

ココンマ圏と profunctor

alg-d

https://alg-d.com/math/kan_extension/

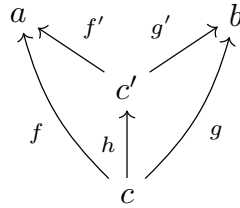
2025 年 5 月 19 日

これまで見てきた通り，圏論ではコンマ圏が非常に重要な役割を果たす．そうすると気になるのは，コンマ圏の双対となる「ココンマ圏」は存在するのであろうか，ということである．

定義．圏 C の図式 $a \leftarrow c \rightarrow b$ を a から b への span という．双対的に，図式 $a \rightarrow c \leftarrow b$ を a から b への cospan という．

定義． C を圏， $a, b \in C$ を対象とする． a から b への span がなす圏 $\text{Span}(a, b)$ を以下のように定める．

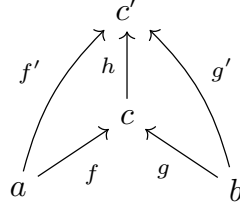
- $\text{Ob}(\text{Span}(a, b)) := \{\langle f, g \rangle \in \text{Mor}(C)^2 \mid c \in C, a \xleftarrow{f} c \xrightarrow{g} b\}$ とする．
- $\langle f, g \rangle, \langle f', g' \rangle \in \text{Span}(a, b)$ とする． $c := \text{dom}(f)$ ， $c' := \text{dom}(f')$ とする． $\langle f, g \rangle$ から $\langle f', g' \rangle$ への射は，次の図式を可換とする射 $h: c \rightarrow c'$ である．



また同様にして cospan がなす圏 $\text{Cospan}(a, b)$ が以下のように定まる．

- $\text{Ob}(\text{Cospan}(a, b)) := \{\langle f, g \rangle \in \text{Mor}(C)^2 \mid c \in C, a \xrightarrow{f} c \xleftarrow{g} b\}$ とする．
- $\langle f, g \rangle, \langle f', g' \rangle \in \text{Cospan}(a, b)$ とする． $c := \text{cod}(f)$ ， $c' := \text{cod}(f')$ とする． $\langle f, g \rangle$

から $\langle f', g' \rangle$ への射は, 次の図式を可換とする射 $h: c \rightarrow c'$ で定める.

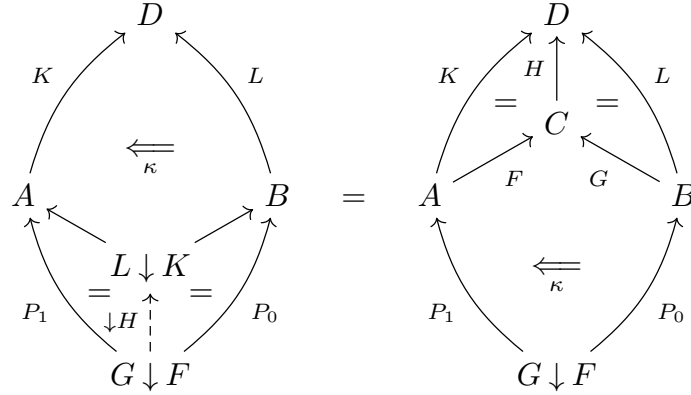


ここでは小圏の圏 **Cat** における span, cospan を考える.

$A \xrightarrow{F} C \xleftarrow{G} B$ を **Cat** の cospan としたとき, コンマ圏 $G \downarrow F$ は $\text{span } A \leftarrow G \downarrow F \rightarrow B$ を与えるのであった*¹.

命題 1. コンマ圏を取る操作は関手 $\downarrow: \text{Cospan}(A, B) \rightarrow \text{Span}(A, B)$ を与える.

証明. $A \xrightarrow{F} C \xleftarrow{G} B$, $A \xrightarrow{K} D \xleftarrow{L} B$ を cospan, $H: \langle F, G \rangle \rightarrow \langle K, L \rangle$ を $\text{Cospan}(A, B)$ の射とする. このとき関手 $\downarrow H: G \downarrow F \rightarrow L \downarrow K$ をコンマ圏の普遍性により定める (κ はどちらもコンマ圏から定まる自然変換である).



普遍性により, これは明らかに関手 $\downarrow: \text{Cospan}(A, B) \rightarrow \text{Span}(A, B)$ を与える. □

そこで, もしこの関手が左随伴を持てば, それが「ココンマ圏を与える関手」であるとみなすことができる. というのも「コンマ圏の普遍性」の双対バージョン (定理 2) が成り立つからである.

それを説明するため, 関手 $\downarrow$ が左随伴 $\uparrow: \text{Span}(A, B) \rightarrow \text{Cospan}(A, B)$ を持つとして, その unit を η とする. $A \xleftarrow{F} C \xrightarrow{G} B$ を span とすると $\uparrow \langle F, G \rangle$ は cospan であるから,

*¹ 後の構成の都合上, $F \downarrow G$ ではなく $G \downarrow F$ を考える. ここを $F \downarrow G$ に変えた場合は, 後で出てくる **Prof**(A, B) が **Prof**(B, A) になる.

それを $A \xrightarrow{Q_0} F \uparrow G \xleftarrow{Q_1} B$ と書くと、これのコンマ圏を考えることができる。このとき $S := \eta_{\langle F, G \rangle}$ は $\text{Span}(A, B)$ の射 $C \rightarrow Q_1 \downarrow Q_0$ (次の図式の点線の射) のことである (ここで P_0, P_1, κ はコンマ圏 $Q_1 \downarrow Q_0$ から得られる関手と自然変換である)。

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{ccccc}
 & & A & \xrightarrow{Q_0} & F \uparrow G \\
 & \nearrow F & \uparrow P_1 & \nwarrow \kappa & \uparrow Q_1 \\
 & & Q_1 \downarrow Q_0 & \xrightarrow{P_0} & B \\
 & \nwarrow S & \searrow & & \\
 C & & & & B \\
 & \nearrow G & & &
 \end{array}
 \end{array}$$

これらを合成して得られる自然変換を $\bar{\kappa}: Q_1 G \Rightarrow Q_0 F$ とする。

定理 2. 関手 $\downarrow$ が左随伴 $\uparrow: \text{Span}(A, B) \rightarrow \text{Cospan}(A, B)$ を持つとする。このとき上のように定義した図式

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{Q_0} & F \uparrow G \\
 \uparrow F & \nwarrow \bar{\kappa} & \uparrow Q_1 \\
 C & \xrightarrow{G} & B
 \end{array}$$

は以下の普遍性を満たす。 X を圏、 $R_0: A \rightarrow X$, $R_1: B \rightarrow X$ を関手、 $\beta: R_1 G \Rightarrow R_0 F$ を自然変換とする。

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{R_0} & X \\
 \uparrow F & \nwarrow \beta & \uparrow R_1 \\
 C & \xrightarrow{G} & B
 \end{array}$$

このとき関手 $H: F \uparrow G \rightarrow X$ が一意に存在して以下を満たす。

- (1) $HQ_0 = R_0$, $HQ_1 = R_1$ である。
- (2) 次の自然変換の等式が成り立つ。

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{ccccc}
 & & A & \xrightarrow{Q_0} & F \uparrow G \\
 & \nearrow R_0 & \uparrow F & \nwarrow \bar{\kappa} & \uparrow Q_1 \\
 & & C & \xrightarrow{G} & B \\
 & \nwarrow H & & & \\
 & & & &
 \end{array}
 & = &
 \begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{R_0} & X \\
 \uparrow F & \nwarrow \beta & \uparrow R_1 \\
 C & \xrightarrow{G} & B
 \end{array}
 \end{array}$$

証明. まず H の存在を示す. そのためにコンマ圏 $R_1 \downarrow R_0$ を取り, そこから得られる関手と自然変換を P'_0, P'_1, κ' とする. 普遍性により次の図式の点線の関手 $M: C \rightarrow R_1 \downarrow R_0$ が得られる.

このとき随伴 $\text{Hom}(\uparrow\langle F, G \rangle, \langle R_0, R_1 \rangle) \cong \text{Hom}(\langle F, G \rangle, \downarrow\langle R_0, R_1 \rangle)$ により, M の随伴射となる関手 $H: F \uparrow G \rightarrow X$ が取れる. これが条件 (1)(2) を満たすことを示す.

