普遍性

alg-d
https://alg-d.com/math/kan_extension/

2025 年 1 月 20 日

圏論で重要な考え方の 1 つが普遍性 (universal property) である．普遍性を使うと，与えられた圏 C の中で様々な「構成」が可能となる．

例えば「構成」の例として，$\mathbf{Set}, \mathbf{Grp}, \mathbf{Top}$ などの多くの圏においては，2 つの対象 a, b が与えられたときに直積と呼ばれる新しい対象 $a \times b$ が定義される．実は，一般の圏 C においても (存在するかは分からないが) 直積が定義できる．まずはそれを見てみよう．

定義. C を圏，$a, b \in C$ を対象とする．a と b の直積 (product) とは，3 つ組 $\langle u, p_0, p_1 \rangle$ であって以下の条件を満たすものである．

(1) u は C の対象である．

(2) $p_0 \colon u \to a$，$p_1 \colon u \to b$ は C の射である．

$$\begin{tikzcd} & u \arrow[dl, "p_0"'] \arrow[dr, "p_1"] & \\ a & & b \end{tikzcd}$$

(3) $\langle v, q_0, q_1 \rangle$ が同じ条件 (即ち，v が対象で $q_0 \colon v \to a$，$q_1 \colon v \to b$ が射となる) を満たすならば，射 $h \colon v \to u$ が一意に存在して $q_0 = p_0 \circ h$，$q_1 = p_1 \circ h$ となる．即ち次の図式が可換である．

$$\begin{tikzcd} & v \arrow[ddl, bend right, "q_0"'] \arrow[d, dashed, "h"] \arrow[ddr, bend left, "q_1"] & \\ & u \arrow[dl, "p_0"'] \arrow[dr, "p_1"] & \\ a & & b \end{tikzcd}$$

この 3 番目の「同じ条件を満たすものがあるならば，射が一意に存在して可換となる」という条件が重要で，このような形の条件を普遍性と呼ぶ．この場合は直積の定義に現れ

ている普遍性なので，条件 (3) を「直積の普遍性」などと呼ぶ．また定義にあるように，直積とは本当は 3 つ組 $\langle u, p_0, p_1 \rangle$ のことであるが，単に u を直積と呼ぶことも多い．この場合 p_0, p_1 に当たる射は明示されていないが，暗黙のうちに与えられていることになる[*1]．

まずは例をいくつか見てみよう．

例 1. 集合の圏 **Set** の場合, 通常の意味での直積が, 上で定義した意味での直積となる．詳しく言えば，$X, Y \in \mathbf{Set}$ に対して $X \times Y$ を直積集合，$p_0 \colon X \times Y \to X$，$p_1 \colon X \times Y \to Y$ を標準射影としたとき $\langle X \times Y, p_0, p_1 \rangle$ が X と Y の直積である．

それを示すため集合 $Z \in \mathbf{Set}$ と写像 $q_0 \colon Z \to X$，$q_1 \colon Z \to Y$ を任意に取る．このとき写像 $h \colon Z \to X \times Y$ を $h(a) := \langle q_0(a), q_1(a) \rangle \in X \times Y$ で定義する．

$$\begin{tikzcd}
& Z \arrow[d, "h"] \arrow[ldd, bend right, "q_0"'] \arrow[rdd, bend left, "q_1"] & \\
& X \times Y \arrow[ld, "p_0"] \arrow[rd, "p_1"'] & \\
X & & Y
\end{tikzcd}$$

明らかに $q_0 = p_0 \circ h$，$q_1 = p_1 \circ h$ を満たす．また可換性を満たす h がこれ 1 つしかないことも明らかである．故に $\langle X \times Y, p_0, p_1 \rangle$ が X と Y の直積である． □

例 2. 群の圏 **Grp** の直積は，通常の群の直積である． □

例 3. 位相空間の圏 **Top** の直積は，通常の直積位相空間である． □

例 4. 順序集合 $\langle X, \leq \rangle$ を圏とみなし，$a, b \in X$ の直積 $\langle u, p_0, p_1 \rangle$ を考えよう．圏 X の射の定義を使って直積の定義書き直すと以下のようになる．

(1) $u \in X$ である．

(2) $u \leq a$，$u \leq b$ である．

(3) $v \in X$ が $v \leq a$，$v \leq b$ を満たすならば $v \leq u$ である．

即ち，u は $\{a, b\}$ の下限 (= 最大下界) である．つまりこの場合，直積は存在しない可能性がある．もし $\langle X, \leq \rangle$ が全順序集合ならば，直積は常に存在して，$\min\{a, b\}$ が a, b の直積となる． □

[*1] 群とは集合と演算の組 $\langle G, \cdot \rangle$ のことだが，これを単に群 G と書くことが数学ではよくある．これと同じ話である．

