高次元圏入門

alg-d

前回の
関西すうがく徒の
つどい!!

前回の関西すうがく徒のつどい!!

- 圏論とは圏の圏 **Cat** の論だと思える。
- **Cat** を公理化したものを strict 2-category という。
- strict 2-category でも圏論と同じことが大体出来る (formal category theory)

次元

- formal category theory の方が抽象化されているので簡単 [要出典]
- 要するに #圏論は具体的なのでクソ

今回の関西すうがく徒のつどい

- 通常の圏は 1-category とも呼ばれ，次元は 1 と考えられている．
- この意味で高次元 (2 次元以上) の圏のふわっとした説明をします．
- (この講演に限らず) どんどん実況をしましょう．
  タグ: #kansaimath303
  #alg_d #圏論は具体的なのでクソ
- この講演はスライドの撮影、Twitter 投稿は OK(人が写らないようにしてください)．
- NG ワード: 何の役に立つの?

参考文献

壱大整域, http://alg-d.com/math/kan_extension/


トップ > 数学 > 圏論

圏論

このページについて

※特に断らない限り、圏はlocally smallであると仮定しています。

※上から順に読むことを想定しています。

※定義が書いてない言葉があったりするので、その場合はnLabを見るなりしてください。

※選択公理は特に断らず使います。

意見・質問・感想・誤字や数学的間違いの指摘などはTwitterもしくはこのページのコメント欄まで。

第0章　圏論入門

圏論を全く知らない人向けの解説です。圏論に馴染みのある方は飛ばしてもらって大丈夫です。

2 次元のことは結構書いてある.

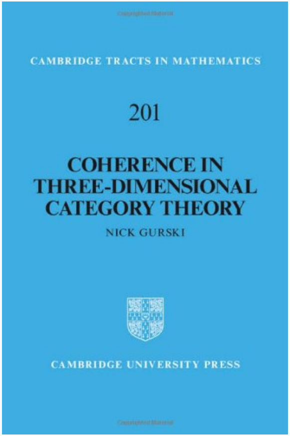
証明がしっかりしていると好評

印刷して身体に貼ると防御力が上がるらしい

参考文献

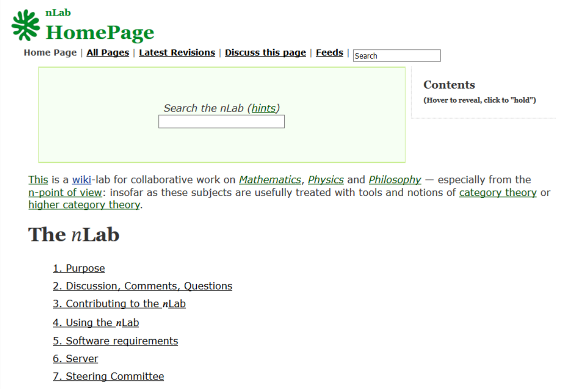
Nick Gurski『Coherence in Three-Dimensional Category Theory』Cambridge University Press (2013)

タイトルの通り 3 次元の場合について書いてある.
HTT に潰されそうになったとき助けてくれるかも



参考文献

nLab, https://ncatlab.org/nlab/show/HomePage


nLab
HomePage
Home Page | All Pages | Latest Revisions | Discuss this page | Feeds | Search

Search the nLab (hints)

Contents
(Hover to reveal, click to "hold")

This is a wiki-lab for collaborative work on *Mathematics*, *Physics* and *Philosophy* — especially from the n-point of view: insofar as these subjects are usefully treated with tools and notions of category theory or higher category theory.

The nLab

1. Purpose
2. Discussion, Comments, Questions
3. Contributing to the nLab
4. Using the nLab
5. Software requirements
6. Server
7. Steering Committee

お馴染みのやつ

復習

【定義】 (圏)

圏 A は以下からなる:

1. $\mathrm{Ob}(A)$: 対象の集まり　(以下 $a, b, c, d \in \mathrm{Ob}(A)$)
2. $A(a, b)$: 集合　($\mathrm{Hom}_A(a, b)$ を単に $A(a, b)$ と書く)
3. $C^{abc} \colon A(b, c) \times A(a, b) \to A(a, c)$: 写像
4. $I^a \colon 1 = \{*\} \to A(a, a)$: 写像　($\mathrm{id}_a := I^a(*)$ と書く)
5. $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$
   $\mathrm{id} \circ f = f$，$f \circ \mathrm{id} = f$

最後の 3 等式は次の図式の可換性で表せる．

$$
\begin{tikzcd}
 & & \langle h, g, f\rangle \arrow[ddll, mapsto, bend right] \arrow[ddrr, mapsto, bend left] & & \\
 & & A(c,d)\times A(b,c)\times A(a,b) \arrow[dl, "C^{bcd}\times \mathrm{id}"'] \arrow[dr, "\mathrm{id}\times C^{abc}"] & & \\
\langle h\circ g, f\rangle \arrow[ddr, mapsto, bend right] & A(b,d)\times A(a,b) \arrow[dr, "C^{abd}"'] & = & A(c,d)\times A(a,c) \arrow[dl, "C^{acd}"] & \langle h, g\circ f\rangle \arrow[ddl, mapsto, bend left] \\
 & & A(a,d) & & \\
 & (h\circ g)\circ f \arrow[rr, equal] & & h\circ(g\circ f) &
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
\langle *, f\rangle \arrow[rrr, mapsto] \arrow[dddr, mapsto, bend right] & & & f \arrow[dd, equal] \\
1\times A(a,b) \arrow[rr, "\cong"] \arrow[dr, "I^b\times \mathrm{id}"'] & \arrow[d, phantom, "\|"] & A(a,b) & \\
 & A(b,b)\times A(a,b) \arrow[ur, "C^{abb}"'] & & \mathrm{id}_b\circ f \\
 & \langle \mathrm{id}_b, f\rangle \arrow[urr, mapsto, bend right] & &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
A(a,b)\times 1 \arrow[rr, "\cong"] \arrow[dr, "\mathrm{id}\times I^a"'] & \arrow[d, phantom, "\|"] & A(a,b) \\
 & A(a,b)\times A(a,a) \arrow[ur, "C^{aab}"'] &
\end{tikzcd}
$$

復習

【定義】 (圏)

圏 A は以下からなる:

1. $\mathrm{Ob}(A)$: 対象の集まり　(以下 $a, b, c, d \in \mathrm{Ob}(A)$)
2. $A(a,b)$: 集合
3. $C^{abc}\colon A(b,c) \times A(a,b) \to A(a,c)$: 写像
4. $I^a\colon 1 \to A(a,a)$: 写像
5. 次が可換

$$
\begin{tikzcd}
& A(c,d) \times A(b,c) \times A(a,b) \arrow[dl, "C^{bcd} \times \mathrm{id}"'] \arrow[dr, "\mathrm{id} \times C^{abc}"] & \\
A(b,d) \times A(a,b) \arrow[rr, phantom, "="] \arrow[dr, "C^{abd}"'] & & A(c,d) \times A(a,c) \arrow[dl, "C^{acd}"] \\
& A(a,d) &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
1 \times A(a,b) \arrow[rr, "\cong"] \arrow[dr, "I^b \times \mathrm{id}"'] & \arrow[d, phantom, "\|"] & A(a,b) \\
& A(b,b) \times A(a,b) \arrow[ur, "C^{abb}"'] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
A(a,b) \times 1 \arrow[rr, "\cong"] \arrow[dr, "\mathrm{id} \times I^a"'] & \arrow[d, phantom, "\|"] & A(a,b) \\
& A(a,b) \times A(a,a) \arrow[ur, "C^{aab}"'] &
\end{tikzcd}
$$

復習

完備かつ余完備な対称モノイダル閉圏

【定義】(V-豊穣圏)

V-豊穣圏 $\mathcal{A}$ は以下からなる:　(V: 良い圏)

1. $\mathrm{Ob}(\mathcal{A})$: 対象の集まり　(以下 $a, b, c, d \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$)
2. $\mathcal{A}(a, b)$: ~~集合~~$\in V$
3. $C^{abc}: \mathcal{A}(b, c) \cancel{\times} \otimes \mathcal{A}(a, b) \to \mathcal{A}(a, c)$: ~~写像~~ V の射
4. $I^a: \cancel{1} I \to \mathcal{A}(a, a)$: ~~写像~~ V の射
5. 次が可換

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{A}(c,d) \otimes \mathcal{A}(b,c) \otimes \mathcal{A}(a,b) \arrow[dl, "C^{bcd} \otimes \mathrm{id}"'] \arrow[dr, "\mathrm{id} \otimes C^{bcd}"] & \\
\mathcal{A}(b,d) \otimes \mathcal{A}(a,b) \arrow[dr, "C^{abd}"'] \arrow[rr, phantom, "="] & & \mathcal{A}(c,d) \otimes \mathcal{A}(a,c) \arrow[dl, "C^{acd}"] \\
 & \mathcal{A}(a,d) &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
I \otimes \mathcal{A}(a,b) \arrow[rr, "\cong"] \arrow[dr, "I^b \otimes \mathrm{id}"'] & \parallel & \mathcal{A}(a,b) \\
 & \mathcal{A}(b,b) \otimes \mathcal{A}(a,b) \arrow[ur, "C^{abb}"'] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathcal{A}(a,b) \otimes I \arrow[rr, "\cong"] \arrow[dr, "\mathrm{id} \otimes I^a"'] & \parallel & \mathcal{A}(a,b) \\
 & \mathcal{A}(a,b) \otimes \mathcal{A}(a,a) \arrow[ur, "C^{aab}"'] &
\end{tikzcd}$$

復習

【定義】(同型)

$a \cong b$
$\iff$ ある $f\colon a \to b$，$g\colon b \to a$ が存在して $g \circ f = \mathrm{id}_a$ かつ $f \circ g = \mathrm{id}_b$.

