豊穣圏

alg-d
https://alg-d.com/math/kan_extension/

2025 年 2 月 7 日

※ この PDF では第 2 節以降，モノイダル圏は常に対称モノイダル閉圏で，完備かつ余完備であるとしています.

大雑把に言うと，$\mathrm{Hom}_C(a, b)$ が集合ではなく，他の (良い) 圏 V の対象になっているような C を V-豊穣圏という．豊穣圏の場合でも Kan 拡張を定義することができ，通常の圏と同様な定理が成り立つ．これを使うと，様々な定理を示すことができる．(全ての概念は Kan 拡張である!) それを説明することがこの PDF の目的である.

目次

1 モノイダル圏

最初に書いた「良い圏」とは「完備かつ余完備な対称モノイダル閉圏」のことである．そこでまずはモノイダル圏について説明する．

定義. 対象が 1 つの bicategory をモノイダル圏 (monoidal category) という．また対象が 1 つの strict 2-category を strict モノイダル圏 (strict monoidal category) という．

圏 C がモノイド，即ち $\mathrm{Ob}(C)=\{*\}$ の場合に $M:=\mathrm{Hom}_C(*,*)$ とすれば M は 2 項演算と単位元を持つ集合になるのであった (そして通常の意味でのモノイドの条件を満たす)．同様に bicategory $\mathcal{B}$ がモノイダル圏，即ち $\mathrm{Ob}(\mathcal{B})=\{*\}$ の場合に $V:=\mathcal{B}(*,*)$ とすると V は圏であり，「2 項演算」を与える関手 $M^{***}\colon V\times V\to V$ と「単位元」となる対象 $\mathrm{id}_*\in V$ を持つ．この観点でモノイダル圏の定義を言い換えると次のようになる．

命題 1. モノイダル圏とは圏 V であって，以下を満たすものである．

(1) 関手 $\otimes\colon V\times V\to V$ が与えられている．
(2) 対象 $I\in V$ が与えられている．
(3) 自然同型 $\alpha\colon \otimes\circ(\otimes\times\mathrm{id}_V)\Rightarrow\otimes\circ(\mathrm{id}_V\times\otimes)$ が与えられている．

$$
\begin{tikzcd}
 & V\times V\times V \arrow[dl, "\otimes\times\mathrm{id}_V"'] \arrow[dr, "\mathrm{id}_V\times\otimes"] & \\
V\times V \arrow[dr, "\otimes"'] \arrow[rr, phantom, "\overset{\sim}{\underset{\alpha}{\Longrightarrow}}"] & & V\times V \arrow[dl, "\otimes"] \\
 & V &
\end{tikzcd}
$$

即ち，$u,v,w\in V$ について自然な同型 $\alpha_{uvw}\colon(u\otimes v)\otimes w\to u\otimes(v\otimes w)$ が成り立つ．

(4) 自然同型 $\lambda\colon I\otimes -\Rightarrow\mathrm{id}_V$ が与えられている．即ち $u\in V$ について自然な同型 $\lambda_u\colon I\otimes u\to u$ が成り立つ．
(5) 自然同型 $\rho\colon -\otimes I\Rightarrow\mathrm{id}_V$ が与えられている．即ち $u\in V$ について自然な同型 $\rho_u\colon u\otimes I\to u$ が成り立つ．
(6) $u,v,w,x\in V$ に対して次の 2 つの図式が可換である．

$$
\begin{tikzcd}
 & ((u\otimes v)\otimes w)\otimes x \arrow[dl, "\alpha_{uvw}\otimes\mathrm{id}_x"'] \arrow[dr, "\alpha_{u\otimes v,w,x}"] & \\
(u\otimes(v\otimes w))\otimes x \arrow[d, "\alpha_{u,v\otimes w,x}"'] & & (u\otimes v)\otimes(w\otimes x) \arrow[d, "\alpha_{u,v,w\otimes x}"] \\
u\otimes((v\otimes w)\otimes x) \arrow[rr, "\mathrm{id}_u\otimes\alpha_{vwx}"'] & & u\otimes(v\otimes(w\otimes x))
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
(u\otimes I)\otimes v \arrow[rr, "\alpha_{uIv}"] \arrow[dr, "\rho_u\otimes\mathrm{id}_v"'] & & u\otimes(I\otimes v) \arrow[dl, "\mathrm{id}_u\otimes\lambda_v"] \\
 & u\otimes v &
\end{tikzcd}
$$

$\square$

定義. 対称モノイダル圏 (symmetric monoidal category) とは，モノイダル圏 V であって，$u, v \in V$ について自然な同型 $\gamma_{uv} \colon u \otimes v \to v \otimes u$ が与えられ，以下の条件を満たすことをいう．

(1) $\gamma_{vu} \circ \gamma_{uv} = \mathrm{id}_{u \otimes v}$

(2) $u, v, w \in V$ に対して次の図式が可換である．

$$\begin{tikzcd}
(u \otimes v) \otimes w \arrow[r, "\gamma_{uv} \otimes \mathrm{id}_w"] \arrow[d, "\alpha_{uvw}"'] & (v \otimes u) \otimes w \arrow[r, "\alpha_{vuw}"] & v \otimes (u \otimes w) \arrow[d, "\mathrm{id}_v \otimes \gamma_{uw}"] \\
u \otimes (v \otimes w) \arrow[r, "\gamma_{u, v \otimes w}"'] & (v \otimes w) \otimes u \arrow[r, "\alpha_{vwu}"'] & v \otimes (w \otimes u)
\end{tikzcd}$$

定義. 対称モノイダル閉圏 (symmetric monoidal closed category) とは，対称モノイダル圏 V であって，任意の $u \in V$ に対して関手 $- \otimes u \colon V \to V$ が右随伴を持つものをいう．(この右随伴を $[u, -]$ で表す．)

「随伴関手」の PDF で示した定理により，対称モノイダル閉圏 V の関手 $[u, -]$ は 2 変数の関手 $[-, \square] \colon V \times V \to V$ を与える．

例 2. C を有限直積を持つ圏とする．このとき C は直積 $\times$ を積，終対象 1 を単位元とする対称モノイダル圏となる．この場合，対称モノイダル閉圏とは Cartesian 閉圏のことである．特に **Set** や **Cat** や $\mathbb{2} = \{0 \to 1\}$ は Cartesian 閉圏だから対称モノイダル閉圏になる． $\square$

例 3. アーベル群と準同型がなす圏 **Ab** はテンソル積 $\otimes$ を積，有理整数環 $\mathbb{Z}$ を単位元とする対称モノイダル閉圏である． $\square$

例 4. $\overline{\mathbb{R}}_+ := [0, \infty]$ に通常と逆の順序 $\geq$ を入れて圏とみなす．すると $\overline{\mathbb{R}}_+$ は和 $+$ を積，0 を単位元とする対称モノイダル圏である．$u, v \in \overline{\mathbb{R}}_+$ に対して $[u, v] \in \overline{\mathbb{R}}_+$ を

$$[u, v] := \begin{cases} 0 & (v \leq u \text{ のとき}) \\ \infty & (u < v = \infty \text{ のとき}) \\ v - u & (u < v < \infty \text{ のとき}) \end{cases}$$

と定める．このとき $u, v, w \in \overline{\mathbb{R}}_+$ に対して

$$\mathrm{Hom}_{\overline{\mathbb{R}}_+}(u + v, w) = \mathrm{Hom}_{\overline{\mathbb{R}}_+}(u, [v, w])$$

である．

$\because$) $u+v \geq w \iff u \geq [v,w]$ を示せばよい．

まず $w \leq v$ の場合, 常に $u+v \geq w$ であるが, 一方 $[v,w]=0$ だから常に $u \geq [v,w]$ となりよい．

次に $v < w = \infty$ の場合, $u+v \geq w$ となるのは $u=\infty$ のときのみであるが, 一方 $[v,w]=\infty$ だから $u \geq [v,w]$ となるのは $u=\infty$ のときでありよい．

最後に $v < w < \infty$ の場合, $[v,w]=w-v$ なので明らかに $u+v \geq w \iff u \geq w-v$ である．

よって $\overline{\mathbb{R}}_+$ は対称モノイダル閉圏である． $\square$

V を対称モノイダル閉圏として $u,v,w \in V$ とすると

$$\mathrm{Hom}_V(u \otimes v, w) \cong \mathrm{Hom}_V(u, [v,w])$$

である．また $x \in V$ について自然に

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_V(x, [u \otimes v, w]) &\cong \mathrm{Hom}_V(x \otimes (u \otimes v), w) \\
&\cong \mathrm{Hom}_V((x \otimes u) \otimes v, w) \\
&\cong \mathrm{Hom}_V(x \otimes u, [v,w]) \\
&\cong \mathrm{Hom}_V(x, [u,[v,w]])
\end{aligned}$$

であるから，米田の補題により $[u \otimes v, w] \cong [u,[v,w]]$ が分かる．更に V が対称であるから $[u,[v,w]] \cong [u \otimes v, w] \cong [v \otimes u, w] \cong [v,[u,w]]$ となる．

V を対称モノイダル閉圏とするとき随伴 $- \otimes u \dashv [u,-]$ の counit を $\mathrm{ev}\colon [u,-] \otimes u \Rightarrow \mathrm{id}$ と書く．またこの随伴における $\rho_u\colon u \otimes I \to u$ の随伴射を $i\colon u \to [I,u]$ と書く．

命題 5. $i\colon u \to [I,u]$ は同型射である．

証明. $f\colon [I,u] \to u$ を合成 $[I,u] \xrightarrow{\rho^{-1}} [I,u] \otimes I \xrightarrow{\mathrm{ev}} u$ により定める．$f = i^{-1}$ を示す．

まず $i \circ f = \mathrm{id}$ を示す．即ち次の左の図式が可換であることを示す．

$$\begin{tikzcd}
{[I,u]} \arrow[d, "\rho^{-1}"'] \arrow[ddr, "\mathrm{id}"] & \\
{[I,u] \otimes I} \arrow[d, "\mathrm{ev}"'] & \\
u \arrow[r, "i"'] & {[I,u]}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
{[I,u] \otimes I} \arrow[d, "\rho^{-1} \otimes \mathrm{id}"'] \arrow[ddr, "\mathrm{ev}"] & \\
{([I,u] \otimes I) \otimes I} \arrow[d, "\mathrm{ev} \otimes \mathrm{id}"'] & \\
u \otimes I \arrow[r, "\rho"'] & u
\end{tikzcd}$$

そのためには随伴により，右の図式が可換であることを示せばよいが，それは $\rho^{-1}\otimes\mathrm{id}=\rho^{-1}$ より明らか.

次に $f\circ i=\mathrm{id}$ を示す．即ち次の左の図式が可換であることを示す.

$$
\begin{tikzcd}
{[I,u]\otimes I} \arrow[d, "\mathrm{ev}"'] \arrow[dr, "\rho"] & \\
u \arrow[r, "i"'] & {[I,u]}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
{([I,u]\otimes I)\otimes I} \arrow[r, "\rho\otimes\mathrm{id}"] \arrow[d, "\mathrm{ev}\otimes\mathrm{id}_I"'] & {[I,u]\otimes I} \arrow[d, "\mathrm{ev}"] \\
u\otimes I \arrow[r, "\rho"'] & u
\end{tikzcd}
$$

そのためには随伴により，右の図式が可換であることを示せばよいが，それは $\rho\otimes\mathrm{id}=\rho$ より明らか. $\square$

coherence 定理 (「2-category」の PDF を参照) を使えば次の定理が分かる．(coherence 定理の証明に興味が無ければ，以下は飛ばして第 2 節に進んでよい．)

定理 6. 任意のモノイダル圏 V に対して

- strict モノイダル圏 W
- 圏同値 $F\colon V\to W$
- $u,v\in V$ について自然な W の同型射 $\varphi_{uv}\colon Fu\otimes Fv\to F(u\otimes v)$
- W の同型射 $\psi\colon I\to F(I)$

が存在して次が成り立つ.

(1) 対象 $u,v,x\in V$ に対して次の W の図式が可換である.

$$
\begin{tikzcd}
Fu\otimes Fv\otimes Fx \arrow[r, "\varphi_{uv}\otimes\mathrm{id}"] \arrow[d, equal] & F(u\otimes v)\otimes Fx \arrow[r, "\varphi_{u\otimes v,x}"] & F((u\otimes v)\otimes x) \arrow[d, "F(\alpha_{uvx})"] \\
Fu\otimes Fv\otimes Fx \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes\varphi_{vx}"'] & Fu\otimes F(v\otimes x) \arrow[r, "\varphi_{u,v\otimes x}"'] & F(u\otimes(v\otimes x))
\end{tikzcd}
$$

(2) 対象 $u\in V$ に対して次の W の図式が可換である.

$$
\begin{tikzcd}
I\otimes Fu \arrow[r, equal] \arrow[d, "\psi\otimes\mathrm{id}"'] & Fu \\
FI\otimes Fu \arrow[r, "\varphi_{Iu}"'] & F(I\otimes u) \arrow[u, "F(\lambda_u)"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
Fu\otimes I \arrow[r, equal] \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes\psi"'] & Fu \\
Fu\otimes FI \arrow[r, "\varphi_{uI}"'] & F(u\otimes I) \arrow[u, "F(\rho_u)"']
\end{tikzcd}
$$

証明. V を bicategory とみたものを $\mathcal{B}$ と書くと，coherence 定理より strict 2-category $\mathcal{C}$ と biequivalence $F\colon \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ が存在する．coherence 定理の証明によれば $\mathcal{C}$ の対象も 1 つである．よって $\mathcal{C}$ は strict モノイダル圏を与える．これを W と書くと F は圏同値 $F\colon V \to W$ となる．残りの条件は F が pseudofunctor であることの言い換えである． □

もちろん「α, λ, ρ によって複数の同型が得られる場合，それらは常に一致する」という形の coherence 定理 (「2-category」の PDF を参照) もモノイダル圏において成立するが，これは対称モノイダル圏バージョンも成り立つ．つまり「$\alpha, \lambda, \rho, \gamma$ によって複数の同型が得られる場合，それらは常に一致する」ことが言える (定理 12)．(但し，明らかに反例 $\gamma_{uu} \neq \mathrm{id}_{u\otimes u}\colon u \otimes u \to u \otimes u$ が存在するから，少し条件が付く．) これは bicategory のときの証明を少し直せば，以下のように証明できる．

まず V を対称モノイダル圏として，定理 6 により strict モノイダル圏 W と圏同値 $F\colon V \to W$ を取る．また関手 $G\colon W \to V$ と自然同型 $\eta\colon \mathrm{id} \Rightarrow GF$, $\varepsilon\colon FG \Rightarrow \mathrm{id}$ を取る．ここで随伴関手の一般論より $F \dashv G$ で η, ε がその unit, counit であるとしてよい．$u, v \in W$ に対して W の射 $\gamma_{uv}\colon u \otimes v \to v \otimes u$ を次のように定める．

$$\begin{tikzcd}
F(Gu \otimes Gv) \arrow[r, "\varphi^{-1}"] \arrow[d, "F(\gamma_{GuGv})"'] & FGu \otimes FGv \arrow[r, "\varepsilon_u \otimes \varepsilon_v"] & u \otimes v \arrow[d, "\gamma_{uv}"] \\
F(Gv \otimes Gu) \arrow[r, "\varphi^{-1}"'] & FGv \otimes FGu \arrow[r, "\varepsilon_v \otimes \varepsilon_u"'] & v \otimes u
\end{tikzcd}$$

この γ_{uv} は明らかに u, v について自然である．この γ により W は対称モノイダル圏になる．

∵) まず $\gamma_{GvGu} \circ \gamma_{GuGv} = \mathrm{id}$ と図式

$$\begin{tikzcd}
F(Gu \otimes Gv) \arrow[r, "\varphi^{-1}"] \arrow[d, "F(\gamma_{GuGv})"'] & FGu \otimes FGv \arrow[r, "\varepsilon_u \otimes \varepsilon_v"] & u \otimes v \arrow[d, "\gamma_{uv}"] \\
F(Gv \otimes Gu) \arrow[r, "\varphi^{-1}"'] \arrow[d, "F(\gamma_{GvGu})"'] & FGv \otimes FGu \arrow[r, "\varepsilon_v \otimes \varepsilon_u"'] & v \otimes u \arrow[d, "\gamma_{vu}"] \\
F(Gu \otimes Gv) \arrow[r, "\varphi^{-1}"'] & FGu \otimes FGv \arrow[r, "\varepsilon_u \otimes \varepsilon_v"'] & u \otimes v
\end{tikzcd}$$

の可換性から $\gamma_{vu} \circ \gamma_{uv} = \mathrm{id}$ が分かる．よって

$$
\begin{tikzcd}
(u \otimes v) \otimes x \arrow[r, "\gamma_{uv} \otimes \mathrm{id}_x"] \arrow[d, equal] & (v \otimes u) \otimes x \arrow[r, equal] & v \otimes (u \otimes x) \arrow[d, "\mathrm{id}_v \otimes \gamma_{ux}"] \\
u \otimes (v \otimes x) \arrow[r, "\gamma_{u, v \otimes x}"'] & (v \otimes x) \otimes u \arrow[r, equal] & v \otimes (x \otimes u)
\end{tikzcd}
$$

が可換であることを示せばよい．まず V が対称モノイダル圏だから

$$
\begin{tikzcd}
F((Gu \otimes Gv) \otimes Gx) \arrow[r, "F(\gamma_{GuGv} \otimes \mathrm{id})"] \arrow[d, "F(\alpha_{GuGvGx})"'] & F((Gv \otimes Gu) \otimes Gx) \arrow[r, "F(\alpha_{GvGuGx})"] & F(Gv \otimes (Gu \otimes Gx)) \arrow[d, "F(\mathrm{id} \otimes \gamma_{GuGx})"] \\
F(Gu \otimes (Gv \otimes Gx)) \arrow[r, "F(\gamma_{Gu, Gv \otimes Gx})"'] & F((Gv \otimes Gx) \otimes Gu) \arrow[r, "F(\alpha_{GvGxGu})"'] & F(Gv \otimes (Gx \otimes Gu))
\end{tikzcd}
$$

が可換である．よって次の 2 つの図式が可換であることを示せばよい．

$$
\begin{tikzcd}
F((Gu \otimes Gv) \otimes Gx) \arrow[r, "F(\gamma \otimes \mathrm{id})"] \arrow[d, "\varphi^{-1}"'] \arrow[dr, phantom, "(\varphi)"] & F((Gv \otimes Gu) \otimes Gx) \arrow[r, "F(\alpha)"] \arrow[d, "\varphi^{-1}"] & F(Gv \otimes (Gu \otimes Gx)) \arrow[r, "F(\mathrm{id} \otimes \gamma)"] \arrow[d, "\varphi^{-1}"'] \arrow[dr, phantom, "(\varphi)"] & F(Gv \otimes (Gx \otimes Gu)) \arrow[d, "\varphi^{-1}"] \\
F(Gu \otimes Gv) \otimes FGx \arrow[r, "F(\gamma) \otimes \mathrm{id}"] \arrow[d, "\mathrm{id} \otimes \varepsilon_x"'] \arrow[dr, phantom, "(\otimes)"] & F(Gv \otimes Gu) \otimes FGx \arrow[d, "\mathrm{id} \otimes \varepsilon_x"] & FGv \otimes F(Gu \otimes Gx) \arrow[r, "\mathrm{id} \otimes F(\gamma)"] \arrow[d, "\varepsilon_v \otimes \mathrm{id}"'] \arrow[dr, phantom, "(\otimes)"] & FGv \otimes F(Gx \otimes Gu) \arrow[d, "\varepsilon_v \otimes \mathrm{id}"] \\
F(Gu \otimes Gv) \otimes x \arrow[r, "F(\gamma) \otimes \mathrm{id}"'] \arrow[d, "\varphi \otimes \mathrm{id}"'] & F(Gv \otimes Gu) \otimes x \arrow[d, "\varphi \otimes \mathrm{id}"] \arrow[r, phantom, "(*)"] & v \otimes F(Gu \otimes Gx) \arrow[r, "\mathrm{id} \otimes F(\gamma)"'] \arrow[d, "\mathrm{id} \otimes \varphi"'] & v \otimes F(Gx \otimes Gu) \arrow[d, "\mathrm{id} \otimes \varphi"] \\
(FGu \otimes FGv) \otimes x \arrow[r, phantom, "(\gamma)"] \arrow[d, "\varepsilon_u \otimes \varepsilon_v \otimes \mathrm{id}"'] & (FGv \otimes FGu) \otimes x \arrow[d, "\varepsilon_v \otimes \varepsilon_u \otimes \mathrm{id}"] & v \otimes (FGu \otimes FGx) \arrow[r, phantom, "(\gamma)"] \arrow[d, "\mathrm{id} \otimes \varepsilon_u \otimes \varepsilon_x"'] & v \otimes FGx \otimes FGu \arrow[d, "\mathrm{id} \otimes \varepsilon_x \otimes \varepsilon_u"] \\
(u \otimes v) \otimes x \arrow[r, "\gamma_{uv} \otimes \mathrm{id}"'] & (v \otimes u) \otimes x \arrow[r, equal] & v \otimes (u \otimes x) \arrow[r, "\mathrm{id} \otimes \gamma_{ux}"'] & v \otimes x \otimes u
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
F((Gu\otimes Gv)\otimes Gx) \arrow[r, "F(\alpha)"] \arrow[d, "\varphi^{-1}"'] & F(Gu\otimes(Gv\otimes Gx)) \arrow[r, "F(\gamma)"] \arrow[d, "\varphi^{-1}"] & F((Gv\otimes Gx)\otimes Gu) \arrow[r, "F(\alpha)"] \arrow[d, "\varphi^{-1}"'] & F(Gv\otimes(Gx\otimes Gu)) \arrow[d, "\varphi^{-1}"] \\
F(Gu\otimes Gv)\otimes FGx \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes\varepsilon_x"'] & FGu\otimes F(Gv\otimes Gx) \arrow[d, "\varepsilon_u\otimes\mathrm{id}"] & F(Gv\otimes Gx)\otimes FGu \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes\varepsilon_u"'] & FGv\otimes F(Gx\otimes Gu) \arrow[d, "\varepsilon_v\otimes\mathrm{id}"] \\
F(Gu\otimes Gv)\otimes x \arrow[r, phantom, "(*)"] \arrow[d, "\varphi\otimes\mathrm{id}"'] & u\otimes F(Gv\otimes Gx) \arrow[r, phantom, "(**)"] \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes\varphi"] & F(Gv\otimes Gx)\otimes u \arrow[r, phantom, "(*)"] \arrow[d, "\varphi\otimes\mathrm{id}"'] & v\otimes F(Gx\otimes Gu) \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes\varphi"] \\
(FGu\otimes FGv)\otimes x \arrow[d, "\varepsilon_u\otimes\varepsilon_v\otimes\mathrm{id}"'] & u\otimes(FGv\otimes FGx) \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes\varepsilon_v\otimes\varepsilon_x"] & (FGv\otimes FGx)\otimes u \arrow[d, "\varepsilon_v\otimes\varepsilon_x\otimes\mathrm{id}"'] & v\otimes(FGx\otimes FGu) \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes\varepsilon_x\otimes\varepsilon_u"] \\
(u\otimes v)\otimes x \arrow[r, equal] & u\otimes(v\otimes x) \arrow[r, "\gamma_{u,v\otimes x}"'] & (v\otimes x)\otimes u \arrow[r, equal] & v\otimes(x\otimes u)
\end{tikzcd}
$$

