

フィルター圏

alg-d

https://alg-d.com/math/kan_extension/

2025年5月19日

定義. 圏 C がフィルター圏 (filtered category)

\iff 任意の有限圏 J と関手 $F: J \rightarrow C$ に対して, ある対象 $c \in C$ と自然変換 $F \Rightarrow \Delta c$ が存在する.

定義. 圏 C が余フィルター圏 (cofiltered category) $\iff C^{\text{op}}$ がフィルター圏となる.

命題 1. 圏 C がフィルター圏 \iff 以下の条件*1を満たす.

- (1) C は空でない.
- (2) 任意の $a_0, a_1 \in C$ に対して, ある $c \in C$ と射 $f_0: a_0 \rightarrow c, f_1: a_1 \rightarrow c$ が存在する.

$$\begin{array}{ccc} a_0 & \xrightarrow{f_0} & c \\ & \searrow & \nearrow \\ a_1 & \xrightarrow{f_1} & c \end{array}$$

- (3) 任意の $a_0, a_1 \in C$ と $f_0, f_1: a_0 \rightarrow a_1$ に対して, ある $c \in C$ と $g: a_1 \rightarrow c$ が存在して $g \circ f_0 = g \circ f_1$ となる.

$$a_0 \begin{array}{c} \xrightarrow{f_0} \\ \xrightarrow{f_1} \end{array} a_1 \xrightarrow{g} c$$

証明. (\implies) 明らか.

(\impliedby) STEP 1, STEP 2, STEP 3 の 3 段階に分けて示す.

(STEP 1) $a_0, \dots, a_n \in C$ を C の対象とすると, ある対象 $u \in C$ と射 $f_i: a_i \rightarrow u$ が存在する.

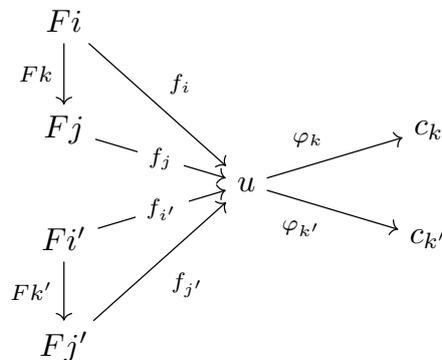
*1 この条件をフィルター圏の定義にしている文献もある.

∴) 条件 (2) を繰り返し適用すればよい.

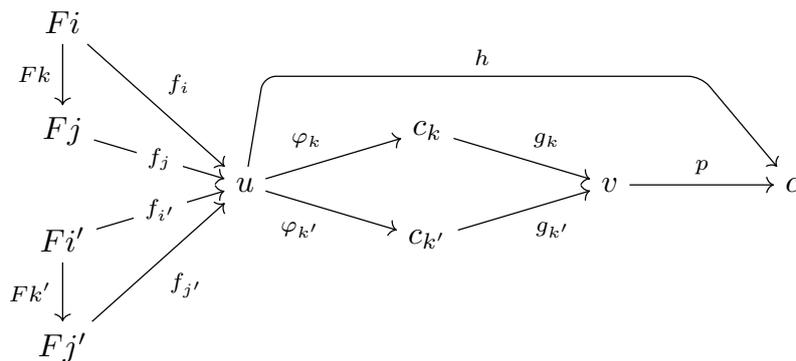
(STEP 2) $f_0, \dots, f_n: a \rightarrow b$ を C の射とすると、ある対象 $c \in C$ と射 $p: b \rightarrow c$ が存在して $p \circ f_0 = \dots = p \circ f_n$ となる.

∴) 条件 (3) を繰り返し適用すればよい.

(STEP 3) J を有限圏, $F: J \rightarrow C$ を関手とする. 対象の有限族 $\{Fj\}_{j \in J}$ に STEP 1 を適用して, 対象 $u \in C$ と射 $f_j: Fj \rightarrow u$ が得られる. 次に $k: i \rightarrow j$ を J の射とすると, 2つの射 f_i と $f_j \circ Fk: Fi \rightarrow u$ に条件 (3) を適用して $\varphi_k: u \rightarrow c_k$ を得る.



再び STEP 1 を族 $\{c_k\}_{k \in \text{Mor}(J)}$ に適用して, 対象 $v \in C$ と射 $g_k: c_k \rightarrow v$ が得られる. 族 $\{g_k \circ \varphi_k: u \rightarrow v\}_{k \in \text{Mor}(J)}$ に STEP 2 を適用して, 対象 $c \in C$ と射 $p: v \rightarrow c$ が得られる. p の取り方から $h := p \circ g_k \circ \varphi_k$ は k の取り方によらず一定である.



そこで $\theta_j := h \circ f_j: Fj \rightarrow c$ と定めたとき $\theta: F \Rightarrow \Delta c$ が自然変換となることを示せばよい. そのために $k: i \rightarrow j$ を J の射とする. このとき定義から

$$\theta_j \circ Fk = h \circ f_j \circ Fk = h \circ f_i = \theta_i$$

となり次の図式は可換である.

$$\begin{array}{ccc} Fi & \xrightarrow{\theta_i} & c \\ Fk \downarrow & & \downarrow \text{id}_c \\ Fj & \xrightarrow{\theta_j} & c \end{array}$$

よって $\theta: F \Rightarrow \Delta c$ は自然変換である. □

例 2. 有限余完備な圏はフィルター圏である.

証明. 有限圏 J と関手 F に対して, 自然変換 $F \Rightarrow \Delta(\text{colim } F)$ が存在する. □

例 3. 終対象を持つ圏は明らかにフィルター圏である. □

例 4. 順序集合 X を圏とみなしたとき, これがフィルター圏となるのは, 命題 1 より X が空でない有向集合となるときである. □

定義. 添え字圏がフィルター圏となる余極限をフィルター余極限 (filtered colimit) という.

