例: 基本亜群

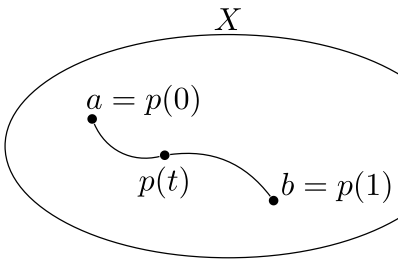
alg-d
https://alg-d.com/math/kan_extension/

2025 年 1 月 6 日

既に「圏論とは何か」の PDF で例として「基本群」を取り上げた．ここでは基本群の概要を説明するが，そのためにそれをより一般化した「基本亜群」を取り上げる．

以下，この節では I で閉区間 $[0,1] \subset \mathbb{R}$ を表すことにする．

定義． X を位相空間として $a, b \in X$ を取る．X における a から b への道 (path) とは，連続写像 $p\colon I \to X$ であって $p(0) = a$，$p(1) = b$ となるものをいう．



例 1. X を位相空間で $a \in X$ とするとき，写像 $c_a\colon I \to X$ を $c_a(t) := a$ により定義すれば c_a は a から a への道である． □

例 2. X を位相空間，$a, b, c \in X$ とする．p を a から b への道，q を b から c への道とするとき，写像 $q * p\colon I \to X$ を

$$q * p(t) := \begin{cases} p(2t) & \left(0 \leq t \leq \dfrac{1}{2}\right) \\ q(2t-1) & \left(\dfrac{1}{2} < t \leq 1\right) \end{cases}$$

で定義すれば $q * p$ は a から c への道である． □

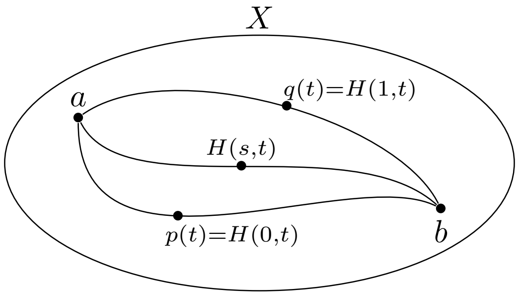
例 3. p を a から b への道とする．このとき，写像 $\bar{p}\colon I \to X$ を $\bar{p}(t) := p(1-t)$ で定義

すれば $\bar{p}$ は b から a への道である． □

定義． X を位相空間で $a, b \in X$ として，p, q を a から b への道とする．p から q へのホモトピー (homotopy) とは，連続写像 $H\colon I^2 \to X$ であって

$$H(0,t) = p(t), \quad H(1,t) = q(t), \quad H(s,0) = a, \quad H(s,1) = b$$

を満たすものをいう．



p から q へのホモトピーが存在するとき，p と q はホモトピック (homotopic) であるといい，ここでは記号 $p \sim q$ で表す．

a から b への道全体がなす集合を $\mathrm{Path}(a,b)$ と書くと，$\sim$ は $\mathrm{Path}(a,b)$ に同値関係を定めることが分かる．$p \in \mathrm{Path}(a,b)$ の属する同値類を $[p]$ と書くことにする．

定義． 位相空間 X の基本亜群 (fundamental groupoid) とは，以下で定義される圏 $\Pi(X)$ のことをいう．

- $\mathrm{Ob}(\Pi(X)) := X$ とする．
- $a, b \in X$ に対して $\mathrm{Hom}_{\Pi(X)}(a,b) := \mathrm{Path}(a,b)/{\sim}$ とする．
- $\Pi(X)$ の射 $[p]\colon a \to b$，$[q]\colon b \to c$ に対して $[q] \circ [p] := [q * p]$ とする．
- $a \in X$ に対して $\mathrm{id}_a := [c_a]$ とする．

ここで，亜群とは次のように定義される．

定義． 亜群 (groupoid) とは，任意の射が同型射となる圏のことをいう[*1]．

命題 4． 基本亜群は亜群である．

証明． 射 $[p]$ の逆射が $[\bar{p}]$ で与えられるからである． □

[*1] 2 項演算が入った集合のことを亜群と呼ぶ場合もある．

X, Y を位相空間，$F\colon X \to Y$ を連続写像とする．このとき $p \in \mathrm{Path}(a, b)$ に対して $F \circ p \in \mathrm{Path}(F(a), F(b))$ である．よって $\Pi(F)$ を

- 対象 $a \in \Pi(X)$ に対して $\Pi(F)(a) := F(a)$ とする．
- $\Pi(X)$ の射 $[p]\colon a \to b$ に対して $\Pi(F)([p]) := [F \circ p]\colon F(a) \to F(b)$ とする．

