例: 単体的集合

alg-d
https://alg-d.com/math/kan_extension/

2025 年 1 月 19 日

普遍随伴が現れる例としてここでは単体的集合を扱う．またここでは **Cat** を小圏全体と関手がなす圏とする．また 0 は自然数に含めるものとする．

定義. $[n] := \{0, 1, \cdots, n\}$ として，これを通常の大小関係で順序集合，即ち圏とみなす．このとき $\{[n] \mid n \in \mathbb{N}\} \subset \mathrm{Ob}(\mathbf{Cat})$ が定める充満部分圏を単体圏 (simplex category) といい $\mathbb{\Delta}$ で表す[*1]．(従って $\mathbb{\Delta}$ の射とは順序を保つ写像である．)

定義. 関手 $\mathbb{\Delta}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$ を単体的集合 (simplicial set) という．また単体的集合の間の射とは自然変換のこととする．故に $\widehat{\mathbb{\Delta}}$ が単体的集合の圏である[*2]．

$X \in \widehat{\mathbb{\Delta}}$ とするとき，$k \in \mathbb{N}$ に対して通常 $X_k := X([k])$ と書く．また $\Delta^n := y([n]) \in \widehat{\mathbb{\Delta}}$ を standard n-simplex という．つまり $k \in \mathbb{N}$ に対して $\Delta^n_k = \mathrm{Hom}_{\mathbb{\Delta}}([k], [n])$ である．Kan 拡張の一般論により，任意の単体的集合 X は Δ^n の余極限で書けるのであった．(即ちある関手 $T\colon J \to \mathbb{\Delta}$ が存在して $X \cong \mathrm{colim}(y \circ T) \cong \operatorname*{colim}_{j \in J} \Delta^{n_j}$ となる．ここで n_j は $[n_j] = Tj$ となるように取った．)

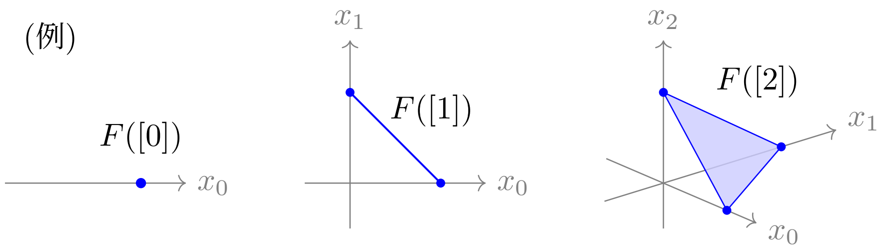
$n \in \mathbb{N}$ に対して位相空間 $F([n]) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ を次により定める．

$$F([n]) := \{\langle x_0, \cdots, x_n \rangle \in [0, 1]^{n+1} \mid x_0 + \cdots + x_n = 1\}$$

[*1] この記号は [1] 等で採用されている記号である．

[*2] この圏を $\mathbf{sSet}, \mathbf{Set}_{\Delta}$ などの記号で表すことが多いが，ここでは $\widehat{\mathbb{\Delta}}$ と書く．

(例)

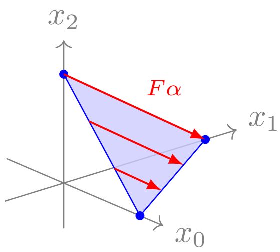


次に $\mathbb{\Delta}$ の射[*3] $\alpha\colon [m] \to [n]$ に対して $F\alpha\colon F([m]) \to F([n])$ を次により定める．

$$F\alpha(x_0, \cdots, x_m) := \left\langle \sum_{i \in \alpha^{-1}(0)} x_i \, , \cdots , \sum_{i \in \alpha^{-1}(n)} x_i \right\rangle$$

(例) $\alpha\colon [2] \to [1]$ $\qquad$ $F\alpha\colon F([2]) \to F([1])$

$$\alpha(0) := 0$$
$$\alpha(1) := 1$$
$$\alpha(2) := 1$$



このとき F は関手 $F\colon \mathbb{\Delta} \to \mathbf{Top}$ になることが容易に分かるから普遍随伴 $y^\dagger F \dashv F^\dagger y$ が得られる．$|{-}| := y^\dagger F\colon \widehat{\mathbb{\Delta}} \to \mathbf{Top}$ を幾何学的実現，$\mathrm{Sing} := F^\dagger y\colon \mathbf{Top} \to \widehat{\mathbb{\Delta}}$ を singular functor と呼ぶ．

$$\begin{tikzcd}
\widehat{\mathbb{\Delta}} \arrow[dr, shift left, "|{-}|"] \arrow[dr, phantom, "\perp"] & \\
\mathbb{\Delta} \arrow[u, "y"] \arrow[r, "F"'] & \mathbf{Top} \arrow[ul, shift left, "\mathrm{Sing}"]
\end{tikzcd}$$

y が忠実充満だから $|\Delta^n| \cong F([n])$ である．また左随伴は余極限と交換するから, 単体的集合 X を上記のように $X \cong \operatorname*{colim}_{j \in J} \Delta^{n_j}$ と書けばその幾何学的実現は $|X| \cong \operatorname*{colim}_{j \in J} F([n_j])$ となる．(つまり $|X|$ は $F([n])$ を貼り合わせることで得られる位相空間である．)

次に $\mathbb{\Delta} \subset \mathbf{Cat}$ が充満部分圏だったから，これの包含関手を $F\colon \mathbb{\Delta} \to \mathbf{Cat}$ とすれば普遍随伴 $y^\dagger F \dashv F^\dagger y$ が得られる．$\tau_1 := y^\dagger F$ と書き，$X \in \widehat{\mathbb{\Delta}}$ に対して $\tau_1(X)$ を X の

[*3] この PDF では圏 $\mathbb{\Delta}$ の射をギリシャ文字 α, β などで表し，逆に $\widehat{\mathbb{\Delta}}$ の射を f, g などで表すことにする．これは通常とは逆だが，単体的集合を扱う多くの文献ではこのような記号の使い方をしているので，そちらに合わせている．

fundamental category と呼ぶ．また $N := F^{\dagger}y\colon \mathbf{Cat} \to \widehat{\mathbb{\Delta}}$ を nerve functor という．

$$
\begin{tikzcd}
\widehat{\mathbb{\Delta}} \arrow[drr, shift left, "\tau_1"] \arrow[drr, phantom, "\perp"] & & \\
\mathbb{\Delta} \arrow[u, "y"] \arrow[rr, "F"'] & & \mathbf{Cat} \arrow[ull, shift left, "N"]
\end{tikzcd}
$$

これらの随伴は普遍随伴の具体例の中でも特に重要なものであり，これらの随伴を通して単体的集合，位相空間，圏の 3 つには様々な関係がある．以下ではその一部を紹介して，最後に quasi-category を定義しよう．

$0 \leq i \leq n$ に対して $\mathbb{\Delta}$ の射 $\delta^n_i\colon [n-1] \to [n]$ と $\sigma^n_i\colon [n+1] \to [n]$ を以下により定める．

$$
\delta^n_i(x) := \begin{cases} x & (0 \leq x < i) \\ x+1 & (i \leq x \leq n-1) \end{cases}
$$
$$
\sigma^n_i(x) := \begin{cases} x & (0 \leq x \leq i) \\ x-1 & (i < x \leq n+1) \end{cases}
$$

$$
\begin{tikzcd}[row sep=small]
{[n-1]} \arrow[r, "\delta^n_i"] & {[n]} & & {[n+1]} \arrow[r, "\sigma^n_i"] & {[n]} \\
 & n & & n+1 \arrow[dr, mapsto] & \\
n-1 \arrow[ur, mapsto] & \vdots & & \vdots & n \\
\vdots & i+1 & & i+2 \arrow[dr, mapsto] & \vdots \\
i \arrow[ur, mapsto] & i & & i+1 \arrow[dr, mapsto] & i+1 \\
i-1 \arrow[r, mapsto] & i-1 & & i \arrow[r, mapsto] & i \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 \arrow[r, mapsto] & 0 & & 0 \arrow[r, mapsto] & 0
\end{tikzcd}
$$