例 5. X を集合として冪集合 $\mathcal{P}(X)$ を考える．これは包含関係により順序集合，即ち圏となる．この圏 $\mathcal{P}(X)$ の直積は下限だから (例 4)，$Y, Z \in \mathcal{P}(X)$ の直積は $Y \cap Z$ となることが分かる．従ってこの場合は直積は常に存在する． □

C を圏，$a, b \in C$ を対象とする．このとき一般には a と b の直積は存在するか分からないし，例え存在したとしても唯 1 つとは限らない．しかし実は普遍性を使うと次の命題を示すことができる．

命題 6. C を圏，$a, b \in C$ を対象とする．$\langle u, p_0, p_1 \rangle$，$\langle v, q_0, q_1 \rangle$ を a と b の直積とする．このとき同型 $u \cong v$ が成り立つ．

証明. $\langle u, p_0, p_1 \rangle$，$\langle v, q_0, q_1 \rangle$ を a と b の直積とすると次の 2 つの図式を得る．

$$\begin{tikzcd} & u \arrow[dl, "p_0"'] \arrow[dr, "p_1"] & \\ a & & b \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & v \arrow[dl, "q_0"'] \arrow[dr, "q_1"] & \\ a & & b \end{tikzcd}$$

さて，まず $\langle u, p_0, p_1 \rangle$ が a と b の直積だから，直積の普遍性により，射 $h \colon v \to u$ が一意に存在して次が可換となる．

$$\begin{tikzcd} & v \arrow[d, dashed, "h"] \arrow[ddl, bend right, "q_0"'] \arrow[ddr, bend left, "q_1"] & \\ & u \arrow[dl, "p_0"'] \arrow[dr, "p_1"] & \\ a & & b \end{tikzcd}$$

次に $\langle v, q_0, q_1 \rangle$ の普遍性から，射 $k \colon u \to v$ が一意に存在して次が可換となる．

$$\begin{tikzcd} & u \arrow[d, dashed, "k"] \arrow[ddl, bend right, "p_0"'] \arrow[ddr, bend left, "p_1"] & \\ & v \arrow[dl, "q_0"'] \arrow[dr, "q_1"] & \\ a & & b \end{tikzcd}$$

この 2 つを組み合わせて次の可換図式を得る．

$$\begin{tikzcd} & u \arrow[dl, bend right, "p_0"'] \arrow[d, "k"] \arrow[dr, bend left, "p_1"] & \\ & v \arrow[d, "h"] & \\ a & u \arrow[l, "p_0"] \arrow[r, "p_1"'] & b \end{tikzcd}$$

一方，次の図式は可換である．

$$\begin{tikzcd} & u \arrow[ddl, bend right, "p_0"'] \arrow[dd, "\mathrm{id}_u"] \arrow[ddr, bend left, "p_1"] & \\ & & \\ a & u \arrow[l, "p_0"] \arrow[r, "p_1"'] & b \end{tikzcd}$$

故に $\langle u, p_0, p_1 \rangle$ の普遍性から $h \circ k = \mathrm{id}_u$ でなければならない．同様にして $k \circ h = \mathrm{id}_v$ も分かる．従って $u \cong v$ である． □

つまり，a と b の直積は，もし存在すれば同型を除いて一意に定まる．そこで a と b の直積が存在するとき，そのうちの 1 つ $\langle u, p_0, p_1 \rangle$ を取り，この u を $a \times b$ と書く．$a \times b$ は一意には定まらないけれども，どれを取ったとしても全て同型となっているので通常は困らない．

さて，直積と同じように，普遍性を使って定義される概念は他にも色々あるので，代表的なものを紹介する．

定義. 圏 C の終対象 (terminal object または final object) とは，以下を満たす u である．

(1) u は C の対象である．
(2) v が同じ条件 (即ち，v が C の対象となる) を満たすならば，射 $h\colon v \to u$ が一意に存在する．

※ 直積の定義と同じ形式で書いたため少し分かりにくくなってしまったが，要するに

$$u \text{ が終対象} \iff \text{任意の } v \in C \text{ に対して射 } v \to u \text{ が一意に存在する}$$

である．また，終対象は記号 1 で表すことが多い．また $v \in C$ に対して一意に存在する射 $v \to 1$ は記号では $!$ で表すことが多い．

定義． C を圏，$a, b, c \in C$ を対象，$f\colon a \to c$，$g\colon b \to c$ を射とする．

$$\begin{tikzcd} & b \arrow[d, "g"] \\ a \arrow[r, "f"'] & c \end{tikzcd}$$

f と g の pullback とは，3 つ組 $\langle u, p_0, p_1 \rangle$ であって以下の条件を満たすものである．

(1) u は C の対象である．

(2) $p_0\colon u \to a$，$p_1\colon u \to b$ は C の射で，$f \circ p_0 = g \circ p_1$ を満たす (即ち次の図式が可換である)．

$$\begin{tikzcd} u \arrow[r, "p_1"] \arrow[d, "p_0"'] & b \arrow[d, "g"] \\ a \arrow[r, "f"'] & c \end{tikzcd}$$

