fibration

alg-d
http://alg-d.com/math/kan_extension/

2017 年 5 月 2 日

1　圏の fibration

　C, F を圏，$P\colon F \longrightarrow C$ を関手とする．$a \in C$，$u \in F$ を対象として $Pu = a$ となるとき，ここでは $u \longmapsto a$ と書く．よって $f\colon a \longrightarrow b$ を C の射，$k\colon u \longrightarrow v$ を F の射として $Pu = a$，$Pv = b$ となるとき次のような図式で表す.

$$\begin{tikzcd} u \arrow[r, "k"] \arrow[d, mapsto] & v \arrow[d, mapsto] \\ a \arrow[r, "f"'] & b \end{tikzcd}$$

更に $Pk = f$ となっているとき，この四角は可換であるという．
　また，ここでは関手 $P\colon F \longrightarrow C$ と対象 $a \in C$ に対して部分圏 $F(a) \subset F$ を

- $\mathrm{Ob}(F(a)) := P^{-1}(a)$.
- $\mathrm{Mor}(F(a)) := P^{-1}(\mathrm{id}_a)$

で定める．圏 $F(a)$ を P の a におけるファイバーという．fibration とは, $a \in C$ を動かしたときにファイバー $F(a)$ が良いふるまいをするような P のことをいう．まず fibration の簡単な場合として，discrete fibration を見る.

定義. 関手 $P\colon F \longrightarrow C$ が C 上の discrete fibration
$\Longleftrightarrow$ 任意の対象 $v \in F$ と C の射 $f\colon a \longrightarrow Pv$ に対して，$u \in F$ と $k\colon u \longrightarrow v$ が一意に

存在して $Pk=f$ となる．

$$\begin{tikzcd} u \arrow[r, dashed, "k"] \arrow[d, mapsto] & v \arrow[d, mapsto] \\ a \arrow[r, "f"'] & Pv \end{tikzcd}$$

$P\colon F \longrightarrow C$ を discrete fibration とすると，対象 $a \in C$ に対して $P(k) = \mathrm{id}_a$ となるような k は id しかない．故にファイバー $F(a)$ は離散圏となる．よって $F(a)$ を集合 $\{u \in \mathrm{Ob}(F) \mid Pu = a\}$ と思ってよい．次に C の射 $f\colon a \longrightarrow b$ と元 $v \in F(b)$ を取る．discrete fibration の定義から $Pk = f$ となる F の射 k が一意に取れるので，これを使って $Ff(v) := \mathrm{dom}(k)$ と定める．

$$\begin{tikzcd} Ff(v) \arrow[r, dashed, "k"] \arrow[d, mapsto] & v \arrow[d, mapsto] \\ a \arrow[r, "f"'] & b \end{tikzcd}$$

これは写像 $Ff\colon F(b) \longrightarrow F(a)$ を定める．また一意性 (discrete fibration の定義) から明らかに $F(g \circ f) = Ff \circ Fg$，$F(\mathrm{id}) = \mathrm{id}$ である．故にこれは関手 $F\colon C^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Set}$ を定める．

次に $P\colon F \longrightarrow C$，$Q\colon G \longrightarrow C$ を C 上の discrete fibration とする．P から Q への射とは関手 $K\colon F \longrightarrow G$ で $QK = P$ を満たすものである．

$$\begin{tikzcd} F \arrow[rr, "K"] \arrow[dr, "P"'] & {} \arrow[d, phantom, "="] & G \arrow[dl, "Q"] \\ & C & \end{tikzcd}$$

$u \in F(a)$ とすると $Pu = a$ なので $Q(K(u)) = a$，即ち $Ku \in G(a)$ である．よって写像 $\varphi_a\colon F(a) \longrightarrow G(a)$ が $\varphi_a(u) := Ku$ で定義できる．この φ_a は自然変換 $\varphi\colon F \Longrightarrow G$ を定める．

∵) $f\colon a \longrightarrow b$ とする．次の **Set** での図式が可換であることを示せばよい．

$$\begin{tikzcd} Fa \arrow[r, "\varphi_a"] & Ga \\ Fb \arrow[u, "Ff"] \arrow[r, "\varphi_b"'] & Gb \arrow[u, "Gf"'] \end{tikzcd}$$

$v \in Fb$ を取る．まず $Gf \circ \varphi_b(v) = Gf(K(v)) \in G$ は次の図式により定まる．

$$\begin{tikzcd} Gf(Kv) \arrow[r, dashed] \arrow[d, mapsto] & Kv \arrow[d, mapsto] \\ a \arrow[r, "f"'] & b \end{tikzcd}$$

一方 $Ff(v) \in F$ は次の図式により定まる．

$$\begin{tikzcd} Ff(v) \arrow[r, dashed, "k"] \arrow[d, mapsto] & v \arrow[d, mapsto] \\ a \arrow[r, "f"'] & b \end{tikzcd}$$

このとき $P(k) = f$ だから $Q(K(k)) = f$ となる．

$$\begin{tikzcd} K(Ff(v)) \arrow[r, "K(k)"] \arrow[d, mapsto] & Kv \arrow[d, mapsto] \\ a \arrow[r, "f"'] & b \end{tikzcd}$$

Q が discrete fibration だから一意性により $Gf(Kv) = K(Ff(v))$ が分かる．故に φ の定義から $Gf \circ \varphi_b = \varphi_a \circ Ff$ である．

C 上の discrete fibration がなす圏を $\mathrm{DFib}(C)$ と書くことにする．

命題 1. 圏同型 $\mathrm{DFib}(C) = \widehat{C}$ が成り立つ．

証明. 既に示したように, discrete fibration $P\colon F \longrightarrow C$ から $F \in \widehat{C}$ が, 射 $K \in \mathrm{DFib}(C)$ から $\varphi \in \widehat{C}$ が定まるのであった．これは明らかに関手 $\mathrm{DFib}(C) \longrightarrow \widehat{C}$ を定める．

逆に $F \in \widehat{C}$ に対してコンマ圏の射影 $P\colon y{\downarrow}F \longrightarrow C$ を考える．

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{1} \arrow[r, "F"] & \widehat{C} \\
y{\downarrow}F \arrow[u] \arrow[r, "P"'] \arrow[ur, phantom, "\Nwarrow"] & C \arrow[u, "y"']
\end{tikzcd}$$

$P\colon y{\downarrow}F \longrightarrow C$ は discrete fibration である．

∵) $\langle b,x\rangle \in y{\downarrow}F$ と $f\colon a \longrightarrow b$ を取る．このとき $f\colon \langle a,Ff(x)\rangle \longrightarrow \langle b,x\rangle$ である．

$$\begin{tikzcd}
\langle a,Ff(x)\rangle \arrow[r, dashed, "f"] \arrow[d, mapsto] & \langle b,x\rangle \arrow[d, mapsto] \\
a \arrow[r, "f"'] & b
\end{tikzcd}$$

この図式を可換にするような射は明らかにこの f しかないから $P\colon y{\downarrow}F \longrightarrow C$ は discrete fibration である．

$F,G \in \widehat{C}$ として $\varphi\colon F \Longrightarrow G$ を自然変換とすれば，コンマ圏の普遍性から関手 $K\colon y{\downarrow}F \longrightarrow y{\downarrow}G$ が得られる．

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbf{1} \arrow[r, "G"] & \widehat{C} \\
 & y{\downarrow}G \arrow[u] \arrow[r, "Q"'] \arrow[ur, phantom, "\Nwarrow"] & C \arrow[u, "y"'] \\
y{\downarrow}F \arrow[uur, bend left] \arrow[ur, dashed, "K"'] \arrow[urr, bend right, "P"'] & &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
 & \mathbf{1} \arrow[r, bend left, "G"] \arrow[r, bend right, "F"'] \arrow[r, phantom, "\Uparrow\varphi"] & \widehat{C} \\
 & & C \arrow[u, "y"'] \\
y{\downarrow}F \arrow[uur, bend left] \arrow[urr, bend right, "P"'] & &
\end{tikzcd}$$

この K は C 上の discrete fibration の射 $K\colon P \longrightarrow Q$ を与える．こうして関手 $\widehat{C} \longrightarrow \mathrm{DFib}(C)$ が定まる．これらが互いに逆を与えることを示せばよい．

まず discrete fibration $P\colon F \longrightarrow C$ から定まる $F \in \widehat{C}$ を取る．

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ob}(y{\downarrow}F) &= \{\langle a,u\rangle \mid a \in C,\ u \in F(a)\} \\
&= \{\langle a,u\rangle \mid a \in C,\ u \in F,\ Pu = a\} \\
&= \mathrm{Ob}(F) \\
\mathrm{Hom}_{y{\downarrow}F}(\langle a,u\rangle,\langle b,v\rangle) &= \{f\colon a \longrightarrow b \mid Ff(v) = u\} \\
&= \{k\colon u \longrightarrow v\}
\end{aligned}$$

だから $(P\colon F \longrightarrow C) = (y{\downarrow}F \longrightarrow C)$ である．

逆に $F \in \widehat{C}$ に対して discrete fibration $P\colon y{\downarrow}F \longrightarrow C$ を取ったとき，$a \in C$ に対して $(y{\downarrow}F)(a) = \{\langle a, u\rangle \mid u \in Fa\} = Fa$ である． □

定義. 関手 $P\colon F \longrightarrow C$ が C 上の discrete opfibration
$\iff P^{\mathrm{op}}\colon F^{\mathrm{op}} \longrightarrow C^{\mathrm{op}}$ が C^{op} 上の discrete fibration.