この記号を使うと $\mathbb{\Delta}$ は次のような圏である．

$$
\begin{tikzcd}
{[0]} \arrow[r, shift left=2, "\delta^1_0"] \arrow[r, shift right=2, "\delta^1_1"'] & {[1]} \arrow[l, "\sigma^0_0" description] \arrow[r, shift left=4, "\delta^2_0"] \arrow[r, "\delta^2_1" description] \arrow[r, shift right=4, "\delta^2_2"'] & {[2]} \arrow[l, shift right=2, "\sigma^1_0" description] \arrow[l, shift left=2, "\sigma^1_1" description] \arrow[r, shift left=4, "\delta^3_0"] \arrow[r, phantom, "\vdots"] \arrow[r, shift right=4, "\delta^3_3"'] & \cdots
\end{tikzcd}
$$

これらは次のような性質を持つ．

命題 1. $\mathbb{\Delta}$ の任意の射は δ_i^n, σ_i^n の合成で表せる. □

命題 2. 以下の等式が成り立つ.

$$
\begin{aligned}
\delta_j^{n+1} \circ \delta_i^n &= \delta_i^{n+1} \circ \delta_{j-1}^n \quad (i < j) \\
\sigma_j^n \circ \sigma_i^{n+1} &= \sigma_i^n \circ \sigma_{j+1}^{n+1} \quad (i \leq j) \\
\sigma_j^n \circ \delta_i^{n+1} &= \begin{cases} \delta_i^n \circ \sigma_{j-1}^{n-1} & (i < j) \\ \mathrm{id}_{[n]} & (i = j, j+1) \\ \delta_{i-1}^n \circ \sigma_j^{n-1} & (i > j+1) \end{cases}
\end{aligned}
$$

□

X を単体的集合とするとき $d_i^n := X(\delta_i^n)$, $s_i^n := X(\sigma_i^n)$ と書く. 命題 2 により

$$
\begin{aligned}
d_i^n \circ d_j^{n+1} &= d_{j-1}^n \circ d_i^{n+1} \quad (i < j) \\
s_i^{n+1} \circ s_j^n &= s_{j+1}^{n+1} \circ s_i^n \quad (i \leq j) \\
d_i^{n+1} \circ s_j^n &= \begin{cases} s_{j-1}^{n-1} \circ d_i^n & (i < j) \\ \mathrm{id}_{X_n} & (i = j, j+1) \\ s_j^{n-1} \circ d_{i-1}^n & (i > j+1) \end{cases}
\end{aligned}
$$

が成り立つ.

X, Y を単体的集合とする. 各 $k \in \mathbb{N}$ に対して $X_k \subset Y_k$ となっていて, その包含写像 $f_k\colon X_k \to Y_k$ が射 $f\colon X \to Y$ を与えるとき, X を Y の部分集合といい $X \subset Y$ と書く.

X を単体的集合, $n \in \mathbb{N}$ として $A \subset X_n$ とすると, A を含む最小の部分集合 $Y \subset X$ が存在する. この Y を A で生成される X の部分集合という. また A で生成される X の部分集合が X 自身となるとき, X は A で生成されるという.

命題 3. $A \subset X_n$ で生成される X の部分集合を Y とするとき

$$Y_k = \{X\alpha(a) \mid a \in A,\ \alpha\colon [k] \to [n]\}$$

となる.

証明. $Z_k := \{X\alpha(a) \mid a \in A,\ \alpha\colon [k] \to [n]\}$ と書く. これは単体的集合 Z を定める.

∵) $\beta\colon [k] \to [l]$ を $\mathbb{\Delta}$ の射とする. $z \in Z_l$ に対して $X\beta(z) \in Z_k$ である.

∵) 定義よりある $a \in A$ と $\alpha\colon [l] \to [n]$ が存在して $z = X\alpha(a)$ と書ける. このとき $X\beta(z) = X\beta(X\alpha(a)) = X(\alpha \circ \beta)(a)$ となり $\alpha \circ \beta\colon [k] \to [n]$ だから $X\beta(z) \in Z_k$ である.

従って写像 $Z\beta\colon Z_l \to Z_k$ を $Z\beta := X\beta|_{Z_l}$ で定義することができる．$X\colon \mathbb{\Delta}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$ が関手だから $Z\colon \mathbb{\Delta}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$ も関手であり，従って Z は単体的集合である．

定義から明らかに包含写像 $Z_k \to X_k$ は自然だから，$Z \subset X$ は部分集合であり $A \subset Z_n$ となる．故に Y の最小性より $Y \subset Z$ である．

後は $Z \subset Y$ を示せばよい．そこで $z \in Z_k$ を取る．ある $a \in A$ と $\alpha\colon [k] \to [n]$ が存在して $z = X\alpha(a)$ と書ける．包含写像 $Y_k \to X_k$ が自然だから次の図式が可換である．

$$\begin{tikzcd} Y_k \arrow[r, "\subset"] & X_k \\ Y_n \arrow[u, "Y\alpha"] \arrow[r, "\subset"'] & X_n \arrow[u, "X\alpha"'] \end{tikzcd}$$

$a \in A \subset Y_n$ だから $X\alpha(a) \in Y_k$ でなければならない．故に $Z_k \subset Y_k$ が分かる． □

命題 4. X が $A \subset X_n$ で生成されているとき，射 $f\colon X \to Y$ は $f_n(a)$ $(a \in A)$ で決定される．即ち，$f, g\colon X \to Y$ が「任意の $a \in A$ に対して $f_n(a) = g_n(a)$」を満たすならば $f = g$ である．

証明. $f, g\colon X \to Y$ が，任意の $a \in A$ に対して $f_n(a) = g_n(a)$ を満たすとする．任意の $k \in \mathbb{N}$，$x \in X_k$ に対して $f_k(x) = g_k(x)$ を示せばよい．まず X が A で生成されているから，命題 3 よりある $a \in A$ と $\alpha\colon [k] \to [n]$ が存在して $x = X\alpha(a)$ と書ける．このとき次の図式が可換である．

$$\begin{tikzcd} X_k \arrow[r, "f_k"] & Y_k \\ X_n \arrow[u, "X\alpha"] \arrow[r, "f_n"'] & Y_n \arrow[u, "Y\alpha"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X_k \arrow[r, "g_k"] & Y_k \\ X_n \arrow[u, "X\alpha"] \arrow[r, "g_n"'] & Y_n \arrow[u, "Y\alpha"'] \end{tikzcd}$$

従って $f_k(x) = f_k(X\alpha(a)) = Y\alpha(f_n(a)) = Y\alpha(g_n(a)) = g_k(X\alpha(a)) = g_k(x)$ である． □

例 5. Δ^n は $\{\mathrm{id}_{[n]}\} \subset \Delta^n_n = \mathrm{Hom}_{\mathbb{\Delta}}([n],[n])$ で生成される．

証明. $X \subset \Delta^n$ を $\{\mathrm{id}_{[n]}\} \subset \Delta^n_n$ で生成された部分集合とする．命題 3 より

$$X_k = \{X\alpha(\mathrm{id}_{[n]}) \mid \alpha\colon [k] \to [n]\} = \mathrm{Hom}_{\mathbb{\Delta}}([k],[n]) = \Delta^n_k$$

である． □

定義. $0 \le k \le n$ とする.

(1) $\{\delta_k^n\} \subset \Delta_{n-1}^n$ で生成される Δ^n の部分集合を $\partial_k \Delta^n$ と書く.
(2) $\{\delta_i^n \mid 0 \le i \le n\} \subset \Delta_{n-1}^n$ で生成される Δ^n の部分集合を $\partial\Delta^n$ と書き simplicial n-sphere という.
(3) $\{\delta_i^n \mid 0 \le i \le n, i \ne k\} \subset \Delta_{n-1}^n$ で生成される Δ^n の部分集合を horn といい，記号で $\Lambda^{n,k}$ と書く．$0 < k < n$ のときの $\Lambda^{n,k}$ を inner horn といい，$k = 0, n$ のときの $\Lambda^{n,k}$ を outer horn という.