まず条件 (1) は, 定義より H が $\text{Cospan}(A, B)$ の射であるからよい. 条件 (2) を示そう. 随伴の unit の性質から $\downarrow H \circ S = M$ が成り立つ. 従って

$$\begin{array}{c}
= \\
\begin{array}{c}
\begin{array}{c}
\begin{array}{c}
\begin{array}{c}
\begin{array}{c}
C \xrightarrow{F} A \xrightarrow{R_0} X \\
\parallel \quad \parallel \\
C \xrightarrow{G} B \xrightarrow{R_1} X
\end{array}
\end{array}
\end{array}
\end{array}
\end{array}
\end{array}$$

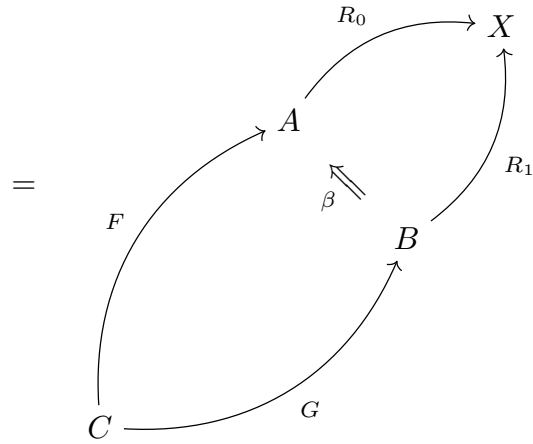
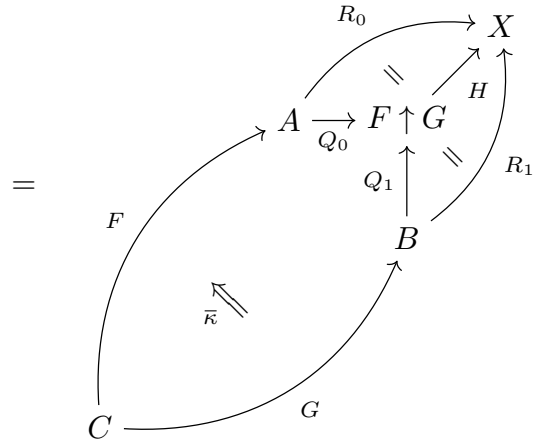
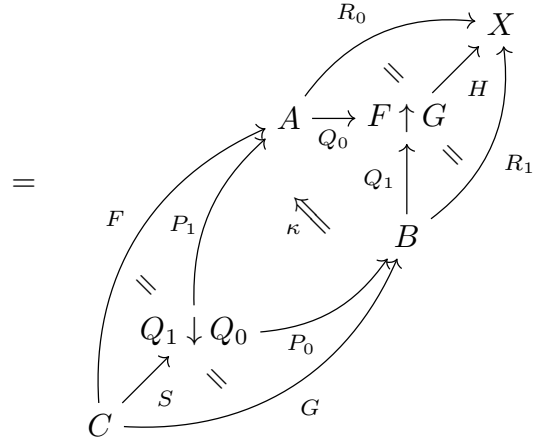
(The above diagram is a simplified representation of the complex commutative diagram in the image, which includes nodes A, B, C, X, F, G, H, Q0, Q1, P0, P1, S, and arrows like Q0, Q1, P0, P1, S, and a double arrow κ.)

となり条件 (2) が成り立つ.

後は H の一意性を示せばよい. H が条件 (1)(2) を満たすとする. H は $\text{Cospan}(A, B)$ の射 $F \uparrow G \rightarrow X$ だから, 随伴射 $M: C \rightarrow R_1 \downarrow R_0$ が取れる. 従ってこの M が一意であることを示せばよい. 再び unit の性質から, これは $\downarrow H \circ S = M$ を満たす. 故に

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{c}
\begin{array}{c}
\begin{array}{c}
\begin{array}{c}
\begin{array}{c}
C \xrightarrow{F} A \xrightarrow{R_0} X \\
\parallel \quad \parallel \\
C \xrightarrow{G} B \xrightarrow{R_1} X
\end{array}
\end{array}
\end{array}
\end{array}
\end{array}
=
\begin{array}{c}
\begin{array}{c}
\begin{array}{c}
\begin{array}{c}
\begin{array}{c}
\begin{array}{c}
C \xrightarrow{F} A \xrightarrow{R_0} X \\
\parallel \quad \parallel \\
C \xrightarrow{G} B \xrightarrow{R_1} X
\end{array}
\end{array}
\end{array}
\end{array}
\end{array}$$

(The above diagram is a simplified representation of the complex commutative diagram in the image, which includes nodes A, B, C, X, F, G, H, Q0, Q1, P0, P1, S, and arrows like Q0, Q1, P0, P1, S, and a double arrow κ.)



となるから, $R_1 \downarrow R_0$ の普遍性により M は一意である. □

そこで問題は $\downarrow: \text{Cospan}(A, B) \rightarrow \text{Span}(A, B)$ が左随伴を持つか, ということになる. 答えは存在する, であるが, これを構成するために profunctor というものを導入する.

定義. C, D を圏とする. C から D への profunctor^{*2}は関手 $P: C \rightarrow \hat{D}$ のことである. profunctor を記号 $P: C \multimap D$ などと表す.

自然同型 $\text{Hom}_{\mathbf{Cat}}(A \times B, C) \cong \text{Hom}_{\mathbf{Cat}}(A, C^B)$ により, profunctor $P: C \multimap D$ 即ち関手 $P: C \rightarrow \hat{D}$ と関手 $P: D^{\text{op}} \times C \rightarrow \mathbf{Set}$ を同一視することができる. 以下, 特に断らずこの同一視を行う. また C から D への profunctor がなす圏を $\mathbf{Prof}(C, D) := \mathbf{Set}^{D^{\text{op}} \times C}$ で定める.

定義. $P: A \multimap B, Q: B \multimap C$ に対して profunctor の合成 $Q \otimes P: A \multimap C$ を関手 $(y^\dagger Q) \circ P: A \rightarrow \hat{C}$ で定める.

$$\begin{array}{ccccc} & & \hat{B} & \xrightarrow{y^\dagger Q} & \hat{C} \\ & \nearrow P & \uparrow y & \nearrow Q & \\ A & & B & & \end{array}$$

圏 C に対して米田埋込 $y: C \rightarrow \hat{C}$ が定める profunctor を $\text{id}_C: C \multimap C$ で表す. 米田埋込と左 Kan 拡張の性質から容易に分かるように, $P: C \multimap D$ に対して $P \otimes \text{id}_C \cong P$ かつ $\text{id}_D \otimes P \cong P$ である.

命題 3. $P: A \multimap B, Q: B \multimap C$ を profunctor とするとき, $a \in A$ に対して

$$Q \otimes P(a) \cong \int^{b \in B} P(b, a) \times Q(-, b).$$

証明. $X \in \hat{B}$ に対して $y^\dagger Q(X) \cong \int^{b \in B} \text{Hom}_{\hat{B}}(y(b), X) \times Qb \cong \int^{b \in B} Xb \times Qb$ であるから $Q \otimes P(a) = y^\dagger Q(Pa) \cong \int^{b \in B} Pa(b) \times Qb = \int^{b \in B} P(b, a) \times Q(-, b)$. $\square$

$F: C \rightarrow D$ を関手とする. このとき profunctor $F_*: C \multimap D, F^*: D \multimap C$ が

$$F_*(d, c) := \text{Hom}_D(d, Fc), \quad F^*(c, d) := \text{Hom}_D(Fc, d)$$

により定まる. つまり $F_*(c) = y \circ F(c) = F^{-1}y(c)$, $F^*(d) \cong F^\dagger y(d)$ である.

そこで cospan $A \xrightarrow{F} C \xleftarrow{G} B$ に対して profunctor $A \multimap B$ が $G^* \otimes F_*$ により得られる. これは

$$G^* \otimes F_* \cong (G^\dagger y) \otimes (y \circ F) \cong y^\dagger (G^\dagger y) \circ y \circ F$$

^{*2} 文献により色々な呼び方があり, distributor もしくは correspondence もしくは bimodule と呼ばれていることがある

$$\begin{array}{ccccc}
& & \hat{C} & & \\
& y \nearrow & & \searrow y^\dagger(G^\dagger y) & \\
& & C & \xrightarrow{G^\dagger y} & \hat{B} \\
F \nearrow & & \nwarrow G & & \nearrow y \\
A & & & B &
\end{array}$$

となる．ここで y が忠実充満より $y^\dagger(G^\dagger y) \circ y \cong G^\dagger y$ となるから $G^* \otimes F_* \cong (G^\dagger y) \circ F$ が分かる．そこで $\Phi\langle F, G \rangle := (G^\dagger y) \circ F$ と定める．各点左 Kan 拡張の性質から， $a \in A$ に対して

$$\Phi\langle F, G \rangle(a) = G^\dagger y(Fa) \cong \text{Hom}_C(G-, Fa)$$

となる．

命題 4. $\Phi: \text{Cospan}(A, B) \rightarrow \mathbf{Prof}(A, B)$ は関手となる．

証明. $\text{Cospan}(A, B)$ の射 $H: \langle F, G \rangle \rightarrow \langle K, L \rangle$ (次の図式を参照) を取る．

$$\begin{array}{ccccc}
& & D & & \\
& K \nearrow & & \nwarrow L & \\
& & C & & \\
F \nearrow & & \nwarrow G & & \nearrow y \\
A & & & B &
\end{array}$$