【定義】(圏同値)

関手 $F\colon A \to B$ が圏同値とは

1. 任意の $b \in B$ に対してある $a \in A$ が存在して同型 $Fa \cong b$ が成り立つ.
2. 各 $a, b \in A$ について $F\colon A(a,b) \to B(Fa, Fb)$ が全単射

復習

【例】 (基本亜群 $\Pi_1(X)$)

位相空間 X に対して以下のように定めると圏になる．
これを基本亜群 (fundamental groupoid) という．

- 対象: 点 $a \in X$
- 射 $a \to b$: a から b への道 (即ち，連続写像
  $f\colon [0,1] \to X$ で $f(0) = a$，$f(1) = b$ となるもの)
  ただしホモトピー同値な道は同じ射と見なす
- $f\colon a \to b$，$g\colon b \to c$ に対して合成 $g \circ f\colon a \to c$ を

$$g \circ f(t) := \begin{cases} f(2t) & (0 \le t \le 1/2) \\ g(2t-1) & (1/2 < t \le 1) \end{cases}$$

復習

【例】 (基本亜群 $\Pi_1(X)$)

- 道としては $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$ とはならない．
- ただし $(h \circ g) \circ f \sim h \circ (g \circ f)$ (ホモトピー同値) なので圏 $\Pi_1(X)$ の射としては $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$． □

【定義】 (亜群 (groupoid))

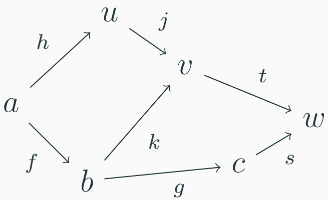
亜群とは，全ての射が同型射となる圏のことをいう．

【定理】

任意の亜群 C に対して，ある位相空間 X が存在して
$\Pi_1(X) \cong C$ (圏同値) となる． □

復習

要するに圏とは……こういう↓感じ



このように，対象を点 (0 次元)，射を線 (1 次元) として高々 1 次元で描き表すことができる．

復習

ところが，圏の圏 **Cat** では射 (関手) の間の射として自然変換が登場する．

$$
\begin{tikzcd}
C \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, bend right, "G"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\theta"] & D
\end{tikzcd}
$$

自然変換 θ は，線 (関手 F) と線 (関手 G) を結ぶ「面」と思うことができる．
$\Longrightarrow$ **Cat** は「2 次元」の圏

2 次元

2 次元

「2 次元の圏」とは，射と射の間にも射がある
$\Longrightarrow$ Hom が圏になっている．

そこで……

【定義】 (strict 2-category)

strict 2-category とは **Cat**-豊穣圏のことである．

つまり条件を書き下すと……

2 次元

【定義】 (strict 2-category)

strict 2-category $\mathcal{C}$ は以下からなる:

1. $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$: 対象の集まり　(以下 $a, b, c, d \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$)
2. $\mathcal{C}(a, b)$: 圏
3. $C^{abc}\colon \mathcal{C}(b, c) \times \mathcal{C}(a, b) \to \mathcal{C}(a, c)$: 関手
4. $I^{a}\colon 1 \to \mathcal{C}(a, a)$: 関手　($1 = \{*\}$: 一点圏)
   (続く)

【定義】 (strict 2-category)

5. 次が可換

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & \mathcal{C}(c,d)\times\mathcal{C}(b,c)\times\mathcal{C}(a,b) \arrow[dl, "C^{bcd}\times\mathrm{id}"'] \arrow[dr, "\mathrm{id}\times C^{abc}"] & \\
\mathcal{C}(b,d)\times\mathcal{C}(a,b) \arrow[dr, "C^{abd}"'] & = & \mathcal{C}(c,d)\times\mathcal{C}(a,c) \arrow[dl, "C^{acd}"] \\
 & \mathcal{C}(a,d) &
\end{tikzcd}
$$

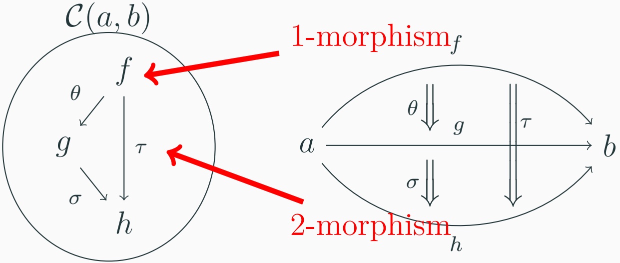
$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{1}\times\mathcal{C}(a,b) \arrow[rr, "\cong"] \arrow[dr, "I^b\times\mathrm{id}"'] & {\scriptstyle ||} & \mathcal{C}(a,b) \\
 & \mathcal{C}(b,b)\times\mathcal{C}(a,b) \arrow[ur, "C^{abb}"'] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathcal{C}(a,b)\times\mathbf{1} \arrow[rr, "\cong"] \arrow[dr, "\mathrm{id}\times I^a"'] & {\scriptstyle ||} & \mathcal{C}(a,b) \\
 & \mathcal{C}(a,b)\times\mathcal{C}(a,a) \arrow[ur, "C^{aab}"'] &
\end{tikzcd}
$$

2 次元

$\mathcal{C}$ が strict 2-category のとき

- $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ の元を対象 (もしくは 0-morphism) という．
- $a, b \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ のとき，$\mathcal{C}(a, b)$ の n-morphism を $(n+1)$-morphism という．

つまり $a, b \in \mathcal{C}$ を対象としたとき



2 次元

$\sigma \circ \theta = \tau$ であることを

$$
\begin{tikzcd}
a \arrow[r, bend left=60, "f"{name=F}] \arrow[r, "g"{name=G}] \arrow[r, bend right=60, "h"'{name=H}] \arrow[r, phantom, shift left=3ex, "\theta\Downarrow"] \arrow[r, phantom, shift right=3ex, "\sigma\Downarrow"] & b
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
a \arrow[r, bend left=60, "f"] \arrow[r, bend right=60, "h"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\tau"] & b
\end{tikzcd}
$$

と表す．

2 次元

【例】 (Cat)

以下のようにすると strict 2-category になる:

- 対象: 圏
- 1-morphism: 関手
- 2-morphism: 自然変換 $\square$

【例】 (locally discrete 2-category)

圏 C に対して以下のようにすると strict 2-category になる．

- 対象: 圏 C と同じ
- 集合 $C(a, b)$ を離散圏とみなして圏にする． $\square$

【例】 (fundamental 2-groupoid $\Pi_2(X)$)

位相空間 X に対して以下のように定めると
strict 2-category でない:

- 対象: 点 $a \in X$
- 1-morphism $a \to b$: $a \in X$ から $b \in X$ への道
- 2-morphism $f \Rightarrow g$: ホモトピー
  (ホモトピー同値な 2-morphism は同じと見なす)
- $f : a \to b$, $g : b \to c$ に対して合成 $g \circ f : a \to c$ を

$$g \circ f(t) := \begin{cases} f(2t) & (0 \leq t \leq 1/2) \\ g(2t-1) & (1/2 < t \leq 1) \end{cases}$$

【例】 (fundamental 2-groupoid $\Pi_2(X)$)

- $\mathrm{id}_a \colon a \to a$ は定値写像とする．
- すると勿論

$$(h \circ g) \circ f \sim h \circ (g \circ f),\ \mathrm{id} \circ f \sim f,\ f \circ \mathrm{id} \sim f$$

だが

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f),\ \mathrm{id} \circ f = f,\ f \circ \mathrm{id} = f$$

ではない．
$\Longrightarrow$ つまり strict 2-category ではない． $\square$

【例】 (Mod)

以下のように定めると strict 2-category でない:

- 対象: 環
- 1-morphism $R \to S$: 左 S 右 R 加群
- 2-morphism: 準同型写像
- $M\colon R \to S$, $N\colon S \to T$ に対して合成 $N \circ M\colon R \to S$ を $N \circ M := N \otimes_S M$ で定義する.
- $\mathrm{id}_R\colon R \to R$ は R を両側 R 加群とみなした物とする.
- 皆さんご存知の通り $(L \otimes_T N) \otimes_S M \cong L \otimes_T (N \otimes_S M)$ $M \otimes_R R \cong M$, $S \otimes_S M \cong M$ $\Longrightarrow$ つまり strict 2-category ではない. $\square$

【例】 (Span(C))

pullback を持つ圏 C に対して以下のように定めると strict 2-category でない:

- 対象: C と同じ
- 1-morphism $a \to b$: C での図式 $a \leftarrow f \to b$
- $a \leftarrow f \to b$ から $a \leftarrow g \to b$ への 2-morphism とは次を可換とする C の射 γ のこと

$$\begin{tikzcd} & f \arrow[dl] \arrow[dr] \arrow[dd, "\gamma"] & \\ a & & b \\ & g \arrow[ul] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

【例】 (Span(C))

- $f\colon a \to b$，$g\colon b \to c$ に対して合成 $g \circ f\colon a \to c$ を

$$\begin{tikzcd} & & g \circ f \arrow[dl] \arrow[dr] & & \\ & f \arrow[dl] \arrow[dr] \arrow[rr, phantom, "\text{p.b.}"] & & g \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ a & & b & & c \end{tikzcd}$$

  で定義する．
- $\mathrm{id}_a\colon a \to a$ は $a \xleftarrow{\mathrm{id}_a} a \xrightarrow{\mathrm{id}_a} a$ のこととする．

2 次元

【例】 (Span(C))

- pullback の普遍性により次の同型が得られる

$$
\begin{tikzcd}
 & & (h \circ g) \circ f \arrow[rr, dashed, "\cong"] \arrow[ddl] \arrow[d, dashed] \arrow[drr] & & h \circ (g \circ f) \arrow[dll] \arrow[ddr] & & \\
 & & g \circ f \arrow[dl] \arrow[dr] & & h \circ g \arrow[dl] \arrow[dr] & & \\
 & f \arrow[dl] \arrow[dr] & & g \arrow[dl] \arrow[dr] & & h \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
a & & b & & c & & d
\end{tikzcd}
$$

- つまり $(h \circ g) \circ f \cong h \circ (g \circ f)$ である．
  $\Longrightarrow$ strict 2-category ではない． $\square$

【例】 (Prof)

以下のように定めると strict 2-category でない:

- 対象: 小圏 $\qquad (\widehat{D} := \mathbf{Set}^{D^{\mathrm{op}}})$
- 1-morphism $C \to D$: 関手 $F\colon C \to \widehat{D}$ のこと
- 2-morphism $F \Rightarrow G$: 自然変換
- $F\colon A \to B$，$G\colon B \to C$ に対して合成 $GF\colon A \to C$ を

$$\begin{tikzcd} & \widehat{B} \arrow[r, "y^{\dagger}G"] & \widehat{C} \\ A \arrow[ur, "F"] & B \arrow[u, "y"] \arrow[ur, "G"'] & \end{tikzcd}$$

$GF := y^{\dagger}G \circ F$ で定義する． $\square$

2 次元

$f, g\colon a \to b$ とするとき

- 通常の圏では「$f = g$ かどうか」しかなかった．
- なので結合律も $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$ になる．
- 2-category では「$f = g$ かどうか」だけでなく「$f \cong g$ かどうか」も考えられる．
- なので通常の結合律だけでなく，弱い結合律 $(h \circ g) \circ f \cong h \circ (g \circ f)$ を考えられる．
- 単位元についても同様で弱い単位元 $\mathrm{id} \circ f \cong f$，$f \circ \mathrm{id} \cong f$ を考えられる．
- strict 2-category の条件を「弱い結合律」「弱い単位元」に弱めたのが bicategory．
- さっきの例は全て bicategory になっている．

2 次元

【定義】 (bicategory)

bicategory $\mathcal{B}$ は以下からなる:
※ bicategory を weak 2-category と呼ぶ場合もある.

