トポス

alg-d
http://alg-d.com/math/kan_extension/

2018 年 5 月 5 日

1　トポス

定義. $P, Q\colon C^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$ を関手とする．P が Q の部分関手 (記号で $P \subset Q$ と書く)
$\iff$ 自然変換 $\theta\colon P \Rightarrow Q$ で「各 $a \in C$ について $\theta_a\colon Pa \to Qa$ が包含写像になっているもの」が存在する．

$P \subset Q$ を部分関手とすると，自然性より，$f\colon a \to b$ に対して次の図式が可換である．

$$\begin{tikzcd} a \arrow[d, "f"'] & Pa \arrow[r, "\subset"] & Qa \\ b & Pb \arrow[u, "Pf"] \arrow[r, "\subset"'] & Qb \arrow[u, "Qf"'] \end{tikzcd}$$

従って $Pf = Qf|_{Pb}$ となる．特に $x \in Pb$ に対して $Qf(x) \in Pa$ である．
　逆に $Q\colon C^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$ を関手として，集合族 $\{Pa\}_{a\in C}$ が次の条件を満たすとする:

- $a \in C$ に対して $Pa \subset Qa$.
- $f\colon a \to b$，$x \in Pb$ に対して $Qf(x) \in Pa$.

このとき，$f\colon a \to b$ に対して $Pf := Qf|_{Pb}\colon Pb \to Pa$ と定義すると P は Q の部分関手になることが容易に分かる．

定義. 有限完備な圏 C の部分対象分類子 (subobject classifier) とは，組 $\langle \Omega, \mathrm{true}\rangle$ であって，以下の条件を満たすものをいう:

(1) $\Omega \in C$ は対象で，$\mathrm{true}\colon 1 \to \Omega$ は射である．

(2) 任意のモノ射 $f\colon a \to b$ に対して，ある射 $\chi_f\colon b \to \Omega$ が一意に存在して，次の図式が pullback になる．

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "!"] \arrow[d, "f"'] & 1 \arrow[d, "\mathrm{true}"] \\
b \arrow[r, dashed, "\chi_f"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

true を省略し，単に Ω を部分対象分類子ということも多い．

定義. トポス (topos)[*1] とは，圏 E であって以下の条件を満たすものをいう:

(1) E は有限完備である．
(2) E は Cartesian 閉である．(「随伴関手」の PDF を参照．)
(3) E は部分対象分類子を持つ．

命題 1. C を小圏とするとき $\widehat{C} = \mathbf{Set}^{C^{\mathrm{op}}}$ はトポスである．特に $\mathbf{Set}$ はトポスである．

証明. まず $\widehat{C}$ は完備だった (「極限」の PDF を参照)．$\widehat{C}$ が Cartesian 閉であることを示す．

※ $P, Q \in \widehat{C}$ とする．もし $\widehat{C}$ が Cartesian 閉であれば $Q^P \in \widehat{C}$ が存在するが，このとき米田の補題により，$a \in C$ に対して

$$\mathrm{Hom}_{\widehat{C}}(y(a) \times P, Q) \cong \mathrm{Hom}_{\widehat{C}}(y(a), Q^P) \cong Q^P(a)$$

とならなければならない．

$P, Q \in \widehat{C}$ とする．$Q^P := \mathrm{Hom}_{\widehat{C}}(y(-) \times P, Q) \in \widehat{C}$ と定義する．余米田の補題 (「余米田の補題」の PDF を参照) により $Pa \cong \displaystyle\int^{c \in C^{\mathrm{op}}} \mathrm{Hom}_C(a, c) \times Pc$ だったことに注意

*1 以下で述べる Grothendieck トポスと区別する為に，この意味のトポスを初等トポス (elementary topos) という場合がある．また，Grothendieck トポスを単にトポスと呼ぶ場合もある．

