Isbell 双対

alg-d
https://alg-d.com/math/kan_extension/

2025 年 1 月 14 日

圏 C に対して関手 $z\colon C \to (\mathbf{Set}^C)^{\mathrm{op}}$ を「C^{op} の米田埋込 $C^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}^C$ の opposite」で定める．即ち $z(a) = \mathrm{Hom}_C(a, -)$ であり，米田の補題より $\mathrm{Hom}_{(\mathbf{Set}^C)^{\mathrm{op}}}(P, z(a)) \cong Pa$ となる．この z に対する普遍随伴は次のようになる．

定理 1. C を小圏，U を圏，$F\colon C \to U$ を関手として各点右 Kan 拡張 $z^\ddagger F$ が存在するとする．このとき随伴 $F^\ddagger z \dashv z^\ddagger F$ が成り立つ．

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[dr, shift left, "F^\ddagger z"] \arrow[dr, phantom, "\perp"] & \\
C \arrow[u, "F"] \arrow[r, "z"'] & (\mathbf{Set}^C)^{\mathrm{op}} \arrow[ul, shift left, "z^\ddagger F"]
\end{tikzcd}$$

証明. まず $(\mathbf{Set}^C)^{\mathrm{op}}$ が完備だから各点右 Kan 拡張 $F^\ddagger z$ が存在する．これは $u \in U$ に対して $F^\ddagger z(u) \cong \mathrm{Hom}_U(u, F-)$ を満たす．

∵) $u \in U$，$P \in (\mathbf{Set}^C)^{\mathrm{op}}$ に対して

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_{(\mathbf{Set}^C)^{\mathrm{op}}}(P, F^\ddagger z(u)) &\cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}^C}(\mathrm{Hom}_U(u, F(-)), \mathrm{Hom}_{(\mathbf{Set}^C)^{\mathrm{op}}}(P, z(-))) \\
&\cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}^C}(\mathrm{Hom}_U(u, F(-)), P) \\
&\cong \mathrm{Hom}_{(\mathbf{Set}^C)^{\mathrm{op}}}(P, \mathrm{Hom}_U(u, F(-)))
\end{aligned}$$

となるから $F^\ddagger z(u) \cong \mathrm{Hom}_U(u, F-)$ である．

このとき $z^\ddagger F$ が各点右 Kan 拡張だから，$P \in (\mathbf{Set}^C)^{\mathrm{op}}$，$u \in U$ に対して

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_U(u, z^\ddagger F(P)) &\cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}^C}(\mathrm{Hom}_C(P, z-), \mathrm{Hom}_U(u, F-)) \\ &\cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}^C}(P, \mathrm{Hom}_U(u, F-)) \\ &\cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}^C}(P, F^\ddagger z(u)) \\ &\cong \mathrm{Hom}_{(\mathbf{Set}^C)^{\mathrm{op}}}(F^\ddagger z(u), P)\end{aligned}$$

となるので $F^\ddagger z \dashv z^\ddagger F$ である． □

ここで $F := y$ としたとき次の定理を得る．

定理 2. C を小圏とすると普遍随伴により $y^\dagger z \dashv z^\dagger y$ と $y^\ddagger z \dashv z^\ddagger y$ が成り立つ．このとき $y^\dagger z \cong y^\ddagger z$，$z^\dagger y \cong z^\ddagger y$ である．

$$\begin{tikzcd} \widehat{C} \arrow[dr, shift left, "y^\dagger z \cong y^\ddagger z"] \arrow[dr, phantom, "\perp"] & \\ C \arrow[u, "y"] \arrow[r, "z"'] & (\mathbf{Set}^C)^{\mathrm{op}} \arrow[ul, shift left, "z^\dagger y \cong z^\ddagger y"] \end{tikzcd}$$

証明． $y^\ddagger z$ は左随伴だから余極限と交換する．また y が忠実充満だから $(y^\ddagger z) \circ y \cong z$ である．よって $y^\dagger z \cong y^\ddagger z$ が分かる．随伴の一意性により $z^\dagger y \cong z^\ddagger y$ も分かる． □

$\mathcal{O} := y^\dagger z$，$\mathrm{Spec} := z^\dagger y$ と書き随伴 $\mathcal{O} \dashv \mathrm{Spec}\colon \widehat{C} \to (\mathbf{Set}^C)^{\mathrm{op}}$ を Isbell 双対という．これは

- $P \in \widehat{C}$ に対して $\mathcal{O}(P) \cong \mathrm{Hom}_{\widehat{C}}(P, y(-))$ である．
- $X \in (\mathbf{Set}^C)^{\mathrm{op}}$ に対して $\mathrm{Spec}(X) \cong \mathrm{Hom}_{(\mathbf{Set}^C)^{\mathrm{op}}}(z(-), X)$ である．

を満たす．特に $a \in C$ に対して

$$\begin{gathered}\mathcal{O}(y(a)) \cong \mathrm{Hom}_{\widehat{C}}(y(a), y(-)) \cong \mathrm{Hom}_C(a, -) = z(a) \\ \mathrm{Spec}(z(a)) \cong \mathrm{Hom}_{(\mathbf{Set}^C)^{\mathrm{op}}}(z(-), z(a)) \cong \mathrm{Hom}_C(-, a) = y(a)\end{gathered}$$

である．

定理 3. $y^\ddagger y \cong \mathrm{Spec} \circ \mathcal{O}$ である．即ち随伴 $\mathcal{O} \dashv \mathrm{Spec}$ が与えるモナドは y の codensity monad と一致する．

証明. $P, Q \in \widehat{C}$ に対して自然に

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_U(P, z^\ddagger y(y^\ddagger z(Q))) &\cong \mathrm{Hom}_{(\mathbf{Set}^C)^{\mathrm{op}}}(\mathrm{Hom}(P, y(-)), \mathrm{Hom}(y^\ddagger z(Q), z(-))) \\
&\cong \mathrm{Hom}_{(\mathbf{Set}^C)^{\mathrm{op}}}(\mathrm{Hom}(P, y(-)), y^\ddagger z(Q)) \\
&\cong \mathrm{Hom}_{(\mathbf{Set}^C)^{\mathrm{op}}}(\mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}(P, y(-)), z(-)), \mathrm{Hom}(Q, y(-))) \\
&\cong \mathrm{Hom}_{(\mathbf{Set}^C)^{\mathrm{op}}}(\mathrm{Hom}(P, y(-)), \mathrm{Hom}(Q, y(-)))
\end{aligned}
$$

$$
\begin{tikzcd}
\widehat{C} \arrow[dr, "y^\ddagger y"] & \\
C \arrow[u, "y"] \arrow[r, "y"'] & \widehat{C}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\widehat{C} \arrow[r, "\mathcal{O} = y^\ddagger z"] & (\mathbf{Set}^C)^{\mathrm{op}} \arrow[d, "\mathrm{Spec} = z^\ddagger y"] \\
C \arrow[u, "y"] \arrow[ur, "z"] \arrow[r, "y"'] & \widehat{C}
\end{tikzcd}
$$

となるから $\mathrm{Spec} \circ \mathcal{O} = z^\ddagger y \circ y^\ddagger z$ は y に沿った y の各点右 Kan 拡張である. 故に $\mathrm{Spec} \circ \mathcal{O} \cong y^\ddagger y$ である. □

参考文献

[1] Isbell duality in nlab, `https://ncatlab.org/nlab/show/Isbell+duality`

[2] Ivan Di Liberti, Codensity: Isbell duality, pro-objects, compactness and accessibility, `https://arxiv.org/abs/1910.01014`