1. $\mathrm{Ob}(\mathcal{B})$: 対象の集まり　(以下 $a, b, c, d, e \in \mathrm{Ob}(\mathcal{B})$)
2. $\mathcal{B}(a, b)$: 圏
3. $C^{abc}\colon \mathcal{B}(b, c) \times \mathcal{B}(a, b) \to \mathcal{B}(a, c)$: 関手
4. $I^a\colon \mathbf{1} \to \mathcal{B}(a, a)$: 関手
   (続く)

2 次元

【定義】 (bicategory)

5. $\alpha^{abcd}, \lambda^{ab}, \rho^{ab}$: 自然同型

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathcal{B}(c,d)\times\mathcal{B}(b,c)\times\mathcal{B}(a,b) \arrow[dl, "C^{bcd}\times\mathrm{id}"'] \arrow[dr, "\mathrm{id}\times C^{abc}"] & \\
\mathcal{B}(b,d)\times\mathcal{B}(a,b) \arrow[rr, Rightarrow, "\sim", "\alpha^{abcd}"'] \arrow[dr, "C^{abd}"'] & & \mathcal{B}(c,d)\times\mathcal{B}(a,c) \arrow[dl, "C^{acd}"] \\
 & \mathcal{B}(a,d) &
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{1}\times\mathcal{B}(a,b) \arrow[rr, "\cong"] \arrow[dr, "I^b\times\mathrm{id}"'] & \arrow[d, phantom, "\lambda^{ab}\Uparrow\wr"] & \mathcal{B}(a,b) \\
 & \mathcal{B}(b,b)\times\mathcal{B}(a,b) \arrow[ur, "C^{abb}"'] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathcal{B}(a,b)\times\mathbf{1} \arrow[rr, "\cong"] \arrow[dr, "\mathrm{id}\times I^a"'] & \arrow[d, phantom, "\rho^{ab}\Uparrow\wr"] & \mathcal{B}(a,b) \\
 & \mathcal{B}(a,b)\times\mathcal{B}(a,a) \arrow[ur, "C^{aab}"'] &
\end{tikzcd}
$$

(続く)

2 次元

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & \langle h, g, f\rangle \arrow[dll, mapsto, bend right] \arrow[drr, mapsto, bend left] & & \\
 & & \mathcal{B}(c,d)\times\mathcal{B}(b,c)\times\mathcal{B}(a,b) \arrow[dl, "C^{bcd}\times\mathrm{id}"'] \arrow[dr, "\mathrm{id}\times C^{abc}"] & & \\
\langle h\circ g, f\rangle \arrow[ddr, mapsto, bend right] & \mathcal{B}(b,d)\times\mathcal{B}(a,b) \arrow[dr, "C^{abd}"'] \arrow[rr, Rightarrow, "\sim", "\alpha^{abcd}"'] & & \mathcal{B}(c,d)\times\mathcal{B}(a,c) \arrow[dl, "C^{acd}"] & \langle h, g\circ f\rangle \arrow[ddl, mapsto, bend left] \\
 & & \mathcal{B}(a,d) & & \\
 & (h\circ g)\circ f \arrow[rr, mapsto, "\sim", "\alpha_{hgf}"'] & & h\circ(g\circ f) &
\end{tikzcd}
$$

添え字はしばしば
省略します

$$
\begin{tikzcd}
\langle *, f\rangle \arrow[rrr, mapsto] \arrow[dddr, mapsto, bend right] & & & f \\
\mathbf{1}\times\mathcal{B}(a,b) \arrow[rr, "\cong"] \arrow[dr, "I^{b}\times\mathrm{id}"'] & \arrow[d, phantom, "\lambda^{ab}\Uparrow\wr"] & \mathcal{B}(a,b) & \\
 & \mathcal{B}(b,b)\times\mathcal{B}(a,b) \arrow[ur, "C^{abb}"'] & & \mathrm{id}_b\circ f \arrow[uu, "\wr", "\lambda_f"'] \\
 & \langle \mathrm{id}_b, f\rangle \arrow[urr, mapsto, bend right] & &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathcal{B}(a,b)\times\mathbf{1} \arrow[rr, "\cong"] \arrow[dr, "\mathrm{id}\times I^{a}"'] & \rho^{ab}\Uparrow\wr & \mathcal{B}(a,b) \\
 & \mathcal{B}(a,b)\times\mathcal{B}(a,a) \arrow[ur, "C^{aab}"'] &
\end{tikzcd}
$$

【定義】 (bicategory)

6. 次の等式が成り立つ (説明は後程)

$$
\begin{tikzcd}
 & & \mathcal{B}edcba \arrow[dll, "C^{cde}\times\mathrm{id}\times\mathrm{id}"'] \arrow[drr, "\mathrm{id}\times\mathrm{id}\times C^{abc}"] \arrow[dd, "\mathrm{id}\times C^{bcd}\times\mathrm{id}"] & & \\
\mathcal{B}ecba \arrow[dd, "C^{bce}\times\mathrm{id}"'] & & & & \mathcal{B}edca \arrow[dd, "\mathrm{id}\times C^{acd}"] \\
 & & \mathcal{B}edba \arrow[dll, "C^{bde}\times\mathrm{id}"] \arrow[drr, "\mathrm{id}\times C^{abd}"'] \arrow[ll, phantom, "\overset{\alpha^{bcde}\times\mathrm{id}}{\Longrightarrow}"] \arrow[rr, phantom, "\overset{\mathrm{id}\times\alpha^{abcd}}{\Longrightarrow}"] & & \\
\mathcal{B}eba \arrow[drr, "C^{abe}"'] & & & & \mathcal{B}eda \arrow[dll, "C^{ade}"] \\
 & & \mathcal{B}ea \arrow[u, phantom, "\overset{\alpha^{abde}}{\Longrightarrow}"] & &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
 & & \mathcal{B}edcba \arrow[dll, "C^{cde}\times\mathrm{id}\times\mathrm{id}"'] \arrow[drr, "\mathrm{id}\times\mathrm{id}\times C^{abc}"] \arrow[d, phantom, "="] & & \\
\mathcal{B}ecba \arrow[dd, "C^{bce}\times\mathrm{id}"'] \arrow[drr, "\mathrm{id}\times C^{abc}"] & & {} & & \mathcal{B}edca \arrow[dd, "\mathrm{id}\times C^{acd}"] \arrow[dll, "C^{cde}\times\mathrm{id}"'] \\
 & & \mathcal{B}ace \arrow[dd, "C^{ace}"] & & \\
\mathcal{B}eba \arrow[drr, "C^{abe}"'] \arrow[rr, phantom, "\overset{\alpha^{abce}}{\Longrightarrow}"] & & {} & & \mathcal{B}eda \arrow[dll, "C^{ade}"] \arrow[ll, phantom, "\overset{\alpha^{acde}}{\Longrightarrow}"] \\
 & & \mathcal{B}ea & &
\end{tikzcd}
$$

但し $\mathcal{B}cba := \mathcal{B}(b,c)\times\mathcal{B}(a,b)$ などの略記を行った

(続く)

【定義】 (bicategory)

7. 次の等式が成り立つ (説明は後程)

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathcal{B}cba \arrow[d, "\mathrm{id}\times I^b\times\mathrm{id}"] \arrow[ddl, bend right, "\mathrm{id}"'] \arrow[ddr, bend left, "\mathrm{id}"] & \\
 \overset{(\rho^{bc})^{-1}\times\mathrm{id}}{\Longrightarrow} & \mathcal{B}cbba \arrow[dl, "C^{bbc}\times\mathrm{id}"] \arrow[dr, "\mathrm{id}\times C^{abb}"'] & \overset{\mathrm{id}\times\lambda^{ab}}{\Longrightarrow} \\
 \mathcal{B}cba \arrow[dr, "C^{abc}"'] & \overset{\alpha^{abbc}}{\Longrightarrow} & \mathcal{B}cba \arrow[dl, "C^{abc}"] \\
 & \mathcal{B}ca &
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
 & \mathcal{B}cba \arrow[ddl, bend right, "\mathrm{id}"'] \arrow[ddr, bend left, "\mathrm{id}"] & \\
 & & \\
 \mathcal{B}cba \arrow[dr, "C^{abc}"'] & = & \mathcal{B}cba \arrow[dl, "C^{abc}"] \\
 & \mathcal{B}ca &
\end{tikzcd}
$$

2 次元

Q. 条件 6 と 7 は何?

【問題】$a \xrightarrow{f} b \xrightarrow{g} c \xrightarrow{h} d \xrightarrow{k} e$ のとき
$((k \circ h) \circ g) \circ f \cong k \circ (h \circ (g \circ f))$ か?

$\Longrightarrow$ もちろんそう．というのも

$((k \circ h) \circ g) \circ f \xrightarrow{\alpha_{k \circ h, g, f}} (k \circ h) \circ (g \circ f) \xrightarrow{\alpha_{k, h, g \circ f}} k \circ (h \circ (g \circ f))$

を考えればよい．ところが実は

$$
\begin{aligned}
((k \circ h) \circ g) \circ f &\xrightarrow{\alpha_{khg} \times \mathrm{id}} (k \circ (h \circ g)) \circ f \\
&\xrightarrow{\alpha_{k, h \circ g, f}} k \circ ((h \circ g) \circ f) \\
&\xrightarrow{\mathrm{id} \times \alpha_{hgf}} k \circ (h \circ (g \circ f))
\end{aligned}
$$

を考えることもできる．

2 次元

つまり，同型 $((k \circ h) \circ g) \circ f \cong k \circ (h \circ (g \circ f))$ は (少なくとも) 2 つある．
$\Longrightarrow$ こういうのは一致してほしい．

こういう状況は他にも起きる．

- 例えばもっと数が増えた場合．
  $(((j \circ k) \circ h) \circ g) \circ f \cong j \circ ((k \circ h) \circ (g \circ f))$ など
- λ や ρ が絡むパターンもある．例えば
  $(g \circ \mathrm{id}) \circ f \cong g \circ f$ は次の 2 通りで書ける．

$$(g \circ \mathrm{id}) \circ f \xrightarrow{\rho_g \times \mathrm{id}} g \circ f$$

$$(g \circ \mathrm{id}) \circ f \xrightarrow{\alpha_{g,\mathrm{id},f}} g \circ (\mathrm{id} \circ f) \xrightarrow{\mathrm{id} \times \lambda_f} g \circ f$$

そこで bicategory には次の条件を仮定したい．

【coherence 条件】

σ, τ を α, λ, ρ を合成して作られた 2-morphism とするとき，$\mathrm{dom}(\sigma) = \mathrm{dom}(\tau)$，$\mathrm{cod}(\sigma) = \mathrm{cod}(\tau)$ ならば $\sigma = \tau$ である．

実は

【定理】

条件 6 と 7 を仮定すると coherence 条件は証明可能． □

【例】

以下は bicategory である:

- $\Pi_2(X)$
- $\mathbf{Mod}$
- $\mathbf{Prof}$
- $\mathrm{Span}(C)$
- strict 2-category は bicategory であって $\alpha^{abcd}, \lambda^{ab}, \rho^{ab}$ が全て id の場合である. $\square$

【定理】 (coherence 定理)

任意の bicategory はある strict 2-category と biequivalence である.