すると，任意の $X \in \widehat{C}$ に対して自然に

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_{\widehat{C}}(X, Q^P) &\cong \int_{c \in C^{\mathrm{op}}} \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(Xc, Q^P(c)) \\
&= \int_{c \in C^{\mathrm{op}}} \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(Xc, \mathrm{Hom}_{\widehat{C}}(y(c) \times P, Q)) \\
&\cong \int_{c \in C^{\mathrm{op}}} \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}\left(Xc, \int_{d \in C^{\mathrm{op}}} \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(\mathrm{Hom}_C(d, c) \times Pd, Qd)\right) \\
&\cong \int_{c \in C^{\mathrm{op}}} \int_{d \in C^{\mathrm{op}}} \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}\big(Xc, \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(\mathrm{Hom}_C(d, c) \times Pd, Qd)\big) \\
&\cong \int_{c \in C^{\mathrm{op}}} \int_{d \in C^{\mathrm{op}}} \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(Xc \times \mathrm{Hom}_C(d, c) \times Pd, Qd) \\
&\cong \int_{d \in C^{\mathrm{op}}} \int_{c \in C^{\mathrm{op}}} \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(Xc \times \mathrm{Hom}_C(d, c) \times Pd, Qd) \\
&\cong \int_{d \in C^{\mathrm{op}}} \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}\left(\int^{c \in C^{\mathrm{op}}} Xc \times \mathrm{Hom}_C(d, c) \times Pd, Qd\right) \\
&\cong \int_{d \in C^{\mathrm{op}}} \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}\left(Pd \times \int^{c \in C^{\mathrm{op}}} \mathrm{Hom}_C(d, c) \times Xc, Qd\right) \\
&\cong \int_{d \in C^{\mathrm{op}}} \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(Pd \times Xd, Qd) \\
&\cong \mathrm{Hom}_{\widehat{C}}(X \times P, Q)
\end{aligned}
$$

である (**Set** が Cartesian 閉なので，$Pd \times -$ が余極限と交換すること，特にコエンドと交換することに注意する)．よって $\widehat{C}$ が Cartesian 閉と分かった．

部分対象分類子の存在を示す．Ω を

- $a \in C$ に対して $\Omega(a) := \{P \in \widehat{C} \mid P \subset y(a)\}$ とする．
- $f \colon a \to b$ を C の射として $P \in \Omega b$ とする．$u \in C$ に対して

  $$(\Omega f(P))(u) := \{k \colon u \to a \mid f \circ k \in Pu\}$$

  と定めるとこれは部分関手 $\Omega f(P) \subset y(a)$ を与える．

  $\because$) $l \colon u \to v$ とする．$k \in (\Omega f(P))(v)$ に対して $k \circ l \in (\Omega f(P))(u)$ を示せばよい．今 $k \in (\Omega f(P))(v)$ だから $f \circ k \in Pv$ である．$P \subset y(a)$ が部分関手だ

から

$$
\begin{tikzcd}
u \arrow[d, "l"'] \\
v
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
Pu \arrow[r, "\subset"] & \mathrm{Hom}_C(u,a) \\
Pv \arrow[u, "-\circ l"] \arrow[r, "\subset"'] & \mathrm{Hom}_C(v,a) \arrow[u, "-\circ l"']
\end{tikzcd}
$$

が可換となり，よって $f\circ k\circ l\in Pu$ である．

これにより，$f\colon a\to b$ に対して写像 $\Omega(f)\colon \Omega b\to\Omega a$ が定まる．

で定義する．これは関手 $\Omega\colon C^{\mathrm{op}}\to\mathbf{Set}$ を与える．

$\because$) 明らかに $\Omega(\mathrm{id}_a)=\mathrm{id}_{\Omega a}$ だから，$a\xrightarrow{f}b\xrightarrow{g}c$ に対して $\Omega(g\circ f)=\Omega(f)\circ\Omega(g)$ を示せばよい．定義より $P\in\Omega c$, $u\in C$ に対して

$$
\begin{aligned}
(\Omega f(\Omega g(P)))(u) &= \{k\colon u\to a \mid f\circ k\in(\Omega g(P))(u)\}\\
&= \{k\colon u\to a \mid g\circ f\circ k\in Pu\}\\
&= (\Omega(g\circ f)(P))(u)
\end{aligned}
$$