関手 $C^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Set}$ に対応するのが discrete fibration だったのに対して，profunctor $A \nrightarrow B$，即ち関手 $B^{\mathrm{op}} \times A \longrightarrow \mathbf{Set}$ に対応するのが two-sided discrete fibration である．

定義. 関手の span $A \xleftarrow{Q} E \xrightarrow{P} B$ が A から B への two-sided discrete fibration とは，以下の条件を満たすことをいう．

(1) 対象 $u \in E$ と A の射 $f\colon Qu \longrightarrow a$ に対して，E の射 $k\colon u \longrightarrow v$ が一意に存在して $Qk = f$，$Pk = \mathrm{id}$ となる．
(2) 対象 $v \in E$ と B の射 $g\colon b \longrightarrow Pv$ に対して，E の射 $k\colon u \longrightarrow v$ が一意に存在して $Pk = g$，$Qk = \mathrm{id}$ となる．
(3) E の任意の射 $k\colon u \longrightarrow v$ を取る．$Qk\colon Qu \longrightarrow Qv$ に対して条件 1 で得られる射を k'，$Pk\colon Pu \longrightarrow Pv$ に対して条件 2 で得られる射を k'' とする．このとき $\mathrm{cod}(k') = \mathrm{dom}(k'')$ であり，$k'' \circ k' = k$ となる．

$$\begin{tikzcd}
 & u \arrow[r, "k'"] \arrow[rr, bend left, "k"] \arrow[dl, mapsto] \arrow[drr, mapsto] & w \arrow[r, "k''"] \arrow[dl, mapsto] \arrow[dr, mapsto] & v \arrow[dll, mapsto] \arrow[dr, mapsto] & \\
Qu \arrow[r, "Qk"'] & Qv & & Pu \arrow[r, "Pk"'] & Qv
\end{tikzcd}$$

A から B への two-sided discrete fibration がなす充満部分圏を $\mathrm{DFib}(A, B) \subset \mathrm{Span}(A, B)$ と書く．

命題 2. $\mathrm{DFib}(A, B) = \mathbf{Set}^{B^{\mathrm{op}} \times A}$.

証明. 略 □

命題 3. 関手 $P\colon E \longrightarrow B$ が discrete fibration
$\iff \mathbf{1} \leftarrow E \xrightarrow{P} B$ が two-sided discrete fibration.

証明. ($\Longrightarrow$) $P\colon E \longrightarrow B$ を discrete fibration として定義の 3 条件を示す．一意に定まる関手 $E \longrightarrow \mathbf{1}$ を Q と書く.

(1) P が discrete fibration だから，$Pk = \mathrm{id}$ となる E の射 k は id しかないが，この k は $Qk = \mathrm{id}$ を満たすのでよい.

(2) $v \in E$, $b \in B$, $g\colon b \longrightarrow Pv$ とする．P が discrete fibration だから，$Pk = g$ となる E の射 k が一意に存在するが，この k は $Qk = \mathrm{id}$ を満たすのでよい.

(3) $k\colon u \longrightarrow v$ を E の射とすると条件 1，2 で得られる射はそれぞれ id, k であるから $k \circ \mathrm{id} = k$ となりよい.

($\Longleftarrow$) 明らか. $\square$

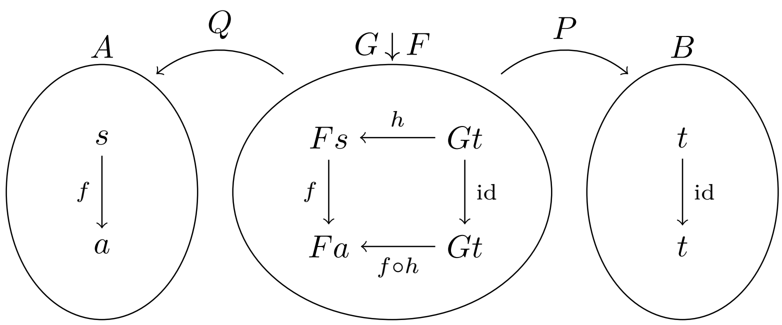
同様にして

命題 4. 関手 $Q\colon E \longrightarrow A$ が discrete opfibration
$\Longleftrightarrow A \xleftarrow{Q} E \to \mathbf{1}$ が two-sided discrete fibration. $\square$

定理 5. $A \xrightarrow{F} C \xleftarrow{G} B$ を関手とするとき，コンマ圏が与える span $A \xleftarrow{Q} G{\downarrow}F \xrightarrow{P} B$ は two-sided discrete fibration である.[*1]

証明. まず $A \xleftarrow{Q} G{\downarrow}F \xrightarrow{P} B$ が two-sided discrete fibration の 3 条件を満たすことを示す.

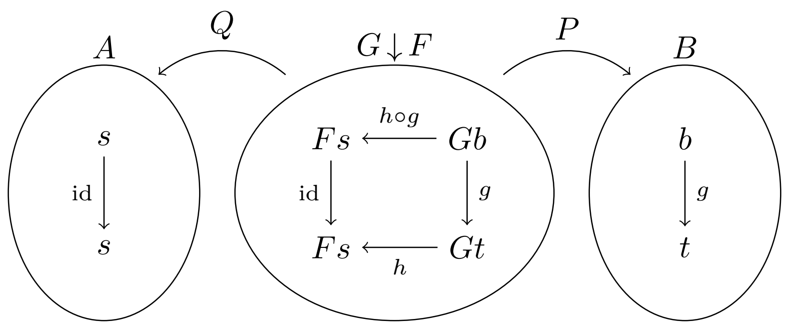
(1) 対象 $u := \langle t, s, h\rangle \in G{\downarrow}F$ と A の射 $f\colon Qu = s \longrightarrow a$ に対して, $Qk = f$, $Pk = \mathrm{id}$ となる $F{\downarrow}G$ の射は明らかに $k = \langle \mathrm{id}, f\rangle\colon \langle t, s, h\rangle \longrightarrow \langle t, a, f \circ h\rangle$ のみである.



(2) $v := \langle s, t, h\rangle \in F{\downarrow}G$ と B の射 $g\colon b \longrightarrow Pv = t$ に対して，$Qk = \mathrm{id}$，$Pk = g$ と

[*1] 逆に，任意の two-sided discrete fibration はコンマ圏を使って表されるそうですがまだ証明を書いていません.