※注: 先程の coherence 条件はこの定理から容易に出てくる. alg-d.com 参照.

[以下，この定理の説明]

2 次元 (coherence 定理)

【定義】 (pseudofunctor)

pseudofunctor $F\colon \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ とは　($\mathcal{B}, \mathcal{C}$: bicategory)

1. $a \in \mathrm{Ob}(\mathcal{B})$ に対して $Fa \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$
2. $F^{ab}\colon \mathcal{B}(a,b) \to \mathcal{C}(Fa,Fb)$: 関手
3. φ^{abc}: 自然同型

$$\begin{tikzcd}
 & & \color{red}{\langle g, f\rangle} \arrow[ddll, mapsto, bend right, red] \arrow[ddrr, mapsto, bend left, red] & & \\
 & & \mathcal{B}(b,c)\times\mathcal{B}(a,b) \arrow[dl, "F^{bc}\times F^{ab}"'] \arrow[dr, "C^{abc}"] & & \\
\color{red}{\langle Fg, Ff\rangle} \arrow[ddr, mapsto, bend right, red] & \mathcal{C}(Fb,Fc)\times\mathcal{C}(Fa,Fb) \arrow[dr, "C^{Fa,Fb,Fc}"'] \arrow[rr, phantom, "\overset{\sim}{\Longrightarrow}_{\varphi^{abc}}"] & & \mathcal{B}(a,c) \arrow[dl, "F^{ac}"] & \color{red}{g\circ f} \arrow[ddl, mapsto, bend left, red] \\
 & & \mathcal{C}(Fa,Fc) & & \\
 & \color{red}{Fg\circ Ff} \arrow[rr, mapsto, red, "\sim", "\varphi_{gf}"'] & & \color{red}{F(g\circ f)} &
\end{tikzcd}$$

(続く)

2 次元 (coherence 定理)

【定義】 (pseudofunctor)

4. $\psi^a\colon \mathrm{id}_{Fa} \Rightarrow F^{aa}(\mathrm{id}_a)$: 同型な 2-morphism (in $\mathcal{C}$)
5. 次が可換

$$\begin{tikzcd}
(Fh \circ Fg) \circ Ff \arrow[r, "\varphi_{hg} \bullet Ff"] \arrow[d, "\alpha_{Fh,Fg,Ff}"'] & F(h \circ g) \circ Ff \arrow[r, "\varphi_{h\circ g,f}"] & F((h \circ g) \circ f) \arrow[d, "F(\alpha_{hgf})"] \\
Fh \circ (Fg \circ Ff) \arrow[r, "Fh\bullet\varphi_{gf}"'] & Fh \circ F(g \circ f) \arrow[r, "\varphi_{h,g\circ f}"'] & F(h \circ (g \circ f))
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{id}_{Fb} \circ Ff \arrow[r, "\lambda_{Ff}"] \arrow[d, "\psi^b \bullet Ff"'] & Ff \\
F(\mathrm{id}_b) \circ Ff \arrow[r, "\varphi^{abb}_{\mathrm{id}_b,f}"'] & F(\mathrm{id}_b \circ f) \arrow[u, "F(\lambda_f)"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
Ff \circ \mathrm{id}_{Fa} \arrow[r, "\rho_{Ff}"] \arrow[d, "Ff \bullet \psi^a"'] & Ff \\
Ff \circ F(\mathrm{id}_a) \arrow[r, "\varphi^{aab}_{f,\mathrm{id}_a}"'] & F(f \circ \mathrm{id}_a) \arrow[u, "F(\rho_f)"']
\end{tikzcd}$$

2 次元 (coherence 定理)

【定義】 (strict 2-functor)

全ての φ^{abc}, ψ^{a} が id な pseudofunctor を strict 2-functor という.

(つまり $F(g \circ f) = Fg \circ Ff$，$F(\mathrm{id}) = \mathrm{id}$ となる F)

※注: [Gurski] では pseudofunctor を単に functor と呼んでいる

2 次元 (coherence 定理)

【定義】 (同値 in bicategory)

$a, b \in \mathcal{B}$ が同値 (ここでは $a \sim b$ で表す)
$\iff$ 1-morphsim $f\colon a \to b$, $g\colon b \to a$ と同型な
2-morpshim $g \circ f \Rightarrow \mathrm{id}_a$, $f \circ g \Rightarrow \mathrm{id}_b$ が存在

【定義】 (biequivalence)

pseudofunctor $F\colon \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ が biequivalence とは

1. 任意の $c \in \mathcal{C}$ に対してある $b \in \mathcal{B}$ が存在して $Fb \sim c$
2. 各 $a, b \in \mathcal{B}$ について $F\colon \mathcal{B}(a, b) \to \mathcal{C}(Fa, Fb)$ が圏同値

2 次元 (coherence 定理)

bicategory でも米田埋込 $y\colon \mathcal{B} \to \widehat{\mathcal{B}}$ を定義できる．(やり方は通常の圏の場合と同じ)

Hom が圏だから $\widehat{\mathcal{B}} = \mathbf{Cat}^{\mathcal{B}^{\mathrm{op}}}$ となる．
ここで $\mathcal{C}^{\mathcal{B}}$ は pseudofunctor $\mathcal{B} \to \mathcal{C}$ を対象とする bicategory

- 1-morphism: pseudonatural transformation という．
- 2-morphism: modification という．

2 次元 (coherence 定理)

【定義】 (pseudonatural transformation)

pseudonatural transformation $\sigma\colon F \Rightarrow G$ とは
$(F, G\colon \mathcal{B} \to \mathcal{C}$: pseudofunctor)

1. $\sigma_a\colon Fa \to Ga$: 1-morphism in $\mathcal{C}$
2. σ^{ab}: 自然同型

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{B}(a,b) \arrow[dl, "G^{ab}"'] \arrow[dr, "F^{ab}"] & \\
\mathcal{C}(Ga,Gb) \arrow[dr, "-\bullet\sigma_a"'] \arrow[rr, phantom, "\overset{\sim}{\underset{\sigma^{ab}}{\Longrightarrow}}"] & & \mathcal{C}(Fa,Fb) \arrow[dl, "\sigma_b\bullet-"] \\
 & \mathcal{C}(Fa,Gb) &
\end{tikzcd}$$

(続く)

2次元 (coherence 定理)

【定義】 (pseudonatural transformation)

3. 次は可換

$$
\begin{tikzcd}
(Gg \circ Gf) \circ \sigma_a \arrow[r, "\sim", "\alpha"'] \arrow[dddd, "\varphi_{gf} \bullet \sigma_a"'] & Gg \circ (Gf \circ \sigma_a) \arrow[r, "Gg \bullet \sigma_f"'] & Gg \circ (\sigma_b \circ Ff) \arrow[r, "\sim", "\alpha^{-1}"'] & (Gg \circ \sigma_b) \circ Ff \arrow[d, "\sigma_g \bullet Ff"'] \\
 & & & (\sigma_c \circ Fg) \circ Ff \arrow[d, "\alpha"', "\wr"] \\
 & & & \sigma_c \circ (Fg \circ Ff) \arrow[d, "\sigma_c \bullet \varphi_{gf}"'] \\
 & & & \sigma_c \circ F(g \circ f) \\
G(g \circ f) \circ \sigma_a \arrow[rrru, "\sigma_{g \circ f}"'] & & &
\end{tikzcd}
$$

(続く)

2 次元 (coherence 定理)

【定義】 (pseudonatural transformation)

4. 次の等式が成り立つ

$$
\begin{tikzcd}
Fa \arrow[r, "\sigma_a"] \arrow[d, "\mathrm{id}_{Fa}"] \arrow[d, bend right=70, "F(\mathrm{id}_a)"'] \arrow[d, phantom, shift right=6ex, "\overset{\psi^a}{\Leftarrow}"] \arrow[dr, "\sigma_a" description] \arrow[dr, phantom, shift left=3ex, "\lambda_{\sigma_a}\swarrow"] \arrow[dr, phantom, shift right=3ex, "\rho^{-1}_{\sigma_a}\swarrow"] & Ga \arrow[d, "\mathrm{id}_{Ga}"] \\
Fa \arrow[r, "\sigma_a"'] & Ga
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
Fa \arrow[r, "\sigma_a"] \arrow[d, bend right=70, "F(\mathrm{id}_a)"'] \arrow[dr, phantom, "\sigma_{\mathrm{id}_a}\swarrow"] & Ga \arrow[d, "\mathrm{id}_{Ga}"] \arrow[d, bend right=70, "G(\mathrm{id}_a)"'] \arrow[d, phantom, shift right=2ex, "\overset{\psi^a}{\Leftarrow}"] \\
Fa \arrow[r, "\sigma_a"'] & Ga
\end{tikzcd}
$$

2次元 (coherence定理)

【定義】 (modification)

modification $\Gamma\colon \sigma \Rrightarrow \tau$ とは
$(\sigma, \tau\colon F \Rightarrow G\colon \mathcal{B} \to \mathcal{C}\colon$ pseudonatural transformation$)$

1. $\Gamma_a\colon \sigma_a \Rightarrow \tau_a$: 2-morphism in $\mathcal{C}$
2. 次の等式が成り立つ

$$
\begin{tikzcd}
Fa \arrow[r, bend left, "\sigma_a"] \arrow[d, "Ff"'] \arrow[dr, phantom, "\sigma_f^{ab}\Swarrow"] & Ga \arrow[d, "Gf"] \\
Fb \arrow[r, bend left, "\sigma_b"] \arrow[r, bend right, "\tau_b"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\Gamma_b"] & Gb
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
Fa \arrow[r, bend left, "\sigma_a"] \arrow[r, bend right, "\tau_a"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\Gamma_a"] \arrow[d, "Ff"'] \arrow[dr, phantom, "\tau_f^{ab}\Swarrow"] & Ga \arrow[d, "Gf"] \\
Fb \arrow[r, bend right, "\tau_b"'] & Gb
\end{tikzcd}
$$

2 次元 (coherence 定理)

【定理】

$\mathcal{B}, \mathcal{C}$ を bicategory とするとき，

- 対象: pseudofunctor $\mathcal{B} \to \mathcal{C}$
- 1-morphism: pseudonatural transformation
- 2-morphism: modification

とすると bicategory になる (これを $\mathcal{C}^{\mathcal{B}}$ と書く．) $\square$

【定理】

$\mathcal{C}$ が strict 2-category なら $\mathcal{C}^{\mathcal{B}}$ も strict 2-category． $\square$

2 次元 (coherence 定理)

【定理】

$\widehat{\mathcal{B}} := \mathbf{Cat}^{\mathcal{B}^{\mathrm{op}}}$ は strict 2-category. □

よって米田埋込 $y\colon \mathcal{B} \to \widehat{\mathcal{B}}$ により任意の bicategory は strict 2-category に埋め込める.