Set において, フィルター余極限は有限極限と交換するという重要な性質がある. 即ち

命題 5. I がフィルター圏のとき, 関手 $\text{colim}: \mathbf{Set}^I \rightarrow \mathbf{Set}$ は有限極限と交換する. 故に, J が有限な圏で $T: I \times J \rightarrow \mathbf{Set}$ が関手のとき, 普遍性から得られる射

$$\text{colim}_{i \in I} \lim_{j \in J} T(i, j) \rightarrow \lim_{j \in J} \text{colim}_{i \in I} T(i, j)$$

は同型である.

証明. $\text{colim}: \mathbf{Set}^I \rightarrow \mathbf{Set}$ が終対象と pullback と交換することを示せばよい.

まず終対象について示す. $\text{colim}(\Delta 1) \cong \left(\coprod_{i \in I} 1 \right) / \sim$ である. I がフィルター圏だから $\text{colim}(\Delta 1) \cong 1$ となり, colim が終対象と交換することが分かった.

次に pullback について示す. 次の図式を \mathbf{Set}^I の pullback とする.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\pi_1} & P_1 \\ \pi_0 \downarrow & & \downarrow \\ P_0 & \longrightarrow & Q \end{array}$$

\mathbf{Set}^I の極限は各点ごとに計算すればよい (「極限」の PDF を参照) から, $i \in I$ に対して

$$\begin{array}{ccc} X_i & \xrightarrow{(\pi_1)_i} & P_{1i} \\ (\pi_0)_i \downarrow & & \downarrow \\ P_{0i} & \longrightarrow & Q_i \end{array}$$

は pullback である. 故に

$$\begin{aligned} \operatorname{colim} X &\cong \left(\prod_{i \in I} P_{0i} \times_{Q_i} P_{1i} \right) / \sim \\ \operatorname{colim} P_k &\cong \left(\prod_{i \in I} P_{ki} \right) / \sim \end{aligned}$$

で, $\operatorname{colim}(\pi_k)$ は $\operatorname{colim}(\pi_k)([\langle u_0, u_1 \rangle]) = [u_k]$ で与えられる. pullback の普遍性から点線の射 h が得られる.

$$\begin{array}{ccccc} \operatorname{colim} X & \xrightarrow{\operatorname{colim}(\pi_1)} & & & \operatorname{colim} P_1 \\ & \searrow h & & & \downarrow \\ & & \operatorname{colim} P_0 \times_{\operatorname{colim} Q} \operatorname{colim} P_1 & \longrightarrow & \operatorname{colim} P_1 \\ & \searrow \operatorname{colim}(\pi_0) & \downarrow & & \downarrow \\ & & \operatorname{colim} P_0 & \longrightarrow & \operatorname{colim} Q \end{array}$$

この h が全単射であることが容易にわかる. よって colim は pullback と交換する. \square

補題 6. C, D を圏, $d \in D$ を対象とする. C は有限完備で関手 $F: C \rightarrow D$ は有限極限と交換するとする. このときコンマ圏 $d \downarrow F$ は余フィルター圏である.

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{F} & D \\ P_1 \uparrow & \swarrow \kappa & \uparrow d \\ d \downarrow F & \xrightarrow{P_0} & \mathbb{1} \end{array}$$

証明. 定義により, $d \downarrow F$ の対象は D の射 $d \rightarrow Fc$ で, 射 $(d \rightarrow Fc_0) \rightarrow (d \rightarrow Fc_1)$ は次を可換にする C の射 $c_0 \rightarrow c_1$ である.

$$\begin{array}{ccc} & \searrow & Fc_0 & c_0 \\ d & \longrightarrow & \downarrow & \downarrow \\ & \searrow & Fc_1 & c_1 \end{array}$$

命題 1 の 3 条件の双対を示せばよい.

(i) まず $d \downarrow F \neq \mathbb{0}$ を示す. C が有限完備だから終対象 $1 \in C$ が存在する. F が有限極限と交換するから $F(1) \in D$ は終対象になる. よって D の射 $d \rightarrow F(1)$ が存在する. 従って $d \downarrow F \neq \mathbb{0}$ である.

(ii) $g_0: d \rightarrow Fc_0$, $g_1: d \rightarrow Fc_1$ とする. C が有限完備だから直積 $c_0 \times c_1$ が存在する. F が有限極限と交換するから $F(c_0 \times c_1) \cong Fc_0 \times Fc_1$ である. 直積の普遍性から次の点線の射 h が存在して可換となる.

$$\begin{array}{ccc}
 & & Fc_0 \\
 & \nearrow^{g_0} & \uparrow \\
 d & \overset{h}{\dashrightarrow} & F(c_0 \times c_1) \\
 & \searrow_{g_1} & \downarrow \\
 & & Fc_1
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 & & c_0 \\
 & \uparrow & \\
 c_0 \times c_1 & & \\
 & \downarrow & \\
 & & c_1
 \end{array}$$

よって射 $(d \xrightarrow{h} F(c_0 \times c_1)) \rightarrow (d \xrightarrow{g_0} Fc_0)$ と $(d \xrightarrow{h} F(c_0 \times c_1)) \rightarrow (d \xrightarrow{g_1} Fc_1)$ が得られた.