(3) $\langle v, q_0, q_1 \rangle$ が同じ条件 (即ち，v が対象で $q_0\colon v \to a$，$q_1\colon v \to b$ が射で $f \circ q_0 = g \circ q_1$ となる) を満たすならば，射 $h\colon v \to u$ が一意に存在して $q_0 = p_0 \circ h$，$q_1 = p_1 \circ h$ となる (即ち次の図式が可換である)．

$$\begin{tikzcd} v \arrow[dr, dashed, "h"] \arrow[drr, bend left, "q_1"] \arrow[ddr, bend right, "q_0"'] & & \\ & u \arrow[r, "p_1"'] \arrow[d, "p_0"] & b \arrow[d, "g"] \\ & a \arrow[r, "f"'] & c \end{tikzcd}$$

u を記号 $a \times_c b$ で表す．

※ 図式

$$\begin{tikzcd} u \arrow[r, "p_1"] \arrow[d, "p_0"'] & b \arrow[d, "g"] \\ a \arrow[r, "f"'] & c \end{tikzcd}$$

において $\langle u, p_0, p_1 \rangle$ が f と g の pullback になっていることを表すために

$$\begin{tikzcd} u \arrow[r, "p_1"] \arrow[d, "p_0"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & b \arrow[d, "g"] \\ a \arrow[r, "f"'] & c \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} u \arrow[r, "p_1"] \arrow[d, "p_0"'] \arrow[dr, phantom, "\text{p.b.}"] & b \arrow[d, "g"] \\ a \arrow[r, "f"'] & c \end{tikzcd}$$

などのような表記を使うことがある．

定義. C を圏，$a, b \in C$ を対象，$f, g\colon a \to b$ を射とする．f と g の equalizer とは，2 つ組 $\langle u, e \rangle$ であって以下の条件を満たすものである．

(1) u は C の対象である．

(2) $e\colon u \to a$ は C の射で，$f \circ e = g \circ e$ を満たす．

$$\begin{tikzcd} u \arrow[r, "e"] & a \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & b \end{tikzcd}$$

(3) $\langle v, e' \rangle$ が同じ条件 (即ち，v が対象で $e'\colon v \to a$ が射で，$f \circ e' = g \circ e'$ となる) を満たすならば，射 $h\colon v \to u$ が一意に存在して $e' = e \circ h$ となる．

$$\begin{tikzcd} u \arrow[r, "e"] & a \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & b \\ v \arrow[u, dashed, "h"] \arrow[ur, "e'"'] & & \end{tikzcd}$$

終対象，pullback，equalizer も，直積と同様の方法で，存在すれば同型を除いて一意となることが分かる．

例 7. 集合の圏 **Set** の場合．終対象は 1 元集合 $1 = \{*\}$ である．

X, Y, Z を集合，$X \xrightarrow{f} Z \xleftarrow{g} Y$ を写像とするとき pullback $X \times_Z Y$ は $X \times_Z Y := \{\langle a, b \rangle \in X \times Y \mid f(a) = g(b)\}$ と定義すればよい (p_0, p_1 は射影とする)．

$f, g\colon X \to Y$ を写像とするとき，f, g の equalizer は $U := \{a \in X \mid f(a) = g(a)\}$ として，包含写像 $i\colon U \to X$ で与えられる． $\square$

例 **8.** アーベル群の圏 $\mathbf{Ab}$ を考える．$\mathbf{Ab}$ の終対象は自明なアーベル群である．A, B をアーベル群, $f\colon A \to B$ を射として, $i\colon \ker(f) \to A$ を包含写像とする．また射 $0\colon A \to B$ を $0(x) := 0$ で定義する．

$$\begin{tikzcd} \ker(f) \arrow[r, "i"] & A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "0"'] & B \end{tikzcd}$$

このとき $\langle \ker(f), i \rangle$ が f と 0 の equalizer であることが分かる． $\square$

練習のため，普遍性を使って示せる命題をいくつか示してみる．

命題 **9.** 可換図式

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "f"'] \arrow[d] & b \arrow[r, "g"'] \arrow[d] & c \arrow[d] \\ x \arrow[r] & y \arrow[r] & z \end{tikzcd}$$