$\mathcal{C}$ を y の「像」とすれば $y\colon \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ は biequivalence の条件 1 を満たす.

条件 2 は？ $\Longrightarrow$ 米田の補題

2 次元 (coherence 定理)

【定理】 (bicategory の米田の補題)

$P\colon \mathcal{B}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Cat}$ に対して，$\widehat{\mathcal{B}}$ における同値 $\widehat{\mathcal{B}}(y(-), P) \cong P$ が存在する． $\square$

$\widehat{\mathcal{B}}$ における同値 $\widehat{\mathcal{B}}(y(-), P) \cong P$ とは？

つまり以下が存在するということ

- $\theta\colon \widehat{\mathcal{B}}(y(-), F) \Rightarrow F$: pseudonatural transformation
- $\omega\colon F \Rightarrow \widehat{\mathcal{B}}(y(-), F)$: pseudonatural transformation
- $\Sigma\colon \omega \circ \theta \Rrightarrow \mathrm{id}$: 同型な modification
- $\Delta\colon \mathrm{id} \Rrightarrow \theta \circ \omega$: 同型な modification

2 次元 (coherence 定理)

modification $\Sigma\colon \omega \circ \theta \Rrightarrow \mathrm{id}$?

つまり対象 $a \in \mathcal{B}$ に対して Σ_a は 2-morphism (in **Cat**)
$\Sigma_a\colon \omega_a \circ \theta_a \Rightarrow \mathrm{id}\colon \widehat{\mathcal{B}}(y(a), F) \to \widehat{\mathcal{B}}(y(a), F)$: 自然変換

よって対象 $\sigma \in \widehat{\mathcal{B}}(y(a), F)$ に対して $(\Sigma_a)_\sigma$ は 1-morphism (in $\widehat{\mathcal{B}}(y(a), F)$)
$(\Sigma_a)_\sigma\colon \omega_a \circ \theta_a(\sigma) \Rrightarrow \sigma\colon y(a) \Rightarrow F$: modification

よって対象 $s \in \mathcal{B}$ に対して $((\Sigma_a)_\sigma)_s$ は 2-morphism (in **Cat**)
$((\Sigma_a)_\sigma)_s\colon \omega_a(\sigma_a(\mathrm{id}_a))_s \Rightarrow \sigma_s\colon \mathcal{B}(s, a) \to Fs$: 自然変換

よって対象 $g \in \mathcal{B}(s, a)$ に対して $(((\Sigma_a)_\sigma)_s)_g$ は 1-morphism (in Fs)
$(((\Sigma_a)_\sigma)_s)_g\colon \omega_a(\sigma_a(\mathrm{id}_a))_s(g) \to \sigma_s(g)$: Fs の射

2 次元 (coherence 定理)

という感じで米田は簡単に証明できます．
(alg-d.com では y の定義〜米田の補題証明まで 38 ページ)

米田より $\widehat{\mathcal{B}}(y(a), P) \cong Pa$ (圏同値) で，$P := y(b)$ を考えることで $y\colon \mathcal{B}(a,b) \to \widehat{\mathcal{B}}(y(a), y(b))$ が圏同値と分かる．

【定理】 (coherence 定理)

任意の bicategory $\mathcal{B}$ はある strict 2-category と biequivalence である．

証明.

$y\colon \mathcal{B} \to \widehat{\mathcal{B}}$ の「像」を $\mathcal{C}$ とすると $y\colon \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ は明らかに biequivalence で $\mathcal{C}$ は strict 2-category である． $\square$

以上で 2-category のことは完全に理解した皆さん．

$\Longrightarrow$ 次は当然 3-category をやりたいですよね?

3 次元

【定義】 (strict 3-category)

strict 3-category とは 2**Cat**-豊穣圏のことである.
(2**Cat**: strict 2-category と strict 2-functor がなす圏)

【定義】 (tricategory)

tricategory $\mathcal{T}$ は以下からなる:

1. $\mathrm{Ob}(\mathcal{T})$: 対象の集まり (以下 $a, b, c, d, e \in \mathrm{Ob}(\mathcal{T})$)
2. $\mathcal{T}(a, b)$: bicategory
3. $C^{abc}\colon \mathcal{T}(b, c) \times \mathcal{T}(a, b) \to \mathcal{T}(a, c)$: pseudofunctor
4. $I^a\colon \mathbf{1} \to \mathcal{T}(a, a)$: pseudofunctor
   (続く)

【定義】 (tricategory)

5. $\alpha^{abcd}, \lambda^{ab}, \rho^{ab}$: adjoint equivalence

$$\begin{tikzcd}
& \mathcal{T}(c,d)\times\mathcal{T}(b,c)\times\mathcal{T}(a,b) \arrow[dl, "C^{bcd}\times\mathrm{id}"'] \arrow[dr, "\mathrm{id}\times C^{abc}"] & \\
\mathcal{T}(b,d)\times\mathcal{T}(a,b) \arrow[dr, "C^{abd}"'] \arrow[rr, phantom, "\overset{\Longrightarrow}{\alpha^{abcd}}"] & & \mathcal{T}(c,d)\times\mathcal{T}(a,c) \arrow[dl, "C^{acd}"] \\
& \mathcal{T}(a,d) &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{1}\times\mathcal{T}(a,b) \arrow[rr, "\cong"] \arrow[dr, "I^b\times\mathrm{id}"'] & \arrow[d, phantom, "\lambda^{ab}\Uparrow"] & \mathcal{T}(a,b) \\
& \mathcal{T}(b,b)\times\mathcal{T}(a,b) \arrow[ur, "C^{abb}"'] &
\end{tikzcd}
\quad
\begin{tikzcd}
\mathcal{T}(a,b)\times\mathbf{1} \arrow[rr, "\cong"] \arrow[dr, "\mathrm{id}\times I^a"'] & \arrow[d, phantom, "\rho^{ab}\Uparrow"] & \mathcal{T}(a,b) \\
& \mathcal{T}(a,b)\times\mathcal{T}(a,a) \arrow[ur, "C^{aab}"'] &
\end{tikzcd}$$

(続く)

【定義】 (tricategory)

6. $\mathfrak{A}^{abcde}$: 同型な modification

$$
\begin{tikzcd}
& \mathcal{T}edcba \arrow[dl, "C^{cde}\times\mathrm{id}\times\mathrm{id}"'] \arrow[dr, "\mathrm{id}\times\mathrm{id}\times C^{abc}"] \arrow[dd, "\mathrm{id}\times C^{bcd}\times\mathrm{id}"] & \\
\mathcal{T}ecba \arrow[ddd, "C^{bce}\times\mathrm{id}"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\alpha^{bcde}\times\mathrm{id}}{\Longrightarrow}"] & & \mathcal{T}edca \arrow[ddd, "\mathrm{id}\times C^{acd}"] \arrow[dl, phantom, "\overset{\mathrm{id}\times\alpha^{abcd}}{\Longrightarrow}"] \\
& \mathcal{T}edba \arrow[ddl, "C^{bde}\times\mathrm{id}"'] \arrow[ddr, "\mathrm{id}\times C^{abd}"] \arrow[ddd, phantom, "\overset{\alpha^{abde}}{\Longrightarrow}"] & \\
& & \\
\mathcal{T}eba \arrow[dr, "C^{abe}"'] & & \mathcal{T}eda \arrow[dl, "C^{ade}"] \\
& \mathcal{T}ea &
\end{tikzcd}
\quad \overset{\mathfrak{A}^{abcde}}{\underset{\sim}{\Longrightarrow}} \quad
\begin{tikzcd}
& \mathcal{T}edcba \arrow[dl, "C^{cde}\times\mathrm{id}\times\mathrm{id}"'] \arrow[dr, "\mathrm{id}\times\mathrm{id}\times C^{abc}"] \arrow[dd, phantom, "="] & \\
\mathcal{T}ecba \arrow[ddd, "C^{bce}\times\mathrm{id}"'] \arrow[dr, "\mathrm{id}\times C^{abc}"] \arrow[ddr, phantom, "\overset{\alpha^{abce}}{\Longrightarrow}"] & & \mathcal{T}edca \arrow[ddd, "\mathrm{id}\times C^{acd}"] \arrow[dl, "C^{cde}\times\mathrm{id}"'] \arrow[ddl, phantom, "\overset{\alpha^{acde}}{\Longrightarrow}"] \\
& \mathcal{T}ace \arrow[ddd, "C^{ace}"] & \\
& & \\
\mathcal{T}eba \arrow[dr, "C^{abe}"'] & & \mathcal{T}eda \arrow[dl, "C^{ade}"] \\
& \mathcal{T}ea &
\end{tikzcd}
$$

(続く)

【定義】 (tricategory)