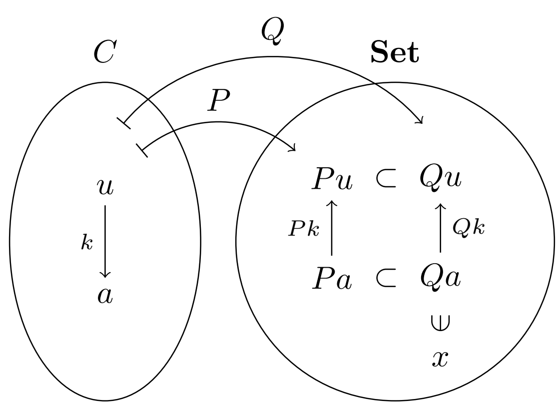
だから $\Omega f\circ\Omega g(P)=\Omega(g\circ f)(P)$ である．

true: $1(=\Delta 1)\Rightarrow\Omega$ を $\mathrm{true}_a(*):=y(a)$ で定める．これらが部分対象分類子を与えることを示そう．

まず $\theta\colon P\Rightarrow Q$ をモノ射とする．つまり $a\in C$ に対して $\theta_a\colon Pa\to Qa$ はモノ射 (つまり単射) である．これにより $Pa\subset Qa$ とみなす．$a,u\in C$, $x\in Qa$ に対して

$$\chi_a(x)(u):=\{k\colon u\to a \mid Qk(x)\in Pu\}$$

と定義する．



これは部分関手 $\chi_a(x)\subset y(a)$ を定義する．

∵) $l\colon u \to v$ を射とするとき，$k \in \chi_a(x)(v)$ に対して $k \circ l \in \chi_a(x)(u)$ となることを示せばよい．それには $Qk(x) \in Pv$ ならば $Q(k \circ l)(x) \in Pu$ を示せばよいが，それは明らか．

$$
\begin{tikzcd}
u \arrow[d, "l"'] & Pu \arrow[r, phantom, "\subset"] & Qu \\
v \arrow[d, "k"'] & Pv \arrow[u, "Pl"] \arrow[r, phantom, "\subset"] & Qv \arrow[u, "Ql"'] \\
a & Pa \arrow[u, "Pk"] \arrow[r, phantom, "\subset"] & Qa \arrow[u, "Qk"']
\end{tikzcd}
$$

よって $\chi_a(x) \in \Omega a$ であるから，$\chi_a\colon Qa \to \Omega a$ は写像である．これは自然変換 $\chi\colon Q \Rightarrow \Omega$ を定める．

∵) $f\colon a \to b$ を射とする．次の図式が可換であることを示せばよい．

$$
\begin{tikzcd}
a \arrow[d, "f"'] & Qa \arrow[r, "\chi_a"] & \Omega a \\
b & Qb \arrow[u, "Qf"] \arrow[r, "\chi_b"'] & \Omega b \arrow[u, "\Omega f"']
\end{tikzcd}
$$

即ち，$x \in Qb$ に対して，$y(a)$ の部分関手の等号 $\chi_a(Qf(x)) = \Omega f(\chi_b(x))$ を示せばよい．つまり $u \in C$ に対して $\chi_a(Qf(x))(u) = \Omega f(\chi_b(x))(u)$ を示す．これは定義より

$$
\begin{aligned}
\chi_a(Qf(x))(u) &= \{k\colon u \to a \mid Qk(Qf(x)) \in Pu\} \\
\Omega f(\chi_b(x))(u) &= \{k\colon u \to a \mid f \circ k \in \chi_b(x)(u)\} \\
&= \{k\colon u \to a \mid Q(f \circ k)(x) \in Pu\}
\end{aligned}
$$