なる $F{\downarrow}G$ の射は明らかに $k = \langle g, \mathrm{id}\rangle\colon \langle b, s, h \circ g\rangle \longrightarrow \langle t, s, h\rangle$ のみである．



(3) $F{\downarrow}G$ の射 $\langle g_0, g_1\rangle\colon \langle s, t, h\rangle \longrightarrow \langle s', t', h'\rangle$ を取る．このとき条件 2，1 から得られる射はそれぞれ $\langle \mathrm{id}, g_1\rangle$，$\langle g_0, \mathrm{id}\rangle$ だから $\langle g_0, \mathrm{id}\rangle \circ \langle \mathrm{id}, g_1\rangle = \langle g_0, g_1\rangle$ となる． □

関手 $C^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Set}$ ではなく，pseudofunctor $C^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Cat}$ に対応するのが fibration である．(圏 C を 2-morphism が id のみの 2-category と見なしている)

定義. $P\colon F \longrightarrow C$ を関手とする．F の射 $k\colon u \longrightarrow v$ が P-cartesian
$\iff$ F の射 $l\colon w \longrightarrow v$ と C の射 $g\colon Pw \longrightarrow Pu$ で $Pk \circ g = Pl$ となるものに対して，$m\colon w \longrightarrow u$ が一意に存在して $Pm = g$，$k \circ m = l$ となる．即ち次の図式が可換となる．

$$\begin{tikzcd}
w \arrow[dr, dashed, "m"'] \arrow[drr, bend left, "l"] \arrow[dd, mapsto] & & \\
& u \arrow[r, "k"'] \arrow[dd, mapsto] & v \arrow[dd, mapsto] \\
Pw \arrow[dr, "g"'] \arrow[drr, bend left, "Pl"] & & \\
& Pu \arrow[r, "Pk"'] & Pv
\end{tikzcd}$$

このとき u を v の Pk に沿った pullback という．[*2]

定義. 関手 $P\colon F \longrightarrow C$ が C 上の fibration (もしくは Grothendieck fibration もしくは fibered category)
$\iff$ F の対象 $v \in F$ と C の射 $f\colon a \longrightarrow Pv$ に対して P-cartesian な射 $k\colon u \longrightarrow v$ で

[*2] この定義は，「可換」の意味が通常と違うだけで，普通の pullback の定義と同様である．

$Pk = f$ となるものが存在する．

$$\begin{tikzcd} u \arrow[r, dashed, "k"] \arrow[d, mapsto] \arrow[dr, phantom, "P\text{-cartesian}"] & v \arrow[d, mapsto] \\ a \arrow[r, "f"'] & Pv \end{tikzcd}$$

命題 6. 関手 $P\colon F \longrightarrow C$ が discrete fibration
$\iff P\colon F \longrightarrow C$ が fibration で，任意の $a \in C$ に対して $F(a)$ が離散圏となる．

証明. ($\Longrightarrow$) $P\colon F \longrightarrow C$ が discrete fibration であるとする．各ファイバー $F(a)$ は離散圏だったから，fibration であることを示せばよい．その為に F の対象 $v \in F$ と C の射 $f\colon a \longrightarrow Pv$ を任意に取る．仮定より F の射 $k\colon u \longrightarrow v$ が一意に存在して $Pk = f$ となる．この k が P-cartesian であることを示せばよい．その為に F の射 $l\colon w \longrightarrow v$ と C の射 $g\colon Pw \longrightarrow a$ で $f \circ g = Pl$ となるものを取る．

$$\begin{tikzcd} w \arrow[dr, dashed, "m"'] \arrow[drr, bend left, "l"] \arrow[dd, mapsto] & & \\ & u \arrow[r, "k"'] \arrow[dd, mapsto] & v \arrow[dd, mapsto] \\ Pw \arrow[dr, "g"'] \arrow[drr, bend left, "Pl"] & & \\ & a \arrow[r, "f"'] & Pv \end{tikzcd}$$

P が discrete fibration だから，$m\colon w \longrightarrow u$ が一意に存在して $Pm = g$ となる．このとき $P(k \circ m) = Pk \circ Pm = f \circ g = Pl$ だから，再び discrete fibration の条件より $k \circ m = l$ でなければならない．故に k は P-cartesian である．

($\Longleftarrow$) fibration の定義から k は存在するので，一意性を示せばよい．$k\colon u \longrightarrow v$, $k'\colon u' \longrightarrow v$ が $Pk = f$，$Pk' = f$ を満たすとする．次の図式の実線部分が可換だから，点線の射 m が一意に存在して可換となる．

$$\begin{tikzcd} u' \arrow[dr, dashed, "m"'] \arrow[drr, bend left, "k'"] \arrow[dd, mapsto] & & \\ & u \arrow[r, "k"'] \arrow[dd, mapsto] & v \arrow[dd, mapsto] \\ a \arrow[dr, "\mathrm{id}_a"'] \arrow[drr, bend left, "f"] & & \\ & a \arrow[r, "f"'] & Pv \end{tikzcd}$$

今 $F(a)$ が離散圏だから，$Pm = \mathrm{id}_a$ より $m = \mathrm{id}$ でなければならない．よって $k = k'$ である． □

命題 7. 同型射は P-cartesian である．

証明. $k\colon u \longrightarrow v$ を同型射として，次が可換であるとする．

$$
\begin{tikzcd}
w \arrow[rrd, bend left, "l"] \arrow[dd, mapsto] & & \\
& u \arrow[r, "k"'] \arrow[dd, mapsto] & v \arrow[dd, mapsto] \\
Pw \arrow[rrd, bend left, "Pl"] \arrow[rd, "g"'] & & \\
& Pu \arrow[r, "Pk"'] & Pv
\end{tikzcd}
$$

このとき $m := k^{-1} \circ l$ とすれば $k \circ m = l$，$Pm = Pk^{-1} \circ Pl = g$ となる．このような m は明らかに一意だから k は P-cartesian である． □

命題 8. $k\colon u \longrightarrow v$ が P-cartesian で Pk が同型ならば，k も同型である．

証明. $k\colon u \longrightarrow v$ が P-cartesian だから，$m\colon v \longrightarrow u$ が一意に存在して $Pm = (Pk)^{-1}$，$k \circ m = \mathrm{id}_v$ となる．

$$
\begin{tikzcd}
v \arrow[rrd, bend left, "\mathrm{id}_v"] \arrow[rd, dashed, "m"'] \arrow[dd, mapsto] & & \\
& u \arrow[r, "k"'] \arrow[dd, mapsto] & v \arrow[dd, mapsto] \\
Pv \arrow[rrd, bend left, "\mathrm{id}_{Pv}"] \arrow[rd, "(Pk)^{-1}"'] & & \\
& Pu \arrow[r, "Pk"'] & Pv
\end{tikzcd}
$$

よって $m \circ k = \mathrm{id}_u$ を示せばよい．次の二つの図式は可換である．

$$
\begin{tikzcd}
u \arrow[r, "k"] \arrow[dd, mapsto] & v \arrow[rrd, bend left, "\mathrm{id}_v"] \arrow[rd, "m"] \arrow[dd, mapsto] & & \\
& & u \arrow[r, "k"'] \arrow[dd, mapsto] & v \arrow[dd, mapsto] \\
Pu \arrow[r, "Pk"] \arrow[rrd, bend right, "\mathrm{id}_{Pu}"'] & Pv \arrow[rrd, bend left, "\mathrm{id}_{Pv}"] & & \\
& & Pu \arrow[r, "Pk"'] & Pv
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
u \arrow[r, "k"] \arrow[rrd, bend right, "\mathrm{id}_u"'] \arrow[dd, mapsto] & v \arrow[rrd, bend left, "\mathrm{id}_v"] \arrow[dd, mapsto] & & \\
& & u \arrow[r, "k"'] \arrow[dd, mapsto] & v \arrow[dd, mapsto] \\
Pu \arrow[r, "Pk"] \arrow[rrd, bend right, "\mathrm{id}_{Pu}"'] & Pv \arrow[rrd, bend left, "\mathrm{id}_{Pv}"] & & \\
& & Pu \arrow[r, "Pk"'] & Pv
\end{tikzcd}
$$

故に P-cartesian の普遍性から $m \circ k = \mathrm{id}_u$ である． □

命題 9. $k\colon u \longrightarrow v$, $j\colon v \longrightarrow w$ が P-cartesian ならば $j \circ k\colon u \longrightarrow w$ も P-cartesian である.