ここで自然変換 τ^H を，左 Kan 拡張 $G^\dagger y$ の普遍性により，次の等号が成り立つように取る．

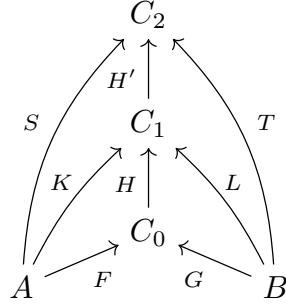
$$\begin{array}{ccc}
\begin{array}{ccccc}
D & \xrightarrow{L^\dagger y} & & & \hat{B} \\
H \uparrow & \uparrow \tau^H & \uparrow G^\dagger y & & \\
C & \xrightarrow{\quad} & & & \\
\nwarrow G & \nwarrow \leq & & & \nearrow y \\
& B & & &
\end{array} & = & \begin{array}{ccccc}
D & \xrightarrow{L^\dagger y} & & & \hat{B} \\
H \uparrow & \uparrow L & \uparrow & & \\
C & \xrightarrow{\quad} & & & \\
\nwarrow G & \nwarrow & & & \nearrow y \\
& B & & &
\end{array}
\end{array}$$

この τ^H を使って自然変換 $\Phi(H): \Phi\langle F, G \rangle \Rightarrow \Phi\langle K, L \rangle$ が得られる．

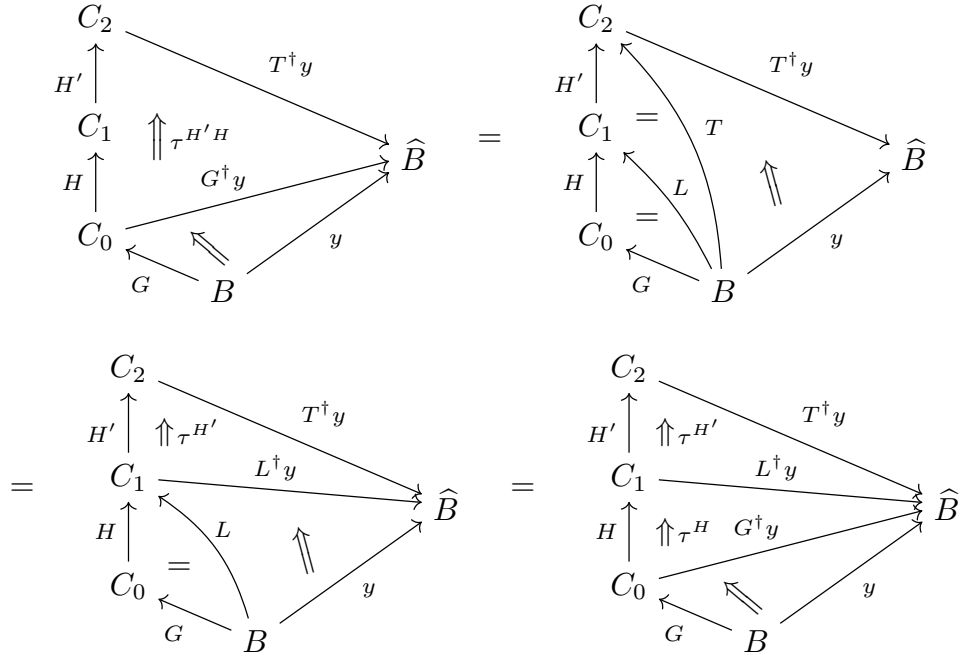
$$\Phi(H) \quad := \quad \begin{array}{ccccc}
& & D & & \\
& K \nearrow & & \nwarrow L^\dagger y & \\
& & C & \xrightarrow{G^\dagger y} & \hat{B} \\
F \nearrow & & \nwarrow & & \\
A & & & B &
\end{array}$$

これにより Φ が関手になることを示せばよい.

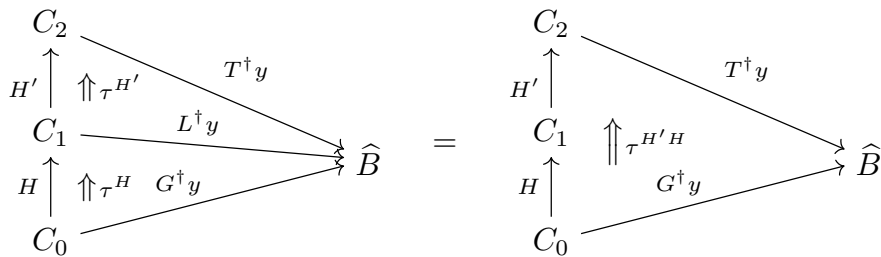
まず $H = \text{id}$ の場合は $G = L$ となるから $G^\dagger y = L^\dagger y$ であり, 故に $\tau^{\text{id}} = \text{id}$ となるから $\Phi(\text{id}) = \text{id}$ である. 故に Φ が合成と交換することを示せばよい. そこで H, H' を次の図式のような $\text{Cospan}(A, B)$ の射とする.



このとき τ の定義より



となるから, 左 Kan 拡張 $G^\dagger y$ の普遍性により

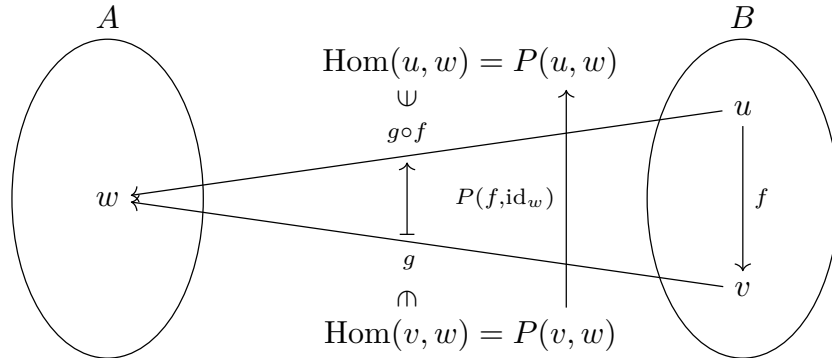


となるので $\Phi(H'H) = \Phi(H')\Phi(H)$ が分かる. $\square$

逆に profunctor $P: A \multimap B$ に対して $\text{cospan } \Sigma(P) = (A \xrightarrow{F_P} C_P \xleftarrow{G_P} B)$ を以下のように定義することができる. まず圏 C_P を次により定める.

- $\text{Ob}(C_P) := \text{Ob}(A) \sqcup \text{Ob}(B)$.
- $\text{Hom}_{C_P}(u, v) := \begin{cases} \text{Hom}_A(u, v) & (u, v \in A \text{ のとき}) \\ \text{Hom}_B(u, v) & (u, v \in B \text{ のとき}) \\ \emptyset & (u \in A, v \in B \text{ のとき}) \\ P(u, v) & (u \in B, v \in A \text{ のとき}) \end{cases}$
- 射 $f: u \rightarrow v$, $g: v \rightarrow w$ の合成 $g \circ f$ を次で定める.

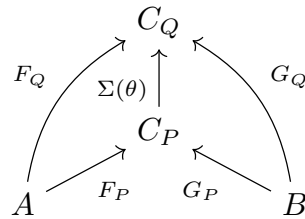
$$g \circ f := \begin{cases} g \circ f & (u, v, w \in A \text{ のとき}) \\ g \circ f & (u, v, w \in B \text{ のとき}) \\ P(f, \text{id}_w)(g) & (u, v \in B, w \in A \text{ のとき. 下図参照}) \\ P(\text{id}_u, g)(f) & (u \in B, v, w \in A \text{ のとき}) \end{cases}$$



関手 $F_P: A \rightarrow C_P$, $G_P: B \rightarrow C_P$ を標準的な埋込とすれば $\Sigma(P) \in \text{Cospan}(A, B)$ である.

命題 5. $\Sigma: \mathbf{Prof}(A, B) \rightarrow \text{Cospan}(A, B)$ は関手となる.

証明. $\mathbf{Prof}(A, B)$ の射 $\theta: P \Rightarrow Q$ に対して $\text{Cospan}(A, B)$ の射 $\Sigma(\theta): \Sigma(P) \rightarrow \Sigma(Q)$, 即ち次の図式が可換となるような関手 $\Sigma(\theta)$ を定めたい.



そのためには対象 $a \in A$, $b \in B$ に対して写像 $\Sigma(\theta): \text{Hom}_{C_P}(b, a) \rightarrow \text{Hom}_{C_Q}(b, a)$ をうまく定めればよい. Hom_{C_P} の定義から $\Sigma(\theta) := \theta_{ba}: P(b, a) \rightarrow Q(b, a)$ と定義することができる. これにより $\Sigma(\theta)$ は関手になる.

∴ 定義から $\Sigma(\theta)(\text{id}) = \text{id}$ は明らかである. 従って $f: u \rightarrow v$, $g: v \rightarrow w$ としたときに $\Sigma(\theta)(g \circ f) = \Sigma(\theta)(g) \circ \Sigma(\theta)(f)$ となることを示せばよい.

(i) $u, v, w \in A$ または $u, v, w \in B$ の場合, 明らか.