となるから成り立つ．

よって $\widehat{C}$ における次の図式が得られた．

$$
\begin{tikzcd}
P \arrow[r, "!"] \arrow[d, "\theta"'] & 1 \arrow[d, "\mathrm{true}"] \\
Q \arrow[r, "\chi"'] & \Omega
\end{tikzcd}
$$

これは可換である．

∵) $a \in C$ に対して $\chi_a \circ \theta_a = \mathrm{true}_a \circ !_a$ を示せばよい．即ち $x \in Pa$ に対して

$\chi_a(\theta_a(x)) = y(a)$ を示せばよい．χ の定義より，$u \in C$ に対して

$$\chi_a(\theta_a(x))(u) = \{k\colon u \to a \mid Qk(\theta_a(x)) \in Pu\}$$

だから, 任意の $k\colon u \to a$ に対して $Qk(\theta_a(x)) \in Pu$ を示せばよい．それは $\theta\colon P \Rightarrow Q$ が自然変換だから，次の図式が可換となり成り立つ.

$$\begin{tikzcd} Pu \arrow[r, "\theta_u"] & Qu \\ Pa \arrow[u, "Pk"] \arrow[r, "\theta_a"'] & Qa \arrow[u, "Qk"'] \end{tikzcd}$$

この図式が pullback になることを示す．その為に次の図式の実線部分が可換であるとする.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[dr, dashed, "\tau"] \arrow[drr, bend left, "!"] \arrow[ddr, bend right, "\sigma"'] & & \\ & P \arrow[r] \arrow[d, "\theta"] & 1 \arrow[d, "\mathrm{true}"] \\ & Q \arrow[r, "\chi"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

$a \in C$ とすると，$\chi_a \circ \sigma_a = \mathrm{true}_a \circ !_a$ だから $x \in Xa$ に対して $\chi_a(\sigma_a(x)) = y(a)$ である．即ち任意の $k\colon u \to a$ に対して $Qk(\sigma_a(x)) \in Pu$ となる．特に $k = \mathrm{id}_a$ と取れば $\sigma_a(x) \in Pa$ が分かる．即ち，ある $\tau_a\colon Xa \to Pa$ が存在して $\theta_a \circ \tau_a = \sigma_a$ となる．この τ_a は自然変換 $\tau\colon X \Rightarrow P$ を与える.

$\because$) $f\colon a \to b$ を C の射として次の図式を考える.

$$\begin{tikzcd} Xa \arrow[r, "\tau_a"] & Pa \arrow[r, "\theta_a"] & Qa \\ Xb \arrow[u, "Xf"] \arrow[r, "\tau_b"'] & Pb \arrow[u, "Pf"'] \arrow[r, "\theta_b"'] & Qb \arrow[u, "Qf"'] \end{tikzcd}$$

θ が自然変換だから，右側の四角は可換である．また $\sigma_a(= \theta_a \circ \tau_a)$ が a について自

然だから外側の四角も可換である．従って

$$
\begin{array}{ccccc}
\begin{tikzcd} Xa \arrow[r, "\tau_a"] & Pa \arrow[r, "\theta_a"] & Qa \\ Xb \arrow[u, "Xf"] & & \end{tikzcd}
& = &
\begin{tikzcd} & & Qa \\ Xb \arrow[r, "\tau_b"'] & Pb \arrow[r, "\theta_b"'] & Qb \arrow[u, "Qf"'] \end{tikzcd}
& = &
\begin{tikzcd} & Pa \arrow[r, "\theta_a"] & Qa \\ Xb \arrow[r, "\tau_b"'] & Pb \arrow[u, "Pf"'] & \end{tikzcd}
\end{array}
$$

となる．今 θ_a はモノ射だったから

$$
\begin{tikzcd}
Xa \arrow[r, "\tau_a"] & Pa \\
Xb \arrow[u, "Xf"] \arrow[r, "\tau_b"'] & Pb \arrow[u, "Pf"']
\end{tikzcd}
$$