以下，包含 $\Lambda^{n,k} \subset \Delta^n$ が与える射を inc で表す.

命題 6. $|\partial\Delta^n| \cong S^n$. ($n$ 次元球面)

証明. 略. □

定義. $X \in \widehat{\mathbb{\Delta}}$ が Kan 複体 (Kan complex)
$\Longleftrightarrow$ $0 \le k \le n$ とするとき，任意の射 $f\colon \Lambda^{n,k} \to X$ に対してある射 $h\colon \Delta^n \to X$ が存在して次が可換となる.

$$\begin{tikzcd} \Lambda^{n,k} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\mathrm{inc}"'] & X \\ \Delta^n \arrow[ur, dashed, "h"'] & \end{tikzcd}$$

定理 7. $S \in \mathbf{Top}$ に対して $\mathrm{Sing}(S)$ は Kan 複体である.

証明. $f\colon \Lambda^{n,k} \to \mathrm{Sing}(S)$ を取る．随伴により $\widetilde{f}\colon |\Lambda^{n,k}| \to S$ を得る．このとき次の図式を可換にする $\widetilde{h}$ が存在する.

$$\begin{tikzcd} |\Lambda^{n,k}| \arrow[r, "\widetilde{f}"] \arrow[d, "|\mathrm{inc}|"'] & S \\ |\Delta^n| \arrow[ur, dashed, "\widetilde{h}"'] & \end{tikzcd}$$

故に再び随伴により可換図式

$$\begin{tikzcd} \Lambda^{n,k} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\mathrm{inc}"'] & \mathrm{Sing}(S) \\ \Delta^n \arrow[ur, dashed, "h"'] & \end{tikzcd}$$

を得る. □

C を圏とするとき Kan 拡張の一般論より $N(C)$ は $N(C)_n \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Cat}}([n], C)$ で与えられる．つまり $N(C)_n$ の元は圏 C における図式

$$a_0 \xrightarrow{f_0} a_1 \xrightarrow{f_1} \cdots \xrightarrow{f_{n-2}} a_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} a_n$$

と同一視できる．この同一視をしたとき，d_i^n, s_i^n は

$$\begin{aligned}
&d_i^n(a_0 \xrightarrow{f_0} \cdots \xrightarrow{f_{n-1}} a_n)\\
&= \begin{cases}
a_1 \xrightarrow{f_1} \cdots \xrightarrow{f_{n-1}} a_n & (i = 0)\\
a_0 \xrightarrow{f_0} \cdots \xrightarrow{f_{i-2}} a_{i-1} \xrightarrow{f_i \circ f_{i-1}} a_{i+1} \xrightarrow{f_{i+1}} \cdots \xrightarrow{f_{n-1}} a_n & (0 < i < n)\\
a_0 \xrightarrow{f_0} \cdots \xrightarrow{f_{n-2}} a_{n-1} & (i = n)
\end{cases}\\
&s_i^n(a_0 \xrightarrow{f_0} \cdots \xrightarrow{f_{n-1}} a_n)\\
&= a_0 \xrightarrow{f_0} \cdots \xrightarrow{f_{i-1}} a_i \xrightarrow{\mathrm{id}} a_i \xrightarrow{f_i} \cdots \xrightarrow{f_{n-1}} a_n
\end{aligned}$$

で与えられる．特に $N(C)_0 \cong \mathrm{Ob}(C)$，$N(C)_1 \cong \mathrm{Mor}(C)$ であり，また $d_0^1(f) = \mathrm{cod}(f)$，$d_1^1(f) = \mathrm{dom}(f)$，$d_1^2(a \xrightarrow{f} b \xrightarrow{g} c) = (a \xrightarrow{g \circ f} c)$，$s_0^0(a) = \mathrm{id}_a$ となる．

以上を踏まえて，一般の単体的集合 X に対しても以下のような記法を使うことにする．まず $x \in X_1$ に対して $x_0 := d_0^1(x)$，$x_1 := d_1^1(x)$ とすれば $x_0, x_1 \in X_0$ である．このとき $x\colon x_1 \to x_0$ と書き表すことにする．

今度は $x \in X_2$ として $x_0 := d_0^2(x)$, $x_1 := d_1^2(x)$, $x_2 := d_2^2(x)$ とすると $x_0, x_1, x_2 \in X_1$ である．よって $x_{00} := (x_0)_0$ 等を考えることができるが，命題 2 により

$$\begin{aligned}
x_{00} &= d_0^1(d_0^2(x)) = d_0^1(d_1^2(x)) = x_{10}\\
x_{01} &= d_1^1(d_0^2(x)) = d_0^1(d_2^2(x)) = x_{20}\\
x_{11} &= d_1^1(d_1^2(x)) = d_1^1(d_2^2(x)) = x_{21}
\end{aligned}$$

となるから $a := x_{11}$，$b := x_{01}$，$c := x_{00}$ と置けば $x_0\colon b \to c$，$x_1\colon a \to c$，$x_2\colon a \to b$ である．この状況を

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[rr, "x_1"] \arrow[dr, "x_2"'] & {} \arrow[d, phantom, "x"] & c \\
& b \arrow[ur, "x_0"'] &
\end{tikzcd}$$

と書き表すことにする．

$u\colon a \to b$ とする．即ち $u \in X_1$ で $a := d_1^1(u)$，$b := d_0^1(u)$ である．$x := s_0^1(u)$ と置く．

このとき命題 2 により

$$
\begin{aligned}
x_0 &= d_0^2(x) = d_0^2(s_0^1(u)) = u \\
x_1 &= d_1^2(x) = d_1^2(s_0^1(u)) = u \\
x_2 &= d_2^2(x) = d_2^2(s_0^1(u)) = s_0^0(d_1^1(u)) = s_0^0(a)
\end{aligned}
$$

であるから，上記の記法で表せば次のようになる．

$$
\begin{tikzcd}
a \arrow[rr, "u"] \arrow[dr, "s_0^0(a)"'] \arrow[rr, phantom, shift right=4ex, "s_0^1(u)"] & & b \\
& a \arrow[ur, "u"'] &
\end{tikzcd}
$$

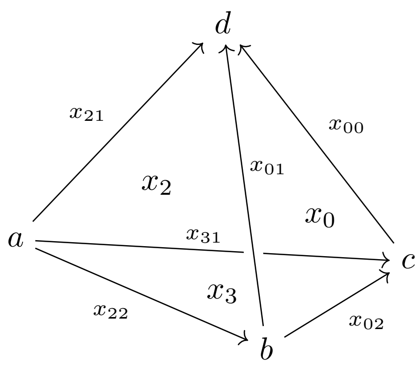
同様にして $s_1^1(u)$ については次のようになる．

$$
\begin{tikzcd}
a \arrow[rr, "u"] \arrow[dr, "u"'] \arrow[rr, phantom, shift right=4ex, "s_1^1(u)"] & & b \\
& b \arrow[ur, "s_0^0(b)"'] &
\end{tikzcd}
$$

次に $x \in X_3$ としたときに，同様の記法を使えば 4 つの $x_0, x_1, x_2, x_3 \in X_2$ があり，命題 2 により

$$
\begin{aligned}
x_{00} &= d_0^2(d_0^3(x)) = d_0^2(d_1^3(x)) = x_{10} \\
x_{01} &= d_1^2(d_0^3(x)) = d_0^2(d_2^3(x)) = x_{20} \\
x_{02} &= d_2^2(d_0^3(x)) = d_0^2(d_3^3(x)) = x_{30} \\
x_{11} &= d_1^2(d_1^3(x)) = d_1^2(d_2^3(x)) = x_{21} \\
x_{12} &= d_2^2(d_1^3(x)) = d_1^2(d_3^3(x)) = x_{31} \\
x_{22} &= d_2^2(d_2^3(x)) = d_2^2(d_3^3(x)) = x_{32}
\end{aligned}
$$

となるから



のようになっている (注: 奥の三角形は x_1).