において右の四角が pullback を与えているとする．このとき

$$\text{左の四角が pullback を与える} \iff \text{外側の四角が pullback を与える．}$$

証明. ($\Longrightarrow$) 左の四角が pullback を与えるとする．外側の四角が pullback を与えることを示すため，次の射を可換になるように取る．

$$\begin{tikzcd} d \arrow[rrrd, bend left] \arrow[rdd, bend right] & & & \\ & a \arrow[r] \arrow[d] & b \arrow[r] \arrow[d] & c \arrow[d] \\ & x \arrow[r] & y \arrow[r] & z \end{tikzcd}$$

図式を可換にする射 $d \to a$ が一意に存在することを示せばよい．

まず射の存在を示す．右の四角が pullback だから，射 $d \to b$ が存在して可換となる．

$$\begin{tikzcd}
d \arrow[drr, dashed] \arrow[drrr, bend left] \arrow[ddr, bend right] & & & \\
& a \arrow[r] \arrow[d] & b \arrow[r] \arrow[d] & c \arrow[d] \\
& x \arrow[r] & y \arrow[r] & z
\end{tikzcd}$$

よって，左の四角が pullback だから，射 $d \to a$ が存在して可換となる．

$$\begin{tikzcd}
d \arrow[dr, dashed] \arrow[drr, bend left] \arrow[drrr, bend left] \arrow[ddr, bend right] & & & \\
& a \arrow[r] \arrow[d] & b \arrow[r] \arrow[d] & c \arrow[d] \\
& x \arrow[r] & y \arrow[r] & z
\end{tikzcd}$$

故に射が存在することは示せた．一意性を示すため，$h, h' \colon d \to a$ を，次の図式を可換にする射とする．

$$\begin{tikzcd}
d \arrow[dr, "{h, h'}"] \arrow[drrr, bend left] \arrow[ddr, bend right] & & & \\
& a \arrow[r, "f"'] \arrow[d] & b \arrow[r] \arrow[d] & c \arrow[d] \\
& x \arrow[r] & y \arrow[r] & z
\end{tikzcd}$$

右の四角が pullback だから，その普遍性より $f \circ h = f \circ h'$ でなければならない．そこで $k := f \circ h$ とすれば次の可換図式を得る．

$$\begin{tikzcd}
d \arrow[dr, "{h, h'}"] \arrow[drr, bend left, "k"] \arrow[ddr, bend right] & & & \\
& a \arrow[r, "f"'] \arrow[d] & b \arrow[r] \arrow[d] & c \arrow[d] \\
& x \arrow[r] & y \arrow[r] & z
\end{tikzcd}$$

左の四角が pullback だから，その普遍性より $h = h'$ が分かる．

($\Longleftarrow$) 外側の四角が pullback であるとする．左の四角が pullback を与えることを示すため，次の射を可換になるように取る．

$$
\begin{tikzcd}
d \arrow[rrd, bend left, "q"] \arrow[rdd, bend right] & & & \\
& a \arrow[r, "f"'] \arrow[d] & b \arrow[r, "g"'] \arrow[d] & c \arrow[d] \\
& x \arrow[r] & y \arrow[r] & z
\end{tikzcd}
$$

図式を可換にする射 $d \to a$ が一意に存在することを示せばよい．

まず射が存在することを示す．合成 $g \circ q$ を考えれば次の実線の可換図式を得るから，外側の pullback の普遍性により点線の射 $h \colon d \to a$ が存在し可換となる．

$$
\begin{tikzcd}
d \arrow[rrrd, bend left, "g\circ q"] \arrow[rd, dashed, "h"] \arrow[rdd, bend right] & & & \\
& a \arrow[r, "f"'] \arrow[d] & b \arrow[r, "g"'] \arrow[d] & c \arrow[d] \\
& x \arrow[r] & y \arrow[r] & z
\end{tikzcd}
$$

よって次の 2 つの可換図式が得られたことになる．

$$
\begin{tikzcd}
d \arrow[rrrd, bend left, "g\circ q"] \arrow[rd, "h"] \arrow[rdd, bend right] & & & \\
& a \arrow[r, "f"'] & b \arrow[r, "g"'] \arrow[d] & c \arrow[d] \\
& x \arrow[r] & y \arrow[r] & z
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
d \arrow[rrrd, bend left, "g\circ q"] \arrow[rrd, bend left, "q"'] \arrow[rdd, bend right] & & & \\
& & b \arrow[r, "g"'] \arrow[d] & c \arrow[d] \\
& x \arrow[r] & y \arrow[r] & z
\end{tikzcd}
$$

右の四角が pullback だから，その普遍性により $f \circ h = q$ であることが分かる．即ち次の図式は可換であり，$d \to a$ の存在が分かった．

$$
\begin{tikzcd}
d \arrow[rrd, bend left, "q"] \arrow[rd, "h"] \arrow[rdd, bend right] & & & \\
& a \arrow[r, "f"'] \arrow[d] & b \arrow[r, "g"'] \arrow[d] & c \arrow[d] \\
& x \arrow[r] & y \arrow[r] & z
\end{tikzcd}
$$

一意性は外側の pullback の普遍性から明らか. $\square$

定義. C を圏とする.

