $\varepsilon_d^{\langle t,s\rangle|d} := k \circ F^{su}(\mathrm{id})$ と定める．これは $d \in D$ について ananatural である．

∵) $f\colon d \to d'$ に対して次の図式が可換であることを示せばよい．

$$\begin{tikzcd} F^s G^t d \arrow[r, "\varepsilon_d^{\langle t,s\rangle|d}"] \arrow[d, "F^{s|s'}(G^{t|t'}(f))"'] & d \arrow[d, "f"] \\ F^{s'} G^{t'} d' \arrow[r, "\varepsilon_{d'}^{\langle t',s'\rangle|d'}"'] & d' \end{tikzcd}$$

これは定義より次のようになる．

$$\begin{tikzcd} F^s G^{\langle u,d,k\rangle} d \arrow[r] \arrow[d, "F^{s|s'}(G^{t|t'}(f))"'] & F^u G^{\langle u,d,k\rangle} d \arrow[r, equal] & Fu \arrow[r, "k"] \arrow[d] & d \arrow[d, "f"] \\ F^{s'} G^{\langle u',d',k'\rangle} d \arrow[r] & F^{u'} G^{\langle u',d',k'\rangle} d' \arrow[r, equal] & Fu' \arrow[r, "k'"'] & d' \end{tikzcd}$$

k が同型射だから $\varepsilon_d^{\langle t,s\rangle|d}$ も同型である．よって $FG \cong \mathrm{id}_D$ が分かった． □

定理 13. $F \dashv G\colon C \overset{\mathrm{a}}{\to} D$ とする．$T\colon I \to |F|$ を関手，$\mu\colon T \Rightarrow \Delta x$ を自然変換として $\langle \widehat{F}x, \widehat{F}\mu\rangle$ が $\widehat{F}T$ の余極限を与えるとする．このとき $\langle Fx, F\mu\rangle$ は FT の余極限である．

証明. $\langle Fx, F\mu\rangle$ が余極限であることを示すため，$\theta\colon FT \Rightarrow \Delta u$ を自然変換とする．次の

図式は可換である．

$$\begin{tikzcd}
FTi \arrow[d, "FTf"'] \arrow[dr, "F\mu_i"] \arrow[drr, bend left, "\theta_i"] & & \\
& Fx & u \\
FTj \arrow[ur, "F\mu_j"'] \arrow[urr, bend right, "\theta_j"'] & &
\end{tikzcd}$$

$F \dashv G$ により次の実線の可換図式を得る．

$$\begin{tikzcd}
\widehat{F}Ti \arrow[d, "\widehat{F}Tf"'] \arrow[dr, "\widehat{F}\mu_i"] \arrow[drr, bend left, "\widetilde{\theta_i}"] & & \\
& \widehat{F}x \arrow[r, dashed, "h"] & G^t u \\
\widehat{F}Tj \arrow[ur, "\widehat{F}\mu_j"'] \arrow[urr, bend right, "\widetilde{\theta_j}"'] & &
\end{tikzcd}$$

$\langle \widehat{F}x, \widehat{F}\mu \rangle$ が $\widehat{F}T$ の余極限だから，点線の射 $h\colon \widehat{F}x \to G^t u$ が一意に存在して可換となる．よって再び $F \dashv G$ により次の可換図式を得る．

$$\begin{tikzcd}
FTi \arrow[d, "FTf"'] \arrow[dr, "F\mu_i"] \arrow[drr, bend left, "\theta_i"] & & \\
& Fx \arrow[r, "\widetilde{h}"] & u \\
FTj \arrow[ur, "F\mu_j"'] \arrow[urr, bend right, "\theta_j"'] & &
\end{tikzcd}$$

この $\widetilde{h}$ は明らかに一意である． □

2 選択公理ありの場合

この節では選択公理を仮定する．選択公理を仮定すると，anafunctor は通常の関手と以下の意味で同等である．

命題 14. 任意の anafunctor $F\colon C \overset{\mathrm{a}}{\to} D$ に対して，関手 $G\colon C \to D$ と同型 $\theta\colon F \overset{\mathrm{a}}{\Rightarrow} G$ が存在する．

証明. $F\colon C \overset{\mathrm{a}}{\to} D$ とすると関手 $\widehat{F}\colon |F| \to C$ は対象について全射，かつ忠実充満だから，(選択公理により) ある関手 $H\colon C \to |F|$ が存在して $H\widehat{F} \cong \mathrm{id}_{|F|}$ かつ $\widehat{F}H \cong \mathrm{id}_C$ となる

$$C \underset{H}{\overset{\widehat{F}}{\leftrightarrows}} |F| \xrightarrow{F} D$$

$G := FH\colon C \to D$ と定める．$P(\widehat{F}, \mathrm{id}_C) \cong |F|$ であり，この同型により $F \cong FH\widehat{F} = G\widehat{F}$ となる．

$$\begin{tikzcd}
 & {|F|} \arrow[dl, "\widehat{F}"'] \arrow[drrr, bend left, "F"] & & & \\
C & & {|F|} \arrow[ul, "\mathrm{id}"'] \arrow[dl, "\widehat{F}"] \arrow[rr, phantom, "\Downarrow\wr"] & & D \\
 & C \arrow[ul, "\mathrm{id}_C"] \arrow[urrr, bend right, "G"'] & & &
\end{tikzcd}$$

故に anafunctor として $F \cong G$ である． □

系 **15.** $\mathbf{Cat}(C, D) \simeq \mathbf{Ana}(C, D)$ である． □

参考文献

[1] M. Makkai, Avoiding the axiom of choice in general category theory, Journal of Pure and Applied Algebra 108 (1996), 109–173, `https://doi.org/10.1016/0022-4049(95)00029-1`

[2] E. Palmgren, Locally cartesian closed categories without chosen constructions, `http://www.tac.mta.ca/tac/volumes/20/1/20-01abs.html`