(iii) $g_0: d \rightarrow Fc_0$, $g_1: d \rightarrow Fc_1$ として, 2つの射 $p, q: (d \xrightarrow{g_0} Fc_0) \rightarrow (d \xrightarrow{g_1} Fc_1)$ を取る. 即ち次の図式 (三角形は可換) を考える.

$$\begin{array}{ccc}
 & & Fc_0 \\
 & \nearrow^{g_0} & \downarrow \\
 d & & Fp \downarrow Fq \\
 & \searrow_{g_1} & Fc_1
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 & & c_0 \\
 & \downarrow p & \\
 & & c_1 \\
 & \downarrow q &
 \end{array}$$

C が有限完備だから equalizer $c \xrightarrow{e} c_0 \xrightarrow[p]{q} c_1$ が存在する. F が有限極限と交換するから $Fc \xrightarrow{Fe} Fc_0 \xrightarrow[Fq]{Fp} Fc_1$ も equalizer である. 今 $Fp \circ g_0 = g_1 = Fq \circ g_0$ だから, equalizer Fe の普遍性により次の点線の射が存在して, 三角形が可換となる.

$$\begin{array}{ccc}
 & & Fc \\
 & \nearrow^{h} & \downarrow \\
 d & \xrightarrow{g_0} & Fc_0 \\
 & \searrow_{g_1} & \downarrow \\
 & & Fc_1
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 & & c \\
 & \downarrow e & \\
 & & c_0 \\
 & \downarrow p & \\
 & & c_1 \\
 & \downarrow q &
 \end{array}$$

よって

$$(d \xrightarrow{h} Fc) \xrightarrow{e} (d \xrightarrow{g_0} Fc_0) \xrightarrow[q]{p} (d \xrightarrow{g_1} Fc_1)$$

は $d \downarrow F$ の射で $p \circ e = q \circ e$ である.

以上の (i)(ii)(iii) により $d \downarrow F$ は余フィルター圏である. □

定義. C を小圏とする. 関手 $F: C \rightarrow \mathbf{Set}$ が平坦 (flat) とは, $y^\dagger F: \widehat{C} \rightarrow \mathbf{Set}$ が有限極限と交換することをいう.

$$\begin{array}{ccc} \widehat{C} & & \\ \uparrow y & \searrow y^\dagger F & \\ C & \xrightarrow{F} & \mathbf{Set} \end{array}$$

$\eta \Uparrow$

定理 7. 小圏 C と関手 $F: C \rightarrow \mathbf{Set}$ について以下は同値である.

- (1) F は平坦である.
- (2) $1 \downarrow F$ は余フィルター圏である.
- (3) F は表現可能関手のフィルター余極限で書ける.

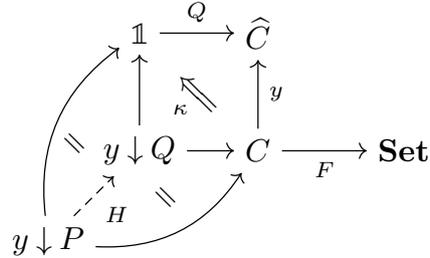
証明. (1 \implies 2) $F: C \rightarrow \mathbf{Set}$ を関手とする. 各点左 Kan 拡張により, $P \in \widehat{C}$ に対して

$$\begin{aligned} y^\dagger F(P) &\cong \operatorname{colim}(y \downarrow P \rightarrow C \xrightarrow{F} \mathbf{Set}) \\ &\cong \left(\coprod_{\langle c, u \rangle \in y \downarrow P} Fc \right) / \sim \\ &\cong \left(\coprod_{c \in C} \coprod_{u \in Pc} Fc \right) / \sim \\ &\cong \left(\coprod_{c \in C} Pc \times Fc \right) / \sim \end{aligned}$$

である. $\langle c, u \rangle, \langle d, v \rangle \in y \downarrow P$ として $f: \langle c, u \rangle \rightarrow \langle d, v \rangle$ を射とする. つまり f は C の射 $f: c \rightarrow d$ で $Pf(v) = u$ を満たす. このとき $s \in Fc$ とすると, $\left(\coprod_{\langle c, u \rangle \in y \downarrow P} Fc \right) / \sim$ において $[s] = [Ff(s)]$ である. $\left(\coprod_{c \in C} Pc \times Fc \right) / \sim$ で考えれば $[\langle Pf(v), s \rangle] = [\langle v, Ff(s) \rangle]$ となる. 以下簡単のため $[\langle -, \square \rangle] = [-, \square]$ と書く.

まず $P = y(a)$ ($a \in C$) の場合を考えると, $y^\dagger F(y(a)) \cong \left(\coprod_{c \in C} \operatorname{Hom}(c, a) \times Fc \right) / \sim$ だから, 任意の $u \in y^\dagger F(y(a))$ は $u = [f, s]$ ($f: c \rightarrow a$, $s \in Fc$) と書ける. このとき $[f, s] = [\operatorname{id}_a \circ f, s] = [Pf(\operatorname{id}_a), s] = [\operatorname{id}_a, Ff(s)]$ である. 一方 $y^\dagger F \circ y \cong F$ だったから $y^\dagger F(y(a)) \cong Fa$ である. この同型は $Fa \ni u \mapsto [\operatorname{id}_a, u] \in y^\dagger F(y(a))$ で与えられる.

$P, Q \in \widehat{C}$ として $\theta: P \Rightarrow Q$ を自然変換とする. コンマ圏の普遍性により得られる $H: y \downarrow P \rightarrow y \downarrow Q$ (下の図式参照) は $\langle c, u \rangle \in y \downarrow P$ に対して $H\langle c, u \rangle = \langle c, \theta_c(u) \rangle$ で与えられる.



故に $y^\dagger F(\theta): y^\dagger F(P) \rightarrow y^\dagger F(Q)$ は $u \in Pc, s \in Fc$ に対して $y^\dagger F(\theta)([u, s]) = [\theta_c(u), s]$ で与えられる.

$\Delta 1 \in \widehat{C}$ は終対象で, $y^\dagger F$ が有限極限と交換するから $y^\dagger F(\Delta 1)$ も終対象である. 従って $y^\dagger F(\Delta 1) \cong 1$ となる. よって $1 \cong (\coprod Fc) / \sim$ だから, ある $c \in C$ について $Fc \neq \emptyset$ でなければならない. 故に $1 \downarrow F \neq \emptyset$ である.