(1) C が直積を持つ $\iff$ 任意の対象 $a, b \in C$ の直積が存在する.
(2) C が pullback を持つ $\iff$ 任意の $a \xrightarrow{f} c \xleftarrow{g} b$ の pullback が存在する.
(3) C が equalizer を持つ $\iff$ 任意の $f, g \colon a \to b$ の equalizer が存在する.

命題 10. 圏 C が直積と equalizer を持つとき，pullback を持つ.

証明. $f \colon a \to c$, $g \colon b \to c$ を C の射とする. a と b の直積 $\langle a \times b, p_0, p_1 \rangle$ を取り，2 つの射 $f \circ p_0, g \circ p_1 \colon a \times b \to c$ の equalizer を $\langle u, e \rangle$ とする.

$$\begin{tikzcd} u \arrow[r, "e"'] & a \times b \arrow[r, "p_1"] \arrow[d, "p_0"'] & b \arrow[d, "g"] \\ & a \arrow[r, "f"'] & c \end{tikzcd}$$

$\langle u, p_0 \circ e, p_1 \circ e \rangle$ が f と g の pullback であることを示そう.

まず equalizer の定義から明らかに $f \circ p_0 \circ e = g \circ p_1 \circ e$ である.

$$\begin{tikzcd} u \arrow[r, "p_1 \circ e"] \arrow[d, "p_0 \circ e"'] & b \arrow[d, "g"] \\ a \arrow[r, "f"'] & c \end{tikzcd}$$

次に普遍性を示すため，$f \circ q_0 = g \circ q_1$ を満たすような v, q_0, q_1 を取る. 次の図式を可換とするような点線の射 $v \to u$ が一意に存在すればよい.

$$\begin{tikzcd} v \arrow[dr, dashed] \arrow[drrr, bend left, "q_1"] \arrow[ddrr, bend right, "q_0"'] & & & \\ & u \arrow[r, "e"'] & a \times b \arrow[r, "p_1"'] \arrow[d, "p_0"'] & b \arrow[d, "g"] \\ & & a \arrow[r, "f"'] & c \end{tikzcd}$$

まず射の存在を示す. 直積 $a \times b$ の普遍性から，$h \colon v \to a \times b$ が存在して $p_0 \circ h = q_0$,

$p_1 \circ h = q_1$ となる．

$$\begin{tikzcd}
v \arrow[drr, dashed, "h"] \arrow[drrr, bend left, "q_1"] \arrow[ddrr, bend right, "q_0"'] & & & \\
& u \arrow[r, "e"'] & a \times b \arrow[r, "p_1"'] \arrow[d, "p_0"'] & b \arrow[d, "g"] \\
& & a \arrow[r, "f"'] & c
\end{tikzcd}$$

よって $(f \circ p_0) \circ h = (g \circ p_1) \circ h$ となるから，equalizer e の普遍性により，$k \colon v \to u$ が存在して $e \circ k = h$ となる．

$$\begin{tikzcd}
v \arrow[dr, dashed, "k"] \arrow[drr, "h"] \arrow[drrr, bend left, "q_1"] \arrow[ddrr, bend right, "q_0"'] & & & \\
& u \arrow[r, "e"'] & a \times b \arrow[r, "p_1"'] \arrow[d, "p_0"'] & b \arrow[d, "g"] \\
& & a \arrow[r, "f"'] & c
\end{tikzcd}$$

この図式は明らかに可換であるから，故に射の存在が分かった．

一意性を示す．$k, k' \colon v \to u$ を次の図式を可換にする射とする．

$$\begin{tikzcd}
v \arrow[dr, "{k, k'}"] \arrow[drrr, bend left, "q_1"] \arrow[ddrr, bend right, "q_0"'] & & & \\
& u \arrow[r, "e"'] & a \times b \arrow[r, "p_1"'] \arrow[d, "p_0"'] & b \\
& & a &
\end{tikzcd}$$

直積 $a \times b$ の普遍性から $e \circ k = e \circ k'$ である．よって $h := e \circ k$ とすれば次の図式が可換である．

$$\begin{tikzcd}
v \arrow[dr, "{k, k'}"'] \arrow[drr, "h"] & & & \\
& u \arrow[r, "e"'] & a \times b \arrow[r, "p_1"'] \arrow[d, "p_0"'] & b \\
& & a &
\end{tikzcd}$$