証明. F の射 $l\colon x \longrightarrow w$ と C の射 $g\colon Px \longrightarrow Pu$ が $P(j \circ k) \circ g = Pl$ を満たすとする.

$$
\begin{tikzcd}
x \arrow[rrrd, bend left, "l"] \arrow[rrd, dashed, "m"'] \arrow[dd, mapsto] & & & \\
& u \arrow[r, "k"'] \arrow[dd, mapsto] & v \arrow[r, "j"'] \arrow[dd, mapsto] & w \arrow[dd, mapsto] \\
Px \arrow[rrrd, bend left, "Pl"] \arrow[rd, "g"'] & & & \\
& Pu \arrow[r, "Pk"'] & Pv \arrow[r, "Pj"'] & Pw
\end{tikzcd}
$$

j が P-cartesian だから，ある $m\colon x \longrightarrow v$ が一意に存在して $j \circ m = l$, $Pm = Pk \circ g$ を満たす.

$$
\begin{tikzcd}
x \arrow[rrd, bend left, "m"] \arrow[rd, dashed, "n"'] \arrow[dd, mapsto] & & \\
& u \arrow[r, "k"'] \arrow[dd, mapsto] & v \arrow[dd, mapsto] \\
Px \arrow[rrd, bend left, "Pm"] \arrow[rd, "g"'] & & \\
& Pu \arrow[r, "Pk"'] & Pv
\end{tikzcd}
$$

よって k が P-cartesian であることより $n\colon x \longrightarrow u$ が一意に存在して $k \circ n = m$, $Pn = g$ となる．このとき

$$
\begin{tikzcd}
x \arrow[rrrd, bend left, "l"] \arrow[rd, "n"'] \arrow[dd, mapsto] & & & \\
& u \arrow[r, "k"'] \arrow[dd, mapsto] & v \arrow[r, "j"'] & w \arrow[dd, mapsto] \\
Px \arrow[rrrd, bend left, "Pl"] \arrow[rd, "g"'] & & & \\
& Pu \arrow[r, "Pk"'] & Pv \arrow[r, "Pj"'] & Pw
\end{tikzcd}
$$

は可換である．またこのような n は明らかに一意である．従って $j \circ k$ は P-cartesian である. $\square$

定義. $P\colon F \longrightarrow C$, $Q\colon G \longrightarrow C$ を C 上の fibration とする．これらの間の射とは，関手 $K\colon F \longrightarrow G$ であって以下の条件を満たすものを言う.

(1) $QK = P$ である.

(2) $k \in F$ が P-cartesian ならば $Kf \in G$ も Q-cartesian である.

C 上の fibration，その間の射，自然変換がなす 2-category を $\mathrm{Fib}(C) \subset \mathbf{Cat}/C$ と書く．

2 strict 2-category の中での fibration

fibration は strict 2-category の 1-morphism に一般化される．

定義. strict 2-category $\mathcal{C}$ の 1-morphism $p\colon a \longrightarrow b$ が fibration
$\iff$ 任意の $u \in \mathcal{C}$ に対して関手 $p \bullet -\colon \mathcal{C}(u,a) \longrightarrow \mathcal{C}(u,b)$ が fibration であり，また任意の $k\colon v \longrightarrow u$ に対して $-\bullet k\colon \mathcal{C}(u,a) \longrightarrow \mathcal{C}(v,a)$ が $(p\bullet -)$-cartesian を $(p\bullet -)$-cartesian に写す．

この定義を具体的に書き下すと次のようになる: 任意の $u \in \mathcal{C}$, $f\colon u \longrightarrow a$, $g\colon u \longrightarrow b$, $\theta\colon g \Longrightarrow p \circ f$ に対して，ある $f'\colon u \longrightarrow a$ と p-cartesian な $\alpha\colon f' \Longrightarrow f$ が存在して $p \bullet \alpha = \theta$ となる．

$$
\begin{tikzcd}
u \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "f'"'] \arrow[r, phantom, "\Uparrow\alpha"] & a \arrow[r, "p"] & b
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
u \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[rr, bend right, "g"'] \arrow[r, phantom, shift right=2, "\theta\Uparrow"] & a \arrow[r, "p"] & b
\end{tikzcd}
$$

ここで

定義. $p\colon a \longrightarrow b$ とする．$\alpha\colon f' \Longrightarrow f\colon u \longrightarrow a$ が p-cartesian
$\iff$ 任意の $k\colon v \longrightarrow u$ に対して $\alpha \bullet k \in \mathcal{C}(v,a)$ が $(p \bullet -)$-cartesian となる．

この定義を具体的に書き下すと次のようになる: $v \in \mathcal{C}$, $k\colon v \longrightarrow u$, $f''\colon v \longrightarrow a$, $\xi\colon f'' \Longrightarrow f \circ k$, $\gamma\colon p \circ f'' \Longrightarrow p \circ f' \circ k$ が

$$
\begin{tikzcd}
v \arrow[r, "k"] \arrow[drr, bend right, "f''"'] & u \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "f'"'] \arrow[r, phantom, "\Uparrow\alpha"] \arrow[d, phantom, "\gamma\Uparrow"] & a \arrow[r, "p"] & b \\
 & & a \arrow[ur, "p"'] &
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
v \arrow[r, "k"] \arrow[rr, bend right=60, "f''"'] & u \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, phantom, shift right=3, "\Uparrow\xi"] & a \arrow[r, "p"] & b
\end{tikzcd}
$$

を満たすならば，$\zeta\colon f'' \Longrightarrow f' \circ k$ が一意に存在して

$$
\begin{tikzcd}
v \arrow[r, "k"] \arrow[rr, bend right=60, "f''"'] & u \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "f'"'] \arrow[r, phantom, "\Uparrow\alpha"] \arrow[d, phantom, "\zeta\Uparrow"] & a \\
 & &
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
v \arrow[r, "k"] \arrow[rr, bend right=60, "f''"'] & u \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, phantom, shift right=3, "\Uparrow\xi"] & a
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
v \arrow[r, "k"] \arrow[rr, bend right=50, "f''"'] & u \arrow[r, bend right, "f'"] \arrow[d, phantom, "\zeta\Uparrow"] & a \arrow[r, "p"] & b
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
v \arrow[r, "k"] \arrow[drr, bend right, "f''"'] & u \arrow[r, bend right, "f'"] \arrow[d, phantom, "\gamma\Uparrow"] & a \arrow[r, "p"] & b \\
 & & a \arrow[ur, "p"'] &
\end{tikzcd}
$$

となる．

命題 10. 2-category **Cat** における fibration は，先に定義した fibration (Grothendieck fibration) と一致する．

証明. 関手 $P\colon A \longrightarrow B$ が **Cat** の 1-morphism として fibration であれば，$P = P \bullet -\colon A = \mathbf{Cat}(\mathbf{1}, A) \longrightarrow \mathbf{Cat}(\mathbf{1}, B) = B$ が Grothendieck fibration である．故に Grothendieck fibration $P\colon A \longrightarrow B$ が **Cat** の 1-morphism として fibration であることを示せばよい．

その為に任意の圏 U，関手 $F\colon U \longrightarrow A$，$G\colon U \longrightarrow B$，自然変換 $\theta\colon G \Longrightarrow PF$ を取る．

$$
\begin{tikzcd}
U \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[rr, bend right, "G"'] & A \arrow[d, phantom, "\theta\Uparrow"] \arrow[r, "P"] & B
\end{tikzcd}
$$

$u \in U$ に対して $\theta_u\colon Gu \longrightarrow PFu$ である．今 P が Grothendieck fibration だから，P-cartesian な射 $\alpha_u\colon a_u \longrightarrow Fu$ が存在して $P(\alpha_u) = \theta_u$ とできる．

$$
\begin{tikzcd}
a_u \arrow[r, dashed, "\alpha_u"] \arrow[d, mapsto] & Fu \arrow[d, mapsto] \\
Gu \arrow[r, "\theta_u"'] & PFu
\end{tikzcd}
$$

この a_u を使って $F'(u) := a_u$ と定義すると，この F' は関手 $U \longrightarrow A$ を与える．

∵) 圏 U の射 $k\colon u \longrightarrow v$ に対して，次の図式から得られる射を $F'(k)$ と定義すればよい．

$$
\begin{tikzcd}
F'(u) \arrow[rr, "\alpha_u"] \arrow[dr, dashed, "F'(k)"'] \arrow[dd, mapsto] & & Fu \arrow[dr, "Fk"] \arrow[dd, mapsto] & \\
 & F'(v) \arrow[rr, "\alpha_v"'] \arrow[dd, mapsto] & & Fv \arrow[dd, mapsto] \\
Gu \arrow[rr, "\theta_u"] \arrow[dr, "Gk"'] & & PFu \arrow[dr, "PFk"] & \\
 & Gv \arrow[rr, "\theta_v"'] & & PFv
\end{tikzcd}
$$

このとき，F' の定義から明らかに $\alpha\colon F' \Longrightarrow F$ は自然変換で

$$
\begin{tikzcd}
U \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, bend right, "F'"'] \arrow[r, phantom, "\Uparrow\alpha"] & A \arrow[r, "P"] & B
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
U \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[rr, bend right, "G"'] \arrow[r, phantom, "\theta\Uparrow"] & A \arrow[r, "P"] & B
\end{tikzcd}
$$