が可換となることが分かり，τ は自然変換である．

よって $\theta \circ \tau = \sigma$ となる自然変換 $\tau \colon X \Rightarrow P$ が存在することが分かった．

逆に $\tau' \colon X \Rightarrow P$ が $\theta \circ \tau' = \sigma$ を満たすとすると，θ がモノ射だから $\tau' = \tau$ とならなければならない．よってこのような τ が一意であることが分かる．従ってこの図式が pullback であることが分かった． □

2 層

X を位相空間，$\mathcal{O}(X)$ を X の開集合全体とする．$\mathcal{O}(X)$ は包含関係により圏となる．関手 $P \colon \mathcal{O}(X)^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$ を X 上の (集合の) 前層というのであった．更に, 開集合 $U \subset X$ と U の開被覆 $\{U_i\}_{i \in I}$ に対して次が equalizer となるとき，P を層と言うのであった．(「例: 位相空間上の層」の PDF を参照．)

$$
P(U) \xrightarrow{e} \prod_{i \in I} P(U_i) \overset{p}{\underset{q}{\rightrightarrows}} \prod_{i,j \in I} P(U_i \cap U_j)
$$

ここで $e(x) := \langle x|_{U_i} \rangle_{i \in I}$ で，p は $U_i \cap U_j \subset U_i$ から得られる射，q は $U_i \cap U_j \subset U_j$ から得られる射である．

定義. C を圏とする．$a \in C$ に対して，部分関手 $S \subset y(a)$ を a 上の sieve という．

例 2. $C = \mathcal{O}(X)$ の場合．S を $U \in \mathcal{O}(X)$ 上の sieve とすると S は関手 $\mathcal{O}(X)^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$

で，$V \in \mathcal{O}(X)$ に対して

$$S(V) \subset y(U)(V) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}(X)}(V, U) = \begin{cases} 0\ (= \emptyset) & (V \not\subset U \text{ のとき}) \\ 1\ (= \{*\}) & (V \subset U \text{ のとき}) \end{cases}$$

である．よって S は写像 $\mathcal{O}(X) \to 2 = \{0, 1\}$，即ち部分集合 $S \subset \mathcal{O}(X)$ とみなせる．更に，S が関手であることから $W \subset V$ に対して写像

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}(X)}(V, U) = S(V) \to S(W) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}(X)}(W, U)$$

が存在する．故に $V \in S$ (即ち $S(V) = 1$) ならば $W \in S$ (即ち $S(W) = 1$) でなければならない．また $V \not\subset U$ ならば $V \notin S$ である．以上により，U 上の sieve S は部分集合 $S \subset \mathcal{O}(U)$ で，条件

$$V \in S,\ W \in \mathcal{O}(U),\ W \subset V \Longrightarrow W \in S \tag{1}$$

を満たすものと同一視できる．

$\{U_i\}_{i \in I}$ を U の開被覆とする．即ち $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ である．このとき

$$S := \{V \in \mathcal{O}(U) \mid \text{ある } i \in I \text{ が存在して } V \subset U_i\}$$

と定義すれば S は明らかに条件 1 を満たすので，S は U 上の sieve とみなせる．この S は $U = \bigcup_{V \in S} V$ を満たす．

逆に，U 上の sieve S が $U = \bigcup_{V \in S} V$ を満たすとすると

$$S = \{V \in \mathcal{O}(U) \mid \text{ある } W \in S \text{ が存在して } V \subset W\}$$

となる．そこで，$U = \bigcup_{V \in S} V$ となる sieve を covering sieve と呼ぶ． □

U 上の sieve S は部分関手 $\theta\colon S \Rightarrow y(U)$ であった．これにより，前層 P に対して写像 $i := \mathrm{Hom}_{\widehat{\mathcal{O}(X)}}(\theta, P)\colon \mathrm{Hom}_{\widehat{\mathcal{O}(X)}}(y(U), P) \to \mathrm{Hom}_{\widehat{\mathcal{O}(X)}}(S, P)$ が定まる．