(ii) $u, v \in B$, $w \in A$ の場合, 定義から

$$\Sigma(\theta)(g \circ f) = \theta_{uw}(g \circ f), \quad \Sigma(\theta)(g) = \theta_{vw}(g), \quad \Sigma(\theta)(f) = f$$

であり, 一方 θ が自然変換だから $\theta_{uw}(g \circ f) = \theta_{vw}(g) \circ f$ が分かる.

$$\begin{array}{ccc} P(u, w) & \xrightarrow{\theta_{uw}} & Q(u, w) \\ \uparrow P(f, \text{id}_w) & & \uparrow Q(f, \text{id}_w) \\ P(v, w) & \xrightarrow{\theta_{vw}} & Q(v, w) \end{array} \quad \begin{array}{ccc} g \circ f & \xrightarrow{\theta_{uw}} & \theta_{uw}(g \circ f) \\ \uparrow P(f, \text{id}_w) & & \uparrow \theta_{vw}(g) \circ f \\ g & \xrightarrow{\theta_{vw}} & \theta_{vw}(g) \end{array}$$

(iii) $u \in B$, $v, w \in A$ の場合, 定義から

$$\Sigma(\theta)(g \circ f) = \theta_{uw}(g \circ f), \quad \Sigma(\theta)(g) = g, \quad \Sigma(\theta)(f) = \theta_{uv}(f)$$

であり, 一方 θ が自然変換だから $\theta_{uw}(g \circ f) = g \circ \theta_{uv}(f)$ が分かる.

$$\begin{array}{ccc} P(u, v) & \xrightarrow{\theta_{uv}} & Q(u, v) \\ \downarrow P(\text{id}_u, g) & & \downarrow Q(\text{id}_u, g) \\ P(u, w) & \xrightarrow{\theta_{uw}} & Q(u, w) \end{array} \quad \begin{array}{ccc} f & \xrightarrow{\theta_{uv}} & \theta_{uv}(f) \\ \downarrow P(\text{id}_u, g) & & \downarrow Q(\text{id}_u, g) \\ g \circ f & \xrightarrow{\theta_{uw}} & \theta_{uw}(g \circ f) \end{array}$$

以上により $\Sigma(\theta)$ は関手であることが分かった.

これにより Σ が関手になることを示す. Σ の定義より $\Sigma(\text{id}) = \text{id}$ は明らかである. そこで $\theta: P \Rightarrow Q$, $\sigma: Q \Rightarrow R$ に対して $\Sigma(\sigma \circ \theta) = \Sigma(\sigma) \circ \Sigma(\theta)$ を示す. そのためには $a \in A$, $b \in B$ に対して $(\sigma \circ \theta)_{ba} = \sigma_{ba} \circ \theta_{ba}$ を示せばよいが, それは自然変換の合成の定義である. $\square$

命題 6. 随伴 $\Sigma \dashv \Phi: \mathbf{Prof}(A, B) \rightarrow \mathbf{Cospan}(A, B)$ が成り立つ. 更にこの随伴の unit

は同型である。従って $\Phi \circ \Sigma \cong \text{id}$ である。

証明. 随伴であることを示すため $P \in \mathbf{Prof}(A, B)$, $(A \xrightarrow{F} C \xleftarrow{G} B) \in \text{Cospan}(A, B)$ について自然な全単射

$$\varphi: \text{Hom}_{\text{Cospan}(A, B)}(\Sigma(P), \langle F, G \rangle) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbf{Prof}(A, B)}(P, \Phi \langle F, G \rangle)$$

を定義する。

まず profunctor $P: A \rightrightarrows B$ に対して自然同型

$$\Phi(\Sigma(P))(-, \square) = \Phi \langle F_P, G_P \rangle(-, \square) \cong \text{Hom}_{C_P}(G_P -, F_P \square) = P(-, \square)$$

が成り立つ。この自然同型を $\eta: \text{id} \Rightarrow \Phi \circ \Sigma$ とする。また, θ を $\text{cod}(\theta) = \Phi \langle F, G \rangle$ なる自然変換としたとき, それと $\Phi \langle F, G \rangle \cong \text{Hom}_C(G-, F\square)$ を合成して得られる自然変換を $\tilde{\theta}: P \Rightarrow \text{Hom}_C(G-, F\square)$ と書くことにする。

$H: \Sigma(P) \rightarrow \langle F, G \rangle$ を cospan の射としたとき $\varphi(H) := \Phi(H) \circ \eta_P: P \Rightarrow \Phi \langle F, G \rangle$ と定める。即ち

$$\varphi(H) := \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & & C & & \\ & \nearrow F & \uparrow H & \nearrow G^\dagger y & \\ & & C_P & & \widehat{B} \\ & \nwarrow F_P & \uparrow \tau^H & \nwarrow G_P^\dagger y & \\ A & & & & \end{array} \\ \quad \quad \quad \uparrow \eta_P \\ \quad \quad \quad P \end{array}$$

である。 φ は全単射 $\text{Hom}(\Sigma(P), \langle F, G \rangle) \rightarrow \text{Hom}(P, \Phi \langle F, G \rangle)$ を与える。

‘ $\therefore$ ’ $a \in A$, $b \in B$ として $f \in P(b, a)$ を取る。即ち $f: b \rightarrow a$ は C_P の射である。このとき $\tau^H: G_P^\dagger y \Rightarrow (G^\dagger y) \circ H$ が自然変換であるから次の図式が可換である。

$$\begin{array}{ccccccc} \text{Hom}_{C_P}(G_P -, b) & \xrightarrow{\sim} & G_P^\dagger y(b) & \xrightarrow{\tau_b^H} & G^\dagger y(Hb) & \xrightarrow{\sim} & \text{Hom}_C(G-, Gb) \\ f \circ - \downarrow & & \downarrow G_P^\dagger y(f) & & \downarrow G^\dagger y(Hf) & & \downarrow Hf \circ - \\ \text{Hom}_{C_P}(G_P -, a) & \xrightarrow{\sim} & G_P^\dagger y(a) & \xrightarrow{\tau_a^H} & G^\dagger y(Ha) & \xrightarrow{\sim} & \text{Hom}_C(G-, Fa) \end{array}$$

よってこの図式の b 成分を考えると次の可換図式を得る.

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Hom}_{C_P}(b, b) & \xrightarrow{G} & \text{Hom}_C(Gb, Gb) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \text{Hom}_{C_P}(b, a) & \xrightarrow{\widetilde{\varphi(H)_{ba}}} & \text{Hom}_C(Gb, Fa)
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{ccc}
 \text{id}_b & \xrightarrow{G} & \text{id}_{Gb} \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 f & \xrightarrow{\widetilde{\varphi(H)_{ba}}} & Hf
 \end{array}$$

従って写像 $\widetilde{\varphi(H)_{ba}}$ は $H: P(b, a) \rightarrow \text{Hom}_C(Gb, Fa)$ と一致しているから φ は単射である.

全射であることを示す. そのために $\theta: P \Rightarrow \Phi\langle F, G \rangle$ を自然変換とする. H を

- 対象 $x \in C_P$ に対して $Hx := \begin{cases} Fx & (x \in A) \\ Gx & (x \in B) \end{cases}$
- 射 $f: u \rightarrow v$ に対して $Hf := \begin{cases} Ff & (u, v \in A) \\ Gf & (u, v \in B) \\ \tilde{\theta}_{uv}(f) & (u \in B, v \in A) \end{cases}$

と定義する. この $H: C_P \rightarrow C$ は関手である.

∴ $H(\text{id}) = \text{id}$ は明らかなので $f: u \rightarrow v, g: v \rightarrow w$ として $H(g \circ f) = Hg \circ Hf$ を示す.

(i) $u, v, w \in A$ または $u, v, w \in B$ の場合, 明らか.