次に $\langle c_0, u_0 \rangle, \langle c_1, u_1 \rangle \in 1 \downarrow F$ を取る. $\langle c, u \rangle \in 1 \downarrow F$ と射 $\langle c, u \rangle \rightarrow \langle c_0, u_0 \rangle, \langle c, u \rangle \rightarrow \langle c_1, u_1 \rangle$ が存在することを示す. 今 $y^\dagger F$ が有限極限と交換するから, 直積

$$\begin{array}{ccc} & y(c_0) \times y(c_1) & \\ & \swarrow_{p_0} \quad \searrow_{p_1} & \\ y(c_0) & & y(c_1) \end{array}$$

と交換する. 即ち普遍性により得られる次の射 h が同型 (即ち全単射) を与える.

$$\begin{array}{ccccc} & & y^\dagger F(y(c_0) \times y(c_1)) & & \\ & \swarrow_{y^\dagger F(p_0)} & \downarrow h \wr & \searrow_{y^\dagger F(p_1)} & \\ & y^\dagger F(y(c_0)) & y^\dagger F(y(c_0)) \times y^\dagger F(y(c_1)) & & y^\dagger F(y(c_1)) \end{array}$$

$y^\dagger F \circ y \cong F$ だから

$$\begin{array}{ccccc} & & y^\dagger F(y(c_0) \times y(c_1)) & & \\ & \swarrow_{y^\dagger F(p_0)} & \downarrow h \wr & \searrow_{y^\dagger F(p_1)} & \\ & Fc_0 & Fc_0 \times Fc_1 & & Fc_1 \end{array}$$

としてよい. $u := h^{-1}(\langle u_0, u_1 \rangle) \in y^\dagger F(y(c_0) \times y(c_1))$ を取れば $y^\dagger F(p_i)(u) = u_i$ である.

$$y^\dagger F(y(c_0) \times y(c_1)) \cong \left(\prod_{c \in C} \text{Hom}_C(c, c_0) \times \text{Hom}_C(c, c_1) \times Fc \right) / \sim$$

だから, $u = [f_0, f_1, s]$ となる $c \in C$, $f_i: c \rightarrow c_i$, $s \in Fc$ が取れる. このとき

$$u_i = y^\dagger F(p_i)([f_0, f_1, s]) = [f_i, s] = [\text{id}_{c_i} \circ f_i, s] = [\text{id}_{c_i}, Ff_i(s)]$$

だから $Ff_i(s) = u_i$ となることが分かる. 故に $f_i: \langle c, s \rangle \rightarrow \langle c_i, u_i \rangle$ は $1 \downarrow F$ の射である.

最後に対象 $\langle c_0, u_0 \rangle, \langle c_1, u_1 \rangle \in 1 \downarrow F$ と射 $f_0, f_1: \langle c_0, u_0 \rangle \rightarrow \langle c_1, u_1 \rangle$ を取る. ある対象 $\langle c, u \rangle \in 1 \downarrow F$ と射 $g: \langle c, u \rangle \rightarrow \langle c_0, u_0 \rangle$ で $f_0 \circ g = f_1 \circ g$ を満たすものが存在することを示す. \widehat{C} で equalizer

$$X \xrightarrow{\theta} y(c_0) \begin{array}{c} \xrightarrow{y(f_0)} \\ \xrightarrow{y(f_1)} \end{array} y(c_1)$$

が存在して, $y^\dagger F$ がこれと交換するから

$$y^\dagger F(X) \xrightarrow{y^\dagger F(\theta)} Fc_0 \begin{array}{c} \xrightarrow{Ff_0} \\ \xrightarrow{Ff_1} \end{array} Fc_1$$

が equalizer となる. 定義より $Ff_0(u_0) = Ff_1(u_0)$ だから, ある $s \in y^\dagger F(X)$ が存在して $y^\dagger F(\theta)(s) = u_0$ となる. このとき $s = [v, u]$ ($c \in C$, $v \in Xc$, $u \in Fc$) と書けば

$$y^\dagger F(\theta)(s) = [\theta_c(v), u] = [\text{id}_{c_0}, F(\theta_c(v))(u)]$$

である. よって $g := \theta_c(v): c \rightarrow c_0$ と置けば $Fg(u) = u_0$ となり, $g: \langle c, u \rangle \rightarrow \langle c_0, u_0 \rangle$ は射である. また θ が equalizer であるから $f_0 \circ g = f_1 \circ g$ も分かる.

(2 \implies 3) ここでは区別のため, 米田埋込 $C^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}^C$ を z と書く. $z \downarrow F = (1 \downarrow F)^{\text{op}}$ だから (「コンマ圏」の PDF を参照), $1 \downarrow F$ が余フィルター圏であるとする $z \downarrow F$ はフィルター圏である.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{1} & \xrightarrow{F} & \mathbf{Set}^C \\ P_1 \uparrow & \swarrow \kappa & \uparrow z \\ z \downarrow F & \xrightarrow{P_0} & C^{\text{op}} \xrightarrow{z} \mathbf{Set}^C \\ & & \uparrow \eta \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{id} \\ \searrow \end{array}$$

よって $F \cong \text{colim}(z \downarrow F \xrightarrow{P_0} C^{\text{op}} \xrightarrow{z} \mathbf{Set}^C)$ は表現可能関手のフィルター余極限である.