となる．この α が (**Cat** の 2-morphism の意味で) P-cartesian であることを示せばよい．その為に関手 $K\colon V \longrightarrow U$，$F''\colon U \longrightarrow A$ と自然変換 $\xi\colon F'' \Longrightarrow FK$，$\gamma\colon PF'' \Longrightarrow PF'K$ が

$$
\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "K"] \arrow[drr, bend right, "F''"'] & U \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, bend right, "F'"'] \arrow[r, phantom, "\Uparrow\alpha"] \arrow[d, phantom, "\gamma\Uparrow"] & A \arrow[r, "p"] & B \\
& & A \arrow[ur, "P"'] &
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "K"] \arrow[rr, bend right=60, "F''"'] & U \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, phantom, "\Uparrow\xi"] & A \arrow[r, "P"] & B
\end{tikzcd}
$$

を満たすとする．すると $v \in V$ に対して $P(\alpha_{Kv}) \circ \gamma_v = P(\xi_v)$ である．

$$
\begin{tikzcd}
F''v \arrow[rr, bend left, "\xi_v"] \arrow[dr, dashed, "\zeta_v"'] \arrow[d, mapsto] & & FKv \arrow[d, mapsto] \\
& F'Kv \arrow[ur, "\alpha_{Kv}"'] \arrow[d, mapsto] & \\
PF''v \arrow[rr, bend left, "P(\xi_v)"] \arrow[r, "\gamma_v"'] & PF'Kv \arrow[r, "P(\alpha_{Kv})"'] & PFKv
\end{tikzcd}
$$

α_{Kv} が P-cartesian だったから，$\zeta_v\colon F''v \longrightarrow F'Kv$ が一意に存在して可換となる．この ζ_v は自然変換 $\zeta\colon F'' \Longrightarrow F'K$ を与える．

∵) $k\colon u \longrightarrow v$ に対して，定義から，次の二つの図式が可換である．

$$
\begin{tikzcd}
F''u \arrow[rr, bend left, "\xi_u"] \arrow[dr, "\zeta_u"'] \arrow[ddd, mapsto] & & & \\
& F'Ku \arrow[r, "\alpha_{Ku}"] \arrow[dr, "F'Kk"'] \arrow[ddd, mapsto] & FKu \arrow[dr, "FKk"] \arrow[ddd, mapsto] & \\
& & F'Kv \arrow[r, "\alpha_{Kv}"] \arrow[ddd, mapsto] & FKv \arrow[ddd, mapsto] \\
PF''u \arrow[rr, bend left, "P(\xi_u)"] \arrow[dr, "\gamma_u"'] & & & \\
& PF'Ku \arrow[r, "P(\alpha_{Ku})"] \arrow[dr, "PF'Kk"'] & PFKu \arrow[dr, "PFKk"] & \\
& & PF'Kv \arrow[r, "P(\alpha_{Kv})"'] & PFKv
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
F''u \arrow[rrr, bend left=10, "\xi_u"] \arrow[dr, "F''k"'] \arrow[ddd, mapsto] & & & FKu \arrow[ddr, "FKk"] \arrow[ddd, mapsto] & \\
& F''v \arrow[drrr, "\xi_v"] \arrow[dr, "\zeta_v"'] \arrow[ddd, mapsto] & & & \\
& & F'Kv \arrow[rr, "\alpha_{Kv}"] \arrow[ddd, mapsto] & & FKv \arrow[ddd, mapsto] \\
PF''u \arrow[rrr, "P(\xi_u)"] \arrow[dr, "PF''k"'] & & & PFKu \arrow[ddr, "PFKk"] & \\
& PF''v \arrow[drrr, "P(\xi_v)"] \arrow[dr, "\gamma_v"'] & & & \\
& & PF'Kv \arrow[rr, "P(\alpha_{Kv})"'] & & PFKv
\end{tikzcd}
$$

故に α_{Kv} の普遍性から $F'Kk \circ \zeta_u = \zeta_v \circ F''k$ となり，$\zeta\colon F'' \Longrightarrow F'K$ が自然変換であることが分かる.

また定義から明らかに

$$
\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "K"] \arrow[rr, bend right=60, "F''"'] & U \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, bend right, "F'"'] \arrow[r, phantom, "\Uparrow\alpha"] \arrow[d, phantom, "\zeta\Uparrow"] & A \\
& {} &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "K"] \arrow[rr, bend right=60, "F''"'] & U \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[d, phantom, "\Uparrow\xi"] & A \\
& {} &
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "K"] \arrow[rr, bend right=60, "F''"'] & U \arrow[r, bend right, "F'"'] \arrow[d, phantom, "\zeta\Uparrow"] & A \arrow[r, "P"] & B \\
& {} & &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "K"] \arrow[drr, bend right, "F''"'] & U \arrow[r, bend right, "F'"'] \arrow[d, phantom, "\gamma\Uparrow"] & A \arrow[r, "P"] & B \\
& {} & a \arrow[ur, "P"'] &
\end{tikzcd}
$$

を満たす □

命題 11. 有限完備な 2-category $\mathcal{C}$ の 1-morphism $p\colon a \longrightarrow b$ について，以下は同値.

(1) p は fibration.

(2) 任意の $j\colon x \longrightarrow b$ に対して，コンマ対象の普遍性から得られる $i\colon j{\downarrow_=}p \longrightarrow j{\downarrow}p$ は $\mathcal{C}/x$ における右随伴を持つ.

$$
\begin{tikzcd}
& a \arrow[r, "p"] & b \\
& j{\downarrow}p \arrow[u, "p_1"] \arrow[r, "p_0"'] \arrow[ur, phantom, "\Nwarrow\eta"] & x \arrow[u, "j"'] \\
j{\downarrow_=}p \arrow[uur, bend left, "q_1"] \arrow[ur, dashed, "i"'] \arrow[urr, bend right, "q_0"'] \arrow[u, phantom, "="] & &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
& a \arrow[r, "p"] & b \\
& {} \arrow[ur, phantom, "="] & x \arrow[u, "j"'] \\
j{\downarrow_=}p \arrow[uur, bend left, "q_1"] \arrow[urr, bend right, "q_0"'] & &
\end{tikzcd}
$$

(3) コンマ対象の普遍性から得られる $i\colon a \longrightarrow \mathrm{id}_b{\downarrow}p$ は $\mathcal{C}/b$ における右随伴を持つ.

$$
\begin{tikzcd}
 & a \arrow[r, "p"] & b \\
 & \mathrm{id}_b{\downarrow}p \arrow[u, "p_1"] \arrow[r, "p_0"'] \arrow[ur, phantom, "\Uparrow\eta"] & b \arrow[u, "\mathrm{id}_b"'] \\
a \arrow[uur, bend left, "\mathrm{id}_a"] \arrow[ur, dashed, "i"'] \arrow[urr, bend right, "p"'] & &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
 & a \arrow[r, "p"] & b \\
 & & b \arrow[u, "\mathrm{id}_b"'] \\
a \arrow[uur, bend left, "\mathrm{id}_a"] \arrow[urr, bend right, "p"'] & &
\end{tikzcd}
$$

証明. $(1 \Longrightarrow 2)$ $p\colon a \longrightarrow b$ が fibration だから $k\colon j{\downarrow}p \longrightarrow a$ と p-cartesian な $\tau\colon k \Longrightarrow p_1$ が存在して $p \circ k = j \circ p_0$，$p \bullet \tau = \eta$ となる.

$$
\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "p"] & b \\
j{\downarrow}p \arrow[u, bend left, "p_1"] \arrow[u, bend right, "k"'] \arrow[u, phantom, "\overset{\Leftarrow}{\tau}"] \arrow[r, "p_0"'] & x \arrow[u, "j"']
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "p"] & b \\
j{\downarrow}p \arrow[u, bend left, "p_1"] \arrow[r, "p_0"'] \arrow[ur, phantom, "\Uparrow\eta"] & x \arrow[u, "j"']
\end{tikzcd}
$$

故に strict 2-pullback $j{\downarrow}_{=}p$ の 1-次元的普遍性から

$$
\begin{tikzcd}
 & a \arrow[r, "p"] & b \\
 & j{\downarrow}_{=}p \arrow[u, "q_1"] \arrow[r, "q_0"'] & x \arrow[u, "j"'] \\
j{\downarrow}p \arrow[uur, bend left=60, "p_1"] \arrow[uur, bend left, "k"'] \arrow[ur, dashed, "r"'] \arrow[urr, bend right, "p_0"'] & &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
 & a \arrow[r, "p"] & b \\
 & & x \arrow[u, "j"'] \\
j{\downarrow}p \arrow[uur, bend left, "p_1"] \arrow[urr, bend right, "p_0"'] & &
\end{tikzcd}
$$