定理 3. 位相空間 X 上の前層 P が層
$\Longleftrightarrow$ 任意の開集合 $U \subset X$ 上の covering sieve S に対して

$$i\colon \mathrm{Hom}_{\widehat{\mathcal{O}(X)}}(y(U), P) \to \mathrm{Hom}_{\widehat{\mathcal{O}(X)}}(S, P)$$

が全単射を与える．

証明. $\{U_i\}_{i\in I}$ を開被覆とする.

$$E \xrightarrow{\subset} \prod_{i\in I} P(U_i) \overset{p}{\underset{q}{\rightrightarrows}} \prod_{i,j\in I} P(U_i\cap U_j)$$

を p,q の equalizer とすると $E := \left\{ \langle x_i\rangle_{i\in I} \in \prod_{i\in I} P(U_i) \;\middle|\; x_i|_{U_i\cap U_j} = x_j|_{U_i\cap U_j} \right\}$ である.

S を $\{U_i\}_{i\in I}$ から定まる covering sieve とする．このとき全単射 $f\colon \mathrm{Hom}(S,P)\to E$ が存在する.

$\because$) $\theta\in \mathrm{Hom}(S,P)$ とする．$S(U_i)=1=\{*\}$ だから $\theta_{U_i}(*)\in P(U_i)$ である．よって写像 $f\colon \mathrm{Hom}(S,P)\to \prod_{i\in I} P(U_i)$ を $f(\theta) := \langle \theta_{U_i}(*)\rangle_{i\in I} \in \prod_{i\in I} P(U_i)$ と定義することができる．$f(\theta)\in E$ である.

$\because$) $i,j\in I$ に対して $\theta_{U_i}(*)|_{U_i\cap U_j} = \theta_{U_j}(*)|_{U_i\cap U_j}$ を示せばよい．θ が自然変換だから

$$\begin{tikzcd} S(U_i\cap U_j) \arrow[r, "\theta_{U_i\cap U_j}"] & P(U_i\cap U_j) \\ S(U_i) \arrow[u] \arrow[r, "\theta_{U_i}"'] & P(U_i) \arrow[u] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} S(U_i\cap U_j) \arrow[r, "\theta_{U_i\cap U_j}"] & P(U_i\cap U_j) \\ S(U_j) \arrow[u] \arrow[r, "\theta_{U_j}"'] & P(U_j) \arrow[u] \end{tikzcd}$$

は可換である．よって $\theta_{U_i}(*)|_{U_i\cap U_j} = \theta_{U_i\cap U_j}(*) = \theta_{U_j}(*)|_{U_i\cap U_j}$ となり成り立つ.

よって $f\colon \mathrm{Hom}(S,P)\to E$ とみなすことができる．この f の逆写像 g が存在することを示せばよい.

$\langle x_i\rangle_{i\in I}\in E$ とする．$V\in \mathcal{O}(X)$ に対して $\theta_V : S(V)\to P(V)$ を次のように定める:

- $V\notin S$ のとき，θ_V は一意な射 $S(V)=\emptyset\to P(V)$ とする.
- $V\in S$ のとき，$V\subset U_i$ となる $i\in I$ を取り $\theta_V(*) := x_i|_V$ と定める.
  ($x_i|_{U_i\cap U_j} = x_j|_{U_i\cap U_j}$ だから，これは well-defined である．)

これは V について自然である.