(φ) は φ の自然性により可換である．$(\otimes)$ は $\otimes$ が関手だから可換である．(γ) は γ の定義より可換である．$(*)$ は次の図式により可換である．

$$
\begin{tikzcd}
F((Gv\otimes Gu)\otimes Gx) \arrow[rr, "F(\alpha)"] \arrow[d, "\varphi^{-1}"'] \arrow[drr, phantom, "(F)"] & & F(Gv\otimes(Gu\otimes Gx)) \arrow[d, "\varphi^{-1}"] \\
F(Gv\otimes Gu)\otimes FGx \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes\varepsilon_x"'] \arrow[dr, "\varphi\otimes\mathrm{id}"] & & FGv\otimes F(Gu\otimes Gx) \arrow[d, "\varepsilon_v\otimes\mathrm{id}"] \arrow[dl, "\mathrm{id}\otimes\varphi"'] \\
F(Gv\otimes Gu)\otimes x \arrow[r, phantom, "(\otimes)"] \arrow[d, "\varphi\otimes\mathrm{id}"'] & FGv\otimes FGu\otimes FGx \arrow[r, phantom, "(\otimes)"] \arrow[dl, "\mathrm{id}\otimes\varepsilon_x"'] \arrow[dr, "\varepsilon_v\otimes\mathrm{id}"] \arrow[d, phantom, "(\otimes)"] & v\otimes F(Gu\otimes Gx) \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes\varphi"] \\
FGv\otimes FGu\otimes x \arrow[d, "\varepsilon_v\otimes\varepsilon_u\otimes\mathrm{id}"'] & \, & v\otimes FGu\otimes FGx \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes\varepsilon_u\otimes\varepsilon_x"] \\
v\otimes u\otimes x \arrow[rr, equal] & & v\otimes u\otimes x
\end{tikzcd}
$$

$(**)$ の可換性を示すため，次の図式を考える．

$$
\begin{tikzcd}
F(Gu \otimes (Gv \otimes Gx)) \arrow[rrr, "F(\gamma)"] \arrow[d, "\varphi^{-1}"'] \arrow[dr, "F(\mathrm{id}\otimes\varphi')"] & & & F((Gv \otimes Gx) \otimes Gu) \arrow[dl, "F(\varphi'\otimes\mathrm{id})"'] \arrow[d, "\varphi^{-1}"] \\
FGu \otimes F(Gv \otimes Gx) \arrow[d, "\varepsilon_u\otimes\mathrm{id}"'] \arrow[dr, "\mathrm{id}\otimes F\varphi'"'] & F(Gu \otimes G(v \otimes x)) \arrow[r, "F(\gamma)"'] \arrow[d, "\varphi^{-1}"] & F(G(v \otimes x) \otimes Gu) \arrow[d, "\varphi^{-1}"'] & F(Gv \otimes Gx) \otimes FGu \arrow[dl, "F\varphi'\otimes\mathrm{id}"] \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes\varepsilon_u"] \\
u \otimes F(Gv \otimes Gx) \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes\varphi"'] \arrow[dr, "\mathrm{id}\otimes F\varphi'"'] & FGu \otimes FG(v \otimes x) \arrow[d, "\varepsilon_u\otimes\mathrm{id}"] & FG(v \otimes x) \otimes FGu \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes\varepsilon_u"'] & F(Gv \otimes Gx) \otimes u \arrow[dl, "F\varphi'\otimes\mathrm{id}"] \arrow[d, "\varphi\otimes\mathrm{id}"] \\
u \otimes FGv \otimes FGx \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes\varepsilon_v\otimes\varepsilon_x"'] & u \otimes FG(v \otimes x) \arrow[dl, "\mathrm{id}\otimes\varepsilon_{v\otimes x}"] & FG(v \otimes x) \otimes u \arrow[dr, "\varepsilon_{v\otimes x}\otimes\mathrm{id}"'] & FGv \otimes FGx \otimes u \arrow[d, "\varepsilon_v\otimes\varepsilon_x\otimes\mathrm{id}"] \\
u \otimes v \otimes x \arrow[rrr, "\gamma_{u,v\otimes x}"'] & & & v \otimes x \otimes u
\arrow[from=1-1, to=2-4, phantom, "(\Diamond)"]
\arrow[from=2-2, to=3-1, phantom, "(\varphi)"]
\arrow[from=2-3, to=3-4, phantom, "(\varphi)"]
\arrow[from=3-2, to=4-1, phantom, "(\otimes)"]
\arrow[from=3-3, to=4-4, phantom, "(\otimes)"]
\arrow[from=3-2, to=4-3, phantom, "(\gamma)"]
\arrow[from=4-1, to=4-2, phantom, "(\varphi')"]
\arrow[from=4-3, to=4-4, phantom, "(\varphi')"]
\end{tikzcd}
$$

ここで $F(Gu \otimes Gv) \xrightarrow{\varphi^{-1}} FGu \otimes FGv \xrightarrow{\varepsilon_u\otimes\varepsilon_v} u \otimes v$ の (随伴 $F \dashv G$ についての) 随伴射を φ'_{uv} と書いた．このとき (φ') が可換であることが，counit $\varepsilon_{v\otimes x}$ が id の随伴射であることから分かる．また $(\Diamond)$ は γ の自然性から可換である．

以下，この節が終わるまでこの $F\colon V \to W$ を使用する．

定義. V の形式対象とは次の条件で定まるものである．

(1) 新しい記号 j を 1 つ用意し，j は形式対象であるとする．
(2) V の対象 u は形式対象である．
(3) $\widetilde{u}, \widetilde{v}$ が形式対象[*1]のとき順序対 $\widetilde{u} \mathbin{\widetilde{\otimes}} \widetilde{v} := \langle \widetilde{u}, \widetilde{v} \rangle$ は形式対象である．
(4) 以上により得られるもののみが形式対象である．

定義. 基本射とは次の条件で定まるものである．

(1) 形式対象 $\widetilde{u}, \widetilde{v}, \widetilde{x}$ に対して新しい記号 $\mathfrak{a}_{\widetilde{u}\widetilde{v}\widetilde{x}}$ と $\mathfrak{a}^{-1}_{\widetilde{u}\widetilde{v}\widetilde{x}}$ を用意し $\mathfrak{a}_{\widetilde{u}\widetilde{v}\widetilde{x}}$ と $\mathfrak{a}^{-1}_{\widetilde{u}\widetilde{v}\widetilde{x}}$ は基本射であると定める．また

$$
s(\mathfrak{a}_{\widetilde{u}\widetilde{v}\widetilde{x}}) := (\widetilde{u} \mathbin{\widetilde{\otimes}} \widetilde{v}) \mathbin{\widetilde{\otimes}} \widetilde{x}, \qquad t(\mathfrak{a}_{\widetilde{u}\widetilde{v}\widetilde{x}}) := \widetilde{u} \mathbin{\widetilde{\otimes}} (\widetilde{v} \mathbin{\widetilde{\otimes}} \widetilde{x}),
$$
$$
s(\mathfrak{a}^{-1}_{\widetilde{u}\widetilde{v}\widetilde{x}}) := \widetilde{u} \mathbin{\widetilde{\otimes}} (\widetilde{v} \mathbin{\widetilde{\otimes}} \widetilde{x}), \qquad t(\mathfrak{a}^{-1}_{\widetilde{u}\widetilde{v}\widetilde{x}}) := (\widetilde{u} \mathbin{\widetilde{\otimes}} \widetilde{v}) \mathbin{\widetilde{\otimes}} \widetilde{x}
$$

[*1] u に対して $\widetilde{u}$ という形式対象が存在するという意味ではなく，$\widetilde{u}$ で 1 つの記号である．以下形式対象に関する記号は $\widetilde{\ }$ 付きの記号を使用する．

と定める．

(2) 形式対象 $\widetilde{u}$ に対して新しい記号 $\mathfrak{i}_{\widetilde{u}}, \mathfrak{l}_{\widetilde{u}}, \mathfrak{l}_{\widetilde{u}}^{-1}, \mathfrak{r}_{\widetilde{u}}, \mathfrak{r}_{\widetilde{u}}^{-1}$ を用意し $\mathfrak{i}_{\widetilde{u}}, \mathfrak{l}_{\widetilde{u}}, \mathfrak{l}_{\widetilde{u}}^{-1}, \mathfrak{r}_{\widetilde{u}}, \mathfrak{r}_{\widetilde{u}}^{-1}$ は基本射であると定める．また

$$\begin{aligned} s(\mathfrak{i}_{\widetilde{u}}) &:= \widetilde{u}, & t(\mathfrak{i}_{\widetilde{u}}) &:= \widetilde{u} \\ s(\mathfrak{l}_{\widetilde{u}}) &:= j \mathbin{\widetilde{\otimes}} \widetilde{u} & t(\mathfrak{l}_{\widetilde{u}}) &:= \widetilde{u} \\ s(\mathfrak{l}_{\widetilde{u}}^{-1}) &:= \widetilde{u}, & t(\mathfrak{l}_{\widetilde{u}}^{-1}) &:= j \mathbin{\widetilde{\otimes}} \widetilde{u} \\ s(\mathfrak{r}_{\widetilde{u}}) &:= \widetilde{u} \mathbin{\widetilde{\otimes}} j, & t(\mathfrak{r}_{\widetilde{u}}) &:= \widetilde{u} \\ s(\mathfrak{r}_{\widetilde{u}}^{-1}) &:= \widetilde{u}, & t(\mathfrak{r}_{\widetilde{u}}^{-1}) &:= \widetilde{u} \mathbin{\widetilde{\otimes}} j \end{aligned}$$

と定める．

(3) 形式対象 $\widetilde{u}, \widetilde{v}$ に対して新しい記号 $\mathfrak{c}_{\widetilde{u}\widetilde{v}}$ を用意し $\mathfrak{c}_{\widetilde{u}\widetilde{v}}$ は基本射であると定める．また

$$s(\mathfrak{c}_{\widetilde{u}\widetilde{v}}) := \widetilde{u} \mathbin{\widetilde{\otimes}} \widetilde{v}, \qquad t(\mathfrak{c}_{\widetilde{u}\widetilde{v}}) := \widetilde{v} \mathbin{\widetilde{\otimes}} \widetilde{u}$$

と定める．

(4) $\mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ が基本射のとき順序対 $\mathfrak{b} \mathbin{\widetilde{\otimes}} \mathfrak{c} := \langle \mathfrak{b}, \mathfrak{c} \rangle$ は基本射であると定める．また

$$s(\mathfrak{b} \mathbin{\widetilde{\otimes}} \mathfrak{c}) = s(\mathfrak{b}) \mathbin{\widetilde{\otimes}} s(\mathfrak{c}), \quad t(\mathfrak{b} \mathbin{\widetilde{\otimes}} \mathfrak{c}) = t(\mathfrak{b}) \mathbin{\widetilde{\otimes}} t(\mathfrak{c})$$

と定める．

(5) 以上により得られるもののみが基本射である．

定義. $\widetilde{u}, \widetilde{v}$ を形式対象とする．$\widetilde{u}$ から $\widetilde{v}$ への射とは基本射の有限列 $\mathfrak{b}_0, \cdots, \mathfrak{b}_n$ であって $s(\mathfrak{b}_0) = \widetilde{u}$，$t(\mathfrak{b}_0) = s(\mathfrak{b}_1)$，$\cdots$，$t(\mathfrak{b}_{n-1}) = s(\mathfrak{b}_n)$，$t(\mathfrak{b}_n) = \widetilde{v}$ を満たすものである．この射を $\mathfrak{b}_n \mathbin{\widetilde{\circ}} \cdots \mathbin{\widetilde{\circ}} \mathfrak{b}_0$ で表す．

$\mathfrak{b}$ が $\widetilde{u}$ から $\widetilde{v}$ への射のとき $\mathfrak{b} \colon \widetilde{u} \to \widetilde{v}$ と書く．

定義. V の形式対象 $\widetilde{u}$ に対して，V の対象 $|\widetilde{u}|$ を以下により定める．

(1) $\widetilde{u} = j$ のとき $|\widetilde{u}| := I$ と定める．
(2) $\widetilde{u} = u$ が V の対象のとき，$|\widetilde{u}| := u$ と定める．
(3) $\widetilde{u} = \widetilde{v} \mathbin{\widetilde{\otimes}} \widetilde{x}$ のとき $|\widetilde{u}| := |\widetilde{v}| \otimes |\widetilde{x}|$ と定める．

定義. 形式対象の射 $\mathfrak{b} \colon \widetilde{z} \to \widetilde{z'}$ に対して，V の射 $|\mathfrak{b}| \colon |\widetilde{z}| \to |\widetilde{z'}|$ を以下により定める．

(1) $\mathfrak{b} = \mathfrak{a}_{\widetilde{u}\widetilde{v}\widetilde{x}}$ のとき $|\mathfrak{b}| := \alpha_{|\widetilde{u}||\widetilde{v}||\widetilde{x}|}$ とする．
(2) $\mathfrak{b} = \mathfrak{a}_{\widetilde{u}\widetilde{v}\widetilde{x}}^{-1}$ のとき $|\mathfrak{b}| := \alpha_{|\widetilde{u}||\widetilde{v}||\widetilde{x}|}^{-1}$ とする．

(3) $\mathfrak{b}=\mathfrak{i}_{\widetilde{u}}$ のとき $|\mathfrak{b}|:=\mathrm{id}_{|\widetilde{u}|}$ とする.
(4) $\mathfrak{b}=\mathfrak{l}_{\widetilde{u}}$ のとき $|\mathfrak{b}|:=\lambda_{|\widetilde{u}|}$ とする.
(5) $\mathfrak{b}=\mathfrak{l}_{\widetilde{u}}^{-1}$ のとき $|\mathfrak{b}|:=\lambda_{|\widetilde{u}|}^{-1}$ とする.
(6) $\mathfrak{b}=\mathfrak{r}_{\widetilde{u}}$ のとき $|\mathfrak{b}|:=\rho_{|\widetilde{u}|}$ とする.
(7) $\mathfrak{b}=\mathfrak{r}_{\widetilde{u}}^{-1}$ のとき $|\mathfrak{b}|:=\rho_{|\widetilde{u}|}^{-1}$ とする.
(8) $\mathfrak{b}=\mathfrak{c}\mathbin{\widetilde{\otimes}}\mathfrak{d}$ ($\mathfrak{c},\mathfrak{d}$ は基本射) のとき $|\mathfrak{b}|:=|\mathfrak{c}|\otimes|\mathfrak{d}|$ とする.
(9) $\mathfrak{b}=\mathfrak{b}_n\mathbin{\widetilde{\circ}}\cdots\mathbin{\widetilde{\circ}}\mathfrak{b}_0$ (各 $\mathfrak{b}_i$ は基本射) のとき $|\mathfrak{b}|:=|\mathfrak{b}_n|\circ\cdots\circ|\mathfrak{b}_0|$ とする.

定義. V の形式対象 $\widetilde{u}$ に対して，対象 $\langle\widetilde{u}\rangle\in W$ と射 $\bar{\varphi}^{\widetilde{u}}\colon F(|\widetilde{u}|)\to\langle\widetilde{u}\rangle$ を以下のように定める.

(1) $\widetilde{u}=j$ のとき，$\langle\widetilde{u}\rangle:=I$ として $\bar{\varphi}^{\widetilde{u}}:=\psi^{-1}\colon F(|\widetilde{u}|)\to I$ とする.
(2) $\widetilde{u}=u\in V$ のとき，$\langle\widetilde{u}\rangle:=Fu$ として $\bar{\varphi}^{\widetilde{u}}:=\mathrm{id}_{Fu}\colon F(|\widetilde{u}|)\to Fu$ とする.
(3) $\widetilde{u}=\widetilde{v}\mathbin{\widetilde{\otimes}}\widetilde{x}$ のとき，$\langle\widetilde{u}\rangle:=\langle\widetilde{v}\rangle\otimes\langle\widetilde{x}\rangle$ として $\bar{\varphi}^{\widetilde{u}}$ を合成

$$F(|\widetilde{u}|)=F(|\widetilde{v}|\otimes|\widetilde{x}|)\xrightarrow{\varphi^{-1}_{|\widetilde{v}||\widetilde{x}|}}F(|\widetilde{v}|)\otimes F(|\widetilde{x}|)\xrightarrow{\bar{\varphi}^{\widetilde{v}}\otimes\bar{\varphi}^{\widetilde{x}}}\langle\widetilde{v}\rangle\otimes\langle\widetilde{x}\rangle$$

で定める.

定義. $\widetilde{z},\widetilde{z'}$ を V の形式対象，$\mathfrak{b}\colon\widetilde{z}\to\widetilde{z'}$ を基本射とする. W の射 $\langle\mathfrak{b}\rangle\colon\langle\widetilde{z}\rangle\to\langle\widetilde{z'}\rangle$ を以下のように定める.

(1) $\mathfrak{b}=\mathfrak{a}_{\widetilde{u}\widetilde{v}\widetilde{x}},\mathfrak{a}^{-1}_{\widetilde{u}\widetilde{v}\widetilde{x}},\mathfrak{i}_{\widetilde{u}},\mathfrak{l}_{\widetilde{u}},\mathfrak{l}^{-1}_{\widetilde{u}},\mathfrak{r}_{\widetilde{u}},\mathfrak{r}^{-1}_{\widetilde{u}}$ のとき，(W が strict なので) 定義から明らかに $\langle\widetilde{z}\rangle=\langle\widetilde{z'}\rangle$ となる. そこで $\langle\mathfrak{b}\rangle:=\mathrm{id}$ とする.
(2) $\mathfrak{b}=\mathfrak{c}_{\widetilde{u}\widetilde{v}}$ のとき，$\langle\mathfrak{b}\rangle:=\gamma_{\langle\widetilde{u}\rangle\langle\widetilde{v}\rangle}\colon\langle\widetilde{u}\rangle\otimes\langle\widetilde{v}\rangle\to\langle\widetilde{v}\rangle\otimes\langle\widetilde{u}\rangle$ とする.
(3) $\mathfrak{b}=\mathfrak{c}\mathbin{\widetilde{\otimes}}\mathfrak{d}$ ($\mathfrak{c},\mathfrak{d}$ は基本射) のとき，$\langle\mathfrak{b}\rangle:=\langle\mathfrak{c}\rangle\otimes\langle\mathfrak{d}\rangle$ とする.

補題 7. 基本射 $\mathfrak{b}\colon\widetilde{z}\to\widetilde{z'}$ に対して次の図式は可換である.

$$\begin{tikzcd}
F(|\widetilde{z}|) \arrow[r, "F(|\mathfrak{b}|)"] \arrow[d, "\bar{\varphi}^{\widetilde{z}}"'] & F(|\widetilde{z'}|) \arrow[d, "\bar{\varphi}^{\widetilde{z'}}"] \\
\langle\widetilde{z}\rangle \arrow[r, "\langle\mathfrak{b}\rangle"'] & \langle\widetilde{z'}\rangle
\end{tikzcd}$$

証明. 基本射の構成に関する帰納法.
(1-1) $\mathfrak{b}=\mathfrak{a}_{\widetilde{u}\widetilde{v}\widetilde{x}}$ のとき.

示すべき可換性は次の図式であり，これは可換である．

$$
\begin{tikzcd}
F((|\widetilde{u}| \otimes |\widetilde{v}|) \otimes |\widetilde{x}|) \arrow[r, "F(\alpha_{|\widetilde{u}||\widetilde{v}||\widetilde{x}|})"] \arrow[d, "\varphi^{-1}"'] & F(|\widetilde{u}| \otimes (|\widetilde{v}| \otimes |\widetilde{x}|)) \arrow[d, "\varphi^{-1}"] \\
F(|\widetilde{u}| \otimes |\widetilde{v}|) \otimes F(|\widetilde{x}|) \arrow[d, "\varphi^{-1} \otimes \mathrm{id}"'] & F(|\widetilde{u}|) \otimes F(|\widetilde{v}| \otimes |\widetilde{x}|) \arrow[d, "\mathrm{id} \otimes \varphi^{-1}"] \\
F(|\widetilde{u}|) \otimes F(|\widetilde{v}|) \otimes F(|\widetilde{x}|) \arrow[r, equal] \arrow[d, "\overline{\varphi}^{\widetilde{u}} \otimes \overline{\varphi}^{\widetilde{v}} \otimes \overline{\varphi}^{\widetilde{x}}"'] & F(|\widetilde{u}|) \otimes F(|\widetilde{v}|) \otimes F(|\widetilde{x}|) \arrow[d, "\overline{\varphi}^{\widetilde{u}} \otimes \overline{\varphi}^{\widetilde{v}} \otimes \overline{\varphi}^{\widetilde{x}}"] \\
\langle \widetilde{u} \rangle \otimes \langle \widetilde{v} \rangle \otimes \langle \widetilde{x} \rangle \arrow[r, equal] & \langle \widetilde{u} \rangle \otimes \langle \widetilde{v} \rangle \otimes \langle \widetilde{x} \rangle
\end{tikzcd}
$$

(1-2) $\mathfrak{b} = \mathfrak{a}^{-1}_{\widetilde{u}\widetilde{v}\widetilde{x}}$ のとき，(1-1) と同様．

(2-1) $\mathfrak{b} = \mathfrak{i}_{\widetilde{u}}$ のとき，明らか．

(2-2) $\mathfrak{b} = \mathfrak{l}_{\widetilde{u}}$ のとき．

示すべき可換性は次の図式であり，これは可換である．

$$
\begin{tikzcd}
F(I \otimes |\widetilde{u}|) \arrow[r, "F(\lambda_{|\widetilde{u}|})"] \arrow[d, "\varphi^{-1}"'] & F(|\widetilde{u}|) \arrow[ddd, "\overline{\varphi}^{\widetilde{u}}"] \\
F(I) \otimes F(|\widetilde{u}|) \arrow[d, "\psi^{-1} \otimes \mathrm{id}"'] & \\
I \otimes F(|\widetilde{u}|) \arrow[d, "\mathrm{id} \otimes \overline{\varphi}^{\widetilde{u}}"'] \arrow[uur, "\mathrm{id}"'] & \\
I \otimes \langle \widetilde{u} \rangle \arrow[r, equal] & \langle \widetilde{u} \rangle
\end{tikzcd}
$$

(2-3) $\mathfrak{b} = \mathfrak{l}^{-1}_{\widetilde{u}}, \mathfrak{r}_{\widetilde{u}}, \mathfrak{r}^{-1}_{\widetilde{u}}$ のとき，(2-2) と同様．

(3) $\mathfrak{b} = \mathfrak{c}_{\widetilde{u}\widetilde{v}}$ のとき．

示すべき可換性は次の図式であり，これは可換である．

$$
\begin{tikzcd}
F(|\widetilde{u}| \otimes |\widetilde{v}|) \arrow[r, "F(\gamma_{|\widetilde{u}||\widetilde{v}|})"] \arrow[d, "\varphi^{-1}"'] & F(|\widetilde{v}| \otimes |\widetilde{u}|) \arrow[d, "\varphi^{-1}"] \\
F(|\widetilde{u}|) \otimes F(|\widetilde{v}|) \arrow[r, "\gamma_{F(|\widetilde{u}|),F(|\widetilde{v}|)}"'] \arrow[d, "\overline{\varphi}^{\widetilde{u}} \otimes \overline{\varphi}^{\widetilde{v}}"'] & F(|\widetilde{v}|) \otimes F(|\widetilde{u}|) \arrow[d, "\overline{\varphi}^{\widetilde{v}} \otimes \overline{\varphi}^{\widetilde{u}}"] \\
\langle \widetilde{u} \rangle \otimes \langle \widetilde{v} \rangle \arrow[r, "\gamma_{\langle \widetilde{u} \rangle \langle \widetilde{v} \rangle}"'] & \langle \widetilde{v} \rangle \otimes \langle \widetilde{u} \rangle
\end{tikzcd}
$$