従って equalizer e の普遍性から $k=k'$ が分かる． □

命題 11. C を直積を持つ圏として，対象 $a\in C$ を取る．このとき「右から a を直積する関数」$F\colon \mathrm{Ob}(C)\ni b\mapsto b\times a\in \mathrm{Ob}(C)$ は関手 $F\colon C\to C$ を定める．

証明. まず関手 F を定義しよう．$f\colon b\to c$ を C の射とするとき次の図式の実線部分を考えれば，直積 $c\times a$ の普遍性から，図式を可換にする点線の射が一意に存在する．これを Ff と定める．

$$
\begin{tikzcd}
& b\times a \arrow[dl] \arrow[dr] \arrow[dd, dashed, "Ff"] & \\
b \arrow[dd, "f"'] & & a \arrow[dd, "\mathrm{id}_a"] \\
& c\times a \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
c & & a
\end{tikzcd}
$$

この定義により F が関手となることを示せばよい．

まず $f\colon b\to c,\ g\colon c\to d$ とする．$F(g\circ f)=Fg\circ Ff$ を示す．定義から，$F(g\circ f)$ は次の左の図式を可換とするような射である．一方，Ff と Fg の定義から右の図式も可換である．

$$
\begin{tikzcd}
& b\times a \arrow[dl] \arrow[dr] \arrow[dddd, "F(g\circ f)"] & \\
b \arrow[dd, "f"'] & & a \arrow[dd, "\mathrm{id}_a"] \\
& & \\
c \arrow[dd, "g"'] & & a \arrow[dd, "\mathrm{id}_a"] \\
& d\times a \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
d & & a
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& b\times a \arrow[dl] \arrow[dr] \arrow[dd, "Ff"] & \\
b \arrow[dd, "f"'] & & a \arrow[dd, "\mathrm{id}_a"] \\
& c\times a \arrow[dl] \arrow[dr] \arrow[dd, "Fg"] & \\
c \arrow[dd, "g"'] & & a \arrow[dd, "\mathrm{id}_a"] \\
& d\times a \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
d & & a
\end{tikzcd}
$$

故に直積 $d\times a$ の普遍性から $F(g\circ f)=Fg\circ Ff$ が分かる．

後は $F(\mathrm{id}_b)=\mathrm{id}_{Fb}$ を示せばよいが，図式

$$
\begin{tikzcd}
& b\times a \arrow[dl] \arrow[dr] \arrow[dd, "\mathrm{id}_{b\times a}"] & \\
b \arrow[dd, "\mathrm{id}_b"'] & & a \arrow[dd, "\mathrm{id}_a"] \\
& b\times a \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
b & & a
\end{tikzcd}
$$

が可換だから，普遍性により $F(\mathrm{id}_b) = \mathrm{id}_{b\times a} = \mathrm{id}_{Fb}$ となる． $\square$

以上の様な概念を一般化したものが，圏論における「極限」である．上で述べてきた概念は，どれも次のような形の定義をしている

(1) まず対象と射がいくつか与えられている．これを「図式」と呼ぶ．
 - pullback であれば $a \xrightarrow{f} c \xleftarrow{g} b$ である．
 - equalizer であれば $a \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} b$ である．
 - 直積の場合は $a \qquad b$ を (射のない) 図式とみなす．
 - 終対象の場合は空な図式とみなす．

(2) 対象が 1 つと，そこから図式の各対象への射が与えられて，可換となる．

(3) 同じ条件を満たす対象と射があったとき, 一意に射が存在して可換となる (普遍性).

このように定義される概念を「極限」と言う[*2]．つまり図式が 1 つ与えられると，その極限が定義される．

例 12. C を圏として，$\{a_j\}_{j\in J}$ を C の対象からなる族とする．$\{a_j\}_{j\in J}$ を射のない図式だとみなしたときの「極限」を $\{a_j\}_{j\in J}$ の直積といい，記号で $\displaystyle\prod_{j\in J} a_j$ と表す．正確に書けば，$\{a_j\}_{j\in J}$ の直積とは組 $\left\langle \displaystyle\prod_{j\in J} a_j, \{p_j\}_{j\in J} \right\rangle$ であって以下の条件を満たすものである．

(1) $\displaystyle\prod_{j\in J} a_j$ は C の対象である．

(2) $i \in J$ に対して $p_i \colon \displaystyle\prod_{j\in J} a_j \to a_i$ は C の射である．

$$
\begin{tikzcd}
 & & \prod_{j\in J} a_j \arrow[dll, "p_i"'] \arrow[dl, "p_k"] \arrow[d, "p_l"'] \arrow[dr] & \\
a_i & a_k & a_l & \cdots
\end{tikzcd}
$$

(3) 組 $\langle v, \{q_j\}_{j\in J}\rangle$ が同じ条件を満たすならば，C の射 $h \colon v \to \displaystyle\prod_{j\in J} a_j$ が一意に存在し