∵) $V \subset W$ に対して次の図式が可換であることを示せばよい．

$$\begin{tikzcd} S(V) \arrow[r, "\theta_V"] & P(V) \\ S(W) \arrow[u] \arrow[r, "\theta_W"'] & P(W) \arrow[u] \end{tikzcd}$$

$W \notin S$，即ち $S(W) = \emptyset$ ならば自明だから $W \in S$ とする．この場合 $V \in S$ であるから，$\theta_W(*)|_V = \theta_V(*)$ を示せばよい．これは $x_i|_W|_V = x_i|_V$ ということだから成り立つ．

よって自然変換 $\theta\colon S \Rightarrow P$ が得られる．これにより $g(\langle x_i \rangle_{i\in I}) := \theta$ と定義する．つまり $V \in S$ に対して $g(\langle x_i \rangle_{i\in I})_V(*) = x_i|_V$ である．このとき

$$\begin{aligned} \bigl(g \circ f(\theta)\bigr)_V(*) &= \bigl(g(\langle \theta_{U_i}(*) \rangle_{i\in I})\bigr)_V(*0) = \theta_{U_i}(*)|_V = \theta_V(*) \\ f \circ g(\langle x_i \rangle_{i\in I}) &= \langle g(\langle x_i \rangle_{i\in I})_{U_i}(*) \rangle_{i\in I} = \langle x_i \rangle_{i\in I} \end{aligned}$$

だから $g = f^{-1}$ である．

よって $f\colon \mathrm{Hom}(S,P) \to \prod_{i\in I} P(U_i)$ とみなせば

$$\mathrm{Hom}(S,P) \xrightarrow{f} \prod_{i\in I} P(U_i) \overset{p}{\underset{q}{\rightrightarrows}} \prod_{i,j\in I} P(U_i \cap U_j)$$

は equalizer である．

次の図式を考える．

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}(S,P) \arrow[r, "f"] & \prod_{i\in I} P(U_i) \arrow[r, shift left, "p"] \arrow[r, shift right, "q"'] & \prod_{i,j\in I} P(U_i \cap U_j) \\ \mathrm{Hom}(y(U),P) \arrow[u, "i"] \arrow[r, "\cong"] & P(U) \arrow[u, "e"'] & \end{tikzcd}$$

この図式の左の四角は可換である．

∵) $\theta \in \mathrm{Hom}(y(U),P)$ を取る．θ に対応する $x \in P(U)$ は $x = \theta_U(\mathrm{id}_U)$ で与えられるから，θ を右回りで写したものは $\langle \theta_U(\mathrm{id}_U)|_{U_i} \rangle_{i\in I}$ になる．一方，左回りで写すと

$f\circ i(\theta)=\langle\theta_{U_i}(*)\rangle_{i\in I}$ になるから $i\in I$ に対して $\theta_U(\mathrm{id}_U)|_{U_i}=\theta_{U_i}(*)$ を示せばよい．θ が自然変換で $U_i\subset U$ だから次が可換である．

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}(U_i,U) \arrow[r, "\theta_{U_i}"] & P(U_i) & * \arrow[r, mapsto, "\theta_{U_i}"] & \theta_U(\mathrm{id}_U)|_{U_i} \\
\mathrm{Hom}(U,U) \arrow[u] \arrow[r, "\theta_U"'] & P(U) \arrow[u] & \mathrm{id}_U \arrow[u, mapsto] \arrow[r, mapsto, "\theta_U"'] & \theta_U(\mathrm{id}_U) \arrow[u, mapsto]
\end{tikzcd}$$

よって $\theta_U(\mathrm{id}_U)|_{U_i}=\theta_{U_i}(*)$ が分かる．

($\Longrightarrow$) S を開集合 $U\subset X$ 上の covering sieve とする．$\{V\}_{V\in S}$ は U の開被覆であるから，上記の議論により次の図式を得る．

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}(S,P) \arrow[r, "f"] & \prod_{V\in S} P(V) \arrow[r, shift left, "p"] \arrow[r, shift right, "q"'] & \prod_{V,W\in S} P(V\cap W) \\
\mathrm{Hom}(y(U),P) \arrow[u, "i"] \arrow[r, "\cong"] & P(U) \arrow[u, "e"']
\end{tikzcd}$$