(4) $\mathfrak{b} = \mathfrak{c} \mathbin{\widetilde{\otimes}} \mathfrak{d}$ ($\mathfrak{c}, \mathfrak{d}$ は基本射) のとき．
$\mathfrak{c}\colon \widetilde{u} \to \widetilde{v}$, $\mathfrak{d}\colon \widetilde{x} \to \widetilde{z}$ とすると示すべき可換性は次の図式であり，これは可換である．

$$\begin{tikzcd}
F(|\widetilde{u}| \otimes |\widetilde{x}|) \arrow[r, "F(|\mathfrak{c}|\otimes|\mathfrak{d}|)"] \arrow[d, "\varphi^{-1}"'] & F(|\widetilde{v}| \otimes |\widetilde{z}|) \arrow[d, "\varphi^{-1}"] \\
F(|\widetilde{u}|) \otimes F(|\widetilde{x}|) \arrow[r, "F(|\mathfrak{c}|)\otimes F(|\mathfrak{d}|)"] \arrow[d, "\overline{\varphi}^{\widetilde{u}} \otimes \overline{\varphi}^{\widetilde{x}}"'] & F(|\widetilde{v}|) \otimes F(|\widetilde{z}|) \arrow[d, "\overline{\varphi}^{\widetilde{v}} \otimes \overline{\varphi}^{\widetilde{z}}"] \\
\langle \widetilde{u} \rangle \otimes \langle \widetilde{x} \rangle \arrow[r, "\langle \mathfrak{c} \rangle \otimes \langle \mathfrak{d} \rangle"'] & \langle \widetilde{v} \rangle \otimes \langle \widetilde{z} \rangle
\end{tikzcd}$$

□

V の形式対象 $\widetilde{z}$ に対して $N(\widetilde{z}) \in \mathbb{N}$ を次のように定める．

(1) $\widetilde{z} = j$ のとき $N(\widetilde{z}) := 0$ とする．
(2) $\widetilde{z} = z \in V$ のとき $N(\widetilde{z}) := 1$ とする．
(3) $\widetilde{z} = \widetilde{u} \mathbin{\widetilde{\otimes}} \widetilde{v}$ のとき $N(\widetilde{z}) := N(\widetilde{u}) + N(\widetilde{v})$ とする．

この $N(\widetilde{z})$ は $\langle \widetilde{z} \rangle$ の「成分の個数」である．つまり次の補題が成り立つ．

補題 8. V の形式対象 $\widetilde{z}$ に対して，ある $w_i \in W$ が存在して $\langle \widetilde{z} \rangle = w_1 \otimes \cdots \otimes w_{N(\widetilde{z})}$ となる．(但し，この積は $N(\widetilde{z}) = 0$ のときは $I \in W$ を表すものとする．)

証明. 形式対象の構成に関する帰納法.
(1) $\widetilde{z} = j$ のとき．$N(\widetilde{z}) = 0$ であり，定義から $\langle \widetilde{z} \rangle = I$ だからよい．
(3) $\widetilde{z} = u \in V$ のとき．定義から $\langle \widetilde{z} \rangle = Fu$ である．よって $w_1 := Fu$ とすればよい．
(2) $\widetilde{z} = \widetilde{u} \mathbin{\widetilde{\otimes}} \widetilde{v}$ のとき．
帰納法の仮定から $w_1, \cdots, w_{N(\widetilde{u})+N(\widetilde{v})} \in W$ が存在して

$$\langle \widetilde{u} \rangle = w_1 \otimes \cdots \otimes w_{N(\widetilde{u})}, \quad \langle \widetilde{v} \rangle = w_{N(\widetilde{u})+1} \otimes \cdots \otimes w_{N(\widetilde{u})+N(\widetilde{v})}$$

と書ける．このとき定義から $N(\widetilde{z}) = N(\widetilde{u}) + N(\widetilde{v})$ かつ $\langle \widetilde{z} \rangle = w_1 \otimes \cdots \otimes w_{N(\widetilde{z})}$ である． □

この補題 8 の証明の方法で得た $\langle \widetilde{z} \rangle = w_1 \otimes \cdots \otimes w_{N(\widetilde{z})}$ を $\langle \widetilde{z} \rangle$ の標準形と呼ぶことにする．

$\mathfrak{b}\colon \widetilde{z} \to \widetilde{z'}$ を形式対象の射とするとき，射の定義から明らかに $N(\widetilde{z}) = N(\widetilde{z'})$ である．そこで $N(\mathfrak{b}) := N(\widetilde{z})$ と書く．詳しくは次の補題 9 で証明するが，標準形で

$$\langle\widetilde{z}\rangle = w_1 \otimes \cdots \otimes w_{N(\mathfrak{b})}, \quad \langle\widetilde{z'}\rangle = w'_1 \otimes \cdots \otimes w'_{N(\mathfrak{b})}$$

と書くとき $w'_1, \cdots, w'_{N(\mathfrak{b})}$ は $w_1, \cdots, w_{N(\mathfrak{b})}$ を並べ替えたものになることが分かる．つまりある置換 $\sigma \in S_{N(\mathfrak{b})}$ [*2]が存在して，$1 \leq r \leq N(\mathfrak{b})$ に対して $w'_r = w_{\sigma(r)}$ となるのである．このこと (補題 9) を証明するために $\sigma(\mathfrak{b}) \in S_{N(\mathfrak{b})}$ を次のように定義する．

(1) $\mathfrak{b} = \mathfrak{a}_{\widetilde{u}\widetilde{v}\widetilde{x}}, \mathfrak{a}^{-1}_{\widetilde{u}\widetilde{v}\widetilde{x}}, \mathfrak{i}_{\widetilde{u}}, \mathfrak{l}_{\widetilde{u}}, \mathfrak{l}^{-1}_{\widetilde{u}}, \mathfrak{r}_{\widetilde{u}}, \mathfrak{r}^{-1}_{\widetilde{u}}$ のとき $\sigma(\mathfrak{b}) = \mathrm{id}$ とする．

(2) $\mathfrak{b} = \mathfrak{c}_{\widetilde{u}\widetilde{v}}$ のとき $\sigma(\mathfrak{b})$ を置換

$$\begin{pmatrix} 1 & \cdots & N(\widetilde{v}) & N(\widetilde{v})+1 & \cdots & N(\widetilde{v})+N(\widetilde{u}) \\ N(\widetilde{u})+1 & \cdots & N(\widetilde{u})+N(\widetilde{v}) & 1 & \cdots & N(\widetilde{u}) \end{pmatrix}$$

とする[*3]．

(3) $\mathfrak{b} = \mathfrak{c} \mathbin{\widetilde{\otimes}} \mathfrak{d}$ ($\mathfrak{c}, \mathfrak{d}$ は基本射) のとき $\sigma(\mathfrak{b}) := \sigma(\mathfrak{c}) \boxtimes \sigma(\mathfrak{d})$ と定める．ここで $\sigma \in S_n$, $\tau \in S_m$ に対して $\sigma \boxtimes \tau \in S_{n+m}$ は置換

$$\begin{pmatrix} 1 & \cdots & n & n+1 & \cdots & n+m \\ \sigma(1) & \cdots & \sigma(n) & n+\tau(1) & \cdots & n+\tau(m) \end{pmatrix}$$

とする．

(4) $\mathfrak{b} = \mathfrak{b}_n \mathbin{\widetilde{\circ}} \cdots \mathbin{\widetilde{\circ}} \mathfrak{b}_0$ (各 $\mathfrak{b}_i$ は基本射) のとき $\sigma(\mathfrak{b}) := \sigma(\mathfrak{b}_0) \circ \cdots \circ \sigma(\mathfrak{b}_n)$ とする．(合成の順番が逆になっていることに注意．)

補題 9. $\mathfrak{b}\colon \widetilde{z} \to \widetilde{z'}$ を形式対象の射として $n := N(\mathfrak{b})$, $\sigma = \sigma(\mathfrak{b})$ とする．

$$\langle\widetilde{z}\rangle = w_1 \otimes \cdots \otimes w_n, \quad \langle\widetilde{z'}\rangle = w'_1 \otimes \cdots \otimes w'_n$$

を標準形としたとき，$1 \leq r \leq n$ に対して $w'_r = w_{\sigma(r)}$ である．

証明. 射の構成に関する帰納法.

(1) $\mathfrak{b} = \mathfrak{a}_{\widetilde{u}\widetilde{v}\widetilde{x}}, \mathfrak{a}^{-1}_{\widetilde{u}\widetilde{v}\widetilde{x}}, \mathfrak{i}_{\widetilde{u}}, \mathfrak{l}_{\widetilde{u}}, \mathfrak{l}^{-1}_{\widetilde{u}}, \mathfrak{r}_{\widetilde{u}}, \mathfrak{r}^{-1}_{\widetilde{u}}$ のとき，明らか.

(2) $\mathfrak{b} = \mathfrak{c}_{\widetilde{u}\widetilde{v}}$ のとき.

$m := N(\widetilde{u})$ とする．$\widetilde{u}, \widetilde{v}$ の標準形を

$$\langle\widetilde{u}\rangle = w_1 \otimes \cdots \otimes w_m, \quad \langle\widetilde{v}\rangle = w_{m+1} \otimes \cdots \otimes w_n$$

[*2] S_n は n 次対称群，即ち全単射 $\{1, \cdots, n\} \to \{1, \cdots, n\}$ 全体がなす群 (積は写像の合成) である．

[*3] $N(\widetilde{u}) = 0$ または $N(\widetilde{v}) = 0$ のときは $\sigma(\mathfrak{b}) = \mathrm{id}$ となる．

とするとき，$\widetilde{z}, \widetilde{z'}$ の標準形は

$$\begin{aligned}\langle\widetilde{z}\rangle &= \langle\widetilde{u}\rangle \otimes \langle\widetilde{v}\rangle \\ &= w_1 \otimes \cdots \otimes w_n \\ \langle\widetilde{z'}\rangle &= \langle\widetilde{v}\rangle \otimes \langle\widetilde{u}\rangle \\ &= w_{m+1} \otimes \cdots \otimes w_n \otimes w_1 \otimes \cdots \otimes w_m\end{aligned}$$

となる．また定義より $\sigma = \sigma(\mathfrak{b})$ は

$$\begin{pmatrix} 1 & \cdots & n-m & n-m+1 & \cdots & n \\ m+1 & \cdots & n & 1 & \cdots & m \end{pmatrix}$$

である．よって成り立つ．

(3) $\mathfrak{b} = \mathfrak{c} \mathbin{\widetilde{\otimes}} \mathfrak{d}$ ($\mathfrak{c}, \mathfrak{d}$ は基本射) のとき，定義から明らか．

(4) $\mathfrak{b} = \mathfrak{d} \mathbin{\widetilde{\circ}} \mathfrak{c}$ ($\mathfrak{c}\colon \widetilde{z} \to \widetilde{z''}$，$\mathfrak{d}\colon \widetilde{z''} \to \widetilde{z'}$ は射) のとき．

$$\langle\widetilde{z}\rangle = w_1 \otimes \cdots \otimes w_n, \quad \langle\widetilde{z''}\rangle = w''_1 \otimes \cdots \otimes w''_n, \quad \langle\widetilde{z'}\rangle = w'_1 \otimes \cdots \otimes w'_n$$

を標準形とする．帰納法の仮定より $w''_r = w_{\sigma(\mathfrak{c})(r)}$ かつ $w'_r = w''_{\sigma(\mathfrak{d})(r)}$ である．故に

$$w'_r = w_{\sigma(\mathfrak{c})(\sigma(\mathfrak{d})(r))} = w_{\sigma(\mathfrak{b})(r)}$$

となる． □

$\tau_i \in S_n$ で置換

$$\begin{pmatrix} i & i+1 \\ i+1 & i \end{pmatrix}$$

を表すとする．$w_1, \cdots, w_n \in W$ に対して W の射 $t_i^{w_1 \cdots w_n}$ を

$$t_i^{w_1 \cdots w_n} := \mathrm{id}_{w_1} \otimes \cdots \otimes \mathrm{id}_{w_{i-1}} \otimes \gamma_{w_i w_{i+1}} \otimes \mathrm{id}_{w_{i+2}} \otimes \cdots \otimes \mathrm{id}_{w_n}$$

で定義する．任意の $\sigma \in S_n$ は τ_i の積で書ける．そこで $\sigma = \tau_{i_k} \circ \cdots \circ \tau_{i_1}$ と書いたとき W の射 $h^{w_1 \cdots w_n}(\sigma)$ を

$$\begin{aligned} h^{w_1 \cdots w_n}(\sigma) &:= t_{i_1}^{a_1^1 \cdots a_n^1} \circ \cdots \circ t_{i_k}^{a_1^k \cdots a_n^k} \\ a_r^m &:= w_{\tau_{i_k} \circ \cdots \circ \tau_{i_{m+1}}(r)} \qquad (1 \leq m \leq k,\ 1 \leq r \leq n) \end{aligned}$$

で定義する[*4]．$h^{w_1 \cdots w_n}(\sigma)\colon w_1 \otimes \cdots \otimes w_n \to w_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes w_{\sigma(n)}$ である．

[*4] 要するに，$a_r^k := w_r$ として射の合成ができるように順に $a_r^{k-1}, \cdots, a_r^1$ を取っていくとこの定義になる．

※ 例えば $n=4$ で $\sigma := \tau_3 \circ \tau_2 \circ \tau_1$ とする．このとき

$$\tau_3 = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad \tau_3 \circ \tau_2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \tau_3 \circ \tau_2 \circ \tau_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

であり，$h^{w_1 \cdots w_4}(\sigma)$ は合成

$$\begin{aligned}
& w_1 \otimes w_2 \otimes w_3 \otimes w_4 \\
& \xrightarrow{t_3^{w_1 w_2 w_3 w_4} = \mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes \gamma_{w_3 w_4}} w_1 \otimes w_2 \otimes w_4 \otimes w_3 \\
& \xrightarrow{t_2^{w_1 w_2 w_4 w_3} = \mathrm{id} \otimes \gamma_{w_2 w_4} \otimes \mathrm{id}} w_1 \otimes w_4 \otimes w_2 \otimes w_3 \\
& \xrightarrow{t_1^{w_1 w_4 w_2 w_3} = \gamma_{w_1 w_4} \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id}} w_4 \otimes w_1 \otimes w_2 \otimes w_3
\end{aligned}$$

になる．

この $h^{w_1 \cdots w_n}(\sigma)$ は well-defined である．

∵) S_n は τ_i $(1 \leq i \leq n-1)$ で生成されており，これらの間の関係式は

$$\begin{aligned}
\tau_i \circ \tau_i &= \mathrm{id} & (1 \leq i \leq n-1) \\
\tau_i \circ \tau_{i+1} \circ \tau_i \circ \tau_{i+1} \circ \tau_i \circ \tau_{i+1} &= \mathrm{id} & (1 \leq i \leq n-2) \\
\tau_i \circ \tau_j &= \tau_j \circ \tau_i & (1 \leq i < j-1 \leq n-2)
\end{aligned}$$

のみであることが知られている．よって以下を示せばよい．(但し上付き添え字の w_r は省略する．)

(1) $t_i \circ t_i = \mathrm{id}$ $(1 \leq i \leq n-1)$

これは対称モノイダル圏の定義の定義 $(\gamma_{vu} \circ \gamma_{uv} = \mathrm{id})$ から明らか．

(2) $t_{i+1} \circ t_i \circ t_{i+1} \circ t_i \circ t_{i+1} \circ t_i = \mathrm{id}$ $(1 \leq i \leq n-2)$

これは次の図式が可換であることを示せばよい

$$\begin{tikzcd}
w_i \otimes w_{i+1} \otimes w_{i+2} \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes\gamma"] \arrow[d, "\gamma\otimes\mathrm{id}"'] & w_i \otimes w_{i+2} \otimes w_{i+1} \arrow[r, "\gamma\otimes\mathrm{id}"] \arrow[dl, "\gamma_{w_i \otimes w_{i+2}, w_{i+1}}"] & w_{i+2} \otimes w_i \otimes w_{i+1} \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes\gamma"] \arrow[dl, "\gamma_{w_{i+2} \otimes w_i, w_{i+1}}"'] \\
w_{i+1} \otimes w_i \otimes w_{i+2} \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes\gamma"'] & w_{i+1} \otimes w_{i+2} \otimes w_i \arrow[r, "\gamma\otimes\mathrm{id}"'] & w_{i+2} \otimes w_{i+1} \otimes w_i
\end{tikzcd}$$

それは対称モノイダル圏の定義と γ の自然性から可換である．

(3) $t_j \circ t_i = t_i \circ t_j$ $(1 \leq i < j-1 \leq n-2)$

これは $\otimes$ が関手であることから明らか.

$\sigma, \sigma' \in S_n$ として $\sigma = \tau_{i_k} \circ \cdots \circ \tau_{i_1}$, $\sigma' = \tau_{j_l} \circ \cdots \circ \tau_{j_1}$ と書く．定義より

$$\begin{aligned}
h^{w_1\cdots w_n}(\sigma) &= t_{i_1}^{a_1^1\cdots a_n^1} \circ \cdots \circ t_{i_k}^{a_1^k\cdots a_n^k} \\
a_r^m &= w_{\tau_{i_k}\circ\cdots\circ\tau_{i_{m+1}}(r)} \qquad (1 \leq m \leq k,\ 1 \leq r \leq n) \\
h^{z_1\cdots z_n}(\sigma') &= t_{j_1}^{b_1^1\cdots b_n^1} \circ \cdots \circ t_{j_l}^{b_1^l\cdots b_n^l} \\
b_r^m &= z_{\tau_{j_l}\circ\cdots\circ\tau_{j_{m+1}}(r)} \qquad (1 \leq m \leq l,\ 1 \leq r \leq n) \\
h^{w_1\cdots w_n}(\sigma\circ\sigma') &= t_{j_1}^{c_1^1\cdots c_n^1} \circ \cdots \circ t_{j_l}^{c_1^l\cdots c_n^l} \circ t_{i_1}^{d_1^1\cdots d_n^1} \circ \cdots \circ t_{i_k}^{d_1^k\cdots d_n^k} \\
c_r^m &= w_{\tau_{i_k}\circ\cdots\circ\tau_{i_1}\circ\tau_{j_l}\circ\cdots\circ\tau_{j_{m+1}}(r)} \qquad (1 \leq m \leq l,\ 1 \leq r \leq n) \\
d_r^m &= w_{\tau_{i_k}\circ\cdots\circ\tau_{i_{m+1}}(r)} \qquad (1 \leq m \leq k,\ 1 \leq r \leq n)
\end{aligned}$$

となる．$a_r^p = d_r^p$ であり，また $z_r := w_{\sigma(r)}$ とすれば

$$b_r^p = w_{\sigma(\tau_{j_l}\circ\cdots\circ\tau_{j_{p+1}}(r))} = c_r^p$$

となる．よって

$$\begin{aligned}
h^{w_1\cdots w_n}(\sigma\circ\sigma') &= t_{j_1}^{b_1^1\cdots b_n^1} \circ \cdots \circ t_{j_l}^{b_1^l\cdots b_n^l} \circ t_{i_1}^{a_1^1\cdots a_n^1} \circ \cdots \circ t_{i_k}^{a_1^k\cdots a_n^k} \\
&= h^{w_{\sigma(1)}\cdots w_{\sigma(n)}}(\sigma') \circ h^{w_1\cdots w_n}(\sigma)
\end{aligned}$$

である．また明らかに $\sigma \in S_n$, $\tau \in S_m$ に対して

$$h^{w_1\cdots w_{n+m}}(\sigma \boxtimes \tau) = h^{w_1\cdots w_n}(\sigma) \otimes h^{w_1\cdots w_m}(\tau)$$

である．

補題 10. $N > n > 0$ として $w_1, \cdots, w_N \in W$ を対象とする．$\sigma \in S_N$ を

$$\begin{pmatrix} 1 & \cdots & N-n & N-n+1 & \cdots & N \\ n+1 & \cdots & N & 1 & \cdots & n \end{pmatrix}$$

とするとき $\gamma_{w_1\otimes\cdots\otimes w_n, w_{n+1}\otimes\cdots\otimes w_N} = h^{w_1\cdots w_N}(\sigma)$ である．

証明. N に関する帰納法で示す．まず $N=2$ の場合は定義から明らか.

