標準的でない自然同型について

alg-d
http://alg-d.com/math/kan_extension/

2020 年 5 月 17 日

関手 F が余極限 $\operatorname{colim} T$ と交換するとは，大雑把に言えば $F(\operatorname{colim} T) \cong \operatorname{colim}(FT)$ ということである．正確には，余極限の普遍性により射 $\operatorname{colim}(FT) \to F(\operatorname{colim} T)$ が標準的に得られるから，この h が同型になるということである．

そこで気になるのは，標準的とは限らない同型 $\operatorname{colim}(FT) \to F(\operatorname{colim} T)$ が存在するだけでは駄目なのだろうか，ということである．実はいくつかの状況においては，標準的でなくても良いことが知られている ([1])．

この PDF では圏 C は有限直積と有限余直積を持つとする．

1 分配法則について

補題 1. 圏 C において，a と 0 の余直積を $a \xrightarrow{i} a \amalg 0 \leftarrow 0$ とするとき i は同型である．また a と b の余直積を $a \xrightarrow{i_a} a \amalg b \xleftarrow{i_b} b$ とするとき

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[rr, "i_a"] \arrow[dr, "i"'] & & a \amalg b & & a \arrow[ll, "i_b"'] \arrow[dl, "i"] \\
& a \amalg 0 \arrow[ur, "a\times !"'] & & 0 \amalg b \arrow[ul, "!\times b"] &
\end{tikzcd}$$

は可換である． □

$a, b, c \in C$ に対して φ_{abc} を，余直積の普遍性により得られる射とする．

$$\begin{tikzcd}
a \times b \arrow[r, "i_{a\times b}"] \arrow[dr, "a\times i_b"'] & (a \times b) \amalg (a \times c) \arrow[d, dashed, "\varphi_{abc}"] & a \times c \arrow[l, "i_{a\times c}"'] \arrow[dl, "a\times i_c"] \\
& a \times (b \amalg c) &
\end{tikzcd}$$

これは a, b, c について自然である．

補題 2. $a, b, c \in C$ について自然な同型 $\psi_{abc}\colon (a \times b) \amalg (a \times c) \to a \times (b \amalg c)$ が存在するとする．$a \in C$ に対して $a \times 0 \cong 0$ が成り立つならば，φ_{abc} は同型である．

証明. ψ'_{ab}, ψ''_{ac} を次の 2 つの図式の $(*)$ が可換になるように定める．ψ_{abc} の自然性によりこれらの図式は可換になる．

$$\begin{tikzcd}
a \times b \arrow[r, "\psi'_{ab}"] \arrow[d, "\wr"'] \arrow[ddd, bend right=60, "i_{a\times b}"'] & a \times b \arrow[dd, "\wr"] \arrow[ddd, bend left=60, "a\times i_b"] \\
(a \times b) \amalg 0 \arrow[d, "\wr"'] \arrow[r, phantom, "(*)"] & \\
(a \times b) \amalg (a \times 0) \arrow[r, "\psi_{ab0}"] \arrow[d, "(a\times b)\amalg(a\times !)"'] & a \times (b \amalg 0) \arrow[d, "a\times(b\amalg !)"] \\
(a \times b) \amalg (a \times c) \arrow[r, "\psi_{abc}"'] & a \times (b \amalg c)
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
a \times c \arrow[r, "\psi''_{ac}"] \arrow[d, "\wr"'] \arrow[ddd, bend right=60, "i_{a\times c}"'] & a \times c \arrow[dd, "\wr"] \arrow[ddd, bend left=60, "a\times i_c"] \\
0 \amalg (a \times c) \arrow[d, "\wr"'] \arrow[r, phantom, "(*)"] & \\
(a \times 0) \amalg (a \times c) \arrow[r, "\psi_{a0c}"] \arrow[d, "(a\times !)\amalg(a\times c)"'] & a \times (0 \amalg c) \arrow[d, "a\times(!\amalg c)"] \\
(a \times b) \amalg (a \times c) \arrow[r, "\psi_{abc}"'] & a \times (b \amalg c)
\end{tikzcd}$$