仮定より e が equalizer となるから i は同型である．

($\Longleftarrow$) $\{U_i\}_{i\in I}$ を U の開被覆とする．これから得られる covering sieve S を取り，上記の議論から次の図式を得る．

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}(S,P) \arrow[r, "\subset"] & \prod_{i\in I} P(U_i) \arrow[r, shift left, "p"] \arrow[r, shift right, "q"'] & \prod_{i,j\in I} P(U_i\cap U_j) \\
\mathrm{Hom}(y(U),P) \arrow[u, "i"] \arrow[r, "\cong"] & P(U) \arrow[u, "e"']
\end{tikzcd}$$

i が同型だから e が p,q の equalizer となる．よって P は層である． □

これを使い，一般の圏 C 上の前層が層であることを定義することができる．その為には，まず $c\in C$ 上の sieve S がいつ covering sieve になるかを定めなければならない．

定義. C を圏とする．各対象 $a\in C$ に対して，a 上の sieve からなる集合 $J(a)$ が与えられ，以下の条件を満たすとき，J を C の Grothendieck 位相という．

(1) $y(a)\in J(a)$ である．($y(a)$ を maximal sieve と呼ぶ．)

(2) $f\colon a\to b$，$S\in J(b)$ に対して $\Omega f(S)\in J(a)$ である．

(3) $S \in J(a)$，R が a 上の sieve で「任意の $f \in S(b)$ に対して $\Omega f(R) \in J(b)$」ならば $R \in J(a)$ である．

また $J(a)$ に含まれる sieve を covering sieve と呼ぶ．圏 C の Grothendieck 位相 J が与えられたとき，組 $\langle C, J\rangle$ を景 (site) という．

定義. 景 $\langle C, J\rangle$ 上の層とは，前層 $P\colon C^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$ であって，任意の $c \in C$ と $S \in J(c)$ に対して $i\colon \mathrm{Hom}_{\widehat{C}}(y(c), P) \to \mathrm{Hom}_{\widehat{C}}(S, P)$ が全単射となるものを言う．$\langle C, J\rangle$ 上の層全体がなす $\widehat{C}$ の充満部分圏を $\mathrm{Sh}(C, J)$ と書く．

例 4. $C = \mathcal{O}(X)$ の場合．$J(U) := \{S \mid S$ は U 上の covering sieve$\}$ と定義すると J は $\mathcal{O}(X)$ の Grothendieck 位相になる．

$\because$) maximal sieve，即ち $S = \mathcal{O}(U)$ は U 上の covering sieve であるから条件 1 は成り立つ．

次に $f\colon U \to U'$ として S を U' 上の sieve とする．$V \in \mathcal{O}(X)$ に対して

$$(\Omega f(S))(V) = \{k\colon V \to U \mid f \circ k \in S(V)\}$$

だから

$$V \in \Omega f(S) \iff V \subset U \text{ かつ } V \in S$$

である．よって条件 2 は「S が U' 上の covering sieve ならば $S \cap \mathcal{O}(U)$ は U 上の covering sieve である」という条件となり，成り立つ．

最後に，S を U 上の covering sieve，R を U 上の sieve とする．条件 3 の「任意の $f \in S(b)$ に対して $\Omega f(R) \in J(b)$」は「$V \in S$ ならば $R \cap \mathcal{O}(V)$ は V 上の covering sieve である」という条件になり，この条件が成り立つとき R は covering sieve である，というのが条件 3 である．故に成り立つ．

この景 $\langle \mathcal{O}(X), J\rangle$ 上の層は，定理 3 より位相空間 X 上の層となる． $\square$

定理 5. $\mathrm{Sh}(C, J)$ はトポスである． $\square$

定義. ある景 $\langle C, J\rangle$ に対する $\mathrm{Sh}(C, J)$ と圏同値になる圏を Grothendieck トポスと呼ぶ．

参考文献

[1] S. Mac Lane and I. Moerdijk, Sheaves in Geometry and Logic, Springer, 1992