$N > 2$ とする．まず $n < N-1$ とする．この場合 $n+1 \leq N-1$ であり，対称モノイ

ダル圏の定義より次の図式が可換である．

$$
\begin{tikzcd}
(w_1 \otimes \cdots \otimes w_n) \otimes (w_{n+1} \otimes \cdots \otimes w_{N-1}) \otimes w_N \arrow[d, "\gamma_{w_1 \otimes \cdots \otimes w_n, w_{n+1} \otimes \cdots \otimes w_N}"'] \arrow[dr, "\gamma_{w_1 \otimes \cdots \otimes w_n, w_{n+1} \otimes \cdots \otimes w_{N-1}} \otimes \mathrm{id}"] & \\
{} & (w_{n+1} \otimes \cdots \otimes w_{N-1}) \otimes (w_1 \otimes \cdots \otimes w_n) \otimes w_N \arrow[dl, "\mathrm{id} \otimes \gamma_{w_1 \otimes \cdots \otimes w_n, w_N}"] \\
(w_{n+1} \otimes \cdots \otimes w_{N-1}) \otimes w_N \otimes (w_1 \otimes \cdots \otimes w_n) &
\end{tikzcd}
\tag{11}
$$

そこで置換 σ', σ'' を

$$
\begin{aligned}
\sigma' &:= \begin{pmatrix} 1 & \cdots & N-n-1 & N-n & \cdots & N-1 \\ n+1 & \cdots & N-1 & 1 & \cdots & n \end{pmatrix} \\
\sigma'' &:= \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n+1 \\ n+1 & 1 & \cdots & n \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

と定義すれば，帰納法の仮定より

$$
\gamma_{w_1 \otimes \cdots \otimes w_n, w_{n+1} \otimes \cdots \otimes w_{N-1}} = h^{w_1 \cdots w_{N-1}}(\sigma'), \quad \gamma_{w_1 \otimes \cdots \otimes w_n, w_N} = h^{w_1 \cdots w_n w_N}(\sigma'')
$$

となる．このとき置換の計算をすると $(\sigma' \boxtimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \boxtimes \sigma'') = \sigma$ だから (11) を使うと

$$
\begin{aligned}
&\gamma_{w_1 \otimes \cdots \otimes w_n, w_{n+1} \otimes \cdots \otimes w_N} \\
&\quad = \left(h^{w_{n+1} \cdots w_{N-1}}(\mathrm{id}) \otimes h^{w_1 \cdots w_n w_N}(\sigma'')\right) \circ \left(h^{w_1 \cdots w_{N-1}}(\sigma') \otimes h^{w_N}(\mathrm{id})\right) \\
&\quad = h^{w_{n+1} \cdots w_{N-1} w_1 \cdots w_n w_N}((\mathrm{id} \boxtimes \sigma'')) \circ h^{w_1 \cdots w_N}((\sigma' \boxtimes \mathrm{id})) \\
&\quad = h^{w_1 \cdots w_N}((\sigma' \boxtimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \boxtimes \sigma'')) \\
&\quad = h^{w_1 \cdots w_N}(\sigma)
\end{aligned}
$$

が分かる．

次に $n = N-1$ とする．この場合 $2 \leq n$ であるから次の図式が可換である．

$$
\begin{tikzcd}
w_1 \otimes (w_2 \otimes \cdots \otimes w_n) \otimes w_N \arrow[d, "\gamma_{w_1 \otimes \cdots \otimes w_n, w_N}"'] \arrow[dr, "\mathrm{id} \otimes \gamma_{w_2 \otimes \cdots \otimes w_n, w_N}"] & \\
{} & w_1 \otimes w_N \otimes (w_2 \otimes \cdots \otimes w_n) \arrow[dl, "\gamma_{w_1 w_N} \otimes \mathrm{id}"] \\
w_N \otimes w_1 \otimes (w_2 \otimes \cdots \otimes w_n) &
\end{tikzcd}
$$

よって置換 σ', σ'' を

$$\sigma' := \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ n & 1 & \cdots & n-1 \end{pmatrix}, \quad \sigma'' := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

と定義すれば，帰納法の仮定より

$$\gamma_{w_2 \otimes \cdots \otimes w_n, w_N} = h^{w_2 \cdots w_N}(\sigma'), \quad \gamma_{w_1 w_N} = h^{w_1 w_N}(\sigma'')$$

である．よって

$$\begin{aligned}
&\gamma_{w_1 \otimes \cdots \otimes w_n, w_N} \\
&\quad = \big(h^{w_1 w_N}(\sigma'') \otimes h^{w_2 \cdots w_n}(\mathrm{id})\big) \circ \big(h^{w_1}(\mathrm{id}) \otimes h^{w_2 \cdots w_N}(\sigma''\big) \\
&\quad = h^{w_1 w_N w_2 \cdots w_n}((\sigma'' \boxtimes \mathrm{id})) \circ h^{w_1 \cdots w_N}((\mathrm{id} \boxtimes \sigma')) \\
&\quad = h^{w_1 \cdots w_N}((\mathrm{id} \boxtimes \sigma') \circ (\sigma'' \boxtimes \mathrm{id})) \\
&\quad = h^{w_1 \cdots w_N}(\sigma)
\end{aligned}$$

が分かる． □

定理 12 (coherence 定理)**.** $f, g\colon u \to v$ を V の射とする．またある形式対象 $\widetilde{z}, \widetilde{z'}$ とその間の射 $\mathfrak{b}, \mathfrak{c}\colon \widetilde{z} \to \widetilde{z'}$ が存在して $|\mathfrak{b}| = f$，$|\mathfrak{c}| = g$，$\sigma(\mathfrak{b}) = \sigma(\mathfrak{c})$ となるとする．このとき $f = g$ である．

証明. $F\colon V \to W$ が圏同値だから $Ff = Fg$ を示せばよい．仮定により存在する $\mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ を

$$\begin{aligned}
\mathfrak{b} &= \mathfrak{b}_n \mathbin{\widetilde{\circ}} \cdots \mathbin{\widetilde{\circ}} \mathfrak{b}_0 \quad (\mathfrak{b}_i\colon \widetilde{u}_i \to \widetilde{u}_{i+1} \text{ は基本射}), \\
\mathfrak{c} &= \mathfrak{c}_m \mathbin{\widetilde{\circ}} \cdots \mathbin{\widetilde{\circ}} \mathfrak{c}_0 \quad (\mathfrak{c}_i\colon \widetilde{v}_i \to \widetilde{v}_{i+1} \text{ は基本射})
\end{aligned}$$

と書く．$\widetilde{z} = \widetilde{u}_0 = \widetilde{v}_0$ であり $\widetilde{z'} = \widetilde{u}_{n+1} = \widetilde{v}_{m+1}$ である．次の図式を考える．

$$
\begin{tikzcd}
 & & F(|\widetilde{z}|) \arrow[dll, "F(|\mathfrak{b}_0|)"'] \arrow[drr, "F(|\mathfrak{c}_0|)"] \arrow[d, "\varphi^{\widetilde{z}}"] & & \\
F(|\widetilde{u}_1|) \arrow[dd, "F(|\mathfrak{b}_1|)"'] \arrow[dr, "\varphi^{\widetilde{u}_1}"] & & \langle \widetilde{z} \rangle \arrow[dl, "\langle \mathfrak{b}_0 \rangle"] \arrow[dr, "\langle \mathfrak{c}_0 \rangle"'] & & F(|\widetilde{v}_1|) \arrow[dl, "\varphi^{\widetilde{v}_1}"'] \arrow[dd, "F(|\mathfrak{c}_1|)"] \\
 & \langle \widetilde{u}_1 \rangle \arrow[d] & & \langle \widetilde{v}_1 \rangle \arrow[d] & \\
\vdots \arrow[dd, "F(|\mathfrak{b}_{n-1}|)"'] & \vdots \arrow[d] & & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[dd, "F(|\mathfrak{c}_{m-1}|)"] \\
 & \langle \widetilde{u}_n \rangle \arrow[dr, "\langle \mathfrak{b}_n \rangle"] & & \langle \widetilde{v}_m \rangle \arrow[dl, "\langle \mathfrak{c}_m \rangle"'] & \\
F(|\widetilde{u}_n|) \arrow[ur, "\varphi^{\widetilde{u}_n}"'] \arrow[drr, "F(|\mathfrak{b}_n|)"'] & & \langle \widetilde{z'} \rangle & & F(|\widetilde{v}_m|) \arrow[ul, "\varphi^{\widetilde{v}_m}"] \arrow[dll, "F(|\mathfrak{c}_m|)"] \\
 & & F(|\widetilde{z'}|) \arrow[u, "\varphi^{\widetilde{z'}}"] & &
\end{tikzcd}
$$

この図式の中心は可換である．

$\because$) $\langle \widetilde{z} \rangle = w_1 \otimes \cdots \otimes w_N$，$\langle \widetilde{u}_i \rangle = w_1^i \otimes \cdots \otimes w_N^i$ を標準形とする．このとき補題 10 を使うと $\langle \mathfrak{b}_i \rangle = h^{w_1^i \cdots w_N^i}(\sigma(\mathfrak{b}_i))$ が分かる．よって

$$
\begin{aligned}
\langle \mathfrak{b}_n \rangle \circ \cdots \circ \langle \mathfrak{b}_0 \rangle &= h^{w_1 \cdots w_N}(\sigma(\mathfrak{b}_0) \circ \cdots \circ \sigma(\mathfrak{b}_n)) \\
&= h^{w_1 \cdots w_N}(\sigma(\mathfrak{b}_n \mathbin{\widetilde{\circ}} \cdots \mathbin{\widetilde{\circ}} \mathfrak{b}_0)) \\
&= h^{w_1 \cdots w_N}(\sigma(\mathfrak{b}))
\end{aligned}
$$

である．$\mathfrak{c}_i$ に対しても同様の議論を行うことで

$$\langle \mathfrak{c}_m \rangle \circ \cdots \circ \langle \mathfrak{c}_0 \rangle = h^{w_1 \cdots w_N}(\sigma(\mathfrak{c}))$$

が分かる．仮定より $\sigma(\mathfrak{b}) = \sigma(\mathfrak{c})$ だから

$$\langle \mathfrak{b}_n \rangle \circ \cdots \circ \langle \mathfrak{b}_0 \rangle = h^{w_1 \cdots w_N}(\sigma(\mathfrak{b})) = h^{w_1 \cdots w_N}(\sigma(\mathfrak{c})) = \langle \mathfrak{c}_m \rangle \circ \cdots \circ \langle \mathfrak{c}_0 \rangle$$

が分かる．

残りの四角は補題 7 により可換である．故にこの図式の一番外側は可換であり

$$Ff = F(|\mathfrak{b}|) = F(|\mathfrak{b}_n|) \circ \cdots \circ F(|\mathfrak{b}_0|) = F(|\mathfrak{c}_n|) \circ \cdots \circ F(|\mathfrak{c}_0|) = F(|\mathfrak{c}|) = Fg$$

である． $\square$

例 13. $u \in V$ とする．$u \mathbin{\widetilde{\otimes}} j$，$j \mathbin{\widetilde{\otimes}} u$，$u$ は形式対象で

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{b}_0 &:= \mathfrak{r}_u \colon u \mathbin{\widetilde{\otimes}} j \to u \\
\mathfrak{c}_0 &:= \mathfrak{c}_{uj} \colon u \mathbin{\widetilde{\otimes}} j \to j \mathbin{\widetilde{\otimes}} u \\
\mathfrak{c}_1 &:= \mathfrak{l}_u \colon j \mathbin{\widetilde{\otimes}} u \to u
\end{aligned}
$$

はその間の基本射である．このとき

$$
\begin{aligned}
|\mathfrak{b}_0| &= \rho_u \\
|\mathfrak{c}_1 \mathbin{\widetilde{\circ}} \mathfrak{c}_0| &= |\mathfrak{c}_1| \circ |\mathfrak{c}_0| = \lambda_u \circ \gamma_{uI} \\
N(\mathfrak{b}_0) &= N(\mathfrak{c}_0) = N(\mathfrak{c}_1) = 1 \\
\sigma(\mathfrak{b}_0) &= \mathrm{id} \\
\sigma(\mathfrak{c}_1 \mathbin{\widetilde{\circ}} \mathfrak{c}_0) &= \sigma(\mathfrak{c}_1) \circ \sigma(\mathfrak{c}_0) = \mathrm{id}
\end{aligned}
$$

となる．よって

$$
\begin{tikzcd}
u \otimes I \arrow[rr, "\gamma_{uI}"] \arrow[dr, "\rho_u"'] & & I \otimes u \arrow[dl, "\lambda_u"] \\
& u &
\end{tikzcd}
$$

は可換である． □

例 14. $u, v, w \in V$ とする．

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{b}_0 &:= \mathfrak{a}_{uvw} \colon (u \mathbin{\widetilde{\otimes}} v) \mathbin{\widetilde{\otimes}} w \to u \mathbin{\widetilde{\otimes}} (v \mathbin{\widetilde{\otimes}} w) \\
\mathfrak{b}_1 &:= \mathfrak{i}_u \mathbin{\widetilde{\otimes}} \mathfrak{c}_{vw} \colon u \mathbin{\widetilde{\otimes}} (v \mathbin{\widetilde{\otimes}} w) \to u \mathbin{\widetilde{\otimes}} (w \mathbin{\widetilde{\otimes}} v) \\
\mathfrak{b}_2 &:= \mathfrak{c}_{u, w \widetilde{\otimes} v} \colon u \mathbin{\widetilde{\otimes}} (w \mathbin{\widetilde{\otimes}} v) \to (w \mathbin{\widetilde{\otimes}} v) \mathbin{\widetilde{\otimes}} u \\
\mathfrak{b}_3 &:= \mathfrak{a}_{wvu} \colon (w \mathbin{\widetilde{\otimes}} v) \mathbin{\widetilde{\otimes}} u \to w \mathbin{\widetilde{\otimes}} (v \mathbin{\widetilde{\otimes}} u) \\
\mathfrak{c}_0 &:= \mathfrak{c}_{uv} \mathbin{\widetilde{\otimes}} \mathfrak{i}_w \colon (u \mathbin{\widetilde{\otimes}} v) \mathbin{\widetilde{\otimes}} w \to (v \mathbin{\widetilde{\otimes}} u) \mathbin{\widetilde{\otimes}} w \\
\mathfrak{c}_1 &:= \mathfrak{c}_{v \widetilde{\otimes} u, w} \colon (v \mathbin{\widetilde{\otimes}} u) \mathbin{\widetilde{\otimes}} w \to w \mathbin{\widetilde{\otimes}} (v \mathbin{\widetilde{\otimes}} u)
\end{aligned}
$$

は基本射である．このとき

$$
\begin{aligned}
|\mathfrak{b}_3 \mathbin{\widetilde{\circ}} \mathfrak{b}_2 \mathbin{\widetilde{\circ}} \mathfrak{b}_1 \mathbin{\widetilde{\circ}} \mathfrak{b}_0| &= \alpha_{wvu} \circ \gamma_{u,w\otimes v} \circ (\mathrm{id} \otimes \gamma_{vw}) \circ \alpha_{uvw} \\
|\mathfrak{c}_1 \mathbin{\widetilde{\circ}} \mathfrak{c}_0| &= \gamma_{v\otimes u,w} \circ \gamma_{uv} \\
\sigma(\mathfrak{b}_3 \mathbin{\widetilde{\circ}} \mathfrak{b}_2 \mathbin{\widetilde{\circ}} \mathfrak{b}_1 \mathbin{\widetilde{\circ}} \mathfrak{b}_0) &= \sigma(\mathfrak{b}_0) \circ \sigma(\mathfrak{b}_1) \circ \sigma(\mathfrak{b}_2) \circ \sigma(\mathfrak{b}_3) \\
&= \sigma(\mathfrak{a}_{uvw}) \circ \sigma(\mathfrak{i}_u \mathbin{\widetilde{\otimes}} \mathfrak{c}_{vw}) \circ \sigma(\mathfrak{c}_{u,w\widetilde{\otimes}v}) \circ \sigma(\mathfrak{a}_{wvu}) \\
&= \mathrm{id} \circ \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \circ \mathrm{id} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \\
\sigma(\mathfrak{c}_1 \mathbin{\widetilde{\circ}} \mathfrak{c}_0) &= \sigma(\mathfrak{c}_0) \circ \sigma(\mathfrak{c}_1) \\
&= \sigma(\mathfrak{c}_{uv} \mathbin{\widetilde{\otimes}} \mathfrak{i}_w) \circ \sigma(\mathfrak{c}_{v\widetilde{\otimes}u,w}) \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

となる．よって

$$
\begin{tikzcd}
(u \otimes v) \otimes w \arrow[r, "\gamma_{uv} \otimes \mathrm{id}_w"] \arrow[d, "\alpha_{uvw}"'] & (v \otimes u) \otimes w \arrow[r, "\gamma_{v\otimes u,w}"] & w \otimes (v \otimes u) \\
u \otimes (v \otimes w) \arrow[r, "\mathrm{id}_u \otimes \gamma_{vw}"'] & u \otimes (w \otimes v) \arrow[r, "\gamma_{u,w\otimes v}"'] & (w \otimes v) \otimes u \arrow[u, "\alpha_{wvu}"']
\end{tikzcd}
$$

は可換である． □

補題 15. 次の図式は可換である．

$$
\begin{tikzcd}
{[u,v] \otimes u} \arrow[r, "\mathrm{ev}"] \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes i"'] & v \arrow[d, "i"] \\
{[u,v] \otimes [I,u]} \arrow[r, "m"'] & {[I,v]}
\end{tikzcd}
$$

証明. 随伴 $- \otimes I \dashv [I, -]$ により次の図式が可換であることを示せばよい.

$$
\begin{tikzcd}
([u,v] \otimes u) \otimes I \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "(\mathrm{id} \otimes i) \otimes \mathrm{id}"'] \arrow[rrr, bend left, "\mathrm{ev} \otimes \mathrm{id}"] \arrow[drr, bend left, "\rho"] \arrow[dr, phantom, "(\alpha)"] & {[u,v] \otimes (u \otimes I)} \arrow[d, "\mathrm{id} \otimes (i \otimes \mathrm{id})"'] \arrow[dr, "\mathrm{id} \otimes \rho"] \arrow[r, phantom, "(12)"] & & v \otimes I \arrow[d, "\rho"] \arrow[dl, phantom, "(\rho)"] \\
([u,v] \otimes [I,u]) \otimes I \arrow[r, "\alpha"'] & {[u,v] \otimes ([I,u] \otimes I)} \arrow[r, "\mathrm{id} \otimes \mathrm{ev}"'] \arrow[u, phantom, "(i)" near start, shift left=6ex] & {[u,v] \otimes u} \arrow[r, "\mathrm{ev}"'] & v
\end{tikzcd}
$$

(α), (ρ) は α, ρ が自然変換であるから可換である. (12) は coherence 定理 (定理 12) から可換である. (i) は i の定義から可換である. □

2 豊穣圏

以下, この PDF ではモノイダル圏は常に対称モノイダル閉圏で, 完備かつ余完備であるとしておく[*5]. まずは豊穣圏の基本となる事項について述べていく.

2.1 定義

定義. V をモノイダル圏とする. V-豊穣圏 (V-enriched category[*6]) $\mathcal{C}$ とは, 以下の条件を満たすものである.

(1) 対象の集まり $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ が与えられている[*7].

(2) $a, b \in \mathcal{C}$ に対して, V の対象 $\mathcal{C}(a, b) \in V$ が与えられている. (これを a から b への射の集まりと考える.)

(3) $a, b, c \in \mathcal{C}$ に対して, V の射 $m_{abc} \colon \mathcal{C}(b, c) \otimes \mathcal{C}(a, b) \to \mathcal{C}(a, c)$ が与えられている. (これが射の合成を与えると考える.)

(4) $a \in \mathcal{C}$ に対して, V の射 $j_a \colon I \to \mathcal{C}(a, a)$ が与えられている. (これが a の恒等射を与えると考える.)

---

*5 このようなモノイダル圏を Bénabou cosmos (もしくは単に cosmos) と呼ぶ場合がある. (単に cosmos と言った場合は別の意味の場合がある.)

*6 英語では単に V-category と書かれることも多い.

*7 この PDF では対象を表す記号として V-豊穣圏には a, b, c, d, s, t, モノイダル圏には u, v, w, x, z を使うことにする.

(5) V における次の図式が可換である．(即ち，結合律が成り立つ)

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
\big(\mathcal{C}(c,d)\otimes\mathcal{C}(b,c)\big)\otimes\mathcal{C}(a,b) \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[d, "m_{bcd}\otimes\mathrm{id}"'] & & \mathcal{C}(c,d)\otimes\big(\mathcal{C}(b,c)\otimes\mathcal{C}(a,b)\big) \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes m_{abc}"] \\
\mathcal{C}(b,d)\otimes\mathcal{C}(a,b) \arrow[dr, "m_{abd}"'] & & \mathcal{C}(c,d)\otimes\mathcal{C}(a,c) \arrow[dl, "m_{acd}"] \\
& \mathcal{C}(a,d) &
\end{tikzcd}$$

(6) V における次の図式が可換である．(即ち，j_a は恒等射である．)

$$\begin{tikzcd}
I\otimes\mathcal{C}(a,b) \arrow[rr, "\lambda"] \arrow[dr, "j_b\otimes\mathrm{id}"'] & & \mathcal{C}(a,b) \\
& \mathcal{C}(b,b)\otimes\mathcal{C}(a,b) \arrow[ur, "m_{abb}"'] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathcal{C}(a,b)\otimes I \arrow[rr, "\rho"] \arrow[dr, "\mathrm{id}\otimes j_a"'] & & \mathcal{C}(a,b) \\
& \mathcal{C}(a,b)\otimes\mathcal{C}(a,a) \arrow[ur, "m_{aab}"'] &
\end{tikzcd}$$

また，$\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ が集合となるとき，$\mathcal{C}$ を小 V-豊穣圏という．

※ この定義から分かるように，豊穣圏は一般のモノイダル圏に対して定義されるが，始めに注意したようにここでは，モノイダル圏 V は常に対称モノイダル閉圏で，完備かつ余完備であるとする．(この仮定がなくても成り立つ定理も以下にはあるが，どの定理にどの仮定が要るかについては特に注意を払わないことにする．) なおこの仮定が無い場合については「豊穣圏 (モノイダル圏が対称でも閉でもない場合)」の PDF を参照.

定義. $\mathcal{C},\mathcal{D}$ を V-豊穣圏とする．V-関手 $F\colon\mathcal{C}\to\mathcal{D}$ とは以下の条件を満たすものである．

(1) 各対象 $a\in\mathcal{C}$ に対して，対象 $Fa\in\mathcal{D}$ が与えられている．

(2) $a,b\in\mathcal{C}$ に対して，V の射 $F_{ab}\colon\mathcal{C}(a,b)\to\mathcal{D}(Fa,Fb)$ が与えられている．

(3) 次の図式が可換である．(即ち合成と可換である．)

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}(b,c)\otimes\mathcal{C}(a,b) \arrow[r, "m_{abc}"] \arrow[d, "F_{bc}\otimes F_{ab}"'] & \mathcal{C}(a,c) \arrow[d, "F_{ac}"] \\
\mathcal{D}(Fb,Fc)\otimes\mathcal{D}(Fa,Fb) \arrow[r, "m_{FaFbFc}"'] & \mathcal{D}(Fa,Fc)
\end{tikzcd}$$

(4) $a \in \mathcal{C}$ に対して次の図式が可換である．(即ち恒等射を保つ．)

$$
\begin{tikzcd}
I \arrow[r, "j_a"] \arrow[dr, "j_{Fa}"'] & \mathcal{C}(a,a) \arrow[d, "F_{aa}"] \\
& \mathcal{D}(Fa,Fa)
\end{tikzcd}
$$

例 16. **Set**-豊穣圏は locally small な圏であり，**Set**-関手は通常の関手である． □

例 17. 前順序集合 P を圏とみなすとき $\mathrm{Hom}_P(x,y) \in \mathbb{2}$ と考えることができる．これにより P を小 $\mathbb{2}$-豊穣圏とみなすことができる．逆に，小 $\mathbb{2}$-豊穣圏は前順序集合とみなすことができる．また $\mathbb{2}$-関手は順序を保つ写像とみなすことができる． □

例 18. $\langle X, d\rangle$ を距離空間としたとき，$\overline{\mathbb{R}}_+$-豊穣圏 $\mathcal{C}$ を以下のように定めることができる．

- $\mathrm{Ob}(\mathcal{C}) := X$ とする．
- $a, b \in X$ に対して $\mathcal{C}(a,b) := d(a,b)$ とする．
- 三角不等式 $d(b,c)+d(a,b) \geq d(a,c)$ が成り立つから，射 $\mathcal{C}(b,c)+\mathcal{C}(a,b) \to \mathcal{C}(a,c)$ が一意に存在する．この射を m_{abc} とする．
- $d(a,a) = 0$ だから射 $0 \to \mathcal{C}(a,a)$ が一意に存在する．この射を j_a を定める．

これにより $\overline{\mathbb{R}}_+$-豊穣圏を一般化された距離空間と見なすことができる．また距離空間 $\langle X, d_X\rangle, \langle Y, d_Y\rangle$ を $\overline{\mathbb{R}}_+$-豊穣圏とみなして $F\colon X \to Y$ を $\overline{\mathbb{R}}_+$-関手とすると，$a, b \in X$ に対して $\overline{\mathbb{R}}_+$ の射 $F_{ab}\colon X(a,b) \to Y(Fa,Fb)$ が存在するから $d_X(a,b) \geq d_Y(Fa,Fb)$ である．即ちこの場合 F は Lipschitz 定数が 1 以下の Lipschitz 連続写像である． □

例 19. 定義から分かる通り **Cat**-豊穣圏，**Cat**-関手は strict 2-category，strict 2-functor と一致する (「2-category」の PDF を参照)． □

例 20. モノイダル圏 V に対して，$\mathcal{I}$ を

- $\mathrm{Ob}(\mathcal{I}) := \{*\}$.
- $\mathcal{I}(*,*) := I$.
- $m_{***} := \lambda\colon I \otimes I \to I$.
- $j_* := \mathrm{id}_I\colon I \to I$.