(ii) $u, v \in B, w \in A$ の場合, 定義から

$$H(g \circ f) = \tilde{\theta}_{uw}(g \circ f), \quad Hg = \tilde{\theta}_{vw}(g), \quad Hf = Gf$$

であり, 一方 $\tilde{\theta}$ が自然変換だから $\tilde{\theta}_{uw}(g \circ f) = \tilde{\theta}_{vw}(g) \circ Gf$ である.

$$\begin{array}{ccc}
 P(u, w) & \xrightarrow{\tilde{\theta}_{uw}} & \text{Hom}_C(Gu, Fw) \\
 \uparrow P(f, \text{id}_w) & & \uparrow - \circ Gf \\
 P(v, w) & \xrightarrow{\tilde{\theta}_{vw}} & \text{Hom}_C(Gv, Fw)
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{ccc}
 g \circ f & \xrightarrow{\tilde{\theta}_{uw}} & \tilde{\theta}_{uw}(g \circ f) \\
 \uparrow P(f, \text{id}_w) & & \uparrow \tilde{\theta}_{vw}(g) \circ Gf \\
 g & \xrightarrow{\tilde{\theta}_{vw}} & \tilde{\theta}_{vw}(g)
 \end{array}$$

(iii) $u \in B, v, w \in A$ の場合, 定義から

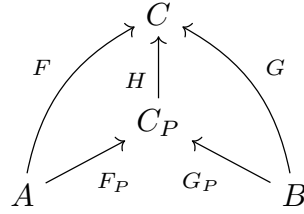
$$H(g \circ f) = \tilde{\theta}_{uw}(g \circ f), \quad Hg = Fg, \quad Hf = \tilde{\theta}_{uv}(f)$$

であり、一方 $\tilde{\theta}$ が自然変換だから $\tilde{\theta}_{uw}(g \circ f) = Fg \circ \tilde{\theta}_{uv}(f)$ である。

$$\begin{array}{ccc}
 P(u, v) & \xrightarrow{\tilde{\theta}_{uv}} & \text{Hom}_C(Gu, Fv) \\
 \downarrow P(\text{id}_u, g) & & \downarrow Fg \circ - \\
 P(u, w) & \xrightarrow{\tilde{\theta}_{uw}} & \text{Hom}_C(Gu, Fw)
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 f & \xrightarrow{\tilde{\theta}_{uv}} & \tilde{\theta}_{uv}(f) \\
 \downarrow P(\text{id}_u, g) & & \downarrow Fg \circ - \\
 g \circ f & \xrightarrow{\tilde{\theta}_{uw}} & \tilde{\theta}_{uw}(g \circ f)
 \end{array}$$

以上により H は関手であることが分かった。

このとき明らかに $HF_P = F$, $G_P H = G$ だから H は射 $\Sigma(P) \rightarrow \langle F, G \rangle$ である。



上で示したように $\widetilde{\varphi(H)}_{ba}$ は $H: P(b, a) \rightarrow \text{Hom}_C(Gb, Fa)$ と一致しているから、 H の定義より $\widetilde{\varphi(H)}_{ba} = \tilde{\theta}_{ba}$ である。故に $\varphi(H) = \theta$ となり φ は全射である。

定義から明らかに φ は自然である。従って随伴 $\Sigma \dashv \Phi$ が成り立つ。 φ の定義よりこの随伴の unit は η であり、これは同型である。 $\square$

unit が同型だから $\Sigma: \mathbf{Prof}(A, B) \rightarrow \text{Cospan}(A, B)$ は忠実充満である (「随伴」の PDF を参照)。

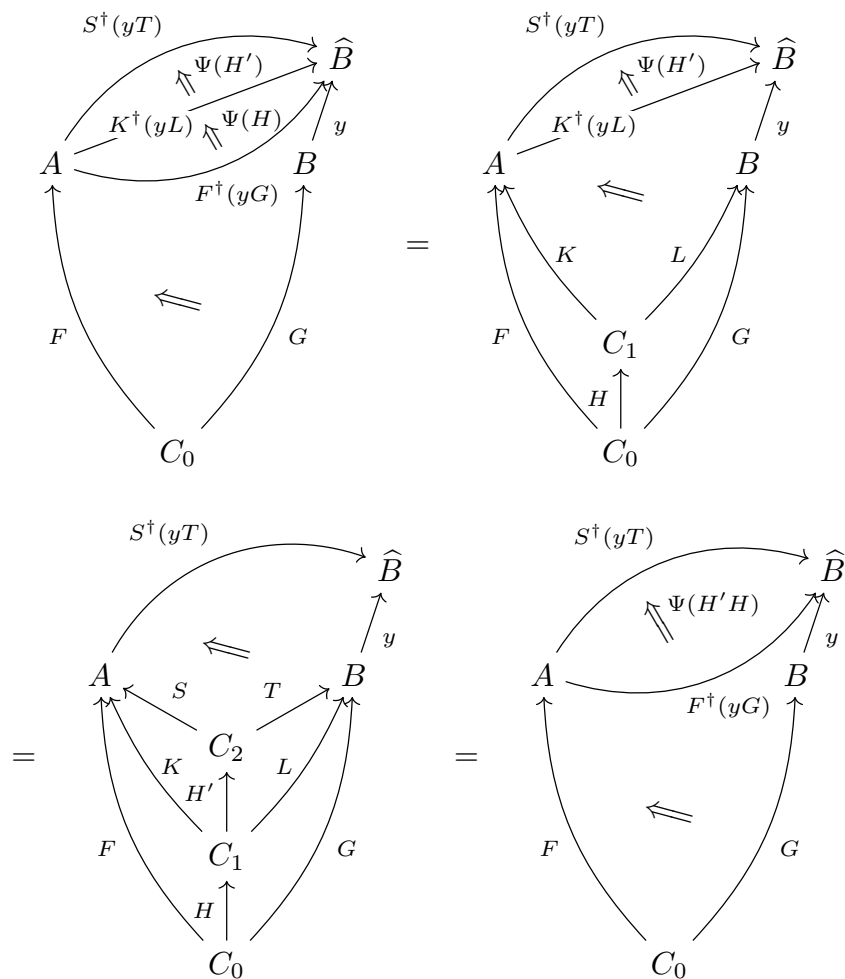
次に $\text{span } A \xleftarrow{F} C \xrightarrow{G} B$ に対して profunctor $A \multimap B$ が $G_* \otimes F^*$ により得られる。これは各点左 Kan 拡張の一般論により

$$G_* \otimes F^* \cong (yG) \otimes (F^\dagger y) \cong y^\dagger(yG) \circ F^\dagger y \cong F^\dagger(yG)$$

$$\begin{array}{ccc}
 & \hat{C} & \xrightarrow{y^\dagger(yG)} \hat{B} \\
 F^\dagger y \nearrow & \uparrow & \nearrow y \\
 A & \rightleftarrows C & B \\
 F \nwarrow & \downarrow & \nwarrow G
 \end{array}
 =
 \begin{array}{ccc}
 & & \hat{B} \\
 F^\dagger(yG) \nearrow & & \nearrow y \\
 A & \rightleftarrows B & \\
 F \nwarrow & \downarrow C & \nwarrow G
 \end{array}$$

となる。そこで $\Psi\langle F, G \rangle = F^\dagger(yG)$ と定める。

このとき



より普遍性から $\Psi(H'H) = \Psi(H')\Psi(H)$ が分かる. □

関手 $\Lambda: \mathbf{Prof}(A, B) \rightarrow \mathbf{Span}(A, B)$ を $\Lambda := \downarrow \circ \Sigma$ で定義する. (後に $\Psi \dashv \Lambda$ が分かる (命題 12).)

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathbf{Span}(A, B) & \xrightarrow{\Psi} & \mathbf{Prof}(A, B) & \xrightarrow{\Sigma} & \mathbf{Cospan}(A, B) \\
 & \xleftarrow{\Lambda} & & \xleftarrow[\Phi]{\perp} & \\
 & \uparrow & \downarrow & & \\
 & & & &
 \end{array}$$

profunctor $P: A \Rrightarrow B$ に対して $\Lambda(P) = (A \xleftarrow{F^P} C^P \xrightarrow{G^P} B)$ と書く.

$$\begin{array}{ccc}
 & C_P & \\
 F_P \nearrow & & \nwarrow G_P \\
 A & \xleftarrow{\kappa} & B \\
 F^P \nwarrow & & \nearrow G^P \\
 & G_P \downarrow F_P & \\
 & \parallel & \\
 & C^P &
 \end{array}$$

コンマ圏の定義より, 圏 C^P は以下のような圏である.

- $\text{Ob}(C^P) = \{\langle a, b, f \rangle \mid a \in A, b \in B, f \in P(b, a)\}$ である.
- $\langle a, b, f \rangle, \langle a', b', f' \rangle \in \text{Ob}(C^P)$ に対して

$$\text{Hom}_{C^P}(\langle a, b, f \rangle, \langle a', b', f' \rangle) = \left\{ \langle g, h \rangle \mid \begin{array}{l} g: a \rightarrow a', h: b' \rightarrow b, \\ P(h, g)(f) = f' \end{array} \right\}$$

$\theta: P \Rightarrow Q$ を $\mathbf{Prof}(A, B)$ の射とする. Λ はコンマ圏を使って定義しているから, $\Lambda(\theta)$ は次の等式を満たすような関手 $C^P \rightarrow C^Q$ である.