$f\colon \Lambda^{2,0} \to X$ を射とする．$\Lambda^{2,0}$ は $\{\delta^2_1, \delta^2_2\}$ で生成されているから，f は $x_1 := f_1(\delta^2_1)$, $x_2 := f_1(\delta^2_2)$ で定まる．また f が自然変換だから

$$\begin{tikzcd} \Lambda^{2,0}_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "-\circ\delta^1_1"'] & X_1 \arrow[d, "d^1_1"] \\ \Lambda^{2,0}_0 \arrow[r, "f_0"'] & X_0 \end{tikzcd}$$

が可換である．命題 2 より $\delta^2_2 \circ \delta^1_1 = \delta^2_1 \circ \delta^1_1$ だから

$$d^1_1(x_1) = d^1_1 \circ f_1(\delta^2_1) = f_0(\delta^2_1 \circ \delta^1_1) = f_0(\delta^2_2 \circ \delta^1_1) = d^1_1 \circ f_1(\delta^2_2) = d^1_1(x_2)$$

となる．つまり次のような状況である．

$$\begin{tikzcd} a \arrow[rr, "x_1"] \arrow[dr, "x_2"'] & & c \\ & b & \end{tikzcd}$$

逆に $x_1, x_2 \in X_1$ が

$$\begin{tikzcd} a \arrow[rr, "x_1"] \arrow[dr, "x_2"'] & & c \\ & b & \end{tikzcd}$$

となっていれば，射 $f\colon \Lambda^{2,0} \to X$ を $f_1(\delta^2_1) := x_1$，$f_1(\delta^2_2) := x_2$ により定義することができる．つまり，射 $\Lambda^{2,0} \to X$ は

$$\begin{tikzcd} a \arrow[rr, "x_1"] \arrow[dr, "x_2"'] & & c \\ & b & \end{tikzcd}$$

と同一視することができる．同様にして，射 $f\colon \Lambda^{2,1} \to X$，$g\colon \Lambda^{2,2} \to X$ はそれぞれ

$$\begin{tikzcd} a \arrow[dr, "f_1(\delta^2_2)"'] & & c \\ & b \arrow[ur, "f_1(\delta^2_0)"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} a \arrow[rr, "g_1(\delta^2_1)"] & & c \\ & b \arrow[ur, "g_1(\delta^2_0)"'] & \end{tikzcd}$$

と同一視できる．

$0 \leq i < j \leq n$ に対して射 $\gamma^n_{ij}\colon [1] \to [n]$ を $\gamma^n_{ij}(0) := i$, $\gamma^n_{ij}(1) := j$ により定める．また $\gamma^n_i := \gamma^n_{i,i+1}$ と書く．

補題 8. 圏 C に対して射 $f\colon \Delta^n \to N(C)$ は $f_1(\gamma^n_0), \cdots, f_1(\gamma^n_{n-1})$ により決定される．

証明. 米田の補題により $f \in N(C)_n$ とみなしたときの図式を

$$a_0 \xrightarrow{p_0} a_1 \xrightarrow{p_1} \cdots \xrightarrow{p_{n-2}} a_{n-1} \xrightarrow{p_{n-1}} a_n$$

とする．米田の補題の証明 (即ち，図式

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_{\widehat{\Delta}}(\Delta^1, N(C)) \arrow[r, "\sim"] & N(C)_1 & f \circ y(\gamma^n_i) \arrow[r, mapsto] & (a_i \xrightarrow{p_i} a_{i+1}) \\ \mathrm{Hom}_{\widehat{\Delta}}(\Delta^n, N(C)) \arrow[r, "\sim"] \arrow[u, "-\circ y(\gamma^n_i)"] & N(C)_n \arrow[u, "N(C)(\gamma^n_i)"'] & f \arrow[r, mapsto] \arrow[u, mapsto] & (f \text{ に対応する図式}) \arrow[u, mapsto] \end{tikzcd}$$

の可換性) より $f_1(\gamma^n_i) = p_i$ が分かる．つまり f は $f_1(\gamma^n_0), \cdots, f_1(\gamma^n_{n-1})$ により決定される． □

補題 9. $0 < k < n$ とする．射 $f\colon \Lambda^{n,k} \to N(C)$ は $f_1(\gamma^n_0), \cdots, f_1(\gamma^n_{n-1})$ により決定される．

証明. $0 \leq l \leq n$, $l \neq k$ に対して $f^l := (\Delta^{n-1} \xrightarrow{y(\delta^n_l)} \Lambda^{n,k} \xrightarrow{f} N(C))$ とすれば，f は f^l によって決定される．

∵) 命題 4 より f は $f(\delta^n_i)$ $(0 \leq i \leq n,\ i \neq k)$ で決定される．ここで米田の補題の同型の自然性 (「米田の補題」の PDF を参照) より

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_{\widehat{\Delta}}(\Delta^n, \Lambda^{n,k}) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "f\circ-"'] & \Lambda^{n,k}_n \arrow[d, "f_n"] & y(\delta^n_i) \arrow[r, mapsto, "\sim"] \arrow[d, mapsto, "f\circ-"'] & \delta^n_i \arrow[d, mapsto, "f_n"] \\ \mathrm{Hom}_{\widehat{\Delta}}(\Delta^n, N(C)) \arrow[r, "\sim"] & N(C)_n & f^l \arrow[r, mapsto, "\sim"] & f_n(\delta^n_i) \end{tikzcd}$$

は可換である．故に f は f^l で決定されることが分かる．

そこで $f^l \in N(C)_{n-1}$ とみなしたときの図式を

$$a^l_0 \xrightarrow{p^l_0} a^l_1 \xrightarrow{p^l_1} \cdots \xrightarrow{p^l_{n-3}} a^l_{n-2} \xrightarrow{p^l_{n-2}} a^l_{n-1}$$

とすれば，f は p^l_i $(0 \leq l \leq n,\ l \neq k,\ 0 \leq i \leq n-2)$ により決定されることになる．補

題 8 の証明を $f^l\colon \Delta^{n-1} \to N(C)$ に適用すると

$$p_i^l = f_1^l(\gamma_i^{n-1}) = f_1(\delta_l^n \circ \gamma_i^{n-1}) = \begin{cases} f_1(\gamma_i^n) & (i < l-1) \\ f_1(\gamma_{l-1,l+1}^n) & (i = l-1) \\ f_1(\gamma_{i+1}^n) & (i > l-1) \end{cases}$$

$$\begin{tikzcd}
{[1]} \arrow[r, "\gamma^{n-1}_{l-1,l}"] & {[n-1]} \arrow[r, "\delta^n_l"] & {[n]} \\
& & n \\
& n-1 \arrow[ur, mapsto] & \vdots \\
& \vdots & l+1 \\
& l \arrow[ur, mapsto] & l \\
& l-1 \arrow[r, mapsto] & l-1 \\
1 \arrow[uur, mapsto] & \vdots & \vdots \\
0 \arrow[uur, mapsto] & 0 \arrow[r, mapsto] & 0
\end{tikzcd}$$

が分かる．故に

$$\begin{aligned}
f_1(\gamma_1^n) &= p_0^0 \\
f_1(\gamma_2^n) &= p_1^0 = p_1^1 \\
&\vdots \\
f_1(\gamma_k^n) &= p_{k-1}^0 = \cdots = p_{k-1}^{k-1} \\
f_1(\gamma_{k+1}^n) &= p_k^0 = \cdots = p_k^{k-1} \\
f_1(\gamma_{k+2}^n) &= p_{k+1}^0 = \cdots = p_{k+1}^{k-1} = p_{k+1}^{k+1} \\
&\vdots \\
f_1(\gamma_{n-2}^n) &= p_{n-3}^0 = \cdots = p_{n-3}^{k-1} = p_{n-3}^{k+1} = \cdots = p_{n-3}^{n-3} \\
f_1(\gamma_{n-1}^n) &= p_{n-2}^0 = \cdots = p_{n-2}^{k-1} = p_{n-2}^{k+1} = \cdots = p_{n-2}^{n-3} = p_{n-2}^{n-2}
\end{aligned}$$