で定めれば，これは V-豊穣圏になる．この $\mathcal{I}$ を単位 V-豊穣圏 (unit V-category) という．

証明．まず

$$\begin{tikzcd}[column sep=tiny]
\big(\mathcal{I}(*,*) \otimes \mathcal{I}(*,*)\big) \otimes \mathcal{I}(*,*) \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[d, "m_{***}\otimes \mathrm{id}"'] & & \mathcal{I}(*,*) \otimes \big(\mathcal{I}(*,*) \otimes \mathcal{I}(*,*)\big) \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes m_{***}"] \\
\mathcal{I}(*,*) \otimes \mathcal{I}(*,*) \arrow[dr, "m_{***}"'] & & \mathcal{I}(*,*) \otimes \mathcal{I}(*,*) \arrow[dl, "m_{***}"] \\
& \mathcal{I}(*,*) &
\end{tikzcd}$$

が可換であることを示すが，これは定義より

$$\begin{tikzcd}
(I \otimes I) \otimes I \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[d, "\lambda\otimes \mathrm{id}"'] & & I \otimes (I \otimes I) \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes\lambda"] \\
I \otimes I \arrow[dr, "\lambda"'] & & I \otimes I \arrow[dl, "\lambda"] \\
& I &
\end{tikzcd}$$

となり，coherence 定理 (定理 12) を使うと

$$\begin{tikzcd}
(I \otimes I) \otimes I \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[dr, "\lambda\otimes \mathrm{id}"'] & & I \otimes (I \otimes I) \arrow[dl, "\mathrm{id}\otimes\lambda"] \\
& I \otimes I &
\end{tikzcd}$$

が可換となるからよい．次に

$$\begin{tikzcd}
I \otimes \mathcal{I}(*,*) \arrow[rr, "\lambda"] \arrow[dr, "j_*\otimes \mathrm{id}"'] & & \mathcal{I}(*,*) \\
& \mathcal{I}(*,*) \otimes \mathcal{I}(*,*) \arrow[ur, "m_{***}"'] &
\end{tikzcd}$$

が可換であることを示すが，これは定義により

$$\begin{tikzcd}
I \otimes I \arrow[rr, "\lambda"] \arrow[dr, "\mathrm{id}\otimes \mathrm{id}"'] & & I \\
& I \otimes I \arrow[ur, "\lambda"'] &
\end{tikzcd}$$

となるから明らか．最後に

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{I}(*,*) \otimes I \arrow[rr, "\rho"] \arrow[dr, "\mathrm{id}\otimes j_*"'] & & \mathcal{I}(*,*) \\
& \mathcal{I}(*,*) \otimes \mathcal{I}(*,*) \arrow[ur, "m_{***}"'] &
\end{tikzcd}$$

が可換であることを示すが，これは定義より

$$\begin{tikzcd}
I \otimes I \arrow[rr, "\rho"] \arrow[dr, "\mathrm{id}\otimes\mathrm{id}"'] & & I \\
& I \otimes I \arrow[ur, "\lambda"'] &
\end{tikzcd}$$

となり，coherence 定理から可換性が分かる． □

例 **21.** $\mathcal{C}$ を V-豊穣圏とするとき、$\mathrm{id}_{\mathcal{C}}$ を

- $a \in \mathcal{C}$ に対して $\mathrm{id}_{\mathcal{C}}(a) := a$ とする．
- $a, b \in \mathcal{C}$ に対して $(\mathrm{id}_{\mathcal{C}})_{ab} := \mathrm{id}_{\mathcal{C}(a,b)} \colon \mathcal{C}(a,b) \to \mathcal{C}(a,b)$ とする．

と定めれば明らかに V-関手 $\mathrm{id}_{\mathcal{C}} \colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ となる．これを恒等 V-関手という． □

例 **22.** $\mathcal{C}$ を V-豊穣圏として $A \subset \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ とする．このとき次のように V-豊穣圏 $\mathcal{A}$ を定義することができる．

- $\mathrm{Ob}(\mathcal{A}) := A$ とする．
- $a, b \in A$ に対して $\mathcal{A}(a,b) := \mathcal{C}(a,b)$ とする．
- m, j は $\mathcal{C}$ と同じものとする．

このように定まる $\mathcal{A}$ を $\mathcal{C}$ の充満部分 V-豊穣圏といい $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}$ と書く．またこのとき V-関手 $F \colon \mathcal{A} \to \mathcal{C}$ が次により定まる．

- $a \in \mathcal{A}$ に対して $Fa := a \in \mathcal{C}$ とする．
- $a, b \in \mathcal{A}$ に対して $F_{ab} := \mathrm{id} \colon \mathcal{A}(a,b) \to \mathcal{C}(a,b)$ とする．

この V-関手を包含 V-関手という． □

$\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ を V-豊穣圏，$F \colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$，$G \colon \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ を V-関手とする．

- $a \in \mathcal{A}$ に対して $(GF)a := G(Fa)$ とする．

- $a, b \in \mathcal{A}$ に対して $(GF)_{ab} := G_{FaFb} \circ F_{ab} \colon \mathcal{A}(a,b) \to \mathcal{C}(GFa, GFb)$ とする.

と定めれば，GF は V-関手 $\mathcal{A} \to \mathcal{C}$ となる.

∵) 次の図式から明らか.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A}(b,c) \otimes \mathcal{A}(a,b) \arrow[r, "m_{abc}"] \arrow[d, "F_{bc} \otimes F_{ab}"'] & \mathcal{A}(a,c) \arrow[d, "F_{ac}"] \\
\mathcal{B}(Fb,Fc) \otimes \mathcal{B}(Fa,Fb) \arrow[r, "m_{FaFbFc}"'] \arrow[d, "G_{FbFc} \otimes G_{FaFb}"'] & \mathcal{B}(Fa,Fc) \arrow[d, "G_{FaFc}"] \\
\mathcal{C}(GFb,GFc) \otimes \mathcal{C}(GFa,GFb) \arrow[r, "m_{GFaGFbGFc}"'] & \mathcal{C}(GFa,GFc)
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{A}(a,a) \arrow[d, "F_{aa}"] \\
I \arrow[ur, "j_a"] \arrow[r, "j_{Fa}"'] \arrow[dr, "j_{GFa}"'] & \mathcal{B}(Fa,Fa) \arrow[d, "G_{FaFa}"] \\
 & \mathcal{C}(GFa,GFa)
\end{tikzcd}$$

これを V-関手の合成とすることで，対象を V-豊穣圏，射を V-関手とする (通常の) 圏が定まることが容易に分かる．この圏を V-$\mathbf{CAT}$ と書く．また小 V-豊穣圏がなす充満部分圏を V-$\mathbf{Cat} \subset V$-$\mathbf{CAT}$ と書く．V-豊穣圏の同型とは，圏 V-$\mathbf{CAT}$ における同型のことをいう.

命題 23. V-関手 $F \colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ が同型
$\Longleftrightarrow$ F が対象について全単射であり，更に各 $c, c' \in \mathcal{C}$ に対して $F_{cc'}$ が同型射.

証明. ($\Longrightarrow$) 明らか.
($\Longleftarrow$) G を次のように定める.

- $d \in \mathcal{D}$ に対して $G(d) := F^{-1}(d)$.
- $d, d' \in \mathcal{D}$ に対して $G_{dd'} := (F_{GdGd'})^{-1} \colon \mathcal{D}(d,d') \to \mathcal{C}(Gd, Gd')$

これが V-関手 $G \colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ を定めることを示せれば，明らかに $F^{-1} = G$ である．従って

次の図式の可換性を示せばよい．

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{D}(d',d'') \otimes \mathcal{D}(d,d') \arrow[r, "m_{dd'd''}"] \arrow[d, "G_{d'd''} \otimes G_{dd'}"'] & \mathcal{D}(d,d'') \arrow[d, "G_{dd''}"] \\
\mathcal{C}(Gd',Gd'') \otimes \mathcal{C}(Gd,Gd') \arrow[r, "m_{GdGd'Gd''}"'] & \mathcal{C}(Gd,Gd'')
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
I \arrow[r, "j_d"] \arrow[dr, "j_{Gd}"'] & \mathcal{D}(d,d) \arrow[d, "G_{dd}"] \\
& \mathcal{C}(Gd,Gd)
\end{tikzcd}
$$

これは F が V-関手だから明らかに可換である． □

2.2 双対 $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$

今 V は対称だから，$u, v \in V$ について自然な V の同型射 $\gamma_{uv} \colon u \otimes v \to v \otimes u$ が与えられている．

命題 24. V-豊穣圏 $\mathcal{C}$ に対して，$\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ を

- $\mathrm{Ob}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}) := \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ とする．
- $a, b \in \mathcal{C}$ に対して $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}(a,b) := \mathcal{C}(b,a)$ とする．
- 合成は

$$
\begin{aligned}
\mathcal{C}^{\mathrm{op}}(b,c) \otimes \mathcal{C}^{\mathrm{op}}(a,b) &= \mathcal{C}(c,b) \otimes \mathcal{C}(b,a) \\
&\xrightarrow{\gamma} \mathcal{C}(b,a) \otimes \mathcal{C}(c,b) \\
&\xrightarrow{m_{cba}} \mathcal{C}(c,a) \\
&= \mathcal{C}^{\mathrm{op}}(a,c)
\end{aligned}
$$

  とする．
- 恒等射は $j_a \colon I \to \mathcal{C}(a,a) = \mathcal{C}^{\mathrm{op}}(a,a)$ とする．

により定義すれば，これは V-豊穣圏 $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ を与える．

証明. V-豊穣圏の定義より，次の 3 つの図式が可換であることを示せばよい．

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
(\mathcal{C}(d,c)\otimes\mathcal{C}(c,b))\otimes\mathcal{C}(b,a) \arrow[rrrr, "\alpha"] \arrow[d, "\gamma\otimes\mathrm{id}"'] & & & & \mathcal{C}(d,c)\otimes(\mathcal{C}(c,b)\otimes\mathcal{C}(b,a)) \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes\gamma"] \\
(\mathcal{C}(c,b)\otimes\mathcal{C}(d,c))\otimes\mathcal{C}(b,a) \arrow[dr, "\gamma"] \arrow[dd, "m_{dcb}\otimes\mathrm{id}"'] \arrow[ddr, phantom, "(\gamma)"] & & (14) & & \mathcal{C}(d,c)\otimes(\mathcal{C}(b,a)\otimes\mathcal{C}(c,b)) \arrow[dl, "\gamma"'] \arrow[dd, "\mathrm{id}\otimes m_{cba}"] \arrow[ddl, phantom, "(\gamma)"] \\
& \mathcal{C}(b,a)\otimes(\mathcal{C}(c,b)\otimes\mathcal{C}(d,c)) \arrow[dd, "\mathrm{id}\otimes m_{dcb}"] & & (\mathcal{C}(b,a)\otimes\mathcal{C}(c,b))\otimes\mathcal{C}(d,c) \arrow[ll, "\alpha"'] \arrow[dd, "m_{cba}\otimes\mathrm{id}"'] & \\
\mathcal{C}(d,b)\otimes\mathcal{C}(b,a) \arrow[dr, "\gamma"'] & & (\mathcal{C}) & & \mathcal{C}(d,c)\otimes\mathcal{C}(c,a) \arrow[dl, "\gamma"] \\
& \mathcal{C}(b,a)\otimes\mathcal{C}(d,b) \arrow[dr, "m_{dba}"'] & & \mathcal{C}(c,a)\otimes\mathcal{C}(d,c) \arrow[dl, "m_{dca}"] & \\
& & \mathcal{C}(d,a) & &
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
I\otimes\mathcal{C}(b,a) \arrow[rr, "\lambda"] \arrow[dr, "\gamma"] \arrow[dd, "j_b\otimes\mathrm{id}"'] & (13) & \mathcal{C}(b,a) \\
(\gamma) & \mathcal{C}(b,a)\otimes I \arrow[ur, "\rho"'] \arrow[dd, "\mathrm{id}\otimes j_b"'] & \\
\mathcal{C}(b,b)\otimes\mathcal{C}(b,a) \arrow[dr, "\gamma"] & (\mathcal{C}) & \\
& \mathcal{C}(b,a)\otimes\mathcal{C}(b,b) \arrow[uuur, bend right, "m_{bba}"'] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathcal{C}(b,a)\otimes I \arrow[rr, "\rho"] \arrow[dr, "\gamma"] \arrow[dd, "\mathrm{id}\otimes j_a"'] & (13) & \mathcal{C}(b,a) \\
(\gamma) & I\otimes\mathcal{C}(b,a) \arrow[ur, "\lambda"'] \arrow[dd, "j_a\otimes\mathrm{id}"'] & \\
\mathcal{C}(b,a)\otimes\mathcal{C}(a,a) \arrow[dr, "\gamma"] & (\mathcal{C}) & \\
& \mathcal{C}(a,a)\otimes\mathcal{C}(b,a) \arrow[uuur, bend right, "m_{baa}"'] &
\end{tikzcd}
$$

(γ) は γ の自然性から可換である．(13)，(14) は coherence 定理 (例 13, 14) より可換である．$(\mathcal{C})$ は $\mathcal{C}$ が V-豊穣圏であるから可換である．以上によりこれらの図式は可換である． □

命題 25. $F\colon\mathcal{C}\to\mathcal{D}$ を V-関手とするとき，F^{op} を

- 対象 $a\in\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ に対して $F^{\mathrm{op}}(a) := F(a)$ とする．
- $a,b\in\mathcal{C}$ に対して F^{op}_{ab} を

$$\mathcal{C}^{\mathrm{op}}(a,b) = \mathcal{C}(b,a) \xrightarrow{F_{ba}} \mathcal{D}(Fb,Fa) = \mathcal{D}^{\mathrm{op}}(Fa,Fb)$$

  で定める．

により定義すれば，これは V-関手 $F^{\mathrm{op}}\colon\mathcal{C}^{\mathrm{op}}\to\mathcal{D}^{\mathrm{op}}$ となる．

証明. V-関手の定義より，次の図式が可換であることを示せばよい．

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}(c,b)\otimes\mathcal{C}(b,a) \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "F_{cb}\otimes F_{ba}"'] \arrow[dr, phantom, "(\gamma)"] & \mathcal{C}(b,a)\otimes\mathcal{C}(c,b) \arrow[r, "m_{cba}"] \arrow[d, "F_{ba}\otimes F_{cb}"'] \arrow[dr, phantom, "(F)"] & \mathcal{C}(a,c) \arrow[d, "F_{ca}"] \\
\mathcal{D}(Fc,Fb)\otimes\mathcal{D}(Fb,Fa) \arrow[r, "\gamma"'] & \mathcal{D}(Fb,Fa)\otimes\mathcal{D}(Fc,Fb) \arrow[r, "m_{FcFbFa}"'] & \mathcal{D}(Fa,Fc)
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
I \arrow[r, "j_a"] \arrow[dr, "j_{Fa}"'] & \mathcal{C}(a,a) \arrow[d, "F_{aa}"] \arrow[d, phantom, "(F)"'] \\
& \mathcal{D}(Fa,Fa)
\end{tikzcd}$$

(γ) は γ の自然性から可換である．(F) は F が V-関手だから可換である．以上によりこれらの図式は可換である． □

以下，F^{op} を単に F と書く場合がある．

2.3 V-豊穣圏 $\mathcal{V}$

この後，我々は「Hom 関手」を定義する (第 2.6 節)．通常の圏論では Hom 関手のコドメインは **Set** だったが，V-豊穣圏では $\mathcal{C}(a,b)\in V$ となるからこの「Hom 関手」は $\mathcal{C}\to V$ のようになるべきである．ところが今 V は (V-豊穣圏ではなく) ただの圏なのでこのままではうまくいかない．そこでこの節では V を標準的に V-豊穣圏とみなせることを示す (この PDF ではそれを $\mathcal{V}$ で表す)．

$u,v,w\in V$ とする．随伴 $-\otimes u\dashv [u,-]$ が成り立つのであった．そこで合成

$$([v,w]\otimes[u,v])\otimes u \xrightarrow{\alpha} [v,w]\otimes([u,v]\otimes u) \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes\mathrm{ev}} [v,w]\otimes v \xrightarrow{\mathrm{ev}} w$$

の随伴射を $m_{uvw}\colon [v,w]\otimes[u,v]\to[u,w]$ とする．

補題 26. 次の図式は可換である．

$$\begin{tikzcd}
([v,w]\otimes[u,v])\otimes u \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[d, "m_{uvw}\otimes\mathrm{id}"'] & & {[v,w]}\otimes([u,v]\otimes u) \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes\mathrm{ev}"] \\
{[u,w]}\otimes u \arrow[dr, "\mathrm{ev}"'] & & {[v,w]}\otimes v \arrow[dl, "\mathrm{ev}"] \\
& w &
\end{tikzcd}$$

証明. ev が随伴 $-\otimes v \dashv [v,-]$ の counit だったから，V の射 $f\colon u\otimes v \to w$ の随伴射を $g\colon u \to [v,w]$ とするとき $f = \mathrm{ev}\circ(g\otimes \mathrm{id}_v)$ である．

$$
\begin{tikzcd}
u\otimes v \arrow[d, "g\otimes\mathrm{id}_v"'] \arrow[drr, "f"] & & \\
{[v,w]\otimes v} \arrow[rr, "\mathrm{ev}"'] & & w
\end{tikzcd}
$$

故に m の定義より，与えられた図式が可換であることが分かる． □

命題 27. $\mathcal{V}$ を

- $\mathrm{Ob}(\mathcal{V}) := \mathrm{Ob}(V)$ とする．
- $\mathcal{V}(u,v) := [u,v]$ とする．
- 合成は上で定義した $m_{uvw}\colon [v,w]\otimes[u,v] \to [u,w]$ とする．
- 恒等射 $j_u\colon I \to [u,u]$ は $\lambda\colon I\otimes u \to u$ の随伴射とする．

により定義すれば，これは V-豊穣圏 $\mathcal{V}$ を与える．

証明. まず m が結合律を満たすことを示すため，次の図式を考える．

$$
\begin{tikzcd}
([w,x]\otimes([v,w]\otimes[u,v]))\otimes u \arrow[rr, "(\mathrm{id}\otimes m)\otimes\mathrm{id}"] \arrow[d, "\alpha"'] \arrow[drr, phantom, "(\alpha)"] & & ([w,x]\otimes[u,w])\otimes u \arrow[d, "\alpha"] \\
{[w,x]}\otimes(([v,w]\otimes[u,v])\otimes u) \arrow[rr, "\mathrm{id}\otimes(m\otimes\mathrm{id})"] \arrow[dd, "\mathrm{id}\otimes\alpha"'] \arrow[drr, phantom, "(26)"] & & {[w,x]}\otimes([u,w]\otimes u) \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes\mathrm{ev}"] \\
& {[w,x]}\otimes([v,w]\otimes v) \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes\mathrm{ev}"] \arrow[ddr, phantom, "(26)"] & {[w,x]}\otimes w \arrow[d, "\mathrm{ev}"] \\
{[w,x]}\otimes([v,w]\otimes([u,v]\otimes u)) \arrow[ur, "\mathrm{id}\otimes(\mathrm{id}\otimes\mathrm{ev})"] \arrow[dr, phantom, "(\alpha)"] & & x \\
& ([w,x]\otimes[v,w])\otimes v \arrow[uu, "\alpha"'] \arrow[r, "m\otimes\mathrm{id}"] \arrow[dr, phantom, "(\otimes)"] & {[v,x]}\otimes v \arrow[u, "\mathrm{ev}"'] \\
([w,x]\otimes[v,w])\otimes([u,v]\otimes u) \arrow[uu, "\alpha"] \arrow[ur, "(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})\otimes\mathrm{ev}"] \arrow[rr, "m\otimes(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})"] \arrow[drr, phantom, "(\alpha)"] & & {[v,x]}\otimes([u,v]\otimes u) \arrow[u, "\mathrm{id}\otimes\mathrm{ev}"'] \\
(([w,x]\otimes[v,w])\otimes[u,v])\otimes u \arrow[u, "\alpha"] \arrow[rr, "(m\otimes\mathrm{id})\otimes\mathrm{id}"'] \arrow[uuuuuu, bend left=60, "\alpha\otimes\mathrm{id}"] \arrow[uuu, phantom, bend left=40, "(V)"] & & ([v,x]\otimes[u,v])\otimes u \arrow[u, "\alpha"']
\end{tikzcd}
$$

(α) は α の自然性から可換である．(V) は V がモノイダル圏だから可換である．$(\otimes)$ は

$\otimes$ が関手だから可換である．(26) は補題 26 から可換である．以上によりこの図式は可換である．よって随伴 $- \otimes u \dashv [u, -]$ により次が可換であることが分かる．

$$
\begin{tikzcd}
{[w,x] \otimes ([v,w] \otimes [u,v])} \arrow[r, "\mathrm{id} \otimes m"] & {[w,x] \otimes [u,w]} \arrow[d, "m"] \\
 & {[u,x]} \\
{([w,x] \otimes [v,w]) \otimes [u,v]} \arrow[uu, "\alpha"] \arrow[r, "m \otimes \mathrm{id}"'] & {[v,x] \otimes [u,v]} \arrow[u, "m"']
\end{tikzcd}
$$

従って結合律が成り立つことが分かった．

次に

$$
\begin{tikzcd}
I \otimes [u,v] \arrow[rr, "\lambda"] \arrow[dr, "j_v \otimes \mathrm{id}"'] & & {[u,v]} \\
 & {[v,v] \otimes [u,v]} \arrow[ur, "m"'] &
\end{tikzcd}
$$

が可換であることを示す．$\lambda\colon I \otimes [u,v] \to [u,v]$ に随伴 $- \otimes u \dashv [u, -]$ で対応するのは $\mathrm{ev} \circ (\lambda \otimes \mathrm{id})\colon (I \otimes [u,v]) \otimes u \to v$ であるから

$$
\begin{tikzcd}
 & \arrow[dr, phantom, "(12)"] & {[u,v] \otimes u} \arrow[dr, bend left, "\mathrm{ev}"] \arrow[d, phantom, "(\lambda)"] & \\
(I \otimes [u,v]) \otimes u \arrow[urr, bend left, "\lambda \otimes \mathrm{id}"] \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "(j_v \otimes \mathrm{id}) \otimes \mathrm{id}"'] \arrow[dr, phantom, "(\alpha)"] & I \otimes ([u,v] \otimes u) \arrow[ur, "\lambda"] \arrow[r, "\mathrm{id} \otimes \mathrm{ev}"] \arrow[d, "j_v \otimes (\mathrm{id} \otimes \mathrm{id})"'] \arrow[dr, phantom, "(\otimes)"] & I \otimes v \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "j_v \otimes \mathrm{id}"'] \arrow[dr, phantom, "(j)"] & v \\
([v,v] \otimes [u,v]) \otimes u \arrow[r, "\alpha"'] & {[v,v] \otimes ([u,v] \otimes u)} \arrow[r, "\mathrm{id} \otimes \mathrm{ev}"'] & {[v,v] \otimes v} \arrow[ur, bend right, "\mathrm{ev}"'] &
\end{tikzcd}
$$

が可換であることを示せばよい．(α) は α の自然性から可換である．(λ) は λ の自然性から可換である．(j) は j_v の定義から可換である．(12) は coherence 定理 (定理 12) から可換である．($\otimes$) は $\otimes$ が関手だから可換である．以上によりこの図式が可換であることが分かった．

$$
\begin{tikzcd}
{[u,v] \otimes I} \arrow[rr, "\rho"] \arrow[dr, "\mathrm{id} \otimes j_u"'] & & {[u,v]} \\
 & {[u,v] \otimes [u,u]} \arrow[ur, "m"'] &
\end{tikzcd}
$$

についても同様に

$$
\begin{tikzcd}
([u,v]\otimes I)\otimes u \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "(\mathrm{id}\otimes j_u)\otimes\mathrm{id}"'] \arrow[rr, bend left, "\rho\otimes\mathrm{id}"] \arrow[dr, phantom, "(\alpha)"] & {[u,v]}\otimes(I\otimes u) \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes\lambda"] \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes(j_u\otimes\mathrm{id})"'] \arrow[r, phantom, "(V)", shift left=4] \arrow[dr, phantom, "(j)"] & {[u,v]}\otimes u \arrow[r, "\mathrm{ev}"] & v \\
([u,v]\otimes[u,u])\otimes u \arrow[r, "\alpha"'] & {[u,v]}\otimes([u,u]\otimes u) \arrow[ur, "\mathrm{id}\otimes\mathrm{ev}"'] & &
\end{tikzcd}
$$

が可換であることから分かる.