(3 \implies 1) フィルター圏 J と関手 $S: J \rightarrow C^{\text{op}}$ を使って $F \cong \text{colim}(J \xrightarrow{S} C^{\text{op}} \xrightarrow{z} \mathbf{Set}^C)$ と書けたとする。即ち

$$F \cong \text{colim}_{j \in J} \text{Hom}_{C^{\text{op}}}(-, Sj) = \text{colim}_{j \in J} \text{Hom}_C(Sj, -)$$

である。 $y^\dagger \dashv y^{-1}$ だから y^\dagger は余極限と交換するので、 $y^\dagger(\text{Hom}_C(a, -)) \cong \text{ev}_a$ となること (「Kan 拡張」の PDF を参照) を使うと

$$y^\dagger F \cong y^\dagger \left(\text{colim}_{j \in J} \text{Hom}_C(Sj, -) \right) \cong \text{colim}_{j \in J} y^\dagger \left(\text{Hom}_C(Sj, -) \right) \cong \text{colim}_{j \in J} \text{ev}_{Sj}$$

となる。 ev_{Sj} は極限と交換して、 $\text{colim}_{j \in J}$ は有限極限と交換する (命題 5) から、 $y^\dagger F$ も有限極限と交換する。 \square

系 8. C を小圏とするとき

$\text{colim}: \mathbf{Set}^C \rightarrow \mathbf{Set}$ が有限極限と交換する $\iff C$ がフィルター圏である。

証明. 随伴 $\text{colim} \dashv \Delta: \mathbf{Set}^C \rightarrow \mathbf{Set}$ が成り立つから、普遍随伴により $F := \text{colim} \circ y$ と置けば $\text{colim} \cong y^\dagger F$ である。

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Set}^C & & \\ \uparrow y & \searrow \text{colim} & \\ C^{\text{op}} & \xrightarrow{F} & \mathbf{Set} \end{array}$$

$\eta \Uparrow$

よって定理 7 から

$\text{colim}: \mathbf{Set}^C \rightarrow \mathbf{Set}$ が有限極限と交換する $\iff F$ が平坦
 $\iff 1 \downarrow F$ が余フィルター圏

である。故に $1 \downarrow F \cong C^{\text{op}}$ を示せばよい。そのためには $c \in C$ に対して $\text{Hom}_{\mathbf{Set}}(1, Fc) \cong 1$ 、即ち $Fc \cong 1$ を示せばよい。 $c \in C$ と $x \in \mathbf{Set}$ に対して

$$\text{Hom}_{\mathbf{Set}}(Fc, x) = \text{Hom}_{\mathbf{Set}}(\text{colim } y(c), x) \cong \text{Hom}_{\mathbf{Set}^C}(y(c), \Delta x) \cong \Delta x(c) = x$$

だから $Fc \cong 1$ である。 \square

系 9. 平坦関手 $F: C \rightarrow \mathbf{Set}$ は有限極限と交換する。圏 C が有限完備ならば逆も成り立つ。即ち有限極限と交換する関手 $F: C \rightarrow \mathbf{Set}$ は平坦である。

証明. $F: C \rightarrow \mathbf{Set}$ が平坦ならば y と $y^\dagger F$ が有限極限と交換するから $F \cong y^\dagger F \circ y$ も有限極限と交換する.

$$\begin{array}{ccc} \widehat{C} & & \\ \uparrow y & \searrow y^\dagger F & \\ C & \xrightarrow{F} & \mathbf{Set} \end{array}$$

圏 C が有限完備で $F: C \rightarrow \mathbf{Set}$ が有限極限と交換するならば, 補題 6 により $1 \downarrow F$ が余フィルター圏だから, 定理 7 より F は平坦である. \square

例 10. $a \in C$ に対して $F := \text{Hom}_C(a, -): C \rightarrow \mathbf{Set}$ は平坦関手である.

証明. 定理 7 より $1 \downarrow F$ が余フィルター圏であることを示せばよいが, $1 \downarrow F$ は始対象 $\langle a, \text{id}_a \rangle$ を持つから余フィルター圏である. \square

定理 11. C, D を小圏として, C は有限完備とする. このとき

関手 $F: C \rightarrow D$ が有限極限と交換する $\iff F^\dagger: \widehat{C} \rightarrow \widehat{D}$ が有限極限と交換する.

証明. (\Leftarrow) $F^\dagger \circ y \cong y \circ F$ である. y と F^\dagger が有限極限と交換するから, $y \circ F \cong F^\dagger \circ y$ も有限極限と交換する. y は忠実充満だから F が有限極限と交換することが分かる.

(\Rightarrow) \widehat{C} の有限極限 $\lim P_i$ に対して $F^\dagger(\lim P_i) \cong \lim F^\dagger P_i$ を示す. そのためには各 $d \in D$ に対して $F^\dagger(\lim P_i)(d) \cong (\lim F^\dagger P_i)(d)$ を示せばよい. $(\lim F^\dagger P_i)(d) \cong \lim(F^\dagger P_i(d))$ であるから $F^\dagger(\lim P_i)(d) \cong \lim(F^\dagger P_i(d))$, 即ち $F^\dagger(-)(d): \widehat{C} \rightarrow \mathbf{Set}$ が有限極限と交換することを示せばよい.

$P \in \widehat{C}$ に対して, 各点左 Kan 拡張により $F^\dagger P(d) \cong \text{colim } P \circ P_0$ である.