となる．同様にして

$$
\begin{aligned}
f_1(\gamma_0^n) &= p_0^2 = p_0^3 = \cdots = p_0^{k-1} = p_0^{k+1} = \cdots = p_0^n \\
f_1(\gamma_1^n) &= p_1^3 = \cdots = p_1^{k-1} = p_1^{k+1} = \cdots = p_1^n \\
&\vdots \\
f_1(\gamma_{k-3}^n) &= p_{k-3}^{k-1} = p_{k-3}^{k+1} = \cdots = p_{k-3}^n \\
f_1(\gamma_{k-2}^n) &= p_{k-2}^{k+1} = \cdots = p_{k-2}^n \\
f_1(\gamma_{k-1}^n) &= p_{k-1}^{k+1} = \cdots = p_{k-1}^n \\
&\vdots \\
f_1(\gamma_{n-3}^n) &= p_{n-3}^{n-1} = p_{n-3}^n \\
f_1(\gamma_{n-2}^n) &= p_{n-2}^n
\end{aligned}
$$

であり，また

$$
f_1(\gamma_{02}^n) = p_0^1, \quad \cdots, \quad f_1(\gamma_{k-2,k}^n) = p_{k-2}^{k-1},
$$
$$
f_1(\gamma_{k,k+2}^n) = p_k^{k+1}, \quad \cdots, \quad f_1(\gamma_{n-2,n}^n) = p_{n-2}^{n-1}
$$

となる．即ち f は

$$
f_1(\gamma_0^n),\ \cdots,\ f_1(\gamma_{n-1}^n),\ f_1(\gamma_{02}^n),\ \cdots,\ f_1(\gamma_{k-2,k}^n),\ f_1(\gamma_{k,k+2}^n),\ \cdots,\ f_1(\gamma_{n-2,n}^n)
$$

で決定される．ここで $0 \leq j \leq n-3$ に対して $\nu_j\colon [2] \to [n-1]$ を

$$
\nu_j(0) := j, \quad \nu_j(1) := j+1, \quad \nu_j(2) := j+2
$$

で定義すると，再び米田の補題の証明 (即ち図式

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\widehat{\mathbb{\Delta}}}(\Delta^2, N(C)) \arrow[r, "\sim"] & N(C)_2 \\
\mathrm{Hom}_{\widehat{\mathbb{\Delta}}}(\Delta^{n-1}, N(C)) \arrow[r, "\sim"] \arrow[u, "-\circ y(\nu_j)"] & N(C)_{n-1} \arrow[u, "N(C)(\nu_j)"']
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
f^l \circ y(\nu_j) \arrow[r, mapsto, "\sim"] & (a_j^l \xrightarrow{p_j^l} a_{j+1}^l \xrightarrow{p_{j+1}^l} a_{j+2}^l) \\
f^l \arrow[r, mapsto, "\sim"] \arrow[u, mapsto, "-\circ y(\nu_j)"] & (f^l \text{ に対応する図式}) \arrow[u, mapsto, "N(C)(\nu_j)"']
\end{tikzcd}
$$

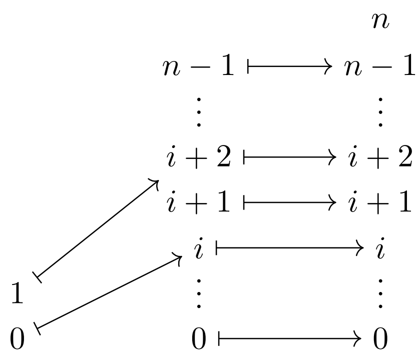
が可換であること) より $f_2^l(\nu_j) = (a_j^l \xrightarrow{p_j^l} a_{j+1}^l \xrightarrow{p_{j+1}^l} a_{j+2}^l)$ が分かる．故に図式

$$
\begin{tikzcd}
\Delta_1^{n-1} \arrow[r, "f_1^l"] & N(C)_1 \\
\Delta_2^{n-1} \arrow[r, "f_2^l"'] \arrow[u, "-\circ\delta_1^2"] & N(C)_2 \arrow[u, "N(C)(\delta_1^2)"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\gamma_{j,j+2}^{n-1} \arrow[r, mapsto, "f_1^l"] & (a_j^l \xrightarrow{p_{j+1}^l \circ p_j^l} a_{j+2}^l) \\
\nu_j \arrow[r, mapsto, "f_2^l"'] \arrow[u, mapsto, "-\circ\delta_1^2"] & (a_j^l \xrightarrow{p_j^l} a_{j+1}^l \xrightarrow{p_{j+1}^l} a_{j+2}^l) \arrow[u, mapsto, "N(C)(\delta_1^2)"']
\end{tikzcd}
$$

の可換性から $f_1^l(\gamma_{j,j+2}^{n-1}) = p_{j+1}^l \circ p_j^l$ となる．従って $0 \leq i \leq k-2$ に対しては

$$f_1(\gamma_{i,i+2}^n) = f_1(\delta_n^n \circ \gamma_{i,i+2}^{n-1}) = f_1^n(\gamma_{i,i+2}^{n-1}) = p_{i+1}^n \circ p_i^n = f_1(\gamma_{i+1}^n) \circ f_1(\gamma_i^n)$$

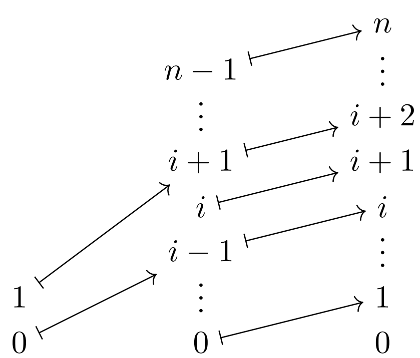
$$[1] \xrightarrow{\gamma_{i,i+2}^{n-1}} [n-1] \xrightarrow{\delta_n^n} [n]$$



であり，$k \leq i \leq n-2$ に対しては

$$f_1(\gamma_{i,i+2}^n) = f_1(\delta_0^n \circ \gamma_{i-1,i+1}^{n-1}) = f_1^0(\gamma_{i-1,i+1}^{n-1}) = p_i^0 \circ p_{i-1}^0 = f_1(\gamma_{i+1}^n) \circ f_1(\gamma_i^n)$$

$$[1] \xrightarrow{\gamma_{i-1,i+1}^{n-1}} [n-1] \xrightarrow{\delta_0^n} [n]$$



であるから，結局 f は $f_1(\gamma_0^n)$，$\cdots$，$f_1(\gamma_{n-1}^n)$ のみで決定されることが分かった． $\square$

定理 10. $X \in \widehat{\Delta}$ がある圏 C により $X \cong N(C)$ と書ける
$\Longleftrightarrow$ $0 < k < n$ とするとき，任意の射 $f\colon \Lambda^{n,k} \to X$ に対してある射 $h\colon \Delta^n \to X$ が一意に存在して次が可換となる．

$$\begin{tikzcd} \Lambda^{n,k} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\mathrm{inc}"'] & X \\ \Delta^n \arrow[ur, dashed, "h"'] & \end{tikzcd}$$

証明. ($\Longrightarrow$) 任意の $f\colon \Lambda^{n,k} \to N(C)$ を取る．$\gamma_i^n \in \Lambda_1^{n,k}$ だから $p_i := f_1(\gamma_i) \in N(C)_1$ と定めると，これは図式

$$\bullet \xrightarrow{p_0} \bullet \to \cdots \to \bullet \xrightarrow{p_{n-1}} \bullet$$

を与えるから，$N(C)_n$ の対象を定める．これを米田の補題により $h\colon \Delta^n \to N(C)$ とみなす．このとき

$$\begin{tikzcd} \Lambda^{n,k} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\mathrm{inc}"'] & N(C) \\ \Delta^n \arrow[ur, dashed, "h"'] & \end{tikzcd}$$