以上により $\mathcal{V}$ は V-豊穣圏である. □

こうして V は標準的に V-豊穣圏となることが分かった.

2.4 テンソル積 $\mathcal{C}\otimes\mathcal{D}$

命題 28. V-豊穣圏 $\mathcal{C},\mathcal{D}$ に対して $\mathcal{C}\otimes\mathcal{D}$ を

- $\mathrm{Ob}(\mathcal{C}\otimes\mathcal{D}) := \mathrm{Ob}(\mathcal{C})\times\mathrm{Ob}(\mathcal{D})$ とする.
- $\mathcal{C}\otimes\mathcal{D}(\langle c_0,d_0\rangle,\langle c_1,d_1\rangle) := \mathcal{C}(c_0,c_1)\otimes\mathcal{D}(d_0,d_1)$ とする.
- 合成は

$$
\begin{aligned}
&\big(\mathcal{C}\otimes\mathcal{D}(\langle c_1,d_1\rangle,\langle c_2,d_2\rangle)\big)\otimes\big(\mathcal{C}\otimes\mathcal{D}(\langle c_0,d_0\rangle,\langle c_1,d_1\rangle)\big)\\
&=\big(\mathcal{C}(c_1,c_2)\otimes\mathcal{D}(d_1,d_2)\big)\otimes\big(\mathcal{C}(c_0,c_1)\otimes\mathcal{D}(d_0,d_1)\big)\\
&\xrightarrow{\delta}\mathcal{C}(c_1,c_2)\otimes\mathcal{C}(c_0,c_1)\otimes\mathcal{D}(d_1,d_2)\otimes\mathcal{D}(d_0,d_1)\\
&\xrightarrow{m\otimes m}\mathcal{C}(c_0,c_2)\otimes\mathcal{D}(d_0,d_2)\\
&=\mathcal{C}\otimes\mathcal{D}(\langle c_0,d_0\rangle,\langle c_2,d_2\rangle)
\end{aligned}
$$

  から得られる射とする. ここで $\delta=\delta_{uvwx}$ は $(u\otimes v)\otimes(w\otimes x)$ の v と w を入れ替える同型であり, 例えば合成

$$
\begin{aligned}
(uv)(wx)\xrightarrow{\alpha}u(v(wx))\xrightarrow{\mathrm{id}\otimes\alpha^{-1}}u((vw)x)\xrightarrow{\mathrm{id}\otimes(\gamma\otimes\mathrm{id})}u((wv)x)\\
\xrightarrow{\mathrm{id}\otimes\alpha}u(w(vx))\xrightarrow{\alpha^{-1}}(uw)(vx)
\end{aligned}
$$

  とすればよい (coherence 定理 (定理 12) よりどのように定義しても同じ射になる).
- 恒等射は $I\xrightarrow{\lambda^{-1}}I\otimes I\xrightarrow{j_c\otimes j_d}\mathcal{C}\otimes\mathcal{D}(\langle c,d\rangle,\langle c,d\rangle)$ とする.

により定義すれば, これは V-豊穣圏 $\mathcal{C}\otimes\mathcal{D}$ を与える.

証明. まず結合律については，次の図式が可換であることを示せばよい．(ここでスペースの都合上，$\mathcal{C}(a,b)$ を $\mathcal{C}_{ab}$ と表記し，$\otimes$ は省略した．)

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
((\mathcal{C}_{cd}\mathcal{D}_{c'd'})(\mathcal{C}_{bc}\mathcal{D}_{b'c'}))(\mathcal{C}_{ab}\mathcal{D}_{a'b'}) \arrow[rrrr, "\alpha"] \arrow[d, "\delta\otimes\mathrm{id}"'] & & & & (\mathcal{C}_{cd}\mathcal{D}_{c'd'})((\mathcal{C}_{bc}\mathcal{D}_{b'c'})(\mathcal{C}_{ab}\mathcal{D}_{a'b'})) \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes\delta"] \\
((\mathcal{C}_{cd}\mathcal{C}_{bc})(\mathcal{D}_{c'd'}\mathcal{D}_{b'c'}))(\mathcal{C}_{ab}\mathcal{D}_{a'b'}) \arrow[dr, "\delta"'] \arrow[dd, "(m\otimes m)\otimes\mathrm{id}"] & & (12) & & (\mathcal{C}_{cd}\mathcal{D}_{c'd'})((\mathcal{C}_{bc}\mathcal{C}_{ab})(\mathcal{D}_{b'c'}\mathcal{D}_{a'b'})) \arrow[dl, "\delta"] \arrow[dd, "\mathrm{id}\otimes(m\otimes m)"'] \\
& ((\mathcal{C}_{cd}\mathcal{C}_{bc})\mathcal{C}_{ab})((\mathcal{D}_{c'd'}\mathcal{D}_{b'c'})\mathcal{D}_{a'b'}) \arrow[rr, "\alpha\otimes\alpha"'] \arrow[dd, "(m\otimes\mathrm{id})\otimes(m\otimes\mathrm{id})"] & & (\mathcal{C}_{cd}(\mathcal{C}_{bc}\mathcal{C}_{ab}))(\mathcal{D}_{c'd'}(\mathcal{D}_{b'c'}\mathcal{D}_{a'b'})) \arrow[dd, "(\mathrm{id}\otimes m)\otimes(\mathrm{id}\otimes m)"'] & \\
(\mathcal{C}_{bd}\mathcal{D}_{b'd'})(\mathcal{C}_{ab}\mathcal{D}_{a'b'}) \arrow[dr, "\delta"'] & (\delta) & (\mathcal{C}) & (\delta) & (\mathcal{C}_{cd}\mathcal{D}_{c'd'})(\mathcal{C}_{ac}\mathcal{D}_{a'c'}) \arrow[dl, "\delta"] \\
& (\mathcal{C}_{bd}\mathcal{C}_{ab})(\mathcal{D}_{b'd'}\mathcal{D}_{a'b'}) \arrow[dr, "m\otimes m"'] & & (\mathcal{C}_{cd}\mathcal{C}_{ac})(\mathcal{D}_{c'd'}\mathcal{D}_{a'c'}) \arrow[dl, "m\otimes m"] & \\
& & \mathcal{C}_{ad}\mathcal{D}_{a'd'} & &
\end{tikzcd}
$$

(12) は coherence 定理 (定理 12) から可換である．(δ) は δ の自然性から可換である．$(\mathcal{C})$ は豊穣圏の定義から可換である．以上によりこの図式は可換である

また恒等射については，同様にして次の図式が可換であるから分かる．

$$
\begin{tikzcd}
I(\mathcal{C}_{ab}\mathcal{D}_{a'b'}) \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "\alpha^{-1}"'] \arrow[ddd, bend right=60, "\lambda^{-1}\otimes\mathrm{id}"'] \arrow[dr, phantom, "(12)", near start] & \mathcal{C}_{ab}\mathcal{D}_{a'b'} & \\
(I\mathcal{C}_{ab})\mathcal{D}_{a'b'} \arrow[ur, "\lambda\otimes\mathrm{id}"] \arrow[r, "(j_b\otimes\mathrm{id})\otimes\mathrm{id}"'] \arrow[d, "(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})\otimes\lambda^{-1}"] \arrow[ur, phantom, "(\mathcal{C})"', near end] \arrow[dr, phantom, "(\lambda)"] & (\mathcal{C}_{bb}\mathcal{C}_{ab})\mathcal{D}_{a'b'} \arrow[u, "m\otimes\mathrm{id}"'] \arrow[dr, phantom, "(\mathcal{D})"] & \\
(I\mathcal{C}_{ab})(I\mathcal{D}_{a'b'}) \arrow[r, "(j_b\otimes\mathrm{id})\otimes(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})"'] \arrow[d, "\delta"] \arrow[dr, phantom, "(\delta)"] & (\mathcal{C}_{bb}\mathcal{C}_{ab})(I\mathcal{D}_{a'b'}) \arrow[u, "(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})\otimes\lambda"] \arrow[r, "(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})\otimes(j_{b'}\otimes\mathrm{id})"'] \arrow[dr, phantom, "(\delta)"] & (\mathcal{C}_{bb}\mathcal{C}_{ab})(\mathcal{D}_{b'b'}\mathcal{D}_{a'b'}) \arrow[ul, bend right, "(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})\otimes m"'] \\
(II)(\mathcal{C}_{ab}\mathcal{D}_{a'b'}) \arrow[r, "(j_b\otimes\mathrm{id})\otimes(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})"'] \arrow[u, phantom, "(12)", shift right=12ex] & (\mathcal{C}_{bb}I)(\mathcal{C}_{ab}\mathcal{D}_{a'b'}) \arrow[u, "\delta^{-1}"] \arrow[r, "(\mathrm{id}\otimes j_{b'})\otimes(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})"'] & (\mathcal{C}_{bb}\mathcal{D}_{b'b'})(\mathcal{C}_{ab}\mathcal{D}_{a'b'}) \arrow[u, "\delta^{-1}"']
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}[column sep=large]
(\mathcal{C}_{ab}\mathcal{D}_{a'b'})I \arrow[rr, "\rho"] \arrow[d, "\alpha"'] \arrow[dddd, bend right=60, "\mathrm{id}\otimes\lambda^{-1}"'] & {} \arrow[d, phantom, "(12)"] & \mathcal{C}_{ab}\mathcal{D}_{a'b'} & & \\
\mathcal{C}_{ab}(\mathcal{D}_{a'b'}I) \arrow[urr, "\mathrm{id}\otimes\rho"] \arrow[rr, "\mathrm{id}\otimes(\mathrm{id}\otimes j_{a'})"'] \arrow[dd, "\rho^{-1}\otimes(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})"] & {} \arrow[ur, phantom, "(\mathcal{D})"] & \mathcal{C}_{ab}(\mathcal{D}_{a'b'}\mathcal{D}_{a'a'}) \arrow[u, "\mathrm{id}\otimes m"'] & & \\
& (\rho) & & (\mathcal{C}) & \\
(\mathcal{C}_{ab}I)(\mathcal{D}_{a'b'}I) \arrow[rr, "(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})\otimes(\mathrm{id}\otimes j_{a'})"'] \arrow[d, "\delta"] \arrow[d, phantom, shift right=6, "(12)"] & & (\mathcal{C}_{ab}I)(\mathcal{D}_{a'b'}\mathcal{D}_{a'a'}) \arrow[uu, "\rho\otimes(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})"] \arrow[rr, "(\mathrm{id}\otimes j_a)\otimes(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})"'] & & (\mathcal{C}_{ab}\mathcal{C}_{aa})(\mathcal{D}_{a'b'}\mathcal{D}_{a'a'}) \arrow[uulll, bend right, "m\otimes(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})"'] \\
(\mathcal{C}_{ab}\mathcal{D}_{a'b'})(II) \arrow[rr, "(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})\otimes(\mathrm{id}\otimes j_{a'})"'] \arrow[urr, phantom, "(\delta)"] & & (\mathcal{C}_{ab}\mathcal{D}_{a'b'})(I\mathcal{D}_{a'a'}) \arrow[u, "\delta^{-1}"] \arrow[rr, "(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})\otimes(j_a\otimes\mathrm{id})"'] \arrow[urr, phantom, "(\delta)"] & & (\mathcal{C}_{ab}\mathcal{D}_{a'b'})(\mathcal{C}_{aa}\mathcal{D}_{a'a'}) \arrow[u, "\delta^{-1}"']
\end{tikzcd}
$$

$\square$

定義より

$$
\begin{aligned}
(\mathcal{C}\otimes\mathcal{D})^{\mathrm{op}}(\langle c_0,d_0\rangle,\langle c_1,d_1\rangle) &= \mathcal{C}\otimes\mathcal{D}(\langle c_1,d_1\rangle,\langle c_0,d_0\rangle)\\
&= \mathcal{C}(c_1,c_0)\otimes\mathcal{D}(d_1,d_0)\\
&= \mathcal{C}^{\mathrm{op}}(c_0,c_1)\otimes\mathcal{D}^{\mathrm{op}}(d_0,d_1)\\
&= (\mathcal{C}^{\mathrm{op}}\otimes\mathcal{D}^{\mathrm{op}})(\langle c_0,d_0\rangle,\langle c_1,d_1\rangle)
\end{aligned}
$$

であり，これにより V-豊穣圏として $(\mathcal{C}\otimes\mathcal{D})^{\mathrm{op}}=\mathcal{C}^{\mathrm{op}}\otimes\mathcal{D}^{\mathrm{op}}$ となることに注意しておく．

さて $\mathcal{C}\otimes\mathcal{D}$ により「2 変数の V-関手」を考えることができるようになる．

命題 29. $\mathcal{A},\mathcal{B},\mathcal{C}$ を V-豊穣圏，$T\colon\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}\to\mathcal{C}$ を V-関手とする．$a\in\mathcal{A}$，$b,c\in\mathcal{B}$ に対して V の射 $T(a,-)_{bc}$ を合成

$$
\mathcal{B}(b,c)\xrightarrow{\lambda^{-1}} I\otimes\mathcal{B}(b,c)\xrightarrow{j_a\otimes\mathrm{id}}\mathcal{A}(a,a)\otimes\mathcal{B}(b,c)\xrightarrow{T}\mathcal{C}(T(a,b),T(a,c))
$$

とすると，これは V-関手 $T(a,-)\colon\mathcal{B}\to\mathcal{C}$ を定める．同様にして V-関手 $T(-,b)\colon\mathcal{A}\to\mathcal{C}$ も

$$
\mathcal{A}(a,c)\xrightarrow{\rho^{-1}}\mathcal{A}(a,c)\otimes I\xrightarrow{\mathrm{id}\otimes j_b}\mathcal{A}(a,c)\otimes\mathcal{B}(b,b)\xrightarrow{T}\mathcal{C}(T(a,b),T(c,b))
$$

により得られる．

証明. まず次の図式が可換であることを示す．

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{B}(c,d)\otimes\mathcal{B}(b,c) \arrow[r, "m"] \arrow[d, "T(a,-)_{cd}\otimes T(a,-)_{bc}"'] & \mathcal{B}(b,d) \arrow[d, "T(a,-)_{bd}"] \\
\mathcal{C}(T(a,c),T(a,d))\otimes\mathcal{C}(T(a,b),T(a,c)) \arrow[r, "m"'] & \mathcal{C}(T(a,b),T(a,d))
\end{tikzcd}
$$

即ち，次の図式が可換であることを示せばよい．(ここでスペースの都合上，$\mathcal{A}(a,b)$ を $\mathcal{A}_{ab}$ と表記した．また $\otimes$ は省略した．)

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{B}_{cd}\mathcal{B}_{bc} \arrow[r, "\mathrm{id}"] \arrow[d, "\lambda^{-1}\otimes\mathrm{id}"'] \arrow[dr, phantom, "(12)"] & \mathcal{B}_{cd}\mathcal{B}_{bc} \arrow[r, "m"] \arrow[d, "\lambda^{-1}"'] \arrow[dr, phantom, "(\lambda)"] & \mathcal{B}_{bd} \arrow[r, "\mathrm{id}"] \arrow[d, "\lambda^{-1}"] & \mathcal{B}_{bd} \arrow[dd, "\lambda^{-1}"] \\
(I\mathcal{B}_{cd})\mathcal{B}_{bc} \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})\otimes\lambda^{-1}"'] \arrow[dr, phantom, "(12)"] & I(\mathcal{B}_{cd}\mathcal{B}_{bc}) \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes m"'] \arrow[d, "\lambda^{-1}\otimes(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})"'] \arrow[dr, phantom, "(\otimes)"] & I\mathcal{B}_{bd} \arrow[d, "\lambda^{-1}\otimes\mathrm{id}"] \arrow[r, phantom, "(*)"] & {} \\
(I\mathcal{B}_{cd})(I\mathcal{B}_{bc}) \arrow[r, "\delta"'] \arrow[d, "(j_a\otimes\mathrm{id})\otimes(j_a\times\mathrm{id})"'] \arrow[dr, phantom, "(\delta)"] & (II)(\mathcal{B}_{cd}\mathcal{B}_{bc}) \arrow[r, "(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})\otimes m"'] \arrow[d, "(j_a\otimes j_a)\otimes(\mathrm{id}\times\mathrm{id})"'] \arrow[dr, phantom, "(\otimes)"] & (II)\mathcal{B}_{bd} \arrow[r, "\lambda\otimes\mathrm{id}"'] \arrow[d, "(j_a\otimes j_a)\otimes\mathrm{id}"] \arrow[dr, phantom, "(j)"] & I\mathcal{B}_{bd} \arrow[d, "j_a\otimes\mathrm{id}"] \\
(\mathcal{A}_{aa}\mathcal{B}_{cd})(\mathcal{A}_{aa}\mathcal{B}_{bc}) \arrow[r, "\delta"'] \arrow[d, "T\otimes T"'] & (\mathcal{A}_{aa}\mathcal{A}_{aa})(\mathcal{B}_{cd}\mathcal{B}_{bc}) \arrow[r, "(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})\otimes m"'] \arrow[d, phantom, "(T)"] & (\mathcal{A}_{aa}\mathcal{A}_{aa})\mathcal{B}_{bd} \arrow[r, "m\otimes\mathrm{id}"'] & \mathcal{A}_{aa}\mathcal{B}_{bd} \arrow[d, "T"] \\
\mathcal{C}(T(a,c),T(a,d))\otimes\mathcal{C}(T(a,b),T(a,c)) \arrow[rrr, "m"'] & & & \mathcal{C}(T(a,b),T(a,d))
\end{tikzcd}$$

ここで δ は $\mathcal{C}\otimes\mathcal{D}$ の定義で使用した δ である．(12) は coherence 定理 (定理 12) から可換である．(λ) は λ の自然性から可換である．(δ) は δ の自然性から可換である．$(\otimes)$ は $\otimes$ が関手だから可換である．$(*)$ は明らかに可換である．(j) は次の図式により可換である．

$$\begin{tikzcd}
I\otimes I \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes j_a"'] \arrow[dr, phantom, "(\lambda)"] & I \arrow[d, "j_a"] \\
I\otimes\mathcal{A}(a,a) \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "j_a\otimes\mathrm{id}"'] \arrow[dr, phantom, "(\mathcal{A})"] & \mathcal{A}(a,a) \\
\mathcal{A}(a,a)\otimes\mathcal{A}(a,a) \arrow[ur, "m"'] &
\end{tikzcd}$$

(T) は T が V-関手だから可換である．以上によりこの図式は可換である．

後は，次の図式が可換であることを示せばよい．

$$\begin{tikzcd}
I \arrow[r, "j_b"] \arrow[d, "\lambda^{-1}"] \arrow[dr, phantom, "(\lambda)"] \arrow[dddr, bend right, "j_{T(a,b)}"'] & \mathcal{B}(b,b) \arrow[d, "\lambda^{-1}"] \arrow[ddd, bend left=90, "T(a,-)_{bb}"] \arrow[ddd, phantom, shift left=8ex, "(\text{定義})"] \\
I\otimes I \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes j_b"] \arrow[dr, "j_a\otimes j_b"'] & I\otimes\mathcal{B}(b,b) \arrow[d, "j_a\otimes\mathrm{id}"] \arrow[d, phantom, shift right=6ex, "(\otimes)"] \\
{} \arrow[dr, phantom, "(T)"] & \mathcal{A}(a,a)\otimes\mathcal{B}(b,b) \arrow[d, "T"] \\
& \mathcal{C}(T(a,b),T(a,b))
\end{tikzcd}$$

(λ) は λ の自然性から可換である．$(\otimes)$ は $\otimes$ が関手だから可換である．(T) は T が V-関手であることから可換である．以上によりこの図式は可換である． $\square$

命題 30. $\mathcal{A},\mathcal{B},\mathcal{C}$ を V-豊穣圏，$T\colon \mathcal{A}\otimes\mathcal{B}\to\mathcal{C}$ を V-関手とするとき，$a,b\in\mathcal{A}$，$c,d\in\mathcal{B}$ に対して

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{A}(a,b)\otimes\mathcal{B}(c,d) \arrow[r, "T(-,d)_{ab}\otimes T(a,-)_{cd}"] \arrow[dr, "T_{\langle a,c\rangle\langle b,d\rangle}"'] \arrow[dd, "\gamma"'] & \mathcal{C}(T(a,d),T(b,d))\otimes\mathcal{C}(T(a,c),T(a,d)) \arrow[d, "m"] \\
\arrow[r, phantom, "(2)"] & \mathcal{C}(T(a,c),T(b,d)) \\
\mathcal{B}(c,d)\otimes\mathcal{A}(a,b) \arrow[r, "T(b,-)_{cd}\otimes T(-,c)_{ab}"'] & \mathcal{C}(T(b,c),T(b,d))\otimes\mathcal{C}(T(a,c),T(b,c)) \arrow[u, "m"']
\end{tikzcd}
$$