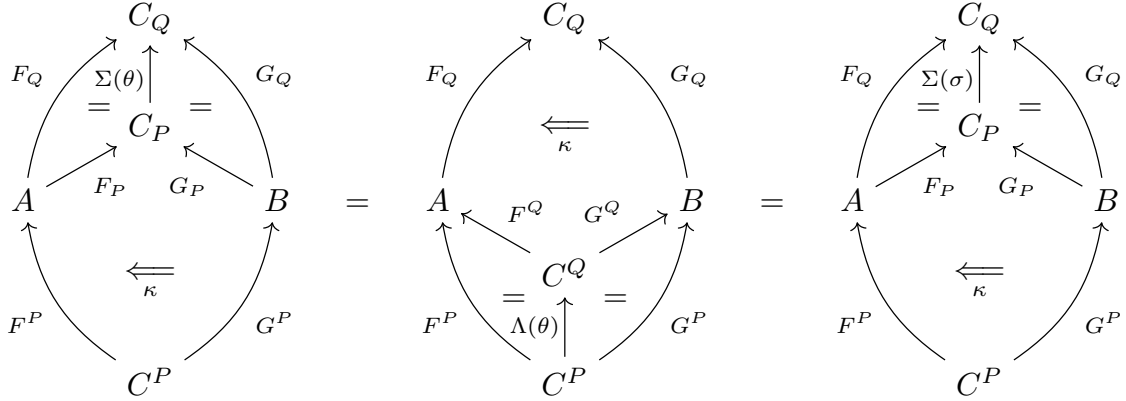
$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{ccc}
 & C_Q & \\
 F_Q \nearrow & & \nwarrow G_Q \\
 A & \xleftarrow{\kappa} & B \\
 F^P \nwarrow & & \nearrow G^P \\
 & C^Q & \\
 & \uparrow \Lambda(\theta) & \\
 & C^P &
 \end{array} & = & \begin{array}{ccc}
 & C_Q & \\
 F_Q \nearrow & & \nwarrow G_Q \\
 A & \xleftarrow{\kappa} & B \\
 F^P \nwarrow & & \nearrow G^P \\
 & C^P & \\
 & \uparrow \Sigma(\theta) & \\
 & C_P &
 \end{array}
 \end{array}$$

命題 8. $\Lambda: \mathbf{Prof}(A, B) \rightarrow \text{Span}(A, B)$ は忠実充満である.

証明. $P, Q \in \mathbf{Prof}(A, B)$ とする.

まず忠実であることを示す. $\theta, \sigma: P \Rightarrow Q$ が $\Lambda(\theta) = \Lambda(\sigma)$ を満たすとする. このとき $a \in A, b \in B$ に対して $\theta_{ba} = \sigma_{ba}$ であることを示せばよい. (ここで θ_{ba} と σ_{ba} は写像

$P(b, a) \rightarrow Q(B, a)$ である.) Λ の定義より



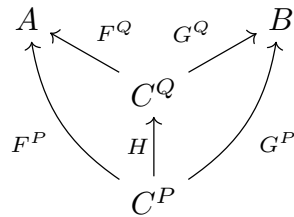
である. ここで $f \in P(b, a)$ とすると $\langle a, b, f \rangle$ は C^P の対象だから $\Sigma(\theta)(f) = \Sigma(\sigma)(f)$ となる. 故に Σ の定義から $\theta_{ba}(f) = \Sigma(\theta)(f) = \Sigma(\sigma)(f) = \sigma_{ba}(f)$ となって $\theta_{ba} = \sigma_{ba}$ である.

次に充満であることを示すため $H: \Lambda(P) \rightarrow \Lambda(Q)$ とする. $\theta: P \Rightarrow Q$ を定義しよう. そのために $b \in B$, $a \in A$ を取り $f \in P(b, a)$ とする. このとき $\langle a, b, f \rangle \in C^P$ だから $H\langle a, b, f \rangle \in C^Q$ である. 圏 C^P の定義より $H\langle a, b, f \rangle = \langle a, b, \theta_{ba}(f) \rangle$ と書ける. これにより写像 $\theta_{ba}: P(b, a) \rightarrow Q(b, a)$ が定まる. θ_{ba} は $b \in B$, $a \in A$ について自然である.

∴) $g: a \rightarrow a'$, $h: b' \rightarrow b$ とする. 次の図式が可換であることを示せばよい.

$$\begin{array}{ccc} P(b, a) & \xrightarrow{\theta_{ba}} & Q(b, a) \\ P(h, g) \downarrow & & \downarrow Q(h, g) \\ P(b', a') & \xrightarrow{\theta_{b'a'}} & Q(b', a') \end{array}$$

$f \in P(b, a)$ を取り $f' := P(h, g)(f)$ とする. このとき $\langle g, h \rangle: \langle a, b, f \rangle \rightarrow \langle a', b', f' \rangle$ は C^P の射である. 故に $H\langle g, h \rangle: H\langle a, b, f \rangle \rightarrow H\langle a', b', f' \rangle$ は C^Q の射である. 一方 H は span の射だから次の図式が可換である.



従って $H\langle g, h \rangle = \langle g, h \rangle$ となる. 故に $\langle g, h \rangle: \langle a, b, \theta_{ba}(f) \rangle \rightarrow \langle a', b', \theta_{b'a'}(f') \rangle$ が C^Q

の射だから $Q(h, g)(\theta_{ba}(f)) = \theta_{b'a'}(f') = \theta_{b'a'}(P(h, g)(f))$ となる.

よって $\theta: P \Rightarrow Q$ となる. このとき定義から明らかに等式

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{ccc}
 & C_Q & \\
 F_Q \nearrow & \uparrow \Sigma(\theta) & \nwarrow G_Q \\
 A & C_P & B \\
 F_P \nearrow & \uparrow & \nwarrow G_P \\
 & C^P & \\
 F^P \nearrow & \uparrow \kappa & \nwarrow G^P \\
 & C^P &
 \end{array}
 & = &
 \begin{array}{ccc}
 & C_Q & \\
 F_Q \nearrow & \uparrow \kappa & \nwarrow G_Q \\
 A & C^Q & B \\
 F^P \nearrow & \uparrow H & \nwarrow G^P \\
 & C^P &
 \end{array}
 \end{array}$$

が成り立つ. 故に Λ の定義より $\Lambda(\theta) = H$ である. □

命題 9. $\Lambda \circ \Phi \cong \downarrow$ である.

証明. $\text{Cospan}(A, B)$ の射 $H: \langle F, G \rangle \rightarrow \langle K, L \rangle$ (次の図式を参照) を取る.

$$\begin{array}{ccc}
 & D & \\
 K \nearrow & \uparrow H & \nwarrow L \\
 A & C & B \\
 F \nearrow & \uparrow & \nwarrow G \\
 & C &
 \end{array}$$

定義より $\Lambda(\Phi(H))$ は

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{ccc}
 & C_{\Phi\langle K, L \rangle} & \\
 F_{\Phi\langle K, L \rangle} \nearrow & \uparrow \kappa & \nwarrow G_{\Phi\langle K, L \rangle} \\
 A & C^{\Phi\langle K, L \rangle} & B \\
 F^{\Phi\langle F, G \rangle} \nearrow & \uparrow \Lambda(\Phi(H)) & \nwarrow G^{\Phi\langle F, G \rangle} \\
 & C^{\Phi\langle F, G \rangle} &
 \end{array}
 & = &
 \begin{array}{ccc}
 & C_{\Phi\langle K, L \rangle} & \\
 F_{\Phi\langle K, L \rangle} \nearrow & \uparrow \Sigma(\Phi(H)) & \nwarrow G_{\Phi\langle K, L \rangle} \\
 A & C_{\Phi\langle K, L \rangle} & B \\
 F_{\Phi\langle F, G \rangle} \nearrow & \uparrow \kappa & \nwarrow G_{\Phi\langle F, G \rangle} \\
 & C^{\Phi\langle K, L \rangle} &
 \end{array}
 \end{array}$$

で与えられる関手である．ここで

$$\Phi\langle F, G \rangle \cong \text{Hom}_C(G-, F-), \quad \Phi\langle K, L \rangle \cong \text{Hom}_D(L-, K-)$$

であるから $C^{\Phi\langle F, G \rangle} \cong G \downarrow F$, $C^{\Phi\langle K, L \rangle} \cong L \downarrow K$ であり, $\Sigma(\Phi(H))$ は

$$H: \text{Hom}_C(Gb, Fa) \rightarrow \text{Hom}_D(Lb, Ka)$$

により定まる関手である．よって $\Lambda \circ \Phi \cong \downarrow$ である. □

ここで補題を 1 つ証明する．

補題 10. $X \xrightarrow{G} D \xleftarrow{F} C$ と $X \xrightarrow{S} U \xleftarrow{E} C$ を cospan として, コンマ圏 $F \downarrow G$ を考える．

$$\begin{array}{ccccc}
 & & S & \xrightarrow{\quad} & U \\
 & \nearrow & & & \uparrow \\
 X & \xrightarrow{G} & D & & \\
 \uparrow P_1 & \nwarrow \kappa & \uparrow F & & \\
 F \downarrow G & \xrightarrow{P_0} & C & & \\
 & & & \searrow & E
 \end{array}$$

このとき全単射

$$\omega: \text{Hom}_{\mathbf{Prof}(X, C)}(\text{Hom}_D(F-, G\Box), \text{Hom}_U(E-, S\Box)) \rightarrow \text{Hom}_{U^{F \downarrow G}}(EP_0, SP_1)$$