そこで次の 2 つの可換図式を考える．

$$\begin{tikzcd}
a \times b \arrow[r, "i_{a\times b}"] \arrow[d, "\psi'_{ab}"'] & (a \times b) \amalg (a \times c) \arrow[d, "\psi'_{ab}\amalg\psi''_{ac}"] & a \times c \arrow[l, "i_{a\times c}"'] \arrow[d, "\psi''_{ac}"] \\
a \times b \arrow[r, "i_{a\times b}"] \arrow[d, "\mathrm{id}"'] & (a \times b) \amalg (a \times c) \arrow[d, "\varphi_{abc}"] & a \times c \arrow[l, "i_{a\times c}"'] \arrow[d, "\mathrm{id}"] \\
a \times b \arrow[r, "a\times i_b"'] & a \times (b \amalg c) & a \times c \arrow[l, "a\times i_c"]
\end{tikzcd}$$

$$
\begin{tikzcd}
a \times b \arrow[r, "i_{a\times b}"] \arrow[d, "\psi'_{ab}"'] & (a\times b) \amalg (a\times c) \arrow[d, "\psi_{abc}"] & a\times c \arrow[l, "i_{a\times c}"'] \arrow[d, "\psi''_{ac}"] \\
a \times b \arrow[r, "a\times i_b"'] & a \times (b \amalg c) & a \times c \arrow[l, "a\times i_c"]
\end{tikzcd}
$$

余直積の普遍性により $\varphi_{abc} \circ (\psi'_{ab} \amalg \psi''_{ac}) = \psi_{abc}$ が分かる．$\psi_{abc}, \psi'_{ab}, \psi''_{ac}$ が同型だから φ_{abc} も同型である． $\square$

定理 3. $a, b, c \in C$ について自然な同型 $\psi_{abc} \colon (a \times b) \amalg (a \times c) \to a \times (b \amalg c)$ が存在するならば，φ_{abc} は同型である．

証明. [1] を参照. $\square$

2　双積について

$a, b \in C$ に対して φ_{ab} を，余直積と直積の普遍性により得られる射とする．

$$
\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "i_a"] \arrow[d, "\mathrm{id}_a"'] & a \amalg b \arrow[d, dashed, "\varphi_{ab}"] & b \arrow[l, "i_b"'] \arrow[d, "\mathrm{id}_b"] \\
a & a \times b \arrow[l, "p_a"] \arrow[r, "p_b"'] & b
\end{tikzcd}
$$

これは a, b について自然である．

定理 4. $a, b \in C$ について自然な同型 $\psi_{ab} \colon a \amalg b \to a \times b$ が存在するならば，φ_{ab} は同型である．

証明. 射 $1 \cong 1 \amalg 0 \xrightarrow{\psi_{10}} 1 \times 0 \cong 0$ が存在するから $1 \cong 0$ である．故に零射が存在する．

ψ_{ab} が自然だから次の図式が可換である.

$$
\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "\psi'_a"] \arrow[d, "\wr"'] \arrow[dd, bend right=60, "i_a"'] & a \arrow[d, "\wr"] \\
a \amalg 0 \arrow[r, "\psi_{a0}"] \arrow[d, "a\amalg !"'] & a \times 0 \arrow[d, "a\times !"] \\
a \amalg b \arrow[r, "\psi_{ab}"'] & a \times b \arrow[uu, bend right=60, "p_a"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
b \arrow[r, "\psi''_b"] \arrow[d, "\wr"'] \arrow[dd, bend right=60, "i_b"'] & b \arrow[d, "\wr"] \\
0 \amalg b \arrow[r, "\psi_{0b}"] \arrow[d, "!\amalg b"'] & 0 \times b \arrow[d, "!\times b"] \\
a \amalg b \arrow[r, "\psi_{ab}"'] & a \times b \arrow[uu, bend right=60, "p_b"']
\end{tikzcd}
$$

そこで次の 2 つの可換図式を考える.

$$
\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "i_a"] \arrow[d, "\psi'_a"'] & a \amalg b \arrow[d, "\psi'_a \amalg \psi''_b"] & b \arrow[l, "i_b"'] \arrow[d, "\psi''_b"] \\
a \arrow[r, "i_a"] \arrow[d, "\mathrm{id}"'] & a \amalg b \arrow[d, "\varphi_{ab}"] & b \arrow[l, "i_b"'] \arrow[d, "\mathrm{id}"] \\
a & a \times b \arrow[l, "p_a"] \arrow[r, "p_b"'] & b
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "i_a"] \arrow[d, "\psi'_a"'] & a \amalg b \arrow[d, "\psi_{ab}"] & b \arrow[l, "i_b"'] \arrow[d, "\psi''_b"] \\
a & a \times b \arrow[l, "p_a"] \arrow[r, "p_b"'] & b
\end{tikzcd}
$$

普遍性により $\varphi_{ab} \circ (\psi'_a \amalg \psi''_b) = \psi_{ab}$ が分かる. $\psi_{ab}, \psi'_a, \psi''_b$ が同型だから φ_{ab} も同型である. $\square$

参考文献

[1] S. Lack, Non-canonical isomorphisms, `https://arxiv.org/abs/0912.2126`