となる．$i \dashv r$ を示せばよい．まず i, r の定義より

$$
\begin{tikzcd}
 & & a \arrow[r, "p"] & b \\
 & & j{\downarrow}p \arrow[u, "p_1"] \arrow[r, "p_0"'] \arrow[ur, phantom, "\Uparrow\eta"] & x \arrow[u, "j"'] \\
 & j{\downarrow}_{=}p \arrow[uur, bend left, "q_1"] \arrow[ur, "i"'] \arrow[urr, bend right, "q_0"'] & & \\
j{\downarrow}p \arrow[uuurr, bend left, "p_1"] \arrow[ur, "r"'] \arrow[uurrr, bend right, "p_0"'] & & &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
 & a \arrow[r, "p"] & b \\
 & & x \arrow[u, "j"'] \\
j{\downarrow}p \arrow[uur, bend left, "p_1"] \arrow[urr, bend right, "p_0"'] & &
\end{tikzcd}
$$

となるから，コンマ対象 $j\downarrow p$ の 2 次元的普遍性により，$\varepsilon\colon i\circ r \Longrightarrow \mathrm{id}_{j\downarrow p}$ が一意に存在して

$$
\begin{tikzcd}
a \\
j\downarrow p \arrow[u, "p_1"] \\
j\downarrow p \arrow[u, bend left, "\mathrm{id}"] \arrow[u, bend right, "i\circ r"'] \arrow[u, phantom, "\overset{\varepsilon}{\Leftarrow}"]
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
a \\
\\
j\downarrow p \arrow[uu, bend left, "p_1"] \arrow[uu, bend right, "k"'] \arrow[uu, phantom, "\overset{\tau}{\Leftarrow}"]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
j\downarrow p \arrow[r, bend left, "\mathrm{id}"] \arrow[r, bend right, "i\circ r"'] \arrow[r, phantom, "\Uparrow\varepsilon"] & j\downarrow p \arrow[r, "p_0"] & x
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
j\downarrow p \arrow[r, bend left, "p_0"] \arrow[r, bend right, "p_0"'] \arrow[r, phantom, "\Uparrow\mathrm{id}"] & x
\end{tikzcd}
$$

となる．このとき

$$
\begin{tikzcd}
& & a \arrow[r, "p"] & b \\
& & x\times_b a \arrow[u, "q_1"'] \arrow[r, "q_0"'] \arrow[ur, phantom, "="] & x \arrow[u, "j"'] \\
& j\downarrow p \arrow[uur, bend left, "p_1"] \arrow[u, phantom, "\overset{\tau}{\Leftarrow}"] \arrow[ur, "r"'] \arrow[urr, bend right, "p_0"'] \arrow[urr, phantom, "="] & & \\
x\times_b a \arrow[uuurr, bend left, "q_1"] \arrow[uur, phantom, "="] \arrow[ur, "i"'] \arrow[uurrr, bend right, "q_0"'] \arrow[urr, phantom, "="] & & &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
& & a \arrow[r, "p"] & b \\
& & & x \arrow[u, "j"'] \arrow[ul, phantom, "\overset{\eta}{\Leftarrow}"] \\
& j\downarrow p \arrow[uur, bend left, "p_1"] \arrow[urr, bend right, "p_0"] & & \\
x\times_b a \arrow[uuurr, bend left, "q_1"] \arrow[uur, phantom, "="] \arrow[ur, "i"'] \arrow[uurrr, bend right, "q_0"'] \arrow[urr, phantom, "="] & & &
\end{tikzcd}
$$

$$
=
\begin{tikzcd}
& a \arrow[r, "p"] & b \\
& & x \arrow[u, "j"'] \arrow[ul, phantom, "="] \\
x\times_b a \arrow[uur, bend left, "q_1"] \arrow[urr, bend right, "q_0"'] & &
\end{tikzcd}
$$

となるから $p\bullet(\tau\bullet i)=\mathrm{id}$ である．τ が p-cartesian だから $\tau\bullet i$ も p-cartesian であり，故に $\tau\bullet i = p_1\bullet(\varepsilon\bullet i)$ は同型である．$p_0\bullet(\varepsilon\bullet i)=\mathrm{id}$ だから，コンマ対象の普遍性により $\varepsilon\bullet i$ が同型とわかる．等式

$$
\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "p"] & b \\
j\downarrow_{=} p \arrow[u, bend left, "k\circ i"] \arrow[u, bend right, "q_1"'] \arrow[u, phantom, "\underset{(\tau\bullet i)^{-1}}{\Longleftarrow}"] \arrow[r, "q_0"'] \arrow[ur, phantom, "="] & x \arrow[u, "j"']
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "p"] & b \\
j\downarrow_{=} p \arrow[u, bend left, "k\circ i"] \arrow[r, "q_0"'] \arrow[ur, phantom, "="] & x \arrow[u, "j"']
\end{tikzcd}
$$

から，strict 2-pullback の 2 次元的普遍性により $\eta\colon \mathrm{id} \Longrightarrow r\circ i$ が存在して

$$\begin{tikzcd} a \\ j\downarrow_= p \arrow[u, "q_1"] \\ j\downarrow_= p \arrow[u, bend left, "r\circ i"] \arrow[u, bend right, "\mathrm{id}"'] \arrow[u, phantom, "\overset{\eta}{\Leftarrow}"] \end{tikzcd} = \begin{tikzcd} a \\ \\ j\downarrow_= p \arrow[uu, bend left, "k\circ i"] \arrow[uu, bend right, "q_1"'] \arrow[uu, phantom, "\overset{(\tau\bullet i)^{-1}}{\Leftarrow}"] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} j\downarrow_= p \arrow[r, bend left, "r\circ i"] \arrow[r, bend right, "\mathrm{id}"'] \arrow[r, phantom, "\Uparrow\eta"] & j\downarrow_= p \arrow[r, "q_0"] & x \end{tikzcd} = \begin{tikzcd} j\downarrow_= p \arrow[r, bend left, "q_0"] \arrow[r, bend right, "q_0"'] \arrow[r, phantom, "\Uparrow\mathrm{id}"] & x \end{tikzcd}$$

となる．

(以下，書いてる途中)

($2 \Longrightarrow 3$) 明らか．

($3 \Longrightarrow 1$) 随伴 $i \dashv r\colon a \longrightarrow \mathrm{id}_b\!\downarrow\! p$ の unit, counit を η, ε とする．

(以下，書いてる途中) □

定義． 2-category $\mathcal{C}$ の span $a \xleftarrow{q} e \xrightarrow{p} b$ が two-sided discrete fibration
$\Longleftrightarrow$ 任意の $u \in \mathcal{C}$ に対して $\mathcal{C}(u,a) \xleftarrow{q\bullet -} \mathcal{C}(u,e) \xrightarrow{p\bullet -} \mathcal{C}(u,b)$ が two-sided discrete fibration.

この条件を具体的に書き下すと次のようになる:

(1) 任意の $u \in \mathcal{C}$，$f\colon u \longrightarrow e$，$g\colon u \longrightarrow a$，$\varphi\colon q\circ f \Longrightarrow g$ に対して，$f'\colon u \longrightarrow e$ と $\alpha\colon f \Longrightarrow f'$ が一意に存在して $q\bullet\varphi = \theta$，$p\bullet\varphi = \mathrm{id}$ となる．

$$\begin{tikzcd} & u \arrow[d, bend right, "f'"'] \arrow[d, bend left, "f"] \arrow[d, phantom, "\overset{\Leftarrow}{\varphi}"] \\ & e \arrow[dl, "q"] \\ a \end{tikzcd} = \begin{tikzcd} & u \arrow[ddl, bend right, "g"'] \arrow[d, bend left, "f"] \\ & e \arrow[dl, "q"] \arrow[ul, phantom, "\theta\Uparrow"] \\ a \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} u \arrow[d, bend right, "f'"'] \arrow[d, bend left, "f"] \arrow[d, phantom, "\overset{\Leftarrow}{\varphi}"] \\ e \arrow[dr, "p"'] \\ & b \end{tikzcd} = \mathrm{id}$$