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{1} & \xrightarrow{d} & D^{\text{op}} & & \\ P_1 \uparrow & \swarrow \kappa & F^{\text{op}} \uparrow & \searrow F^\dagger P & \\ F^{\text{op}} \downarrow d & \xrightarrow{P_0} & C^{\text{op}} & \xrightarrow{P} & \mathbf{Set} \end{array}$$

故に $F^\dagger(-)(d) \cong (\widehat{C} \xrightarrow{P_0^{-1}} \mathbf{Set}^{F^{\text{op}} \downarrow d} \xrightarrow{\text{colim}} \mathbf{Set})$ である. $P_0^\dagger \dashv P_0^{-1}$ だから P_0^{-1} は右随伴, よって極限と交換する. 故に $\text{colim}: \mathbf{Set}^{F^{\text{op}} \downarrow d} \rightarrow \mathbf{Set}$ が有限極限と交換することを示せばよい. そのためには系 8 より, $F^{\text{op}} \downarrow d$ がフィルター圏であればよいが, $F^{\text{op}} \downarrow d \cong (d \downarrow F)^{\text{op}}$ だから, 補題 6 より明らか. \square

例 12. **Set** でない場合, 有限極限とフィルター余極限が交換できない場合がある. 圏 I を順序集合 \mathbb{N} を圏とみなしたものとして, $J := (0 \rightrightarrows 1)$ とする. 関手 $T: I \times J \rightarrow \mathbf{Top}$ を定義する. 即ち, **Top** の図式

$$\begin{array}{ccccccc} T(0, 1) & \xrightarrow{k_0} & T(1, 1) & \xrightarrow{k_1} & T(2, 1) & \xrightarrow{k_2} & \cdots \\ f_0 \uparrow \uparrow g_0 & & f_1 \uparrow \uparrow g_1 & & f_2 \uparrow \uparrow g_2 & & \\ T(0, 0) & \xrightarrow{h_0} & T(1, 0) & \xrightarrow{h_1} & T(2, 0) & \xrightarrow{h_2} & \cdots \end{array}$$

を定義する. まず $T(i, 0) := [0, 1/(i+1)]$ として $T(i, 1) := (T(i, 0) \amalg T(i, 0))/\sim$ と置く. ここで \sim は同値関係であって, 2つの 0 を同一視し, 2つの $1/(i+1)$ を同一視するものである. (よって $T(i, 1)$ は位相的には円周になる.) そして標準的に得られる 2つの単射を $f_i, g_i: T(i, 0) \rightarrow T(i, 1)$ とする. 次に関数 $h_i: T(i, 0) \rightarrow T(i+1, 0)$ を

$$h_i(x) := \begin{cases} x & \left(0 \leq x \leq \frac{1}{i+2} \right) \\ \frac{1}{i+2} & \left(\frac{1}{i+2} < x \leq \frac{1}{i+1} \right) \end{cases}$$

で定義して, $h_i \amalg h_i$ から得られる射を $k_i: T(i, 1) \rightarrow T(i+1, 1)$ とする.

さて, $X := \{a, b\}$ の位相を $\{\emptyset, \{b\}, X\}$ により定義すると

$$\operatorname{colim}_i T(i, 0) \cong X, \quad \operatorname{colim}_i T(i, 1) \cong X$$

であり, 従って $\lim_j \operatorname{colim}_i T(i, j) \cong X$ が分かる. 一方, $\lim_j T(i, j)$ は 2点からなる離散位相空間なので $\operatorname{colim}_i \lim_j T(i, j)$ も 2点からなる離散位相空間である. 故に

$$\operatorname{colim}_i \lim_j T(i, j) \not\cong \lim_j \operatorname{colim}_i T(i, j)$$

である. □

系 8 の有限極限を有限直積に弱めることで, 次の定義を得る.

定義. 小圏 C が sifted $\iff \operatorname{colim}: \mathbf{Set}^C \rightarrow \mathbf{Set}$ が有限直積と交換する.

小圏 C が cosifted $\iff C^{\text{op}}$ が sifted である.

定義. 添え字圏が sifted な余極限を sifted colimit という.

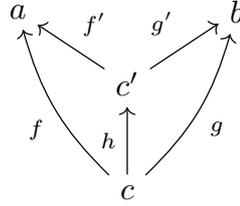
定義. C を小圏とする. 関手 $F: C \rightarrow \mathbf{Set}$ が sifted flat とは, $y^\dagger F: \widehat{C} \rightarrow \mathbf{Set}$ が有限直積と交換することをいう.

系 8 によりフィルター圏は sifted である。特に有限余完備な圏は sifted である。

定義. 圏 C の図式 $a \leftarrow c \rightarrow b$ を a から b への span という。双対的に, 図式 $a \rightarrow c \leftarrow b$ を a から b への cospan という。

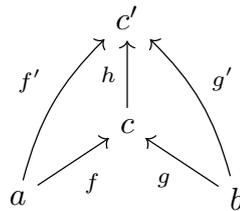
定義. C を圏, $a, b \in C$ を対象とする。 a から b への span がなす圏 $\text{Span}(a, b)$ を以下のように定める。

- $\text{Ob}(\text{Span}(a, b)) := \{\langle f, g \rangle \in \text{Mor}(C)^2 \mid c \in C, a \xleftarrow{f} c \xrightarrow{g} b\}$ とする。
- $\langle f, g \rangle, \langle f', g' \rangle \in \text{Span}(a, b)$ とする。 $c := \text{dom}(f)$, $c' := \text{dom}(f')$ とする。 $\langle f, g \rangle$ から $\langle f', g' \rangle$ への射は, 次の図式を可換とする射 $h: c \rightarrow c'$ である。



同様にして cospan がなす圏 $\text{Cospan}(a, b)$ が以下のように定まる。

- $\text{Ob}(\text{Cospan}(a, b)) := \{\langle f, g \rangle \in \text{Mor}(C)^2 \mid c \in C, a \xrightarrow{f} c \xleftarrow{g} b\}$ とする。
- $\langle f, g \rangle, \langle f', g' \rangle \in \text{Cospan}(a, b)$ とする。 $c := \text{cod}(f)$, $c' := \text{cod}(f')$ とする。 $\langle f, g \rangle$ から $\langle f', g' \rangle$ への射は, 次の図式を可換とする射 $h: c \rightarrow c'$ で定める。