は可換である．

$\because$) 補題 9 より，$0 \leq i \leq n-1$ に対して $f_1(\gamma_i^n) = h_1(\gamma_i^n)$ を示せばよいがそれは h の定義から明らか.

h の一意性を示すため

$$\begin{tikzcd} \Lambda^{n,k} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\mathrm{inc}"'] & N(C) \\ \Delta^n \arrow[ur, dashed, "h'"'] & \end{tikzcd}$$

が可換であるとする．このとき $h'_1(\gamma_i^n) = f_1(\gamma_i^n) = h_1(\gamma_i^n)$ である．故に補題 9 より $h = h'$ となることが分かる．

($\Longleftarrow$) 圏 C を以下のように定義する．

- $\mathrm{Ob}(C) := X_0$，$\mathrm{Mor}(C) := X_1$ とする．
- $f \in X_1$ に対して $\mathrm{dom}(f) := d_1^1(f) \in X_0$，$\mathrm{cod}(f) := d_0^1(f) \in X_0$ と定める．
- $a \xrightarrow{f} b \xrightarrow{g} c$ に対して $g \circ f\colon a \to c$ を定めたい．そのために $k\colon \Lambda^{2,1} \to X$ を

$$k_1(\delta_0^2) := g \in X_1, \quad k_1(\delta_2^2) := f \in X_1$$

により定める．つまり k は

$$\begin{tikzcd} a \arrow[dr, "f"'] & & c \\ & b \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

で定まる射である．仮定により $\widetilde{k}\colon \Delta^2 \to X$ が一意に存在して

$$\begin{tikzcd} \Lambda^{2,1} \arrow[r, "k"] \arrow[d, "\mathrm{inc}"'] & X \\ \Delta^2 \arrow[ur, dashed, "\widetilde{k}"'] & \end{tikzcd}$$

が可換となる．このとき米田の補題により $\widetilde{k}\colon \Delta^2 \to X$ を $\widetilde{k} \in X_2$ とみなして $g \circ f := d_1^2(\widetilde{k})$ と定める．つまり次のような状況になる．

$$\begin{tikzcd} a \arrow[rr, "g\circ f"] \arrow[dr, "f"'] & \widetilde{k} & c \\ & b \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

- $a \in X_0$ に対して $\mathrm{id}_a := s_0^0(a) \in X_1$ と定める．命題 2 により

$$\mathrm{dom}(\mathrm{id}_a) = d_1^1 \circ s_0^0(a) = a, \quad \mathrm{cod}(\mathrm{id}_a) = d_0^1 \circ s_0^0(a) = a$$

である．

以上の定義により C は圏となる．

$\because$) まず恒等射について示す．$f \in X_1$ に対して $x := s_1^1(f)$ と置けば，$a := \mathrm{dom}(f)$，$b := \mathrm{cod}(f)$ としたとき

$$\begin{aligned} d_0^2(x) &= d_0^2(s_1^1(f)) = s_0^0(d_0^1(f)) = s_0^0(b) = \mathrm{id}_b \\ d_1^2(x) &= d_1^2(s_1^1(f)) = \mathrm{id}(f) = f \\ d_2^2(x) &= d_2^2(s_1^1(f)) = \mathrm{id}(f) = f \end{aligned}$$

である．

$$\begin{tikzcd} a \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "f"'] & x & b \\ & b \arrow[ur, "\mathrm{id}_b"'] & \end{tikzcd}$$

即ち

$$\begin{tikzcd}
\Lambda^{2,1} \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{inc}"'] & X \\
\Delta^2 \arrow[ur, dashed, "x"'] &
\end{tikzcd}$$

が可換となり，合成の定義より $\mathrm{id} \circ f = f$ となる．同様にして $f \circ \mathrm{id} = f$ も分かるので id は恒等射の条件を満たす．

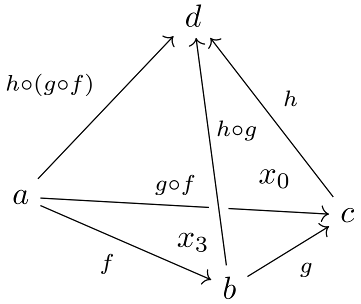
後は結合律を示せばよい．$a \xrightarrow{f} b \xrightarrow{g} c \xrightarrow{h} d$ とする．$h \circ g$ を定める $x_0 \in X_2$ と $(h \circ g) \circ f$ を定める $x_2 \in X_2$ を取ると次のようになる．

$$\begin{tikzcd}
 & d & \\
a \arrow[ur, "(h\circ g)\circ f"] \arrow[dr, "f"'] \arrow[r, phantom, "x_2"] & & c \arrow[ul, "h"'] \arrow[l, phantom, "x_0"] \\
 & b \arrow[uu, "h\circ g"] \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

同様に $g \circ f$ を定める $x_3 \in X_2$ と $h \circ (g \circ f)$ を定める $x_1 \in X_2$ を取ると次のようになる．

$$\begin{tikzcd}
 & d \arrow[d, phantom, "x_1"] & \\
a \arrow[ur, "h\circ(g\circ f)"] \arrow[rr, "g\circ f"] \arrow[dr, "f"'] & \arrow[d, phantom, "x_3"] & c \arrow[ul, "h"'] \\
 & b \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

このとき x_0, x_1, x_3 を組み合わせると



(11)

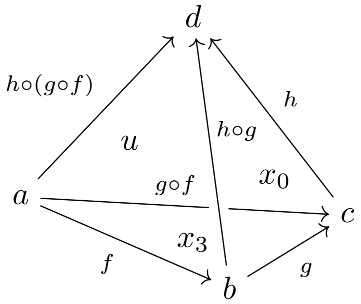
を得る (注: 三角錐の中身と，手前左の三角形の部分が空いている．また奥の三角形は x_1)．つまりこれは射 $k\colon \Lambda^{3,2} \to X$ であって

$$k_2(\delta^3_0) := x_0, \quad k_2(\delta^3_1) := x_1, \quad k_2(\delta^3_3) := x_3$$

により定まるものである．仮定により $x\colon \Delta^3 \to X$ が一意に存在して

$$\begin{tikzcd}
\Lambda^{3,2} \arrow[r, "k"] \arrow[d, "\mathrm{inc}"'] & X \\
\Delta^3 \arrow[ur, dashed, "x"'] &
\end{tikzcd}$$

が可換となる．つまりこの x は (11) の中身を埋める三角錐になっている．そこで $u := d^3_2(x)$ と置くと



となるから，合成の定義より $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ である (計算で示す場合は

$$d^2_0(u) = d^2_0(d^3_2(x)) = d^2_1(d^3_0(x)) = d^2_1(x_0) = h \circ g$$
$$d^2_2(u) = d^2_2(d^3_2(x)) = d^2_2(d^3_3(x)) = d^2_2(x_3) = f$$

となる)．

定義から $N(C)_0 = X_0$，$N(C)_1 = X_1$ である．そこで写像 $f_n\colon X_n \to N(C)_n$ を

$$f_n(x) = \begin{cases} x & (n=0) \\ \bullet \xrightarrow{X\gamma_0^n(x)} \bullet \to \cdots \to \bullet \xrightarrow{X\gamma_{n-1}^n(x)} \bullet & (n \geq 1) \end{cases}$$

で定める．この f_n は射 $X \to N(C)$ を定める．

∵) $\alpha\colon [m] \to [n]$ に対して

$$\begin{tikzcd} X_m \arrow[r, "f_m"] & N(C)_m \\ X_n \arrow[u, "X\alpha"] \arrow[r, "f_n"'] & N(C)_n \arrow[u, "NC(\alpha)"'] \end{tikzcd}$$