が存在する．更にこの全単射は $S \in U^X$ について自然である．

証明. まず Λ の定義より $\Lambda(\text{Hom}_D(F-, G\Box)) = F \downarrow G$ である．命題 8 により Λ は忠実充満だから全単射

$$\text{Hom}_{\mathbf{Prof}(X, C)}(\text{Hom}_D(F-, G\Box), \text{Hom}_U(E-, S\Box)) \cong \text{Hom}_{\text{Span}(X, C)}(F \downarrow G, E \downarrow S)$$

が得られる．この全単射で $\theta: \text{Hom}_D(F-, G\Box) \Rightarrow \text{Hom}_U(E-, S\Box)$ に対応するのは関手 $\Lambda(\theta): F \downarrow G \rightarrow E \downarrow S$ である．この関手は定義より次の等式によって定まる関手である

(但し $P := \text{Hom}_D(F-, G\Box)$, $Q := \text{Hom}_U(E-, S\Box)$ と書いた).

$$\begin{array}{ccc}
 & C_Q & \\
 F_Q \nearrow & & \nwarrow G_Q \\
 X & \xleftarrow{\kappa} & C \\
 \nwarrow P_1 & & \nearrow P_0 \\
 & E \downarrow S & \\
 & \Lambda(\theta) \uparrow & \\
 & F \downarrow G &
 \end{array}
 =
 \begin{array}{ccc}
 & C_Q & \\
 F_Q \nearrow & & \nwarrow G_Q \\
 X & \xleftarrow{\kappa} & C \\
 \nwarrow P_1 & & \nearrow P_0 \\
 & E \downarrow S & \\
 & \Lambda(\theta) \uparrow & \\
 & F \downarrow G &
 \end{array}$$

特に対象 $\langle c, x, f \rangle \in F \downarrow G$ に対して $\Lambda(\theta)\langle c, x, f \rangle = \langle c, x, \theta_{cx}(f) \rangle$ となる. 次にコンマ圏 $E \downarrow S$ の普遍性から全単射

$$\text{Hom}_{\text{Span}(X, C)}(F \downarrow G, E \downarrow S) \cong \text{Hom}_{U^{F \downarrow G}}(EP_0, SP_1)$$

が得られる. この全単射は $H: F \downarrow G \rightarrow E \downarrow S$ に対して, 自然変換

$$\omega'(H) := \begin{array}{ccc}
 & U & \\
 S \nearrow & & \nwarrow E \\
 X & \xleftarrow{\kappa} & C \\
 \nwarrow P_1 & & \nearrow P_0 \\
 & E \downarrow S & \\
 & H \uparrow & \\
 & F \downarrow G &
 \end{array}$$

を対応させる全単射である. 従って $\omega(\theta)_{\langle c, x, f \rangle} := \omega'(\Lambda(\theta))_{\langle c, x, f \rangle} = \theta_{cx}(f)$ と定義すればこれが全単射

$$\omega: \text{Hom}_{\mathbf{Prof}(X, C)}(\text{Hom}_D(F-, G\Box), \text{Hom}_U(E-, S\Box)) \rightarrow \text{Hom}_{U^{F \downarrow G}}(EP_0, SP_1)$$

を定める. この ω が $S \in U^X$ について自然であることを示すため $\xi: S \Rightarrow S'$ を自然変換とする. $\zeta: \text{Hom}_U(E-, S\Box) \Rightarrow \text{Hom}_U(E-, S'\Box)$ を

$$\zeta_{cx} := \xi_x \circ -: \text{Hom}_U(Ec, Sx) \Rightarrow \text{Hom}_U(Ec, S'x)$$

により定めたとき

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Hom}_{\mathbf{Prof}(X,C)}(\mathrm{Hom}_D(F-, G\Box), \mathrm{Hom}_U(E-, S\Box)) & \xrightarrow{\omega} & \mathrm{Hom}_{U^{F\downarrow G}}(EP_0, SP_1) \\
\zeta \circ - \downarrow & & \downarrow \xi_{P_1} \circ - \\
\mathrm{Hom}_{\mathbf{Prof}(X,C)}(\mathrm{Hom}_D(F-, G\Box), \mathrm{Hom}_U(E-, S'\Box)) & \xrightarrow{\omega} & \mathrm{Hom}_{U^{F\downarrow G}}(EP_0, S'P_1)
\end{array}$$

が可換であることを示せばよい．これは $\theta: \mathrm{Hom}_D(F-, G\Box) \Rightarrow \mathrm{Hom}_U(E-, S\Box)$ に対して

$$\begin{array}{ccc}
\theta & \xrightarrow{\omega} & \omega(\theta) \\
\zeta \circ - \downarrow & & \downarrow \xi_{P_1} \circ - \\
\zeta \circ \theta & \xrightarrow{\omega} & \omega(\zeta \circ \theta)
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
(\xi_{P_1} \circ \omega(\theta))_{\langle c, x, f \rangle} &= \xi_x \circ \theta_{cx}(f) \\
(\omega(\zeta \circ \theta))_{\langle c, x, f \rangle} &= (\zeta \circ \theta)_{cx}(f) = \xi_x \circ \theta_{cx}(f)
\end{aligned}$$

となるから可換である． □

従って特に $X := \mathbb{1}$ として $d := G(*)$, $u := S(*)$ と書けば全単射

$$\mathrm{Hom}_{\widehat{C}}(\mathrm{Hom}_D(F-, d), \mathrm{Hom}_U(E-, u)) \cong \mathrm{Hom}_{U^{F\downarrow d}}(EP_0, \Delta u)$$

が得られる．これは各点左 Kan 拡張の特徴付けで使用した全単射 (「Kan 拡張」の PDF を参照) である．

この補題を使えば，各点左 Kan 拡張についてより一般に次の条件が成り立つ．

命題 11. $\langle T, \eta \rangle$ が $F: C \rightarrow D$ に沿った $E: C \rightarrow U$ の各点左 Kan 拡張

$\iff$ 任意の圏 X と関手 $G: X \rightarrow D$ に対して合成

$$\begin{array}{ccccc}
X & \xrightarrow{G} & D & & \\
P_1 \uparrow & \swarrow \kappa & \uparrow F & \searrow T & \\
F \downarrow G & \xrightarrow{P_0} & C & \xrightarrow{E} & U
\end{array}$$

は左 Kan 拡張である．

証明. ($\Leftarrow$) 各点左 Kan 拡張の定義より明らか.

($\Rightarrow$) $\langle T, \eta \rangle$ が各点左 Kan 拡張だから $d \in D$, $u \in U$ について自然な全単射

$$\varphi_{du}: \text{Hom}_U(Td, u) \rightarrow \text{Hom}_{\widehat{C}}(\text{Hom}_D(F-, d), \text{Hom}_U(E-, u))$$

が存在する. $k \in \text{Hom}_U(Td, u)$ に対して $\varphi_{du}(k)_c: \text{Hom}_D(Fc, d) \rightarrow \text{Hom}_U(Ec, u)$ は

$$\varphi_{du}(k)_c(f) = (Ec \xrightarrow{\eta_c} TFc \xrightarrow{Tf} Td \xrightarrow{k} u)$$

で与えられる (「Kan 拡張」の PDF を参照).

さて $S \in U^X$ について自然に

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{U^X}(TG, S) &\cong \int_{x \in X} \text{Hom}_U(TGx, Sx) \\ &\cong \int_{x \in X} \text{Hom}_{\widehat{C}}(\text{Hom}_D(F-, Gx), \text{Hom}_U(E-, Sx)) \\ &\cong \int_{x \in X} \int_{c \in C^{\text{op}}} \text{Hom}_{\mathbf{Set}}(\text{Hom}_D(Fc, Gx), \text{Hom}_U(Ec, Sx)) \\ &\cong \int_{\langle c, x \rangle \in C^{\text{op}} \times X} \text{Hom}_{\mathbf{Set}}(\text{Hom}_D(Fc, Gx), \text{Hom}_U(Ec, Sx)) \\ &\cong \text{Hom}_{\mathbf{Prof}(X, C)}(\text{Hom}_D(F-, G\Box), \text{Hom}_U(E-, S\Box)) \end{aligned}$$

である. この全単射を ψ と書くと, $\tau: TG \Rightarrow S$ に対して

$$\psi(\tau): \text{Hom}_D(F-, G\Box) \Rightarrow \text{Hom}_U(E-, S\Box)$$

は $\psi(\tau)_{cx}(f) = \varphi_{Gx, Sx}(\tau_x)_c(f)$ で与えられる. このとき補題 10 を使えば $S \in U^X$ について自然な全単射

$$\omega \circ \psi: \text{Hom}_{U^X}(TG, S) \rightarrow \text{Hom}_{U^{F \downarrow G}}(EP_0, SP_1)$$

が得られる. 故に $P_1^\dagger(EP_0) \cong TG$ が分かる. この左 Kan 拡張の unit は $\omega \circ \psi(\text{id}_{TG})$ である. その $\langle c, x, f \rangle \in F \downarrow G$ 成分を計算すると

$$\omega \circ \psi(\text{id}_{TG})_{\langle c, x, f \rangle} = \psi(\text{id}_{TG})_{cx}(f) = \varphi_{Gx, TGx}(\text{id}_{TGx})_c(f) = Tf \circ \eta_c$$

となる. 即ち

$$\omega \circ \psi(\text{id}_{TG}) = \begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{G} & D & & \\ P_1 \uparrow & \swarrow \kappa & \uparrow F & \searrow T & \\ F \downarrow G & \xrightarrow{P_0} & C & \xrightarrow{E} & U \end{array}$$

となりこの図式は左 Kan 拡張である. □

命題 12. 随伴 $\Psi \dashv \Lambda: \text{Span}(A, B) \rightarrow \mathbf{Prof}(A, B)$ が成り立つ. 更にこれの counit は同型である. 従って $\Psi \circ \Lambda \cong \text{id}$ である.