(2) 任意の $u \in \mathcal{C}$，$f'\colon u \longrightarrow e$，$g\colon u \longrightarrow b$，$\theta\colon g \Longrightarrow p\circ f'$ に対して，$f\colon u \longrightarrow e$ と $\psi\colon f \Longrightarrow f'$ が一意に存在して $q\bullet\psi = \mathrm{id}$，$p\bullet\psi = \theta$ となる．

$$\begin{tikzcd} & u \arrow[d, bend right, "f'"'] \arrow[d, bend left, "f"] \arrow[d, phantom, "\overset{\Leftarrow}{\psi}"] \\ & e \arrow[dl, "q"] \\ a \end{tikzcd} = \mathrm{id} \qquad \begin{tikzcd} u \arrow[d, bend right, "f'"'] \arrow[d, bend left, "f"] \arrow[d, phantom, "\overset{\Leftarrow}{\psi}"] \\ e \arrow[dr, "p"'] \\ & b \end{tikzcd} = \begin{tikzcd} u \arrow[d, bend right, "f'"'] \arrow[ddr, bend left, "g"] \\ e \arrow[dr, "p"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\theta"] & {} \\ & b \end{tikzcd}$$

(3) $\alpha\colon f \Longrightarrow f'\colon u \longrightarrow e$ とする．$q\bullet\alpha\colon q\circ f \Longrightarrow q\circ f'$ に対して条件 1 を適用して得られる φ と，$p\bullet\alpha\colon p\circ f \Longrightarrow p\circ f'$ に対して条件 1 を適用して得られる ψ を取る．このとき $\mathrm{cod}(\varphi) = \mathrm{dom}(\psi)$ であり $\psi * \varphi = \alpha$ となる．

命題 12. 2-category **Cat** における two-sided discrete fibration は，先に定義した関手の two-sided discrete fibration と一致する．

証明. 略 □

命題 13. $a \xleftarrow{q} e \xrightarrow{p} b$ が two-sided discrete fibration のとき，p は fibration で q は opfibration である．

証明. $p\colon e \longrightarrow b$ が fibration であることを示す．任意の

$$\begin{tikzcd} u \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[rr, bend right, "g"'] \arrow[r, phantom, shift right=3, "\theta\Uparrow"] & e \arrow[r, "p"] & b \end{tikzcd}$$

を取る．two-sided discrete fibration の条件より，$\alpha\colon f' \Longrightarrow f$ が存在して

$$\begin{tikzcd} & u \arrow[d, bend right=50, "f"'] \arrow[d, bend left=50, "f'"] \arrow[d, phantom, "\overset{\Leftarrow}{\alpha}"] \\ a & e \arrow[l, "q"] \end{tikzcd} = \mathrm{id} \qquad \begin{tikzcd} u \arrow[d, bend right=50, "f"'] \arrow[d, bend left=50, "f'"] \arrow[d, phantom, "\overset{\Leftarrow}{\alpha}"] & \\ e \arrow[r, "p"'] & b \end{tikzcd} = \begin{tikzcd} u \arrow[d, bend right, "f"'] \arrow[dr, bend left, "g"] \arrow[dr, phantom, "\Swarrow\theta"] & \\ e \arrow[r, "p"'] & b \end{tikzcd}$$

となる．この α が p-cartesian であることを示せばよい．そこで

$$\begin{tikzcd} v \arrow[r, "k"] \arrow[dr, bend right, "f''"'] \arrow[r, phantom, shift right=4, "\gamma\Uparrow"] & u \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "f'"'] \arrow[r, phantom, "\Uparrow\alpha"] & e \arrow[r, "p"] & a \\ & e \arrow[urr, "p"'] & & \end{tikzcd} = \begin{tikzcd} v \arrow[r, "k"] \arrow[rr, bend right=50, "f''"'] & u \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, phantom, shift right=3, "\Uparrow\xi"] & e \arrow[r, "p"] & a \end{tikzcd}$$

が成り立つとする．two-sided discrete fibration の条件を ξ に適用して

$$\begin{tikzcd} & v \arrow[d, bend right=50, "h"'] \arrow[d, bend left=50, "f''"] \arrow[d, phantom, "\overset{\Leftarrow}{\varphi}"] \\ a & e \arrow[l, "q"] \end{tikzcd} = \begin{tikzcd} & v \arrow[dl, bend right, "q\circ f\circ k"'] \arrow[d, bend left, "f''"] \arrow[dl, phantom, "q\bullet\xi\ \Nwarrow"] \\ a & e \arrow[l, "q"] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} v \arrow[d, bend right=50, "h"'] \arrow[d, bend left=50, "f''"] \arrow[d, phantom, "\overset{\Leftarrow}{\varphi}"] & \\ e \arrow[r, "p"'] & b \end{tikzcd} = \mathrm{id}$$

$$\begin{tikzcd} & v \arrow[d, bend right=50, "f\circ k"'] \arrow[d, bend left=50, "h"] \arrow[d, phantom, "\overset{\Leftarrow}{\psi}"] \\ a & e \arrow[l, "q"] \end{tikzcd} = \mathrm{id} \qquad \begin{tikzcd} v \arrow[d, bend right=50, "f\circ k"'] \arrow[d, bend left=50, "h"] \arrow[d, phantom, "\overset{\Leftarrow}{\psi}"] & \\ e \arrow[r, "p"'] & b \end{tikzcd} = \begin{tikzcd} v \arrow[d, bend right, "f\circ k"'] \arrow[dr, bend left, "p\circ f''"] \arrow[dr, phantom, "\Swarrow p\bullet\xi"] & \\ e \arrow[r, "p"'] & b \end{tikzcd}$$

$$
\begin{tikzcd}
v \arrow[d, bend right=60, "f\circ k"'] \arrow[d, "h" description] \arrow[d, bend left=60, "f''"] \arrow[d, phantom, shift right=3, "\Leftarrow_{\psi}"] \arrow[d, phantom, shift left=3, "\Leftarrow_{\varphi}"] \\
e
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
v \arrow[d, bend right=60, "f\circ k"'] \arrow[d, bend left=60, "f''"] \arrow[d, phantom, "\Longleftarrow_{\xi}"] \\
e
\end{tikzcd}
$$

を満たすような $h\colon v \longrightarrow e$, $\varphi\colon f'' \Longrightarrow h$, $\psi\colon h \Longrightarrow f\circ k$ を得る．また γ から

$$
\begin{tikzcd}
& u \arrow[d, bend right=40, "f'\circ k"'] \arrow[d, bend left=40, "h'"] \arrow[d, phantom, "\Leftarrow_{\delta}"] \\
a & e \arrow[l, "q"]
\end{tikzcd}
\quad = \quad \mathrm{id}
\qquad
\begin{tikzcd}
u \arrow[d, bend right=40, "f'\circ k"'] \arrow[d, bend left=40, "h'"] \arrow[d, phantom, "\Leftarrow_{\delta}"] & \\
e \arrow[r, "p"'] & b
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
u \arrow[d, bend right=40, "f'\circ k"'] \arrow[dr, bend left=30, "p\circ f''"] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\gamma"] & \\
e \arrow[r, "p"'] & b
\end{tikzcd}
$$

を満たす δ を得る．このとき

$$
\begin{tikzcd}
v \arrow[d, "k"'] \arrow[dd, bend left=50, "h'"] \arrow[dd, phantom, shift left=2, "\Leftarrow_{\delta}"] & \\
u \arrow[d, bend right=50, "f"'] \arrow[d, "f'"] \arrow[d, phantom, shift right=2, "\Leftarrow_{\alpha}"] & \\
e \arrow[r, "p"'] & b
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
v \arrow[d, "k"'] \arrow[ddr, bend left=30, "p\circ f''"] & \\
u \arrow[d, bend right=50, "f"'] \arrow[d, "f'"] \arrow[d, phantom, shift right=2, "\Leftarrow_{\alpha}"] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\gamma"] & \\
e \arrow[r, "p"'] & b
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
v \arrow[d, "k"'] \arrow[ddr, bend left=30, "p\circ f''"] & \\
u \arrow[d, bend right=50, "f"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow p\bullet\xi"] & \\
e \arrow[r, "p"'] & b
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
& v \arrow[d, "k"'] \arrow[dd, bend left=50, "h'"] \arrow[dd, phantom, shift left=2, "\Leftarrow_{\delta}"] \\
& u \arrow[d, bend right=50, "f"'] \arrow[d, "f'"] \arrow[d, phantom, shift right=2, "\Leftarrow_{\alpha}"] \\
a & e \arrow[l, "q"]
\end{tikzcd}
\quad = \quad \mathrm{id}
$$