[*2] 極限の正式な定義は第 1 章の「極限」を参照．

て「任意の $i \in J$ に対して $q_i = p_i \circ h$」となる．

$$
\begin{tikzcd}
 & & v \arrow[lld, bend right, "q_i"'] \arrow[ld, bend right, "q_k"'] \arrow[d, dashed, "h"] \arrow[rd, bend left, "q_l"] \arrow[rrd, bend left] & & \\
 & & \prod\limits_{j \in J} a_j \arrow[lld, "p_i"'] \arrow[ld, "p_k"] \arrow[rd, "p_l"'] \arrow[rrd] & & \\
a_i & a_k & & a_l & \cdots
\end{tikzcd}
$$

a と b の直積 $a \times b$ は $|J| = 2$ の場合である．また圏 $\mathbf{Set}, \mathbf{Grp}, \mathbf{Top}$ などにおいては，通常の直積がこの意味での直積となる． □

例 13. 実数の減少列 $x_0 \geq x_1 \geq \cdots$ を取る．順序集合 $\mathbb{R}$ を圏とみなせば，無限個の対象・射からなる次の図式が得られる．

$$x_0 \longleftarrow x_1 \longleftarrow x_2 \longleftarrow \cdots$$

この図式の極限とは次の条件を満たす $x \in \mathbb{R}$ である．

(1) 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $x_n \geq x$ である．
(2) $y \in \mathbb{R}$ が「任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $x_n \geq y$」を満たすならば，$x \geq y$ である．

$$
\begin{tikzcd}
x_0 & x_1 \arrow[l] & x_2 \arrow[l] & \cdots \arrow[l] & \\
 & & & x \arrow[lllu] \arrow[llu] \arrow[lu] \arrow[u] & y \arrow[l, dashed] \arrow[llllu] \arrow[lllu] \arrow[llu] \arrow[lu]
\end{tikzcd}
$$

つまり，この図式の極限とは数列 $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ の下限 $\inf\limits_{n \in \mathbb{N}} x_n$ である．故にこの図式の極限は数列の極限 $\lim\limits_{n \to \infty} x_n$ である． □

例 14. p を素数とする．$n > 0$ に対して写像 $f_n \colon \mathbb{Z}/p^{n+1}\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ を

$$f_n(x \bmod p^{n+1}) := x \bmod p^n$$

で定義すると $\mathbf{Set}$ における次の図式が得られる．

$$\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \xleftarrow{f_1} \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z} \xleftarrow{f_2} \mathbb{Z}/p^3\mathbb{Z} \xleftarrow{f_3} \cdots$$

この図式の極限[*3]を p 進整数環といい $\mathbb{Z}_p$ で表す．正確に書けば，この図式の極限とは組 $\langle \mathbb{Z}_p, \{p_n\}_{n>0} \rangle$ であって以下の条件を満たすものである．

(1) $\mathbb{Z}_p$ は集合である．

(2) $p_n\colon \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ は写像であり，任意の $n > 0$ に対して $f_n \circ p_{n+1} = p_n$ となる．

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} & \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z} \arrow[l, "f_1"'] & \mathbb{Z}/p^3\mathbb{Z} \arrow[l, "f_2"'] & \cdots \arrow[l, "f_3"'] \\
 & & & \mathbb{Z}_p \arrow[ulll, "p_1"] \arrow[ull, "p_2"] \arrow[ul, "p_3"] \arrow[u, "p_n"']
\end{tikzcd}
$$

(3) $\langle X, \{q_n\}_{n>0} \rangle$ が同じ条件を満たすならば，写像 $h\colon X \to \mathbb{Z}_p$ が一意に存在して，$n > 0$ に対して $p_n \circ h = q_n$ となる．

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} & \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z} \arrow[l, "f_1"'] & \mathbb{Z}/p^3\mathbb{Z} \arrow[l, "f_2"'] & \cdots \arrow[l, "f_3"'] & \\
 & & & \mathbb{Z}_p \arrow[ulll] \arrow[ull] \arrow[ul] \arrow[u, "p_n"] & X \arrow[l, dashed, "h"] \arrow[ullll] \arrow[ulll] \arrow[ull] \arrow[ul, "q_n"']
\end{tikzcd}
$$

この極限 $\langle \mathbb{Z}_p, \{p_n\}_{n>0} \rangle$ が存在したとする．$\left\langle \prod\limits_{n>0} \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}, \{r_n\}_{n>0} \right\rangle$ を $\{\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}\}_{n>0}$ の直積とする．$n > 0$ に対して $p_n\colon \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ が写像だから，直積の普遍性により写像 $h\colon \mathbb{Z}_p \to \prod\limits_{n>0} \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ が一意に存在して次の図式が可換となる．