が可換であることを示せばよい．命題 1 より $\alpha = \delta_i^n, \sigma_i^n$ の場合に示せばよい．

(0) $\alpha = \delta_0^n$ の場合，$x \in X_n$ に対して

$$d_0^n \circ f_n(x) = (\bullet \xrightarrow{X\gamma_1^n(x)} \bullet \to \cdots \to \bullet \xrightarrow{X\gamma_{n-1}^n(x)} \bullet)$$
$$f_{n-1} \circ X\delta_0^n(x) = (\bullet \xrightarrow{X\gamma_0^{n-1}(X\delta_0^n(x))} \bullet \to \cdots \to \bullet \xrightarrow{X\gamma_{n-2}^{n-1}(X\delta_0^n(x))} \bullet)$$

となる．故に $0 \leq k \leq n-2$ に対して $X\gamma_k^{n-1}(X\delta_0^n(x)) = X\gamma_{k+1}^n(x)$ を示せばよい．そのためには $\delta_0^n \circ \gamma_k^{n-1} = \gamma_{k+1}^n$ を示せばよいが，それは定義より明らか．

(1) $\alpha = \delta_n^n$ の場合，$x \in X_n$ に対して

$$d_n^n \circ f_n(x) = (\bullet \xrightarrow{X\gamma_0^n(x)} \bullet \to \cdots \to \bullet \xrightarrow{X\gamma_{n-2}^n(x)} \bullet)$$
$$f_{n-1} \circ X\delta_n^n(x) = (\bullet \xrightarrow{X\gamma_0^{n-1}(X\delta_n^n(x))} \bullet \to \cdots \to \bullet \xrightarrow{X\gamma_{n-2}^{n-1}(X\delta_n^n(x))} \bullet)$$

となる．故に $0 \leq k \leq n-2$ に対して $X\gamma_k^{n-1}(X\delta_n^n(x)) = X\gamma_k^n(x)$ を示せばよい．そのためには $\delta_n^n \circ \gamma_k^{n-1} = \gamma_k^n$ を示せばよいが，それは定義より明らか．

(2) $\alpha = \delta_i^n$ $(0 < i < n)$ の場合，$x \in X_n$ に対して

$$\begin{aligned} &d_i^n \circ f_n(x) \\ &= (\bullet \xrightarrow{X\gamma_0^n(x)} \bullet \to \cdots \to \bullet \xrightarrow{X\gamma_i^n(x) \circ X\gamma_{i-1}^n(x)} \bullet \to \cdots \to \bullet \xrightarrow{X\gamma_{n-1}^n(x)} \bullet) \end{aligned}$$
$$f_{n-1} \circ X\delta_i^n(x) = (\bullet \xrightarrow{X\gamma_0^{n-1}(X\delta_i^n(x))} \bullet \to \cdots \to \bullet \xrightarrow{X\gamma_{n-2}^{n-1}(X\delta_i^n(x))} \bullet)$$

となる．故に $0 \leq k \leq n-2$ に対して

$$X\gamma_k^{n-1}(X\delta_i^n(x)) = \begin{cases} X\gamma_k^n(x) & (0 \leq k < i-1) \\ X\gamma_i^n(x) \circ X\gamma_{i-1}^n(x) & (k = i-1) \\ X\gamma_{k+1}^n(x) & (i-1 < k \leq n-2) \end{cases}$$

を示せばよい．まず $k \neq i-1$ の場合は定義から明らか．$k = i-1$ の場合は $N(C)$ の定義より $X\gamma_{i-1}^{n-1}(X\delta_i^n(x)) = X\gamma_i^n(x) \circ X\gamma_{i-1}^n(x)$ である．

$$[1] \xrightarrow{\gamma_{i-1}^{n-1}} [n-1] \xrightarrow{\delta_i^n} [n]$$

$$\begin{tikzcd}
 & & n \\
 & n-1 \arrow[ur, mapsto] & \vdots \\
 & \vdots & i+1 \\
 & i \arrow[ur, mapsto] & i \\
 & i-1 \arrow[r, mapsto] & i-1 \\
1 \arrow[uur, mapsto] & \vdots & \vdots \\
0 \arrow[uur, mapsto] & 0 \arrow[r, mapsto] & 0
\end{tikzcd}$$

(3) $\alpha = \sigma_i^n$ $(0 \leq i \leq n)$ の場合，$x \in X_n$ に対して

$$\begin{aligned} &s_i^n \circ f_n(x) \\ &= (\bullet \xrightarrow{X\gamma_0^n(x)} \bullet \to \cdots \to \bullet \xrightarrow{X\gamma_i^n(x)} \bullet \xrightarrow{\mathrm{id}} \bullet \xrightarrow{X\gamma_{i+1}^n(x)} \bullet \to \cdots \to \bullet \xrightarrow{X\gamma_{n-1}^n(x)} \bullet) \\ &f_{n+1} \circ X\sigma_i^n(x) = (\bullet \xrightarrow{X\gamma_0^{n+1}(X\sigma_i^n(x))} \bullet \to \cdots \to \bullet \xrightarrow{X\gamma_n^{n+1}(X\sigma_i^n(x))} \bullet) \end{aligned}$$

となる．故に $0 \leq k \leq n$ に対して

$$X\gamma_k^{n+1}(X\sigma_i^n(x)) = \begin{cases} X\gamma_k^n(x) & (0 \leq k < i) \\ \mathrm{id} & (k = i) \\ X\gamma_{k-1}^n(x) & (i < k \leq n) \end{cases}$$

を示せばよい．まず $k \neq i$ の場合は定義から明らか．$k = i$ の場合は β をうまくとる

ことで $\sigma_i^n \circ \gamma_i^{n+1} = \beta \circ \sigma_0^0$ と書ける．

$$
\begin{tikzcd}
{[1]} \arrow[r, "\gamma_i^{n+1}"] & {[n+1]} \arrow[r, "\sigma_i^n"] & {[n]}
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}[row sep=small]
 & n+1 \arrow[dr, mapsto] & \\
 & \vdots & n \\
 & i+2 \arrow[dr, mapsto] & \vdots \\
 & i+1 \arrow[dr, mapsto] & i+1 \\
 & i \arrow[r, mapsto] & i \\
1 \arrow[uur, mapsto] & \vdots & \vdots \\
0 \arrow[uur, mapsto] & 0 \arrow[r, mapsto] & 0
\end{tikzcd}
$$

よって $X\gamma_i^{n+1}(X\sigma_i^n(x)) = s_0^0(X\beta(x)) = \mathrm{id}_{X\beta(x)}$ となる．

この f が同型であることを示せばよい．即ち各 n に対して f_n が全単射であることを示せばよい．米田の補題の同型の自然性 (「米田の補題」の PDF を参照) より

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\widehat{\mathbb{\Delta}}}(\Delta^n, X) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "f\circ-"'] & X_n \arrow[d, "f_n"] \\
\mathrm{Hom}_{\widehat{\mathbb{\Delta}}}(\Delta^n, N(C)) \arrow[r, "\sim"] & N(C)_n
\end{tikzcd}
$$

が可換であるから $f \circ -$ が全単射であること示せばよい．それを n に関する帰納法により示す．

まず $n = 0, 1$ の場合は定義より明らかである．$n \geq 2$ のとき，$0 < k < n$ となる k を 1 つ取ると次の図式が可換である．

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\widehat{\mathbb{\Delta}}}(\Lambda^{n,k}, X) \arrow[r, "f\circ-"] & \mathrm{Hom}_{\widehat{\mathbb{\Delta}}}(\Lambda^{n,k}, N(C)) \\
\mathrm{Hom}_{\widehat{\mathbb{\Delta}}}(\Delta^n, X) \arrow[r, "f\circ-"'] \arrow[u, "-\circ\mathrm{inc}"] & \mathrm{Hom}_{\widehat{\mathbb{\Delta}}}(\Delta^n, N(C)) \arrow[u, "-\circ\mathrm{inc}"']
\end{tikzcd}
$$

$-\circ\mathrm{inc}$ は仮定より全単射だから，$\varphi := f \circ -\colon \mathrm{Hom}_{\widehat{\mathbb{\Delta}}}(\Lambda^{n,k}, X) \to \mathrm{Hom}_{\widehat{\mathbb{\Delta}}}(\Lambda^{n,k}, N(C))$ が全単射であることを示せばよい．