だから，ψ の一意性により

$$
\begin{tikzcd}
v \arrow[d, "k"'] \arrow[dd, bend left=50, "h'"] \arrow[dd, phantom, shift left=2, "\Leftarrow_{\delta}"] \\
u \arrow[d, bend right=50, "f"'] \arrow[d, "f'"] \arrow[d, phantom, shift right=2, "\Leftarrow_{\alpha}"] \\
e
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
v \arrow[d, "k"'] \arrow[dd, bend left=50, "h"] \\
u \arrow[d, bend right=50, "f"'] \arrow[d, phantom, "\Leftarrow_{\psi}"] \\
e
\end{tikzcd}
$$

であり，特に $h = h'$ となる．

$\zeta := \delta * \varphi$ とおく．このとき

$$
\begin{tikzcd}
v \arrow[r, "k"] \arrow[rr, bend right=60, "f''"'] & u \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "f'"'] \arrow[r, phantom, "\Uparrow\alpha"] \arrow[d, phantom, "\zeta\Uparrow"] & a \\
& {} &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
v \arrow[r, "k"] \arrow[rr, bend right=20, "h"'] \arrow[rr, bend right=60, "f''"'] & u \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, phantom, "\Uparrow\psi"'] & a \\
& {} \arrow[u, phantom, "\Uparrow\varphi"] &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
v \arrow[r, "k"] \arrow[rr, bend right=60, "f''"'] & u \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[d, phantom, "\Uparrow\xi"] & a \\
& {} &
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
v \arrow[r, "k"] \arrow[rr, bend right=60, "f''"'] & u \arrow[r, bend right, "f'"] \arrow[d, phantom, "\zeta\Uparrow"] & a \arrow[r, "p"] & b \\
& {} & &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
v \arrow[r, "k"] \arrow[rrd, bend right, "f''"'] & u \arrow[r, bend right, "f'"] \arrow[d, phantom, "\gamma\Uparrow"] & a \arrow[r, "p"] & b \\
& {} & a \arrow[ru, "p"'] &
\end{tikzcd}
$$

である．よって，このような ζ が一意であることを示せばよい．

一意であることを示すため，$\zeta' \colon f'' \Longrightarrow f' \circ k$ が

$$
\begin{tikzcd}
v \arrow[r, "k"] \arrow[rr, bend right=60, "f''"'] & u \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "f'"'] \arrow[r, phantom, "\Uparrow\alpha"] \arrow[d, phantom, "\zeta'\Uparrow"] & a \\
& {} &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
v \arrow[r, "k"] \arrow[rr, bend right=60, "f''"'] & u \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[d, phantom, "\Uparrow\xi"] & a \\
& {} &
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
v \arrow[r, "k"] \arrow[rr, bend right=60, "f''"'] & u \arrow[r, bend right, "f'"] \arrow[d, phantom, "\zeta'\Uparrow"] & a \arrow[r, "p"] & b \\
& {} & &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
v \arrow[r, "k"] \arrow[rrd, bend right, "f''"'] & u \arrow[r, bend right, "f'"] \arrow[d, phantom, "\gamma\Uparrow"] & a \arrow[r, "p"] & b \\
& {} & a \arrow[ru, "p"'] &
\end{tikzcd}
$$

を満たすとする．two-sided discrete fibration の条件を ζ' に適用して

$$
\begin{tikzcd}
& v \arrow[d, bend right, "h''"'] \arrow[d, bend left, "f''"] \arrow[d, phantom, "\overset{\Leftarrow}{\varphi'}"] \\
a & e \arrow[l, "q"]
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
& v \arrow[dl, bend right, "q\circ f'\circ k"'] \arrow[d, bend left, "f''"] \\
a & e \arrow[l, "q"] \arrow[ul, phantom, "q\bullet\zeta' \Uparrow"]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
v \arrow[d, bend right, "h''"'] \arrow[d, bend left, "f''"] \arrow[d, phantom, "\overset{\Leftarrow}{\varphi'}"] & \\
e \arrow[r, "p"] & b
\end{tikzcd}
= \mathrm{id}
$$

$$
\begin{tikzcd}
& v \arrow[d, bend right, "f'\circ k"'] \arrow[d, bend left, "h''"] \arrow[d, phantom, "\overset{\Leftarrow}{\psi'}"] \\
a & e \arrow[l, "q"]
\end{tikzcd}
= \mathrm{id}
\qquad
\begin{tikzcd}
v \arrow[d, bend right, "f'\circ k"'] \arrow[d, bend left, "h''"] \arrow[d, phantom, "\overset{\Leftarrow}{\psi'}"] & \\
e \arrow[r, "p"] & b
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
v \arrow[d, bend right, "f'\circ k"'] \arrow[dr, bend left, "p\circ f''"] & \\
e \arrow[r, "p"] \arrow[ur, phantom, "\Downarrow\gamma"] & b
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
v \arrow[d, bend right=60, "f\circ k"'] \arrow[d, "h''"] \arrow[d, bend left=60, "f''"] \arrow[d, phantom, shift right=3, "\overset{\Leftarrow}{\psi'}"] \arrow[d, phantom, shift left=3, "\overset{\Leftarrow}{\varphi'}"] \\
e
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
v \arrow[d, bend right=60, "f\circ k"'] \arrow[d, bend left=60, "f''"] \arrow[d, phantom, "\overset{\Longleftarrow}{\zeta'}"] \\
e
\end{tikzcd}
$$

を満たすような $h''\colon v \longrightarrow e$, $\varphi'\colon f'' \Longrightarrow h''$, $\psi'\colon h'' \Longrightarrow f \circ k$ を得る．一意性により $\psi' = \delta$ である．また

$$
\begin{tikzcd}
& v \arrow[dl, bend right, "q\circ f\circ k"'] \arrow[d, bend left, "f''"] \arrow[dl, phantom, "\Uparrow q\bullet\xi"] \\
a & e \arrow[l, "q"]
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
& v \arrow[d, "k"'] \arrow[dd, bend left=60, "f''"] \\
& u \arrow[d, "f'"] \arrow[d, bend right=60, "f"'] \arrow[d, phantom, "\Leftarrow\alpha"'] \arrow[r, phantom, "\Leftarrow\zeta'"] & {} \\
a & e \arrow[l, "q"]
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
& v \arrow[dd, bend right, "q\circ f'\circ k"'] \arrow[d, bend left, "f''"] \arrow[dd, phantom, "\Uparrow q\bullet\zeta'"] \\
& e \arrow[dl, "q"] \\
a &
\end{tikzcd}
$$

だから $\varphi' = \varphi$ である．故に $\zeta' = \psi' * \varphi' = \delta * \varphi = \zeta$ となる． $\square$

命題 14. $a \xrightarrow{f} c \xleftarrow{g} b$ のときコンマ対象が与える span $a \xleftarrow{q} g{\downarrow}f \xrightarrow{p} b$ は two-sided discrete fibration である．

証明. $u \in \mathcal{C}$ に対して $\mathcal{C}(u, -)$ はコンマ対象と交換するから明らか． $\square$

定理 15. 任意の 1-morphism $f\colon a \longrightarrow b$ は $f = p\circ g$ ($p\colon c \longrightarrow b$ は fibration, $g\colon a \longrightarrow c$ は右随伴) の形で書ける．

証明. コンマ対象 $\mathrm{id}_b{\downarrow}f$ の普遍性から次の $g\colon a \longrightarrow \mathrm{id}_b{\downarrow}f$ を得る．

$$
\begin{tikzcd}
& a \arrow[r, "f"] & b \\
& \mathrm{id}_b{\downarrow}f \arrow[u, "q"] \arrow[r, "p"'] \arrow[ur, phantom, "\Leftarrow"] & b \arrow[u, "\mathrm{id}_b"'] \\
a \arrow[uur, bend left, "\mathrm{id}_a"] \arrow[ur, dashed, "g"'] \arrow[urr, bend right, "f"'] & &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
& a \arrow[r, "f"] & b \\
& \arrow[ur, phantom, "\Leftarrow\mathrm{id}_f"] & b \arrow[u, "\mathrm{id}_b"'] \\
a \arrow[uur, bend left, "\mathrm{id}_a"] \arrow[urr, bend right, "f"'] & &
\end{tikzcd}
$$

このとき $f = p\circ g$ で $q \dashv g$ である．また $a \xleftarrow{q} \mathrm{id}_b{\downarrow}f \xrightarrow{p} b$ は two-sided discrete fibration だから p は fibration である． $\square$