7. $\mathfrak{B}^{abcde}$: 同型な modification

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathcal{T}cba \arrow[d, "\mathrm{id}\times I^b\times\mathrm{id}"] \arrow[ddl, bend right, "\mathrm{id}"'] \arrow[ddr, bend left, "\mathrm{id}"] & \\
 \arrow[r, phantom, "\overset{(\rho^{bc})^*\times\mathrm{id}}{\Longrightarrow}"] & \mathcal{T}cbba \arrow[dl, "C^{bbc}\times\mathrm{id}"] \arrow[dr, "\mathrm{id}\times C^{abb}"'] \arrow[r, phantom, "\overset{\mathrm{id}\times\lambda^{ab}}{\Longrightarrow}"] & \\
 \mathcal{T}cba \arrow[dr, "C^{abc}"'] \arrow[rr, phantom, "\overset{\alpha^{abbc}}{\Longrightarrow}"] & & \mathcal{T}cba \arrow[dl, "C^{abc}"] \\
 & \mathcal{T}ca &
\end{tikzcd}
\quad \overset{\mathfrak{B}^{abc}}{\overset{\sim}{\Rrightarrow}} \quad
\begin{tikzcd}
 & \mathcal{T}cba \arrow[dl, bend right, "\mathrm{id}"'] \arrow[dr, bend left, "\mathrm{id}"] \arrow[d, phantom, "="] & \\
 \mathcal{T}cba \arrow[dr, "C^{abc}"'] & {} & \mathcal{T}cba \arrow[dl, "C^{abc}"] \\
 & \mathcal{T}ca &
\end{tikzcd}
$$

(続く)

【定義】 (tricategory)

8. $\mathfrak{L}^{abcde}$: 同型な modification

$$
\begin{tikzcd}
 & & \mathcal{T}cba \arrow[dl, "I^c\times\mathrm{id}"'] \arrow[dr, "C^{abc}"] \arrow[ddll, "\mathrm{id}"] & \\
 & \mathcal{T}ccba \arrow[dl, "C^{bcc}\times\mathrm{id}"'] \arrow[r, phantom, "\overset{\lambda^{ac}}{\Longrightarrow}"] & & \mathcal{T}ca \arrow[ddll, "\mathrm{id}"] \arrow[dll, phantom, "="] \\
\mathcal{T}cba \arrow[dr, "C^{abc}"'] & & & \\
 & \mathcal{T}ca & &
\end{tikzcd}
\quad \overset{\mathfrak{L}^{abc}}{\underset{\sim}{\Rrightarrow}} \quad
\begin{tikzcd}
 & & \mathcal{T}cba \arrow[dl, "I^c\times\mathrm{id}"'] \arrow[dr, "C^{abc}"] & \\
 & \mathcal{T}ccba \arrow[dl, "C^{bcc}\times\mathrm{id}"'] \arrow[dr, "\mathrm{id}\times C^{abc}"] \arrow[rr, phantom, "="] & & \mathcal{T}ca \arrow[dl, "I^c"] \arrow[ddll, "\mathrm{id}"] \\
\mathcal{T}cba \arrow[dr, "C^{abc}"'] \arrow[rr, phantom, "\underset{\alpha^{abcc}}{\Longrightarrow}"] & & \mathcal{T}cca \arrow[dl, "C^{acc}"] \arrow[r, phantom, "\overset{\lambda^{ac}}{\Longrightarrow}"] & \\
 & \mathcal{T}ca & &
\end{tikzcd}
$$

(続く)

【定義】 (tricategory)

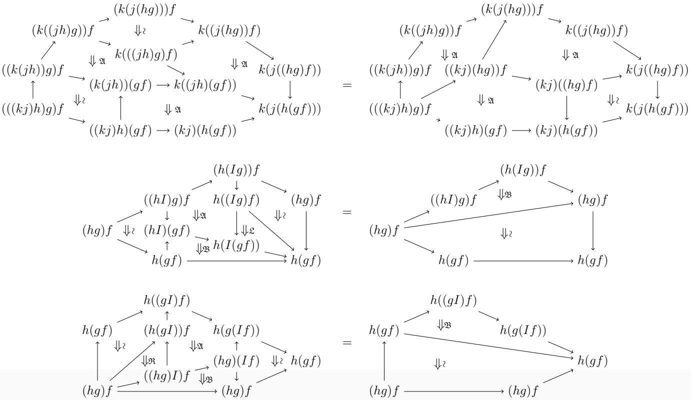
9. $\mathfrak{R}^{abcde}$: 同型な modification

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathcal{T}cba \arrow[dl, "C^{abc}"'] \arrow[dr, "\mathrm{id}\times I^a"] \arrow[ddrr, rounded corners, to path={|- (\tikztotarget)}, "\mathrm{id}"'] & & \\
\mathcal{T}ca \arrow[ddrr, rounded corners, to path={|- (\tikztotarget)}, "\mathrm{id}"'] & & \mathcal{T}cbaa \arrow[dr, "\mathrm{id}\times C^{aac}"] & \\
 & \arrow[r, phantom, "\overset{\rho^{ac}}{\Longrightarrow}"] & & \mathcal{T}cba \arrow[dl, "C^{abc}"] \\
 & = & \mathcal{T}ca &
\end{tikzcd}
\quad \overset{\mathfrak{R}^{abc}}{\underset{\sim}{\Rrightarrow}} \quad
\begin{tikzcd}
 & \mathcal{T}cba \arrow[dl, "C^{abc}"'] \arrow[dr, "\mathrm{id}\times I^a"] & & \\
\mathcal{T}ca \arrow[dr, "I^a"'] \arrow[r, phantom, "="] \arrow[ddrr, rounded corners, to path={|- (\tikztotarget)}, "\mathrm{id}"'] & {} & \mathcal{T}cbaa \arrow[dl, "C^{abc}\times\mathrm{id}"] \arrow[dr, "\mathrm{id}\times C^{aac}"] & \\
\arrow[r, phantom, "\overset{\rho^{ac}}{\Longrightarrow}"] & \mathcal{T}caa \arrow[dr, "C^{aac}"'] \arrow[rr, phantom, "\overset{\alpha^{aabc}}{\Longrightarrow}"] & & \mathcal{T}cba \arrow[dl, "C^{abc}"] \\
 & & \mathcal{T}ca &
\end{tikzcd}
$$

(続く)

【定義】 (tricategory)

10. 以下の等式を満たす:



【例】 (strict 3-category)

strict 3-category は tricategory であって α などが全て id の場合である.

【例】 (Bicat)

以下のようにすると tricategory になる:

- 対象: bicategory
- 1-morphism: pseudofunctor
- 2-morphism: pseudonatural transformation
- 3-morphism: modification

3 次元

【例】 (fundamental 3-groupoid $\Pi_3(X)$)

- 対象: $x \in X$
- 1-morphism: 道
- 2-morphism: ホモトピー
- 3-morphism: ホモトピーのホモトピー (ホモトピー同値で同一視)

3 次元

Q. 任意の tricategory はある strict 3-category と triequivalence ですか？

A. No.

実際，$\Pi_3(S^2)$ は strict 3-category と triequivalence でないらしい．つまり，位相空間を fundamental 3-groupoid で分類しようとしたら strict だけではダメで tricategory が必要になる．

3 次元 (coherence 定理)

【定理】 (coherence 定理)

任意の tricategory はある **Gray**-category と triequivalence である．

[以下，この定理の説明]

【定義】 (いい感じに想像してください)

1. trifunctor
2. tritransformation
3. trimodification
4. perturbation: trimodification の間の射

3 次元 (coherence 定理)

【定義】 (internal biequivalence)

$\mathcal{T}$: tricategory

$\mathcal{T}$ の 1-morphism $f\colon a \to b$ が internal biequivalence

$\iff$ ある $g\colon b \to a$ が存在して

$g \circ f \sim \mathrm{id}_a$ in $\mathcal{T}(a,a)$ かつ $f \circ g \sim \mathrm{id}_b$ in $\mathcal{T}(b,b)$

【定義】 (triequivalence)

trifunctor $F\colon \mathcal{T} \to \mathcal{S}$ が triequivalence とは

1. 任意の $s \in \mathcal{S}$ に対してある $t \in \mathcal{T}$ と internal biequivalence $Ft \to s$ が存在する．
2. 各 $a, b \in \mathcal{B}$ について $F\colon \mathcal{T}(a,b) \to \mathcal{S}(Fa, Fb)$ が biequivalence

3 次元 (coherence 定理)

テンソル積 $N \otimes_R M$ とは

$\mathrm{Bilin}_R(N, M; -) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ab}}(N \otimes_R M, -)$ となるアーベル群

$\wr\!\shortparallel$

$\mathrm{Hom}(N, \mathrm{Hom}(M, -))$ (正確には $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Mod}_R}(N, \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ab}}(M, -))$)

$\mathrm{Bilin}_R(N, M; X)$: 双線型写像 $N \times M \to X$ 全体

【定義】 (Gray テンソル積)

$\mathcal{C}, \mathcal{D}$: strict 2-category

Gray テンソル積 $\mathcal{C} \otimes \mathcal{D}$ とは

$\mathrm{Cub}(\mathcal{C}, \mathcal{D}; -) \cong \mathrm{Hom}(\mathcal{C} \otimes \mathcal{D}, -)$ となる strict 2-category

$\wr\!\shortparallel$

$\mathrm{Hom}(\mathcal{C}, \mathrm{Hom}(\mathcal{D}, -))$

$\mathrm{Cub}(\mathcal{C}, \mathcal{D}; \mathcal{X})$: cubical pseudofunctor $\mathcal{C} \times \mathcal{D} \to \mathcal{X}$ 全体

3 次元 (coherence 定理)

【定義】 (cubical functor)

$\mathcal{C}_i, \mathcal{D}$: strict 2-category

$F\colon \mathcal{C}_1 \times \cdots \times \mathcal{C}_n \to \mathcal{D}$: pseudofunctor

F が cubical とは，1-morphism $f_i, g_i \in \mathcal{C}_i$ が

- $\mathrm{cod}(f_i) = \mathrm{dom}(g_i)$ である (つまり $g_i \circ f_i$ を考えられる)
- $i < j$ ならば f_j か g_i のどちらかは id である

を満たすならば，pseudofunctor が与える 2-morphism

$$\varphi\colon F(g_1, \cdots, g_n) \circ F(f_1, \cdots, f_n) \Rightarrow F(g_1 \circ f_1, \cdots, g_n \circ f_n)$$

が id となることである．

($n = 1$ のときは cubical とは strict と同じである)

3 次元 (coherence 定理)

【定義】 (Gray)

strict 2-category と strict 2-functor がなす圏 $2\mathbf{Cat}$ は Gray テンソル積によりモノイダル圏となる．これを **Gray** と書く．

【定義】 (Gray-category)

Gray-category とは **Gray**-豊穣圏のことである．

つまり……

【定義】 (Gray-category)

Gray-category $\mathcal{C}$ は以下からなる:

1. $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$: 対象の集まり　(以下 $a, b, c, d \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$)
2. $\mathcal{C}(a, b)$: strict 2-category　　Gray テンソル積
3. $C^{abc} \colon \mathcal{C}(b, c) \otimes \mathcal{C}(a, b) \to \mathcal{C}(a, c)$: strict 2-functor
4. $I^{a} \colon \mathbf{1} \to \mathcal{C}(a, a)$: strict 2-functor
5. 次が可換

$$\begin{tikzcd}[column sep=tiny] & \mathcal{C}(c,d) \otimes \mathcal{C}(b,c) \otimes \mathcal{C}(a,b) \arrow[dl, "C^{bcd} \otimes \mathrm{id}"'] \arrow[dr, "\mathrm{id} \otimes C^{abc}"] & \\ \mathcal{C}(b,d) \otimes \mathcal{C}(a,b) \arrow[dr, "C^{abd}"'] \arrow[rr, phantom, "="] & & \mathcal{C}(c,d) \otimes \mathcal{C}(a,c) \arrow[dl, "C^{acd}"] \\ & \mathcal{C}(a,d) & \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} \mathbf{1} \otimes \mathcal{C}(a,b) \arrow[rr, "\cong"] \arrow[dr, "I^{b} \otimes \mathrm{id}"'] & {} \arrow[d, phantom, "\parallel"] & \mathcal{C}(a,b) \\ & \mathcal{C}(b,b) \otimes \mathcal{C}(a,b) \arrow[ur, "C^{abb}"'] & \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}(a,b) \otimes \mathbf{1} \arrow[rr, "\cong"] \arrow[dr, "\mathrm{id} \otimes I^{a}"'] & {} \arrow[d, phantom, "\parallel"] & \mathcal{C}(a,b) \\ & \mathcal{C}(a,b) \otimes \mathcal{C}(a,a) \arrow[ur, "C^{aab}"'] & \end{tikzcd}$$

3 次元 (coherence 定理)

【命題】

strict 3-category は **Gray**-category である. □

【命題】

Gray-category は tricategory とみなせる.

証明.

strict 2-functor $C^{abc}\colon \mathcal{C}(b,c)\otimes\mathcal{C}(a,b)\to\mathcal{C}(a,c)$ を cubical pseudofunctor $\mathcal{C}(b,c)\times\mathcal{C}(a,b)\to\mathcal{C}(a,c)$ とみなせばこれにより tricategory になる. (この tricategory の α,λ,ρ は id になる) □

3 次元 (coherence 定理)

【命題】

tricategory $\mathcal{T}, \mathcal{S}$ に対して次は tricategory になる:

- 対象: trifunctor $\mathcal{T} \to \mathcal{S}$
- 1-morphism: tritransformation
- 2-morphism: trimodification
- 3-morphism: perturbation

これを $\mathcal{S}^{\mathcal{T}}$ で表す. $\square$

米田埋込 $y\colon \mathcal{T} \to \widehat{\mathcal{T}}$ が定義できる.

$\mathcal{T}(a,b)$ は bicategory だから $\widehat{\mathcal{T}} = \mathbf{Bicat}^{\mathcal{T}^{\mathrm{op}}}$
$\Longrightarrow$ つまり，単に米田埋込しても strict にはならない.

3 次元 (coherence 定理)

【定義】

次を満たす tricategory $\mathcal{T}$ を cubical tricategory という:

1. $\mathcal{T}(a,b)$: strict 2-category
2. $C\colon \mathcal{T}(b,c)\times\mathcal{T}(a,b)\to\mathcal{T}(a,c)$: cubical
3. $I^a\colon \mathbf{1}\to\mathcal{T}(a,a)$: cubical

【命題】

任意の tricategory は cubical tricategory と triequivalence

証明.

bicategory の coherence 定理により，bicategory $\mathcal{T}(a,b)$ をうまく strict 2-category に取り換えるとできる. $\square$

【定理】 (coherence 定理)

任意の tricategory はある **Gray**-category と triequivalence である．

証明.

$\mathcal{T}$ を tricategory とする．cubical tricategory としてよい．すると米田埋込は $y\colon \mathcal{T} \to \mathbf{Gray}^{\mathcal{T}^{\mathrm{op}}}$ となる．y の「像」を $\mathcal{S}$ とすると S は **Gray**-category で $\mathcal{T} \cong \mathcal{S}$ となる． □

(**Gray** 自身も **Gray**-category なので **Gray** は tricategory とみなせる．よって $\mathbf{Gray}^{\mathcal{T}^{\mathrm{op}}}$ を考えることができる．
※注: 一般に V 自身は V-豊穣圏となる．)

4 次元

【定義】 (tetracategory)

tetracategory は以下からなる:

1. 以下略

1995 年に Trimble が Street への手紙で定義したのが最初らしく，それのスキャンが http://www.math.ucr.edu/home/baez/trimble/tetracategories.html にある．

4 次元

Q. 使うの?

A. 次のような論文があり，使われている

Spans in 2-Categories: A monoidal tricategory

https://arxiv.org/abs/1112.0560

4 次元

モノイドとは…2 項演算がある集合 (結合律・単位元あり)

↓「圏」化すると

モノイダル圏…2 項演算がある圏 (結合律・単位元あり) のこと

4 次元

「モノイド $= 1$ 点圏」と言えることはよく知られている．
(1 点圏 $|\mathrm{Ob}(C)| = 1$ となる圏 C)

同様にすると「モノイダル圏 $= 1$ 点 bicategory」である．

つまり「モノイダル bicategory$= 1$ 点 tricategory」？

つまり「モノイダル tricategory$= 1$ 点 tetracategory」？

5 次元

5-category (pentacategory?) ググった限りでは見当たらない

6 次元

6-category

7 次元

7-category

8 次元

8-category

......

......

∞ 次元

∞-category

∞-category 定義したくない?

∞ 次元

∞-category と言えば: HTT

Jacob Lurie『Higher Topos Theory』Princeton University Press (2009)
Chapter 1 楽しいので皆さん読んでみましょう (Chapter 2 以降は結構きびしいので…)

この本で ∞-category と言っているのは実は quasi-category と呼ばれるもので $(\infty, 1)$-category の一種
((∞, r)-category: k-morphism $(k > r)$ が全て「可逆」)

∞ 次元

様々な人たちが $(\infty, 1)$-category を定義してきた

- quasi-category (weak Kan complex)
- simplicial category
- topological category
- Segal category
- complete Segal space

∞ 次元

【例】 (fundamental ∞-groupoid)

次のようにすると ∞-category になるはず。
位相空間 X に対して

- 対象: X の点
- 1-morphism: 道
- 2-morphism: ホモトピー
- 3-morphism: ホモトピーのホモトピー
- 4-morphism: ホモトピーのホモトピーのホモトピー
- $\cdots\cdots$

これを fundamental ∞-groupoid といい $\Pi_\infty(X)$ と書くことにする.

∞ 次元

要するに，位相空間は ∞-category (特に ∞-groupoid) である!

そこで

【定義】 (topological category)

CGWH-豊穣圏を topological category という.
(**CGWH** = Compactly Generated Weakly Hausdorff)

Hom が ∞-groupoid だから topological category は
$(\infty, 1)$-category!

【定義】 (simplex category $\mathbb{\Delta}$)

圏 $\mathbb{\Delta}$ を次のように定義する:

- $\mathrm{Ob}(\mathbb{\Delta}) := \{[n] \mid n \in \mathbb{N}\}$　但し $[n] := \{0, 1, \cdots, n\}$
  $\#0$ は自然数
- 射 $[n] \to [m]$ は順序を保つ写像

【定義】 (単体的集合)

単体的集合とは関手 $\mathbb{\Delta}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$ のことである.

∞ 次元

$\mathbb{\Delta}$ というのは大体こういう $\downarrow$ 感じの圏

$$\begin{tikzcd}[column sep=large]
{[0]} \arrow[r, shift left=4, "\delta^1_0"] \arrow[r, shift right=4, "\delta^1_1"'] & {[1]} \arrow[l, "\sigma^0_0" description] \arrow[r, shift left=8, "\delta^2_0"] \arrow[r, "\delta^2_1" description] \arrow[r, shift right=8, "\delta^2_2"'] & {[2]} \arrow[l, shift right=4, "\sigma^1_0" description] \arrow[l, shift left=4, "\sigma^1_1" description] \arrow[r, shift left=10, "\delta^3_0"] \arrow[r, phantom, "\vdots"] \arrow[r, shift right=10, "\delta^3_3"'] & \cdots
\end{tikzcd}$$

【定義】 (simplicial category)

$\widehat{\mathbb{\Delta}}$-豊穣圏を simplicial category という．

∞ 次元

$$\begin{tikzcd}
\widehat{\mathbb{\Delta}} \arrow[drr, "y^\dagger F", ""{name=U}] & & \\
& & \\
\mathbb{\Delta} \arrow[uu, "y"] \arrow[rr, "F"'] & & \mathbf{CGWH} \arrow[uull, "F^\dagger y", ""{name=D}] \arrow[from=U, to=D, phantom, "\perp"]
\end{tikzcd}$$

Sing $:= F^\dagger y$ とかく

$$[n] \longmapsto \{\langle x_0, \cdots, x_n\rangle \in [0,1]^{n+1} \mid x_0 + \cdots + x_n = 1\}$$

$\widehat{\mathbb{\Delta}} \cong \mathbf{CGWH}$ (Quillen 同値) なので simplicial category も実質 $(\infty, 1)$-category!

更に $\widehat{\mathbb{\Delta}} \cong \mathbf{CGWH}$ から $\widehat{\mathbb{\Delta}}$-$\mathbf{Cat} \cong \mathbf{CGWH}$-$\mathbf{Cat}$ も分かる．つまり topological category と simplicial category は実質同じ!!