と定義すると，これは関手 $\Pi(F)\colon \Pi(X) \to \Pi(Y)$ を定める．

$\because$) 簡単のため $K := \Pi(F)$ と書く．K が関手の条件を満たすことを示す．
まず $\mathrm{id}_a = [c_a]$ だから

$$K(\mathrm{id}_a) = K([c_a]) = [F \circ c_a] = [c_{F(a)}] = \mathrm{id}_{F(a)} = \mathrm{id}_{K(a)}$$

となり $K(\mathrm{id}_a) = \mathrm{id}_{K(a)}$ はよい．
次に $[p]\colon a \to b$，$[q]\colon b \to c$ とするとき

$$\begin{aligned} K([q] \circ [p]) = K([q * p]) = [F \circ (q * p)] &= [(F \circ q) * (F \circ p)] \\ = [F \circ q] \circ [F \circ p] &= K([q]) \circ K([p]) \end{aligned}$$

だから $K([q] \circ [p]) = K([q]) \circ K([p])$ も成り立つ．

以上のように定義した $\Pi(X), \Pi(F)$ について次の定理を得る．

定理 5. この Π は関手 $\Pi\colon \mathbf{Top} \to \mathbf{CAT}$ を定める．

証明. まず $\Pi(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{\Pi(X)}$ は明らかである．よって連続写像 $F\colon X \to Y$，$G\colon Y \to Z$ に対して $\Pi(G \circ F) = \Pi(G) \circ \Pi(F)$ を示す．それは $a, b \in X$ として射 $[p]\colon a \to b$ に対して

$$\Pi(G) \circ \Pi(F)([p]) = \Pi(G)([F \circ p]) = [G \circ (F \circ p)] = [(G \circ F) \circ p] = \Pi(G \circ F)([p])$$

より分かる． $\square$

定義. X を位相空間，A を集合とするとき $X \cap A \subset \mathrm{Ob}(\Pi(X))$ が定める $\Pi(X)$ の充満部分圏を $\pi_1(X, A)$ で表す．特に $a \in X$ に対して $\pi_1(X, \{a\})$ を単に $\pi_1(X, a)$ と書き，a を基点とする X の基本群という．

一般に圏 C の対象 $a \in C$ に対して，a から定まる充満部分圏 $\{a\} \subset C$ を考えると，この圏 $\{a\}$ は対象が 1 つだからモノイドである．特に C が亜群であれば，明らかに $\{a\}$ は群である．故に次の命題が成り立つ．

命題 6. 基本群は群である． $\square$

命題 7. C を圏，$a, b \in C$ を対象として充満部分圏 $\{a\}, \{b\} \subset C$ を考える．$f\colon a \to b$ を同型射とすると写像 $F\colon \mathrm{Hom}_C(a, a) \to \mathrm{Hom}_C(b, b)$ が $F(g) := f \circ g \circ f^{-1}$ で与えられるが，この F は同型関手 $F\colon \{a\} \to \{b\}$ (即ちモノイドの同型) を与える．

証明. $Fa := b$ と定義する．まず明らかに $F(\mathrm{id}_a) = \mathrm{id}_b$ であり，また $g, h\colon a \to a$ に対して

$$F(h \circ g) = f \circ (h \circ g) \circ f^{-1} = (f \circ h \circ f^{-1}) \circ (f \circ g \circ f^{-1}) = F(h) \circ F(g)$$

である．故に F は関手を定める．この F は明らかに同型関手である． $\square$

この命題を基本群の場合に適用することで，次の命題と系を得る．

命題 8. X を位相空間，$a, b \in X$ として a から b への道が存在するとする．このとき $\pi_1(X, a) \cong \pi_1(X, b)$ である． $\square$

系 9. X が弧状連結空間ならば任意の $a, b \in X$ に対して $\pi_1(X, a) \cong \pi_1(X, b)$. $\square$

ここでは証明しないが次の定理が知られている．

定理 10. X を位相空間，$U, V \subset X$ を開集合として $X = U \cup V$ であるとする．集合 A が $U, V, U \cap V$ の各弧状連結成分と共通部分を持つとき，次の図式は groupoid の圏における pushout である．

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(U \cap V, A) \arrow[r] \arrow[d] & \pi_1(V, A) \arrow[d] \\
\pi_1(U, A) \arrow[r] & \pi_1(X, A)
\end{tikzcd}$$

この定理で $A := \{a\}$ $(a \in X)$ とすることで，いわゆる Seifert-van Kampen の定理を得る．

系 11 (Seifert-van Kampen の定理)**.** X を位相空間，$U, V \subset X$ を弧状連結開集合として $X = U \cup V$ であるとする．$U \cap V$ が弧状連結で $a \in U \cap V$ のとき，次の図式は **Grp** における pushout である．

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(U \cap V, a) \arrow[r] \arrow[d] & \pi_1(V, a) \arrow[d] \\
\pi_1(U, a) \arrow[r] & \pi_1(X, a)
\end{tikzcd}$$

$\square$

参考文献

[1] クゼ・コスニオフスキ, トポロジー入門, 東京大学出版会, 1983 年