まず単射であることを示すため $g, h\colon \Lambda^{n,k} \to X$ が $g \neq h$ を満たすとする．命題 3 よりある $0 \leq i \leq n$，$i \neq k$ が存在して $g_{n-1}(\delta_i^n) \neq h_{n-1}(\delta_i^n)$ となる．$\delta_i^n \in \Lambda_{n-1}^{n,k}$ に対応する

射を $p_i\colon \Delta^{n-1} \to \Lambda^{n,k}$ と書けば $g\circ p_i \neq h\circ p_i$ となる．また

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\widehat{\Delta}}(\Delta^{n-1}, X) \arrow[r, "f\circ -"] & \mathrm{Hom}_{\widehat{\Delta}}(\Delta^{n-1}, N(C)) \\
\mathrm{Hom}_{\widehat{\Delta}}(\Lambda^{n,k}, X) \arrow[u, "-\circ p_i"] \arrow[r, "\varphi"'] & \mathrm{Hom}_{\widehat{\Delta}}(\Lambda^{n,k}, N(C)) \arrow[u, "-\circ p_i"']
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
g\circ p_i \arrow[r, mapsto, "f\circ -"] & f\circ g\circ p_i & h\circ p_i \arrow[r, mapsto, "f\circ -"] & f\circ h\circ p_i \\
g \arrow[u, mapsto, "-\circ p_i"] \arrow[r, mapsto, "\varphi"'] & \varphi(g) \arrow[u, mapsto, "-\circ p_i"'] & h \arrow[u, mapsto, "-\circ p_i"] \arrow[r, mapsto, "\varphi"'] & \varphi(h) \arrow[u, mapsto, "-\circ p_i"']
\end{tikzcd}$$

は可換であり，上側の $f\circ -$ は帰納法の仮定から単射である．故に $f\circ g\circ p_i \neq f\circ h\circ p_i$ となり，$\varphi(g)\circ p_i \neq \varphi(h)\circ p_i$ が分かる．従って $\varphi(g)\neq\varphi(h)$ である．

次に全射であることを示すため $g\colon \Lambda^{n,k} \to N(C)$ とする．$0\le i\le n$，$i\neq k$ に対して次の可換図式を考える．

$$\begin{tikzcd}
X_{n-1} \arrow[r, "f_{n-1}"] & N(C)_{n-1} & \ni & g_{n-1}(\delta^n_i) \\
\mathrm{Hom}_{\widehat{\Delta}}(\Delta^{n-1}, X) \arrow[u, "\wr"] \arrow[r, "f\circ -"] & \mathrm{Hom}_{\widehat{\Delta}}(\Delta^{n-1}, N(C)) \arrow[u, "\wr"'] & \ni & g\circ p_i \arrow[u] \\
\mathrm{Hom}_{\widehat{\Delta}}(\Lambda^{n,k}, X) \arrow[u, "-\circ p_i"] \arrow[r, "\varphi"'] & \mathrm{Hom}_{\widehat{\Delta}}(\Lambda^{n,k}, N(C)) \arrow[u, "-\circ p_i"'] & \ni & g \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

帰納法の仮定から f_{n-1} は全単射である．よって $x_i \in X_{n-1}$ を $f_{n-1}(x_i) = g_{n-1}(\delta^n_i)$ となるように取ることができる．命題 3 より，任意の $l\in\mathbb{N}$，$\alpha\in\Lambda^{n,k}_l$ に対してある i_α と $\beta_\alpha\colon [l]\to[n-1]$ が存在して $\alpha = \delta^n_{i_\alpha}\circ\beta_\alpha$ と書ける．そこで $q_l(\alpha) := X\beta_\alpha(x_i) \in X_l$ と定義する．これは射 $q\colon \Lambda^{n,k}\to X$ を定める．

$\because$) まず q_l が well-defined であることを確かめる．そのために $\alpha = \delta^n_i\circ\beta = \delta^n_j\circ\gamma$ と書けたとする．f の自然性から次の図式が可換である．

$$\begin{tikzcd}
X_l \arrow[r, "f_l"] & N(C)_l & \Lambda^{n,k}_l \arrow[r, "g_l"] & N(C)_l \\
X_{n-1} \arrow[u, "X\beta"] \arrow[r, "f_{n-1}"'] & N(C)_{n-1} \arrow[u, "NC(\beta)"'] & \Lambda^{n,k}_{n-1} \arrow[u, "-\circ\beta"] \arrow[r, "g_{n-1}"'] & N(C)_{n-1} \arrow[u, "NC(\beta)"']
\end{tikzcd}$$

従って

$$
\begin{aligned}
f_l(X\beta(x_i)) &= NC(\beta)(f_{n-1}(x_i)) = NC(\beta)(g_{n-1}(\delta_i^n)) = g_l(\delta_i^n \circ \beta) \\
&= g_l(\alpha) \\
f_l(X\gamma(x_j)) &= NC(\gamma)(f_{n-1}(x_j)) = NC(\gamma)(g_{n-1}(\delta_j^n)) = g_l(\delta_j^n \circ \gamma) \\
&= g_l(\alpha)
\end{aligned}
$$

となるから $f_l(X\beta(x_i)) = f_l(X\gamma(x_j))$ である．既に示した通り f_l は単射だから $X\beta(x_i) = X\gamma(x_j)$ となり $q_l(\alpha)$ は well-defined である．

あとは $q_l\colon \Lambda_l^{n,k} \to X_l$ が自然であることを示せばよい．そこで $\tau\colon [l] \to [m]$ とする．

$$
\begin{tikzcd}
\Lambda_l^{n,k} \arrow[r, "q_l"] & X_l \\
\Lambda_m^{n,k} \arrow[u, "- \circ \tau"] \arrow[r, "q_m"'] & X_m \arrow[u, "X\tau"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\alpha \circ \tau \arrow[r, mapsto, "q_l"] & q_l(\alpha \circ \tau) \\
 & X\tau(X\beta_\alpha(x_{i_\alpha})) \\
\alpha \arrow[uu, mapsto, "- \circ \tau"] \arrow[r, mapsto, "q_m"'] & X\beta_\alpha(x_{i_\alpha}) \arrow[u, mapsto, "X\tau"']
\end{tikzcd}
$$

$\alpha = \delta_{i_\alpha}^n \circ \beta_\alpha$ だから $\alpha \circ \tau = \delta_{i_\alpha}^n \circ (\beta_\alpha \circ \tau)$ と書ける．よって $q_l(\alpha \circ \tau) = X(\beta_\alpha \circ \tau)(x_{i_\alpha})$ となる．

このとき $\varphi(q)_{n-1}(\delta_i^n) = (f \circ q)_{n-1}(\delta_i^n) = f_{n-1}(q_{n-1}(\delta_i^n)) = f_{n-1}(x_i) = g_{n-1}(\delta_i^n)$ だから $\varphi(q) = g$ である． □

Kan 複体と定理 10 の共通の一般化として次の定義を得る．

定義． $X \in \widehat{\mathbb{\Delta}}$ が quasi-category (もしくは弱 Kan 複体)
$\iff 0 < k < n$ とするとき，任意の射 $f\colon \Lambda^{n,k} \to X$ に対してある射 $h\colon \Delta^n \to X$ が存在して次が可換となる．

$$
\begin{tikzcd}
\Lambda^{n,k} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\mathrm{inc}"'] & X \\
\Delta^n \arrow[ur, dashed, "h"']
\end{tikzcd}
$$

この quasi-category が，[3] などで ∞-category と呼ばれているものである．

参考文献

[1] E. Riehl, Category Theory in Context, Dover Publications, https://math.jhu.edu/~eriehl/context/

[2] A. Joyal and M. Tierney, Notes on simplicial homotopy theory

[3] J. Lurie, Higher Topos Theory, https://www.math.ias.edu/~lurie/

[4] Stacks Project, https://stacks.math.columbia.edu/