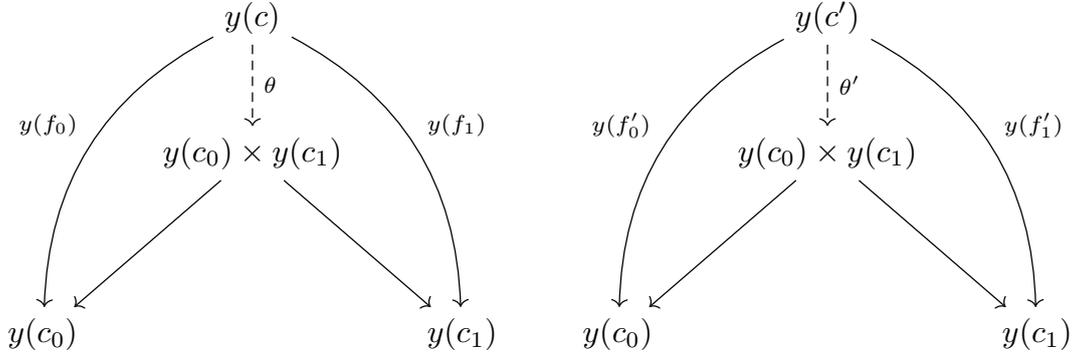


補題 13. 関手 $F: C \rightarrow \mathbf{Set}$ が sifted flat ならば, 任意の $s, t \in 1 \downarrow F$ に対して, $1 \downarrow F$ における span からなる圏 $\text{Span}(s, t)$ は連結である。

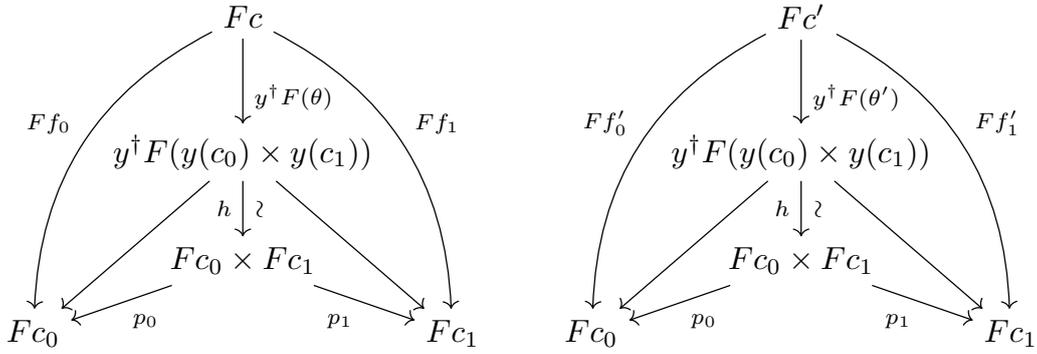
証明. まず定理 7 の \implies の証明により, ある $\langle c, s \rangle \in 1 \downarrow F$ と $f_i: \langle c, s \rangle \rightarrow \langle c_i, u_i \rangle$ が存在することが分かる。故に $\text{Span}(\langle c_0, u_0 \rangle, \langle c_1, u_1 \rangle) \neq \mathbf{0}$ である。

次に 2 つの span $\langle c_0, u_0 \rangle \xleftarrow{f_0} \langle c, u \rangle \xrightarrow{f_1} \langle c_1, u_1 \rangle$, $\langle c_0, u_0 \rangle \xleftarrow{f'_0} \langle c', u' \rangle \xrightarrow{f'_1} \langle c_1, u_1 \rangle$ を取る。この 2 つが zigzag で結ばれることを示そう。直積の普遍性から次の点線の射 θ, θ' が

存在する.



定理 7 の \implies の証明と同様, 次の図式を得る.

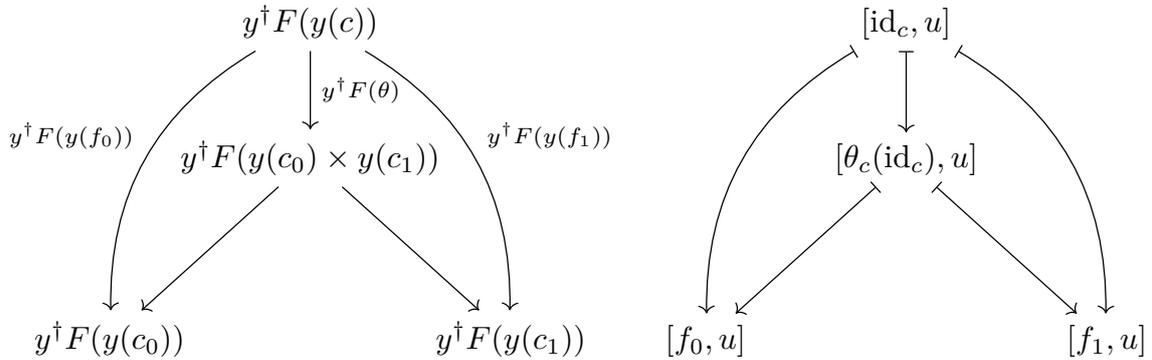


故に

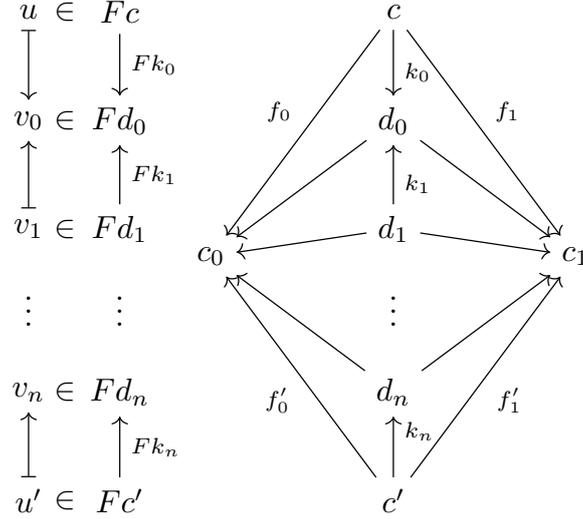
$$u_i = Ff_i(u) = (p_i \circ h \circ y^\dagger F(\theta))(u) = p_i(h(y^\dagger F(\theta)(u)))$$

$$u'_i = Ff'_i(u') = (p_i \circ h \circ y^\dagger F(\theta'))(u') = p_i(h(y^\dagger F(\theta')(u)))$$