証明. 随伴であることを示すため, $(A \xleftarrow{F} C \xrightarrow{G} B) \in \text{Span}(A, B)$, $P \in \mathbf{Prof}(A, B)$ について自然な全単射

$$\varphi: \text{Hom}_{\text{Span}(A, B)}(\langle F, G \rangle, \Lambda(P)) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbf{Prof}(A, B)}(\Psi\langle F, G \rangle, P)$$

を定義する. そのためにまず自然同型 $\varepsilon: \Psi(\Lambda(P)) \Rightarrow P$ が存在することを示す.

∴ 次の 2 つの図式を考える.

$$\begin{array}{ccc} & A & \\ & \uparrow F^P & \\ C^P & \xrightarrow{G^P} B & \xrightarrow{y} \hat{B} \\ & \uparrow \Psi(\Lambda(P)) & \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & A & \\ & \uparrow F^P & \\ C^P & \xrightarrow{G^P} B & \xrightarrow{y} \hat{B} \\ & \uparrow G_P & \\ & \uparrow F_P & \\ & A & \end{array}$$

(The right diagram is a commutative diagram with nodes A, C^P, B, and B-hat. Arrows include F^P, G^P, y, F_P, G_P, and G_P[†]y. A curved arrow P connects A and B-hat, and a double arrow ∽ connects A and C_P.)

定義より $\Psi(\Lambda(P)) = (F^P)^\dagger(y \circ G^P)$ だから左の図式は左 Kan 拡張である. 一方で右の図式において, $A \xleftarrow{F^P} C^P \xrightarrow{G^P} B$ はコンマ圏 $G_P \downarrow F_P$ として与えられているから, 命題 11 により $(F^P)^\dagger(y \circ G^P) \cong G_P^\dagger y \circ F_P$ が分かる. また命題 6 より $G_P^\dagger y \circ F_P = \Phi(\Sigma(P)) \cong P$ となる. 故に普遍性から自然同型 $\varepsilon: \Psi(\Lambda(P)) \Rightarrow P$ が存在して次の等式が成り立つ.

$$\begin{array}{ccc} & A & \\ & \uparrow F^P & \\ C^P & \xrightarrow{G^P} B & \xrightarrow{y} \hat{B} \\ & \uparrow \Psi(\Lambda(P)) & \end{array} \xrightarrow{\varepsilon} \begin{array}{ccc} & A & \\ & \uparrow F^P & \\ C^P & \xrightarrow{G^P} B & \xrightarrow{y} \hat{B} \\ & \uparrow G_P & \\ & \uparrow F_P & \\ & A & \end{array}$$

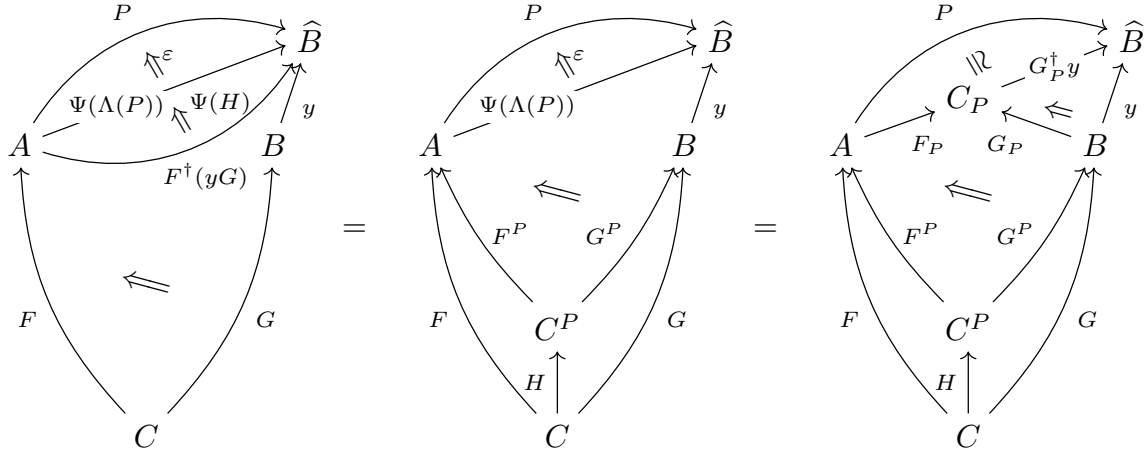
(The left diagram is the same as the one above. The right diagram is the same as the one above. An equals sign is between them.)

$H: \langle F, G \rangle \rightarrow \Lambda(P)$ を射とする. 即ち H は次を可換とする関手である.

$$\begin{array}{ccccc} & A & & B & \\ & \swarrow F^P & & \searrow G^P & \\ & C^P & & & \\ & \uparrow H & & \uparrow G & \\ C & & & & \end{array}$$

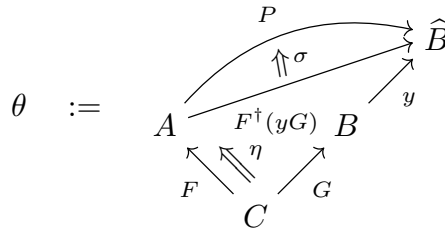
(A commutative triangle with nodes A, B, and C. Arrows are F, G, and H.)

このとき自然変換 $\psi(H): \Psi\langle F, G \rangle \Rightarrow P$ を $\psi(H) := \varepsilon \circ (\Psi(H))$ で定める.



この $\psi(H)$ は全単射 $\psi: \text{Hom}(\langle F, G \rangle, \Lambda(P)) \rightarrow \text{Hom}(\Psi\langle F, G \rangle, P)$ を与える.

∴) 単射性は明らかだから全射性を示す. そのために $\sigma: \Psi\langle F, G \rangle \Rightarrow P$ を自然変換とする. このとき



と定義して, これを使って H を

- 対象 $c \in C$ に対して $Hc := \langle Fc, Gc, \theta_c \rangle$ とする.
- 射 $f: c \rightarrow c'$ に対して $Hf := \langle Ff, Gf \rangle$ とする.

と定義する. これは明らかに関手 $H: C \rightarrow C^P$ を定める. また明らかに H は射 $\langle F, G \rangle \rightarrow \Lambda(P)$ であり $\psi(H) = \sigma$ である. 故に ψ は全射である.

定義から明らかに ψ は自然である. 従って随伴 $\Psi \dashv \Lambda$ が成り立つ. ψ の定義よりこの随伴の counit は ε であり, これは同型である. $\square$

以上により $\uparrow := \Sigma \circ \Psi$ と定義すれば

$$\begin{array}{c}
 \uparrow \\
 \boxed{\text{Span}(A, B) \xrightleftharpoons[\Lambda]{\Psi} \mathbf{Prof}(A, B) \xrightleftharpoons[\Phi]{\Sigma} \text{Cospan}(A, B)} \\
 \downarrow
 \end{array}$$

より $\uparrow \dashv \downarrow$ となる．従って次の定理を得る．

定理 13. 関手 $\downarrow: \text{Cospan}(A, B) \rightarrow \text{Span}(A, B)$ は左随伴 $\uparrow$ を持つ. □

Λ, Σ が忠実充満だから $\uparrow \dashv \downarrow$ は冪等随伴である (「随伴関手」の PDF を参照)．そこで充満部分圏 $\text{Comma}(A, B) \subset \text{Span}(A, B)$, $\text{Cocomma}(A, B) \subset \text{Cospan}(A, B)$ を

$$\begin{aligned}
 \text{Ob}(\text{Comma}(A, B)) &:= \{x \in \text{Span}(A, B) \mid \text{ある } z \in \text{Cospan}(A, B) \text{ が存在して } \downarrow(z) \cong x\} \\
 \text{Ob}(\text{Cocomma}(A, B)) &:= \{x \in \text{Cospan}(A, B) \mid \text{ある } z \in \text{Span}(A, B) \text{ が存在して } \uparrow(z) \cong x\}
 \end{aligned}$$

で定義すれば圏同値 $\text{Comma}(A, B) \simeq \mathbf{Prof}(A, B) \simeq \text{Cocomma}(A, B)$ が得られる．

参考文献

- [1] Jean Bénabou, Distributors at Work, <http://www.mathematik.tu-darmstadt.de/~streicher/>