は可換である．

※ この可換性は通常の圏論で言えば $T(g,d)\circ T(a,f)=T(g,f)=T(b,f)\circ T(g,c)$ に相当する．

証明．まず (1) が可換であることを示す．

$$
\begin{tikzcd}
(\mathcal{A}_{ab}I)(I\mathcal{B}_{cd}) \arrow[r, "(\mathrm{id}\otimes j_d)\otimes(j_a\otimes\mathrm{id})"] \arrow[d, "\delta"'] \arrow[dr, phantom, "(\delta)"] & (\mathcal{A}_{ab}\mathcal{B}_{dd})(\mathcal{A}_{aa}\mathcal{B}_{cd}) \arrow[r, "T\otimes T"] \arrow[d, "\delta"] & \mathcal{C}(T_{ad},T_{bd})\mathcal{C}(T_{ac},T_{ad}) \arrow[dd, "m"] \\
(\mathcal{A}_{ab}I)(I\mathcal{B}_{cd}) \arrow[r, "(\mathrm{id}\otimes j_a)\otimes(j_d\otimes\mathrm{id})"] \arrow[dr, "\rho\otimes\lambda"'] & (\mathcal{A}_{ab}\mathcal{A}_{aa})(\mathcal{B}_{dd}\mathcal{B}_{cd}) \arrow[d, "m\otimes m"] \arrow[r, phantom, "(T)"] & {} \\
{} \arrow[r, phantom, "(12)\quad (j)"] & \mathcal{A}_{ab}\mathcal{B}_{cd} \arrow[r, "T"'] \arrow[uul, bend left, "\rho^{-1}\otimes\lambda^{-1}"] & \mathcal{C}(T_{ac},T_{bd})
\end{tikzcd}
$$

(12) は coherence 定理 (定理 12) から可換である．(δ) は δ の自然性により可換である．(T) は T が V-関手であることより可換である．(j) は V-豊穣圏の定義より可換である．以上により (1) は可換である．

同様に (2) も

$$
\begin{tikzcd}
(I\mathcal{B}_{cd})(\mathcal{A}_{ab}I) \arrow[r, "(j_b\otimes\mathrm{id})\otimes(\mathrm{id}\otimes j_c)"] \arrow[d, "\delta"'] \arrow[dr, phantom, "(\delta)"] & (\mathcal{A}_{bb}\mathcal{B}_{cd})(\mathcal{A}_{ab}\mathcal{B}_{cc}) \arrow[r, "T\otimes T"] \arrow[d, "\delta"] \arrow[ddr, phantom, "(T)"] & \mathcal{C}(T_{bc},T_{bd})\mathcal{C}(T_{ac},T_{bc}) \arrow[dd, "m"] \\
(I\mathcal{A}_{ab})(\mathcal{B}_{cd}I) \arrow[r, "(j_b\otimes\mathrm{id})\otimes(\mathrm{id}\otimes j_c)"] \arrow[dr, "\lambda\otimes\rho"'] \arrow[d, phantom, "(12)"] & (\mathcal{A}_{bb}\mathcal{A}_{ab})(\mathcal{B}_{cd}\mathcal{B}_{cc}) \arrow[d, "m\otimes m"] \arrow[d, phantom, "(j)"', shift right=6] & \\
\mathcal{B}_{cd}\mathcal{A}_{ab} \arrow[uu, bend left, "\lambda^{-1}\otimes\rho^{-1}"] & \mathcal{A}_{ab}\mathcal{B}_{cd} \arrow[l, "\gamma"] \arrow[r, "T"'] & \mathcal{C}(T_{ac},T_{bd})
\end{tikzcd}
$$

により可換である． □

この命題は次の意味で逆が成り立つ．

補題 31. $\mathcal{A},\mathcal{B},\mathcal{C}$ を V-豊穣圏とする． $a\in\mathcal{A}$ に対して V-関手 $F^a\colon\mathcal{B}\to\mathcal{C}$ が与えられ，$b\in\mathcal{B}$ に対して V-関手 $G^b\colon\mathcal{A}\to\mathcal{C}$ が与えられ，$F^ab=G^ba$ を満たすとする．また $a,b\in\mathcal{A}$，$c,d\in\mathcal{B}$ に対して，次の実線部が可換であるとする．

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{A}(a,b)\otimes\mathcal{B}(c,d) \arrow[r, "G^d_{ab}\otimes F^a_{cd}"] \arrow[dd, "\gamma"'] \arrow[dr, dashed, "T_{\langle a,c\rangle\langle b,d\rangle}"'] & \mathcal{C}(G^da,G^db)\otimes\mathcal{C}(F^ac,F^ad) \arrow[d, "m"] \\
 & \mathcal{C}(F^ac,G^db) \\
\mathcal{B}(c,d)\otimes\mathcal{A}(a,b) \arrow[r, "F^b_{cd}\otimes G^c_{ab}"'] & \mathcal{C}(F^bc,F^bd)\otimes\mathcal{C}(G^ca,G^cb) \arrow[u, "m"']
\end{tikzcd}
$$

このとき $T(a,b):=F^ab=G^ba$，$T_{\langle a,c\rangle\langle b,d\rangle}:=m\circ(G^d_{ab}\otimes F^a_{cd})$ と定義すれば，これは $T(a,-)=F^a$，$T(-,b)=G^b$ を満たす V-関手 $T\colon\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}\to\mathcal{C}$ を与える．

証明. まず次の図式が可換であることを示す．

$$
\begin{tikzcd}
(\mathcal{A}(c,s)\otimes\mathcal{B}(d,t))\otimes(\mathcal{A}(a,c)\otimes\mathcal{B}(b,d)) \arrow[r, "m"] \arrow[d, "T_{\langle c,d\rangle\langle s,t\rangle}\otimes T_{\langle a,b\rangle\langle c,d\rangle}"'] & \mathcal{A}(a,s)\otimes\mathcal{B}(b,t) \arrow[d, "T_{\langle a,b\rangle\langle s,t\rangle}"] \\
\mathcal{C}(T(c,d),T(s,t))\otimes\mathcal{C}(T(a,b),T(c,d)) \arrow[r, "m"'] & \mathcal{C}(T(a,b),T(s,t))
\end{tikzcd}
$$

そのために次の図式 [A] を考える．（ここでスペースの都合上，$\mathcal{A}(a,b)$ を $\mathcal{A}_{ab}$ と表記し

た．$\mathcal{C}(a,b)$ については $\langle a,b\rangle$ という記法も使った．またテンソル積 $\otimes$ は省略した．）

$$
\begin{tikzcd}
(\mathcal{A}_{cs}\mathcal{B}_{dt})(\mathcal{A}_{ac}\mathcal{B}_{bd}) \arrow[rr, "(G^t\otimes\mathrm{id})\otimes(G^d\otimes\mathrm{id})"] \arrow[d, "\alpha"'] \arrow[ddrr, phantom, "(\alpha)"] & & ((\langle G^tc, G^ts\rangle\mathcal{B}_{dt})(\langle G^da, G^dc\rangle\mathcal{B}_{bd}) \arrow[d, "\alpha"] \\
\mathcal{A}_{cs}(\mathcal{B}_{dt}(\mathcal{A}_{ac}\mathcal{B}_{bd})) \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes\alpha^{-1}"'] & & \langle G^tc, G^ts\rangle(\mathcal{B}_{dt}(\langle G^da, G^dc\rangle\mathcal{B}_{bd})) \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes\alpha^{-1}"] \\
\mathcal{A}_{cs}((\mathcal{B}_{dt}\mathcal{A}_{ac})\mathcal{B}_{bd}) \arrow[r, "G^t\otimes((\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})\otimes\mathrm{id})"] \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes(\gamma\otimes\mathrm{id})"'] \arrow[dr, phantom, "(\gamma)"] & \langle G^tc, G^ts\rangle((\mathcal{B}_{dt}\mathcal{A}_{ac})\mathcal{B}_{bd}) \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes((\mathrm{id}\otimes G^d)\otimes\mathrm{id})"] \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes(\gamma\otimes\mathrm{id})"] & \langle G^tc, G^ts\rangle((\mathcal{B}_{dt}\langle G^da, G^dc\rangle)\mathcal{B}_{bd}) \\
\mathcal{A}_{cs}((\mathcal{A}_{ac}\mathcal{B}_{dt})\mathcal{B}_{bd}) \arrow[r, "G^t\otimes((\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})\otimes\mathrm{id})"] \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes\alpha"'] \arrow[drr, phantom, "(\alpha)"] & \langle G^tc, G^ts\rangle((\mathcal{A}_{ac}\mathcal{B}_{dt})\mathcal{B}_{bd}) \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes((G^t\otimes\mathrm{id})\otimes\mathrm{id})"] & \langle G^tc, G^ts\rangle(((\langle G^ta, G^tc\rangle\mathcal{B}_{dt})\mathcal{B}_{bd}) \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes\alpha"] \\
\mathcal{A}_{cs}(\mathcal{A}_{ac}(\mathcal{B}_{dt}\mathcal{B}_{bd})) \arrow[d, "\alpha^{-1}"'] & & \langle G^tc, G^ts\rangle(\langle G^ta, G^tc\rangle(\mathcal{B}_{dt}\mathcal{B}_{bd})) \arrow[d, "\alpha^{-1}"] \\
(\mathcal{A}_{cs}\mathcal{A}_{ac})(\mathcal{B}_{dt}\mathcal{B}_{bd}) \arrow[rr, "(G^t\otimes G^t)\otimes(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})"] \arrow[d, "(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})\otimes m"'] \arrow[drr, phantom, "(\otimes)"] & & (\langle G^tc, G^ts\rangle\langle G^ta, G^tc\rangle)(\mathcal{B}_{dt}\mathcal{B}_{bd}) \arrow[d, "(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})\otimes m"] \\
(\mathcal{A}_{cs}\mathcal{A}_{ac})\mathcal{B}_{bt} \arrow[rr, "(G^t\otimes G^t)\otimes\mathrm{id}"'] \arrow[d, "m\otimes\mathrm{id}"'] \arrow[drr, phantom, "(G^t)"] & & (\langle G^tc, G^ts\rangle\langle G^ta, G^tc\rangle)\mathcal{B}_{bt} \arrow[d, "m\otimes\mathrm{id}"] \\
\mathcal{A}_{as}\mathcal{B}_{bt} \arrow[rr, "G^t\otimes\mathrm{id}"'] & & \langle G^ta, G^ts\rangle\mathcal{B}_{bt}
\end{tikzcd}
$$

(α) は α の自然性から可換である．(γ) は γ の自然性から可換である．(G^t) は G^t が V-関手であることから可換である．$(\otimes)$ は $\otimes$ が関手だから可換である．以上により，この

図式は可換である．続いて次の図式 [B] を考える．

$$
\begin{tikzcd}
(\langle G^t c, G^t s\rangle \mathcal{B}_{dt})(\langle G^d a, G^d c\rangle \mathcal{B}_{bd}) \arrow[rr, "(\mathrm{id}\otimes F^c)\otimes(\mathrm{id}\otimes F^a)"] \arrow[d, "\alpha"] & & ((\langle G^t c, G^t s\rangle \langle F^c d, F^c t\rangle)(\langle G^d a, G^d c\rangle \langle F^a b, F^a d\rangle)) \arrow[d, "\alpha"'] \\
\langle G^t c, G^t s\rangle (\mathcal{B}_{dt}(\langle G^d a, G^d c\rangle \mathcal{B}_{bd})) \arrow[dd, "\mathrm{id}\otimes\alpha^{-1}"] \arrow[ddrr, phantom, "(\alpha)"] & & \langle G^t c, G^t s\rangle (\langle F^c d, F^c t\rangle (\langle G^d a, G^d c\rangle \langle F^a b, F^a d\rangle)) \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes\alpha^{-1}"'] \\
& & \langle G^t c, G^t s\rangle ((\langle F^c d, F^c t\rangle \langle G^d a, G^d c\rangle)\langle F^a b, F^a d\rangle) \\
\langle G^t c, G^t s\rangle ((\mathcal{B}_{dt}\langle G^d a, G^d c\rangle)\mathcal{B}_{bd}) \arrow[rr, "\mathrm{id}\otimes((F^c\otimes\mathrm{id})\otimes\mathrm{id})"] & & \langle G^t c, G^t s\rangle ((\langle F^c d, F^c t\rangle \langle G^d a, G^d c\rangle)\mathcal{B}_{bd}) \arrow[u, "\mathrm{id}\otimes((\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})\otimes F^a)"'] \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes(m\otimes\mathrm{id})"'] \\
& & \langle G^t c, G^t s\rangle (\langle G^d a, F^c t\rangle \mathcal{B}_{bd}) \\
\langle G^t c, G^t s\rangle ((\langle G^t a, G^t c\rangle \mathcal{B}_{dt})\mathcal{B}_{bd}) \arrow[rr, "\mathrm{id}\otimes((\mathrm{id}\otimes F^a)\otimes\mathrm{id})"] \arrow[dd, "\mathrm{id}\otimes\alpha"] \arrow[ddrr, phantom, "(\alpha)"] & & \langle G^t c, G^t s\rangle ((\langle G^t a, G^t c\rangle \langle F^a d, F^a t\rangle)\mathcal{B}_{bd}) \arrow[u, "\mathrm{id}\otimes(m\otimes\mathrm{id})"'] \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes((\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})\otimes F^a)"'] \\
& & \langle G^t c, G^t s\rangle ((\langle G^t a, G^t c\rangle \langle F^a d, F^a t\rangle)\langle F^a b, F^a d\rangle) \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes\alpha"'] \\
\langle G^t c, G^t s\rangle (\langle G^t a, G^t c\rangle (\mathcal{B}_{dt}\mathcal{B}_{bd})) \arrow[d, "\alpha^{-1}"] & & \langle G^t c, G^t s\rangle (\langle G^t a, G^t c\rangle (\langle F^a d, F^a t\rangle \langle F^a b, F^a d\rangle)) \arrow[d, "\alpha^{-1}"'] \\
((\langle G^t c, G^t s\rangle \langle G^t a, G^t c\rangle)(\mathcal{B}_{dt}\mathcal{B}_{bd}) \arrow[rr, "(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})\otimes(F^a\otimes F^a)"] \arrow[d, "(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})\otimes m"] \arrow[drr, phantom, "(F^a)"] & & ((\langle G^t c, G^t s\rangle \langle G^t a, G^t c\rangle)(\langle F^a d, F^a t\rangle \langle F^a b, F^a d\rangle)) \arrow[d, "(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})\otimes m"'] \\
((\langle G^t c, G^t s\rangle \langle G^t a, G^t c\rangle)\mathcal{B}_{bt} \arrow[rr, "(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})\otimes F^a"'] \arrow[d, "m\otimes\mathrm{id}"] \arrow[drr, phantom, "(\otimes)"] & & ((\langle G^t c, G^t s\rangle \langle G^t a, G^t c\rangle)\langle F^a b, F^a t\rangle \arrow[d, "m\otimes\mathrm{id}"'] \\
\langle G^t a, G^t s\rangle \mathcal{B}_{bt} \arrow[rr, "\mathrm{id}\otimes F^a"'] & & \langle G^t a, G^t s\rangle \langle F^a b, F^a t\rangle
\end{tikzcd}
$$

(α) は α の自然性から可換である．(F^a) は F^a が V-関手であることから可換である．$(\otimes)$ は $\otimes$ が関手だから可換である．以上により，この図式も可換である．最後に次の図

式 [C] を考える.

$$
\begin{tikzcd}
((\langle G^t c, G^t s\rangle\langle F^c d, F^c t\rangle)(\langle G^d a, G^d c\rangle\langle F^a b, F^a d\rangle)) \arrow[r, "(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})\otimes m"] \arrow[d, "\alpha"'] \arrow[dr, phantom, "(\alpha)"] & ((\langle G^t c, G^t s\rangle\langle F^c d, F^c t\rangle)\langle F^a b, G^d c\rangle) \arrow[d, "\alpha"] \arrow[ddddddddddr, "m\otimes\mathrm{id}"] & \\
\langle G^t c, G^t s\rangle(\langle F^c d, F^c t\rangle(\langle G^d a, G^d c\rangle\langle F^a b, F^a d\rangle)) \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes(\mathrm{id}\otimes m)"'] \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes\alpha^{-1}"'] & \langle G^t c, G^t s\rangle(\langle F^c d, F^c t\rangle\langle F^a b, G^d c\rangle) \arrow[dddddr, "\mathrm{id}\otimes m"] \arrow[ddd, phantom, "(m)"] & \\
\langle G^t c, G^t s\rangle((\langle F^c d, F^c t\rangle\langle G^d a, G^d c\rangle)\langle F^a b, F^a d\rangle) \arrow[ddr, "\mathrm{id}\otimes(m\otimes\mathrm{id})"] & & \\
\langle G^t c, G^t s\rangle((\langle F^c d, F^c t\rangle\langle G^d a, G^d c\rangle)\mathcal{B}_{bd}) \arrow[u, "\mathrm{id}\otimes((\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})\otimes F^a)"] \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes(m\otimes\mathrm{id})"'] \arrow[r, phantom, "(\otimes)"] & & \\
\langle G^t c, G^t s\rangle(\langle G^d a, F^c t\rangle\mathcal{B}_{bd}) \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes(\mathrm{id}\otimes F^a)"] & \langle G^t c, G^t s\rangle(\langle G^d a, F^c t\rangle\langle F^a b, F^a d\rangle) \arrow[ddr, "\mathrm{id}\otimes m"] \arrow[dd, phantom, "(m)"] & \\
\langle G^t c, G^t s\rangle(((\langle G^t a, G^t c\rangle\langle F^a d, F^a t\rangle)\mathcal{B}_{bd}) \arrow[u, "\mathrm{id}\otimes(m\otimes\mathrm{id})"] \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes((\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})\otimes F^a)"'] \arrow[r, phantom, "(\otimes)"] & & \\
\langle G^t c, G^t s\rangle(((\langle G^t a, G^t c\rangle\langle F^a d, F^a t\rangle)\langle F^a b, F^a d\rangle) \arrow[uur, "\mathrm{id}\otimes(m\otimes\mathrm{id})"'] \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes\alpha"'] & & \langle G^t c, G^t s\rangle\langle F^a b, G^t c\rangle \arrow[ddddl, "m"] \\
\langle G^t c, G^t s\rangle(\langle G^t a, G^t c\rangle(\langle F^a d, F^a t\rangle\langle F^a b, F^a d\rangle)) \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes(\mathrm{id}\otimes m)"] \arrow[d, "\alpha^{-1}"'] \arrow[dr, phantom, "(\alpha)"] & \langle G^t c, G^t s\rangle(\langle G^t a, G^t c\rangle\langle F^a b, F^a t\rangle) \arrow[ur, "\mathrm{id}\otimes m"] \arrow[ddl, "\alpha^{-1}"] \arrow[ddr, phantom, "(m)"] & \\
((\langle G^t c, G^t s\rangle\langle G^t a, G^t c\rangle)(\langle F^a d, F^a t\rangle\langle F^a b, F^a d\rangle)) \arrow[d, "(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})\otimes m"'] & & \\
((\langle G^t c, G^t s\rangle\langle G^t a, G^t c\rangle)\langle F^a b, F^a t\rangle) \arrow[d, "m\otimes\mathrm{id}"'] \arrow[dr, phantom, "(m)"] & & \\
\langle G^t a, G^t s\rangle\langle F^a b, F^a t\rangle \arrow[r, "m"'] & \langle F^a b, G^t s\rangle & \langle F^c d, G^t s\rangle\langle F^a b, G^d c\rangle \arrow[l, "m"]
\end{tikzcd}
$$

(α) は α の自然性から可換である. (m) は豊穣圏の定義から可換である. $(\otimes)$ は $\otimes$ が関手だから可換である. 以上によりこの図式も可換である.

以上の図式 [A][B][C] と仮定を組み合わせれば, 示したかった図式の可換性が分かる (次

の図式を参照).

$$
\begin{tikzcd}
(\mathcal{A}_{cs}\mathcal{B}_{dt})(\mathcal{A}_{ac}\mathcal{B}_{bd}) \arrow[dddd, "m"'] \arrow[drr] \arrow[rrrr, "T\otimes T"] & & & {} \arrow[d] & {} \arrow[dddd, dash] \\
& {} \arrow[r] \arrow[dd] & {} \arrow[r] \arrow[dr, phantom, "仮定"] \arrow[ur, phantom, "{[B]}"] & {} \arrow[u] \arrow[d] \arrow[r, phantom, "{[C]}"] & {} \\
{} \arrow[r, phantom, "{[A]}"] & {} & {} & {} \\
& {} \arrow[r] & {} \arrow[r] \arrow[dr, phantom, "{[B]}"] \arrow[d] & {} \arrow[u] \arrow[d] & {} \\
\mathcal{A}_{as}\mathcal{B}_{bt} \arrow[rrr, "T"'] & & {} & \langle F^a b, G^t s\rangle & \langle F^c d, G^t s\rangle\langle F^a b, G^d c\rangle \arrow[l, "m"] \arrow[from=uuuu, hook']
\end{tikzcd}
$$

次に，次の図式が可換であることを示す.

$$
\begin{tikzcd}
I \arrow[r, "j_{\langle a,b\rangle}"] \arrow[dr, "j_{T(a,b)}"'] & \mathcal{A}(a,a)\otimes\mathcal{B}(b,b) \arrow[d, "T"] \\
& \mathcal{C}(T(a,b),T(a,b))
\end{tikzcd}
$$

そのためには次の図式が可換であることを示せばよい.

$$
\begin{tikzcd}
I \arrow[r, "\lambda^{-1}"] \arrow[ddddrrrr, bend right, "j_{F^a b}"'] & I\otimes I \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes j_b"] \arrow[ddr, "\mathrm{id}\otimes j_{F^a b}"'] & I\otimes\mathcal{B}(b,b) \arrow[rr, "j_a\otimes\mathrm{id}"] \arrow[dd, "\mathrm{id}\otimes F^a"] \arrow[drr, "j_{G^b a}\otimes\mathrm{id}"] \arrow[ddl, phantom, "(F^a)"] & & \mathcal{A}(a,a)\otimes\mathcal{B}(b,b) \arrow[d, "G^b\otimes\mathrm{id}"] \arrow[dl, phantom, "(G^b)"] \\
& & & & \mathcal{C}(G^b a, G^b a)\otimes\mathcal{B}(b,b) \arrow[dd, "\mathrm{id}\otimes F^a"] \\
& & I\otimes\mathcal{C}(F^a b, F^a b) \arrow[ddrr, bend right, "\lambda"'] \arrow[drr, "j_{G^b a}\otimes\mathrm{id}"] \arrow[r, phantom, "(\otimes)"] \arrow[dl, phantom, "(\lambda)"] & {} & \\
& {} & & {} \arrow[r, phantom, "(\mathcal{C})"] & \mathcal{C}(G^b a, G^b a)\otimes\mathcal{C}(F^a b, F^a b) \arrow[d, "m"] \\
& & & & \mathcal{C}(F^a b, G^b a)
\end{tikzcd}
$$

(F^a)，(G^b) は F^a, G^b が V-関手だから可換である．(λ) は λ の自然性から可換である．$(\otimes)$ は $\otimes$ が関手だから可換である．$(\mathcal{C})$ は豊穣圏の定義から可換である．

以上により T は V-関手である．また，$T(a,-)_{bc}$ は定義から，合成

$$
\begin{aligned}
\mathcal{B}(b,c) &\xrightarrow{\lambda^{-1}} I\otimes\mathcal{B}(b,c) \xrightarrow{j_a\otimes\mathrm{id}} \mathcal{A}(a,a)\otimes\mathcal{B}(b,c) \\
&\xrightarrow{G^c\otimes F^a} \mathcal{C}(T(a,c),T(a,c))\otimes\mathcal{C}(T(a,b),T(a,c)) \\
&\xrightarrow{m} \mathcal{C}(T(a,b),T(a,c))
\end{aligned}
$$