を得る. よって集合の直積の定義から, $h(y^\dagger F(\theta)(u)) = h(y^\dagger F(\theta')(u'))$ である. h が同型だから $y^\dagger F(\theta)(u) = y^\dagger F(\theta')(u')$ を得る. 同型 $Fc \cong y^\dagger F(y(c))$ は $u \mapsto [\text{id}_c, u]$ で与えられていたから,



で考えれば $\theta_c(\text{id}_c) = \langle f_0, f_1 \rangle$ となることが分かる. 同様にして $\theta_{c'}(\text{id}_{c'}) = \langle f'_0, f'_1 \rangle$ である. また $[\langle f_0, f_1 \rangle, u] = y^\dagger F(\theta)(u) = y^\dagger F(\theta')(u') = [\langle f'_0, f'_1 \rangle, u']$ が分かる. これが成り立つためには, 次の右側の可換図式と $v_0 \in Fd_0, \dots, v_n \in Fd_n$ であって

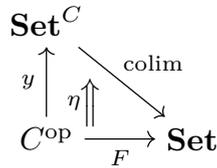


$Fk_0(u) = v_0, Fk_1(v_1) = v_0, Fk_n(u') = v_n$ となるものが存在しなければならない. これは圏 $1 \downarrow F$ における 2 つの $\text{span} \langle f_0, f_1 \rangle, \langle f'_0, f'_1 \rangle$ が zigzag で結ばれることを意味する. \square

命題 14. 小圏 C に対して以下の条件は同値である.

- (1) C は sifted である.
- (2) 任意の $a, b \in C$ に対して $\text{Cospan}(a, b)$ が連結である.
- (3) 対角関手 $\Delta: C \rightarrow C \times C$ が終関手である.

証明. (1 \implies 2) $F := \text{colim} \circ y: C^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$ と置く.



C が sifted だから F は sifted flat である. 一方 $1 \downarrow F \cong C^{\text{op}}$ であった. よって補題 13 により, 任意の $a, b \in C$ に対して $\text{Cospan}(a, b)$ が連結であることが分かる.

(2 \iff 3) $\Delta: C \rightarrow C \times C$ を対角関手とすれば, $a, b \in C$ に対して $\langle a, b \rangle \downarrow \Delta = \text{Cospan}(a, b)$ である. よって「 Δ が終関手 \iff 任意の a, b に対して $\langle a, b \rangle \downarrow \Delta$ が連結」

(「随伴関手定理」の PDF を参照) より明らか.

(2 \implies 1) 略 □

よって有限余直積を持つ圏は sifted である.

双対を考えれば「小圏 C が cosifted \iff 任意の $a, b \in C$ に対して $\text{Span}(a, b)$ が連結」である.

定理 15. 関手 $F: C \rightarrow \mathbf{Set}$ に対して以下の条件は同値である.

- (1) F は sifted flat である.
- (2) $1 \downarrow F$ は cosifted である.
- (3) F は表現可能関手の sifted colimit である. 即ち sifted な圏 J と関手 $K: J \rightarrow C^{\text{op}}$ が存在して $F \cong \text{colim}(J \xrightarrow{K} C^{\text{op}} \xrightarrow{y} \mathbf{Set}^C)$ と書ける.

証明. (1 \implies 2) 補題 13 より明らか.

(2 \implies 3) $y^\dagger y \cong \text{id}$ だから各点左 Kan 拡張により

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{1} & \xrightarrow{F} & \mathbf{Set}^C \\
 P_1 \uparrow & \swarrow \kappa & \uparrow y \\
 y \downarrow F & \xrightarrow{P_0} & C^{\text{op}} \xrightarrow{y} \mathbf{Set}^C \\
 & & \uparrow \eta
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 \searrow \text{id} \\
 \downarrow
 \end{array}$$

$F \cong y^\dagger y(F) \cong \text{colim}(y \downarrow F \xrightarrow{P_0} C^{\text{op}} \xrightarrow{y} \mathbf{Set}^C)$ であるが条件 (2) より $y \downarrow F \cong (1 \downarrow F)^{\text{op}}$ は sifted である.

(3 \implies 1) sifted な J と $S: J \rightarrow C^{\text{op}}$ が存在して $F \cong \text{colim}(J \xrightarrow{S} C^{\text{op}} \xrightarrow{y} \mathbf{Set}^C) = \text{colim}_{j \in J} \text{Hom}_C(Sj, -)$ と書けるとする. $y^\dagger \dashv y^{-1}$ だから y^\dagger は余極限と交換するので

$$y^\dagger F = y^\dagger \left(\text{colim}_{j \in J} \text{Hom}_C(Sj, -) \right) \cong \text{colim}_{j \in J} y^\dagger \left(\text{Hom}_C(Sj, -) \right) \cong \text{colim}_{j \in J} \text{ev}_{Sj}$$

である. ev_{Sj} は極限と交換して, $\text{colim}_{j \in J}$ は有限直積と交換するから, $y^\dagger F$ も有限直積と交換する. □

参考文献

- [1] J. Adamek and J. Rosicky, On sifted colimits and generalized varieties, Theory and Applications of Categories, Vol. 8 (2001), No. 3, 33–53, <http://www.tac.mta.ca/tac/volumes/8/n3/8-03abs.html>

- [2] Francis Borceux, Handbook of Categorical Algebra: Volume 1, Cambridge University Press (1994)