【命題】

$S \in \widehat{\mathbb{\Delta}}$ がある $X \in \mathbf{CGWH}$ により $S \cong \mathrm{Sing}(X)$ と書ける
$\iff 0 \leq k \leq n$ とするとき，任意の射 $f\colon \Lambda^{n,k} \to S$ に対してある射 $h\colon \Delta^n \to S$ が存在して次が可換となる．

$$\begin{tikzcd} \Lambda^{n,k} \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook] & S \\ \Delta^n \arrow[ur, dashed, "h"'] & \end{tikzcd}$$

∞ 次元

$$
\begin{tikzcd}
\widehat{\mathbb{\Delta}} \arrow[dr, shift left=2, "y^\dagger F"] & \\
\mathbb{\Delta} \arrow[u, "y"] \arrow[r, "\subset", "F"'] & \mathbf{Cat} \arrow[ul, shift left=2, "F^\dagger y"] \arrow[ul, phantom, "\perp"]
\end{tikzcd}
$$

$N := F^\dagger y$ とかく

【命題】

$S \in \widehat{\mathbb{\Delta}}$ がある $C \in \mathbf{Cat}$ により $S \cong \mathrm{N}(C)$ と書ける
$\iff 0 < k < n$ とするとき，任意の射 $f \colon \Lambda^{n,k} \to S$ に対してある射 $h \colon \Delta^n \to S$ が一意に存在して次が可換となる．

$$
\begin{tikzcd}
\Lambda^{n,k} \arrow[r, "f"] \arrow[d] & S \\
\Delta^n \arrow[ur, dashed, "h"'] &
\end{tikzcd}
$$

∞ 次元

【定義】 (quasi-category)

$\mathcal{C} \in \widehat{\mathbb{\Delta}}$ が quasi-category
$\iff 0 < k < n$ とするとき，任意の射 $f\colon \Lambda^{n,k} \to S$ に対してある射 $h\colon \Delta^n \to S$ が存在して次が可換となる．

$$
\begin{tikzcd}
\Lambda^{n,k} \arrow[r, "f"] \arrow[d] & \mathcal{C} \\
\Delta^n \arrow[ur, dashed, "h"'] &
\end{tikzcd}
$$

quasi-category は圏・位相空間 (∞-groupoid) の一般化である．

∞ 次元

$$
\begin{tikzcd}
\widehat{\mathbb{\Delta}} \arrow[drr, shift left, "y^\dagger F"] & & \\
\mathbb{\Delta} \arrow[u, "y"] \arrow[r, "\subset"] & \mathbf{Cat} \arrow[r, "\subset"] & \widehat{\mathbb{\Delta}}\text{-}\mathbf{Cat} \arrow[ull, shift left, "F^\dagger y"] \arrow[ull, phantom, "\perp"]
\end{tikzcd}
$$

これにより simplicial category と quasi-category が実質同じと分かる

∞ 次元

ところでこれらの ∞-category は $(\infty, 1)$-category だった．

$\Longrightarrow$ 一般の ∞-category や n-category は?

Tom Leinster, a survey of definitions of n-Category, `http://www.tac.mta.ca/tac/volumes/10/1/10-01abs.html`

∞ 次元

n-category

strict の場合はもちろん (定義するのは) 難しくない

【定義】 (strict n-category)

strinct n-category とは $(n-1)\mathbf{Cat}$-豊穣圏のことである．
($(n-1)\mathbf{Cat}$: strict $(n-1)$-category がなす圏)

$U_n \colon (n+1)\mathbf{Cat} \to n\mathbf{Cat}$: $(n+1)$-morphism を忘れる関手

$$\mathbf{Set} \xleftarrow{U_0} \mathbf{Cat} \xleftarrow{U_1} 2\mathbf{Cat} \xleftarrow{U_2} 3\mathbf{Cat} \xleftarrow{U_3} \cdots$$

の極限が strict ∞-category？ $\Longrightarrow$ ある意味そう．

【定義】 (globe category $\mathbb{G}$)

globe category $\mathbb{G}$ とは次のような圏である.

$$0 \overset{\sigma_0}{\underset{\tau_0}{\rightrightarrows}} 1 \overset{\sigma_1}{\underset{\tau_1}{\rightrightarrows}} 2 \overset{\sigma_2}{\underset{\tau_2}{\rightrightarrows}} 3 \overset{\sigma_3}{\underset{\tau_3}{\rightrightarrows}} \cdots$$

ただし次を満たす:

1. $\sigma_{n+1} \circ \sigma_n = \tau_{n+1} \circ \sigma_n$
2. $\sigma_{n+1} \circ \tau_n = \tau_{n+1} \circ \tau_n$

【定義】 (globular set)

globular set とは関手 $\mathbb{G}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$ のことをいう.

∞ 次元

$X\colon \mathbb{G}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$ が globular set のとき

$$X_n := X(n),\ s := X(\sigma_n),\ t := X(\tau_n)$$

と書く．つまり globular set X とは，**Set** での図式

$$X_0 \overset{s}{\underset{t}{\leftleftarrows}} X_1 \overset{s}{\underset{t}{\leftleftarrows}} X_2 \overset{s}{\underset{t}{\leftleftarrows}} X_3 \overset{s}{\underset{t}{\leftleftarrows}} \cdots$$

である．

【定義】

globular set X が n 次元 $\iff$ $k \geq n$ のとき
$s, t\colon X_{k+1} \to X_k$ が同型で，かつ $s = t$ となる．

小圏は「underlying globular set」を持つ．つまり圏 C に対して

- $X_0 := \mathrm{Ob}(C)$.
- $X_1 = X_2 = \cdots := \mathrm{Mor}(C)$.
- $s := \mathrm{dom}\colon X_1 \to X_0$，$t := \mathrm{cod}\colon X_1 \to X_0$

この X は 1 次元の globular set.

∞ 次元

逆に 1 次元 globular set を使って圏を定義することもできる．つまり圏とは

- X: 1 次元 globular set
- $C\colon t\downarrow_= s \to X_1$: 写像　　ここで $t\downarrow_= s$ は pullback

$$\begin{array}{ccc} t\downarrow_= s & \longrightarrow & X_1 \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle s} \\ X_1 & \underset{t}{\longrightarrow} & X_0 \end{array}$$

  (つまり $t\downarrow_= s = \{\langle f, g\rangle \in X_1 \times X_1 \mid t(f) = s(g)\}$)
- $i\colon X_0 \to X_1$: 写像
- (圏の条件を表す等式)

∞ 次元

strict 2-category も同様にできる．つまり strict 2-category とは

- X: 2 次元 globular set
- $C_0 : t \downarrow_= s \to X_0$: 写像
- $C_1 : t^2 \downarrow_= s^2 \to X_0$: 写像
- $C_2 : t \downarrow_= s \to X_1$: 写像
- $i_0 : X_0 \to X_1$: 写像
- $i_1 : X_1 \to X_2$: 写像
- (圏の条件を表す等式)

∞ 次元

【定義】 (strict ω-category)

strict ω-category とは globular set C であって

1. 任意の $i < j$ について $C_i \underset{t^{j-i}}{\overset{s^{j-i}}{\Longleftarrow}} C_j$ が圏
2. 任意の $i < j < k$ について $C_i \underset{t^{j-i}}{\overset{s^{j-i}}{\Longleftarrow}} C_j \underset{t^{k-j}}{\overset{s^{k-j}}{\Longleftarrow}} C_k$ が strict 2-category

strict ω-category がなす圏 $\omega\mathbf{Cat}$ は

$$\mathbf{Set} \xleftarrow{U_0} \mathbf{Cat} \xleftarrow{U_1} 2\mathbf{Cat} \xleftarrow{U_2} 3\mathbf{Cat} \xleftarrow{U_3} \cdots$$

の極限である (らしい).

∞ 次元

関手 $K\colon \widehat{\mathbb{G}} \to \widehat{\mathbb{G}}$ を適当に定義する．(定義は省略．) この K はモナドになる．

【定義】 (weak ω-category)

weak ω-category とは K-代数のことである．

【定義】 (weak n-category)

weak n-category とは n 次元 globular set となる K-代数のことである．

∞ 次元

【定義】 (ΘC)

圏 C に対して圏 ΘC を次で定義する．

- $\mathrm{Ob}(\Theta C) := \{[n](c_1, \cdots, c_n) \mid n \in \mathbb{N}, c_i \in C\}$
- 射 $[n](c_1, \cdots, c_n) \to [m](d_1, \cdots, d_m)$ は
  組 $\langle \delta\colon [n] \to [m], \langle f_{ij}\colon c_i \to d_j \rangle^{1 \leq i \leq n}_{\delta(i-1) < j \leq \delta(i)} \rangle$ とする．

【定義】

$\Theta_0 := \mathbf{1}$，$\Theta_n := \Theta\Theta_{n-1}$ と定義する．($\Theta_1 = \Delta$ である．)

∞ 次元

【定義】

Θ_n-space とは，良い条件を満たす関手 $\Theta_n^{\mathrm{op}} \to \widehat{\mathbb{\Delta}}$ のことである．

Θ_n-space は (∞, n)-category とみなすことができるらしい．

【定義】 (double category)

圏 C における internal category とは組
$C = \langle c_0, c_1, s, t, i, m \rangle$ であって

1. $c_0, c_1 \in \mathrm{Ob}(C)$，$s, t \colon c_1 \to c_0$，$i \colon c_0 \to c_1$，$m \colon t \downarrow_= s \to c_1$ である．
2. $s \circ i = \mathrm{id}_{c_0}$，$t \circ i = \mathrm{id}_{c_0}$
3. $s \circ m = s \circ p_0$，$t \circ m = t \circ p_1$
4. $m \circ (\mathrm{id} \times m) = m \circ (m \times \mathrm{id})$
5. $m \circ (\mathrm{id} \times i) = p_1$，$m \circ (i \times \mathrm{id}) = p_2$

∞ 次元

【定義】 (double category)

double category とは **Cat** における internal category をいう．

double category がなす圏を $\mathbb{D}\mathrm{bl}$ と書く．

【定義】 (triple category)

triple category とは $\mathbb{D}\mathrm{bl}$ における internal category をいう．

【定義】 (n-fold category)

n-fold category とは

∞ 次元

「良い」formal category theory ができる「良い」strict 2-category を cosmos という．

$\Longrightarrow \mathcal{C}$ を cosmos とすると，$\mathcal{C}$ は「圏全体」だと思える．

$\Longrightarrow (\infty, 1)$-category バージョンが「$\infty$-cosmos」

$\Longrightarrow \mathcal{C}$ を ∞-cosmos とすると，$\mathcal{C}$ は「$(\infty, 1)$-category 全体」だと思える．

以下の一連の論文がある

1. The 2-category theory of quasi-categories, `https://arxiv.org/abs/1306.5144`
2. Homotopy coherent adjunctions and the formal theory of monads, `https://arxiv.org/abs/1310.8279`
3. Completeness results for quasi-categories of algebras, homotopy limits, and related general constructions, `https://arxiv.org/abs/1401.6247`
4. Fibrations and Yoneda’ s lemma in an 1-cosmos, `https://arxiv.org/abs/1506.05500`
5. Kan extensions and the calculus of modules for 1-categories, `https://arxiv.org/abs/1507.01460`

∞ 次元

もしくは「∞ 圏論の基礎」(∞-Categories for the Working Mathematician)

ご清聴
ありがとう
ございました