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathbb{Z}_p \arrow[d, dashed, "h"] \arrow[ddl, bend right, "p_n"'] \arrow[ddr, bend left, "p_m"] & \\
 & \prod\limits_{n>0} \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \arrow[dl, "r_n"] \arrow[dr, "r_m"'] & \\
\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} & & \mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}
\end{tikzcd}
$$

この h は単射である．

[*3] 通常この極限は **Set** ではなく可換環の圏 **CRing** で考えることが多い．つまり $\mathbb{Z}_p$ は可換環となる．ただどちらの圏で考えても集合としては同じものになることが分かるので，ここでは簡単のため **Set** で考える．

∵) $x, y \in \mathbb{Z}_p$ で $h(x) = h(y)$ となるものを取る．$1 = \{*\}$ を 1 元集合として，x, y を写像 $x, y\colon 1 \to \mathbb{Z}_p$ と同一視すると $p_n \circ x = r_n \circ h \circ x = r_n \circ h \circ y = p_n \circ y$ である．

$$\begin{tikzcd}
& 1 \arrow[d, shift right, "x"'] \arrow[d, shift left, "y"] & \\
& \mathbb{Z}_p \arrow[d, "h"] \arrow[ddl, bend right, "p_n"'] \arrow[ddr, bend left, "p_m"] & \\
& \prod_{n>0} \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \arrow[dl, "r_n"] \arrow[dr, "r_m"'] & \\
\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} & & \mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}
\end{tikzcd}$$

$q_n := p_n \circ x \,(= p_n \circ y)$ とおく．$f_n \circ q_{n+1} = f_n \circ p_{n+1} \circ x = p_n \circ x = q_n$ である．よって $\mathbb{Z}_p$ の普遍性から $1 \to \mathbb{Z}_p$ が一意に存在して次の図式が可換となる．

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} & \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z} \arrow[l, "f_1"'] & \mathbb{Z}/p^3\mathbb{Z} \arrow[l, "f_2"'] & \cdots \arrow[l, "f_3"'] & \\
& & & \mathbb{Z}_p \arrow[ulll] \arrow[ull] \arrow[ul] \arrow[u, "p_n"] & 1 \arrow[l, dashed] \arrow[ullll] \arrow[ulll] \arrow[ull] \arrow[ul, "q_n"']
\end{tikzcd}$$

ところで $x, y\colon 1 \to \mathbb{Z}_p$ はこの条件を満たすから，普遍性により $x = y$ である．

故に $\mathbb{Z}_p \subset \prod_{n>0} \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ としてよい．このとき $x = \langle x_n \bmod p^n \rangle_{n>0} \in \mathbb{Z}_p$ とすると $p_n = r_n \circ h$ より $p_n(x) = r_n(x) = x_n \bmod p^n$ となる．

また $f_n \circ p_{n+1} = p_n$ だから $x_{n+1} \bmod p^n = x_n \bmod p^n$ である．そこで

$$\mathbb{Z}_p := \left\{ \langle x_n \bmod p^n \rangle_{n>0} \in \prod_{n>0} \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \;\middle|\; n > 0,\ x_{n+1} \bmod p^n = x_n \bmod p^n \right\}$$

と定義して $p_n\colon \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ を射影とする．このとき，この $\langle \mathbb{Z}_p, \{p_n\}_{n>0} \rangle$ が「極限」となることが分かる．故にこの「極限」は存在して，それは上記のように書き表せる． □

最後に，以下の事実を紹介して終わる (証明は「随伴関手」の PDF を参照)．群の圏 **Grp** について考えると，$G, H \in \mathbf{Grp}$ に対してその直積 $G \times H$ は存在して，それは直積集合 $G \times H$ に演算を定めたものだった．これは，忘却関手 $U\colon \mathbf{Grp} \to \mathbf{Set}$ を使って表せば $U(G \times H) = U(G) \times U(H)$ ということになる (左辺は **Grp** での直積，右辺は **Set**

での直積であることに注意). つまり，この忘却関手 $U\colon \mathbf{Grp} \to \mathbf{Set}$ は「直積と交換する」のである. 同様のことは $\mathbf{Ab}$ や $\mathbf{Top}$ でも言える. つまりアーベル群の直積は，直積集合に演算を入れたものになっているし，直積位相空間は，直積集合に位相を入れたものになっている.

これは偶々なのかというとそうではなくて，実はこれは「U が右随伴関手である」という事実から従うことなのである (右随伴関手は直積と交換する，という定理がある). そしてこの「U が右随伴関手である」というのは，集合から群やアーベル群，位相空間が「生成」できることと関係している (群であれば自由群，アーベル群であれば自由アーベル群を考えればよくて，位相空間であれば離散位相を入れればよい). こういうことが，圏論を使って統一して理解できるのは面白い点の 1 つだと思う.