と一致する．よって次の図式により $T(a,-)=F^a$ が分かる．

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{B}(b,c) \arrow[r, "\lambda^{-1}"] \arrow[ddr, bend right, "F^a"'] & I\otimes\mathcal{B}(b,c) \arrow[r, "j_a\otimes\mathrm{id}"] \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes F^a"] \arrow[dr, "j\otimes\mathrm{id}"'] & \mathcal{A}(a,a)\otimes\mathcal{B}(b,c) \arrow[d, "G^c\otimes\mathrm{id}"] \arrow[dl, phantom, "(G^c)"] \\
& I\otimes\mathcal{C}(T(a,b),T(a,c)) \arrow[d, "\lambda"] \arrow[dr, "j\otimes\mathrm{id}"] \arrow[r, phantom, "(\otimes)"] \arrow[dl, phantom, "(\lambda)"] & \mathcal{C}(T(a,c),T(a,c))\otimes\mathcal{B}(b,c) \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes F^a"] \\
& \mathcal{C}(T(a,b),T(a,c)) \arrow[ur, phantom, "(j)"] & \mathcal{C}(T(a,c),T(a,c))\otimes\mathcal{C}(T(a,b),T(a,c)) \arrow[l, "m"]
\end{tikzcd}
$$

但し (λ) は λ の自然性により可換である．(G^c) は G^c が V-関手であるから可換である．(j) は $\mathcal{C}$ が V-豊穣圏であるから可換である．$(\otimes)$ は $\otimes$ が関手だから可換である．

同様にして

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{A}(a,c) \arrow[r, "\rho^{-1}"] \arrow[ddr, bend right, "G^b"'] & \mathcal{A}(a,c)\otimes I \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes j_b"] \arrow[d, "G^b\otimes\mathrm{id}"] \arrow[dr, "\mathrm{id}\otimes j"'] & \mathcal{A}(a,c)\otimes\mathcal{B}(b,b) \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes F^a"] \arrow[dl, phantom, "(F^a)"] \\
& \mathcal{C}(T(a,b),T(c,b))\otimes I \arrow[d, "\rho"] \arrow[dr, "\mathrm{id}\otimes j"] \arrow[r, phantom, "(\otimes)"] \arrow[dl, phantom, "(\rho)"] & \mathcal{A}(a,c)\otimes\mathcal{C}(T(a,b),T(a,b)) \arrow[d, "G^b\otimes\mathrm{id}"] \\
& \mathcal{C}(T(a,b),T(c,b)) \arrow[ur, phantom, "(j)"] & \mathcal{C}(T(a,b),T(c,b))\otimes\mathcal{C}(T(a,b),T(a,b)) \arrow[l, "m"]
\end{tikzcd}
$$

により $T(-,b)=G^b$ も分かる． □

命題 32. V-関手 $T\colon \mathcal{A}\otimes\mathcal{B}\to\mathcal{C}$ に対して $T(a,-)^{\mathrm{op}}=T^{\mathrm{op}}(a,-)$ である．

証明. $T^{\mathrm{op}}\colon \mathcal{A}^{\mathrm{op}}\otimes\mathcal{B}^{\mathrm{op}}=(\mathcal{A}\otimes\mathcal{B})^{\mathrm{op}}\to\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ に対して $T^{\mathrm{op}}(a,-)_{bc}$ を考えると，これは合成

$$\mathcal{B}^{\mathrm{op}}(b,c)\xrightarrow{\lambda^{-1}} I\otimes\mathcal{B}^{\mathrm{op}}(b,c)\xrightarrow{j_a\otimes\mathrm{id}}\mathcal{A}^{\mathrm{op}}(a,a)\otimes\mathcal{B}^{\mathrm{op}}(b,c)\xrightarrow{T^{\mathrm{op}}}\mathcal{C}^{\mathrm{op}}(T(a,b),T(a,c))$$

である．これは

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{B}^{\mathrm{op}}(b,c) \arrow[r, "\lambda^{-1}"] \arrow[d, equal] & I\otimes\mathcal{B}^{\mathrm{op}}(b,c) \arrow[r, "j_a\otimes\mathrm{id}"] \arrow[d, equal] & \mathcal{A}^{\mathrm{op}}(a,a)\otimes\mathcal{B}^{\mathrm{op}}(b,c) \arrow[r, "T^{\mathrm{op}}"] \arrow[d, equal] & \mathcal{C}^{\mathrm{op}}(T(a,b),T(a,c)) \arrow[d, equal] \\
\mathcal{B}(c,b) \arrow[r, "\lambda^{-1}"'] & I\otimes\mathcal{B}(c,b) \arrow[r, "j_a\otimes\mathrm{id}"'] & \mathcal{A}(a,a)\otimes\mathcal{B}(c,b) \arrow[r, "T"'] & \mathcal{C}(T(a,c),T(a,b))
\end{tikzcd}
$$

となるから $T^{\mathrm{op}}(a,-)=T(a,-)^{\mathrm{op}}$ である． □

2.5 V-関手 $\otimes$

命題 33. $x \in \mathcal{V}$ とする．F を

- $u \in \mathcal{V}$ に対して $Fu := u \otimes x$ とする．
- $u, v \in \mathcal{V}$ に対して $F_{uv} \colon [u,v] \to [u \otimes x, v \otimes x]$ を

  $$[u,v] \otimes (u \otimes x) \xrightarrow{\alpha^{-1}} ([u,v] \otimes u) \otimes x \xrightarrow{\mathrm{ev} \otimes \mathrm{id}} v \otimes x$$

  の随伴射とする．

により定めれば，これは V-関手 $F \colon \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ を与える．

証明. まず次の図式が可換であることを示す．

$$\begin{tikzcd}
{[v,w] \otimes [u,v]} \arrow[r, "m"] \arrow[d, "F_{vw} \otimes F_{uv}"'] & {[u,w]} \arrow[d, "F_{uw}"] \\
{[v \otimes x, w \otimes x] \otimes [u \otimes x, v \otimes x]} \arrow[r, "m"'] & {[u \otimes x, w \otimes x]}
\end{tikzcd}$$

そのためには随伴により次の図式が可換であることを示せばよい．

$$\begin{tikzcd}
{([v,w] \otimes [u,v]) \otimes (u \otimes x)} \arrow[r, "m \otimes (\mathrm{id} \otimes \mathrm{id})"] \arrow[dd, "(F_{vw} \otimes F_{uv}) \otimes (\mathrm{id} \otimes \mathrm{id})"'] & {[u,w] \otimes (u \otimes x)} \arrow[d, "\alpha^{-1}"] \\
 & {([u,w] \otimes u) \otimes x} \arrow[d, "\mathrm{ev} \otimes \mathrm{id}"] \\
{([v \otimes x, w \otimes x] \otimes [u \otimes x, v \otimes x]) \otimes (u \otimes x)} \arrow[d, "\alpha"'] & w \otimes x \\
{[v \otimes x, w \otimes x] \otimes ([u \otimes x, v \otimes x] \otimes (u \otimes x))} \arrow[r, "\mathrm{id} \otimes \mathrm{ev}"'] & {[v \otimes x, w \otimes x] \otimes (v \otimes x)} \arrow[u, "\mathrm{ev}"']
\end{tikzcd}$$

即ち，次の図式が可換であることを示せばよい．

$$
\begin{tikzcd}
([v,w][u,v])(ux) \arrow[rrr, "m\otimes(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})"] \arrow[drr, "\alpha^{-1}"] \arrow[ddr, "\alpha"'] \arrow[ddd, "(F\otimes F)\otimes(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})"'] \arrow[ddrr, phantom, "(V)"] & & & {[u,w](ux)} \arrow[d, "\alpha^{-1}"] \arrow[dl, phantom, "(\alpha)"] \\
 & & (([v,w][u,v])u)x \arrow[r, "(m\otimes\mathrm{id})\otimes\mathrm{id}"] \arrow[dr, "\alpha\otimes\mathrm{id}"] & ([u,w]u)x \arrow[ddd, bend left=60, "\mathrm{ev}\otimes\mathrm{id}"] \arrow[d, phantom, "(26)"] \\
 & {[v,w]([u,v](ux))} \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes\alpha^{-1}"] \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes(F\otimes\mathrm{id})"] \arrow[dr, phantom, "(F)"] & {[v,w](([u,v]u)x)} \arrow[r, "\alpha^{-1}"] \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes(\mathrm{ev}\otimes\mathrm{id})"] \arrow[dr, phantom, "(\alpha)"] & ([v,w]([u,v]u))x \arrow[d, "(\mathrm{id}\otimes\mathrm{ev})\otimes\mathrm{id}"] \\
([vx,wx][ux,vx])(ux) \arrow[dr, bend right, "\alpha"'] \arrow[ur, phantom, "(\alpha)"] & {[v,w]([ux,vx](ux))} \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes\mathrm{ev}"'] \arrow[d, "F\otimes(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})"'] \arrow[dr, phantom, "(\otimes)"] & {[v,w](vx)} \arrow[r, "\alpha^{-1}"'] \arrow[d, "F\otimes(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})"'] \arrow[dr, phantom, "(F)"] & ([v,w]v)x \arrow[d, "\mathrm{ev}\otimes\mathrm{id}"'] \\
 & {[vx,wx]([ux,vx](ux))} \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes\mathrm{ev}"'] & {[vx,wx](vx)} \arrow[r, "\mathrm{ev}"'] & wx
\end{tikzcd}
$$

(α) は α の自然性から可換である．(F) は F の定義から可換である．(V) は V がモノイダル圏だから可換である．$(\otimes)$ は $\otimes$ が関手だから可換である．(26) は補題 26 より可換である．以上により，この図式は可換である．

後は次の図式の可換性を示せばよい．

$$
\begin{tikzcd}
I \arrow[r, "j_u"] \arrow[dr, "j_{u\otimes x}"'] & {[u,u]} \arrow[d, "F_{uu}"] \\
 & {[u\otimes x, u\otimes x]}
\end{tikzcd}
$$

そのためには随伴により，次の図式が可換であることを示せばよい．

$$
\begin{tikzcd}
I\otimes(u\otimes x) \arrow[r, "j_u\otimes(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})"] \arrow[d, "\alpha^{-1}"'] \arrow[dr, phantom, "(\alpha)"] \arrow[ddr, bend right=60, "\lambda"'] & {[u,u]\otimes(u\otimes x)} \arrow[d, "\alpha^{-1}"] \\
(I\otimes u)\otimes x \arrow[r, "(j_u\otimes\mathrm{id})\otimes\mathrm{id}"] \arrow[dr, "\lambda\otimes\mathrm{id}"'] \arrow[d, phantom, "(12)"] & ({[u,u]}\otimes u)\otimes x \arrow[d, "\mathrm{ev}\otimes\mathrm{id}"] \arrow[dl, phantom, "(j)"] \\
 & u\otimes x
\end{tikzcd}
$$

(α) は α の自然性から可換である．(j) は j_u の定義から可換である．(12) は coherence 定理 (定理 12) から可換である．以上により，この図式は可換である． $\square$

この V-関手 F を $-\otimes x$ と書く．同様にして V-関手 $x\otimes -\colon \mathcal{V}\to\mathcal{V}$ も定義することが

できる．即ち V の射 $(x \otimes -)_{uv}\colon [u,v] \to [x \otimes u, x \otimes v]$ を

$$[u,v] \otimes (x \otimes u) \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes\gamma} [u,v] \otimes (u \otimes x) \xrightarrow{\alpha^{-1}} ([u,v] \otimes u) \otimes x \xrightarrow{\mathrm{ev}\otimes\mathrm{id}} v \otimes x \xrightarrow{\gamma} x \otimes v$$

の随伴射とすればよい．

命題 34. $\otimes\colon \langle u,v\rangle \mapsto u \otimes v$ は V-関手 $\otimes\colon \mathcal{V} \otimes \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ を定める．

証明．補題 31 により，次の図式が可換であることを示せばよい．

$$\begin{tikzcd}
{[u,v] \otimes [w,x]} \arrow[r, "(-\otimes x)\otimes(u\otimes -)"] \arrow[dd, "\gamma"'] & {[u \otimes x, v \otimes x] \otimes [u \otimes w, u \otimes x]} \arrow[d, "m"] \\
 & {[u \otimes w, v \otimes x]} \\
{[w,x] \otimes [u,v]} \arrow[r, "(v\otimes -)\otimes(-\otimes w)"'] & {[v \otimes w, v \otimes x] \otimes [u \otimes w, v \otimes w]} \arrow[u, "m"']
\end{tikzcd}$$

そのためには随伴により次の図式が可換であることを示せばよい．

$$\begin{tikzcd}
{([u,v] \otimes [w,x]) \otimes (u \otimes w)} \arrow[r, "((-\otimes x)\otimes(u\otimes -))\otimes\mathrm{id}"] \arrow[dd, "\gamma\otimes\mathrm{id}"'] & {([u \otimes x, v \otimes x] \otimes [u \otimes w, u \otimes x]) \otimes (u \otimes w)} \arrow[d] \\
 & v \otimes x \\
{([w,x] \otimes [u,v]) \otimes (u \otimes w)} \arrow[r, "((v\otimes -)\otimes(-\otimes w))\otimes\mathrm{id}"'] & {([v \otimes w, v \otimes x] \otimes [u \otimes w, v \otimes w]) \otimes (u \otimes w)} \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

即ち，次の図式が可換であることを示せばよい．

$$
\begin{tikzcd}
([u,v][w,x])(uw) \arrow[r, "(-\otimes x)\otimes\mathrm{id}"] \arrow[d, "\alpha"'] \arrow[dddddddddddd, bend right=40, "\gamma\otimes\mathrm{id}"'] \arrow[dr, phantom, "(\alpha)"] & ([ux,vx][w,x])(uw) \arrow[r, "(\mathrm{id}\otimes(u\otimes -))\otimes\mathrm{id}"] \arrow[d, "\alpha"] \arrow[dr, phantom, "(\alpha)"] & ([ux,vx][uw,ux])(uw) \arrow[d, "\alpha"] \\
{[u,v]([w,x](uw))} \arrow[r, "(-\otimes x)\otimes\mathrm{id}"] \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes(\mathrm{id}\otimes\gamma)"'] \arrow[dr, phantom, "(\gamma)"] & {[ux,vx]([w,x](uw))} \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes((u\otimes -)\otimes\mathrm{id})"] \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes(\mathrm{id}\otimes\gamma)"] \arrow[dr, phantom, "(u\otimes -)"] & {[ux,vx]([uw,ux](uw))} \arrow[dddd, bend left=40, "\mathrm{id}\otimes\mathrm{ev}"] \\
{[u,v]([w,x](wu))} \arrow[r, "(-\otimes x)\otimes\mathrm{id}"] \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes\alpha^{-1}"'] \arrow[dr, phantom, "(\alpha)"] & {[ux,vx]([w,x](wu))} \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes\alpha^{-1}"] & \\
{[u,v](([w,x]w)u)} \arrow[r, "(-\otimes x)\otimes\mathrm{id}"] \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes\gamma"'] \arrow[dr, phantom, "(\gamma)"] & {[ux,vx](([w,x]w)u)} \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes(\mathrm{ev}\otimes\mathrm{id})"] \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes\gamma"] \arrow[dr, phantom, "(\gamma)"] & {[ux,vx](xu)} \arrow[dd, "\mathrm{id}\otimes\gamma"] \\
{[u,v](u([w,x]w))} \arrow[r, "(-\otimes x)\otimes\mathrm{id}"] \arrow[dr, "\mathrm{id}\otimes(\mathrm{id}\otimes\mathrm{ev})"'] \arrow[ddd, "\alpha^{-1}"'] \arrow[ddd, phantom, bend right=60, "(12)"] & {[ux,vx](u([w,x]w))} \arrow[dr, "\mathrm{id}\otimes(\mathrm{id}\otimes\mathrm{ev})"] \arrow[d, phantom, "(\otimes)"] & \\
 & {[u,v](ux)} \arrow[r, "(-\otimes x)\otimes\mathrm{id}"'] \arrow[d, "\alpha^{-1}"] \arrow[dr, phantom, "(\alpha)"] & {[ux,vx](ux)} \arrow[d, "\mathrm{ev}"] \\
 & ([u,v]u)x \arrow[r, "\mathrm{ev}\otimes\mathrm{id}"'] \arrow[d, phantom, "(\otimes)"] \arrow[l, phantom, "(\alpha)"] & vx \\
([u,v]u)([w,x]w) \arrow[r, "\mathrm{ev}\otimes(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})"'] \arrow[ur, "(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})\otimes\mathrm{ev}"] \arrow[dr, phantom, "(\gamma)"] & v([w,x]w) \arrow[ur, "\mathrm{id}\otimes\mathrm{ev}"'] \arrow[dr, phantom, "(*)"] & \\
([u,v]u)(w[w,x]) \arrow[r, "\mathrm{ev}\otimes(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})"'] \arrow[u, "(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})\otimes\gamma"] \arrow[dr, phantom, "(\alpha)"] & v(w[w,x]) \arrow[u, "(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})\otimes\gamma"'] & {[vw,vx](vw)} \arrow[uu, "\mathrm{ev}"'] \\
(([u,v]u)w)[w,x] \arrow[r, "(\mathrm{ev}\otimes\mathrm{id})\otimes\mathrm{id}"'] \arrow[u, "\alpha"] \arrow[dr, phantom, "(-\otimes w)"] & (vw)[w,x] \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes(v\otimes -)"] \arrow[u, "\alpha"'] \arrow[dr, phantom, "(\otimes)"] & (vw)[vw,vx] \arrow[u, "\gamma"'] \\
([u,v](uw))[w,x] \arrow[r, "(-\otimes w)\otimes\mathrm{id}"'] \arrow[u, "\alpha^{-1}\otimes\mathrm{id}"] \arrow[dr, phantom, "(\gamma)"] & ([uw,vw](uw))[w,x] \arrow[r, "(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})\otimes(v\otimes -)"'] \arrow[u, "\mathrm{ev}\otimes\mathrm{id}"'] \arrow[dr, phantom, "(\gamma)"] & ([uw,vw](uw))[vw,vx] \arrow[u, "\mathrm{ev}\otimes\mathrm{id}"'] \\
{[w,x]([u,v](uw))} \arrow[r, "(-\otimes w)\otimes\mathrm{id}"'] \arrow[u, "\gamma"] \arrow[dr, phantom, "(\alpha)"] & {[w,x]([uw,vw](uw))} \arrow[r, "(v\otimes -)\otimes(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})"'] \arrow[u, "\gamma"'] \arrow[dr, phantom, "(\alpha)"] & {[vw,vx]([uw,vw](uw))} \arrow[u, "\gamma"'] \\
([w,x][u,v])(uw) \arrow[r, "(-\otimes w)\otimes\mathrm{id}"'] \arrow[u, "\alpha"] & ([w,x][uw,vw])(uw) \arrow[r, "((v\otimes -)\otimes\mathrm{id})\otimes\mathrm{id}"'] \arrow[u, "\alpha"'] & ([vw,vx][uw,vw])(uw) \arrow[u, "\alpha"']
\end{tikzcd}
$$

(α) は α の自然性から可換である．(γ) は γ の自然性から可換である．$(u\otimes -), (-\otimes w)$ は $u\otimes -, -\otimes w$ の定義から可換である．(12) は coherence 定理 (定理 12) から可換であ

る．(⊗) は ⊗ が関手だから可換である．(∗) は次の図式により可換である．

$$
\begin{tikzcd}
v([w,x]w) \arrow[rrr, "\mathrm{id}\otimes\mathrm{ev}"] & & & vx \\
& ([w,x]w)v \arrow[ul, "\gamma"] \arrow[r, "\mathrm{ev}\otimes\mathrm{id}"'] \arrow[ur, phantom, "(\gamma)"] & xv \arrow[ur, "\gamma"'] & \\
v(w[w,x]) \arrow[uu, "\mathrm{id}\otimes\gamma"] & {[w,x](wv)} \arrow[u, "\alpha^{-1}"] & (v\otimes -) & \\
& {[w,x](vw)} \arrow[u, "\mathrm{id}\otimes\gamma"] \arrow[rr, "(v\otimes -)\otimes(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})"] & & {[vw,vx](vw)} \arrow[uuu, "\mathrm{ev}"'] \\
(vw)[w,x] \arrow[uu, "\alpha"] \arrow[ur, "\gamma"'] \arrow[uur, phantom, "(14)"] \arrow[rrr, "(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})\otimes(v\otimes -)"'] \arrow[urr, phantom, "(\gamma)"] & & & (vw)[vw,vx] \arrow[u, "\gamma"']
\end{tikzcd}
$$

以上により，この図式は可換である． □

2.6 V-関手 $\mathcal{C}(-,\square)$

命題 35. $s \in \mathcal{C}$ とする．F を

- $a \in \mathcal{C}$ に対して $Fa := \mathcal{C}(s,a)$ とする．
- $a,b \in \mathcal{C}$ に対して $F_{ab}\colon \mathcal{C}(a,b) \to [\mathcal{C}(s,a),\mathcal{C}(s,b)]$ を $m\colon \mathcal{C}(a,b)\otimes\mathcal{C}(s,a) \to \mathcal{C}(s,b)$ の随伴射とする．

により定めれば，これは V-関手 $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{V}$ を与える．

証明．まず次の図式が可換であることを示す．

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{C}(b,c)\otimes\mathcal{C}(a,b) \arrow[r, "m"] \arrow[d, "F_{bc}\otimes F_{ab}"'] & \mathcal{C}(a,c) \arrow[d, "F_{ac}"] \\
{[\mathcal{C}(s,b),\mathcal{C}(s,c)]\otimes[\mathcal{C}(s,a),\mathcal{C}(s,b)]} \arrow[r, "m"'] & {[\mathcal{C}(s,a),\mathcal{C}(s,c)]}
\end{tikzcd}
$$

随伴 $-\otimes\mathcal{C}(s,a) \dashv [\mathcal{C}(s,a),-]$ により，次の図式が可換であることを示せばよい．

$$
\begin{tikzcd}
(\mathcal{C}(b,c)\otimes\mathcal{C}(a,b))\otimes\mathcal{C}(s,a) \arrow[r, "m\otimes\mathrm{id}"] \arrow[d, "(F_{bc}\otimes F_{ab})\otimes\mathrm{id}"'] & \mathcal{C}(a,c)\otimes\mathcal{C}(s,a) \arrow[d, "m"] \\
{([\mathcal{C}(s,b),\mathcal{C}(s,c)]\otimes[\mathcal{C}(s,a),\mathcal{C}(s,b)])\otimes\mathcal{C}(s,a)} \arrow[r, "m\text{ の随伴射}"'] & \mathcal{C}(s,c)
\end{tikzcd}
$$

即ち，次の図式が可換であることを示せばよい．

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
(\mathcal{C}(b,c)\otimes\mathcal{C}(a,b))\otimes\mathcal{C}(s,a) \arrow[rr, "m\otimes\mathrm{id}"] \arrow[dr, "\alpha"] \arrow[dd, "(F\otimes\mathrm{id})\otimes\mathrm{id}"'] & & \mathcal{C}(a,c)\otimes\mathcal{C}(s,a) \arrow[dddddd, bend left, "m"] \arrow[d, phantom, "(m)"] \\
& \mathcal{C}(b,c)\otimes(\mathcal{C}(a,b)\otimes\mathcal{C}(s,a)) \arrow[dr, "\mathrm{id}\otimes m"] \arrow[dd, "F\otimes(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})"] \arrow[d, phantom, "(\alpha)"] & \\
([\mathcal{C}(s,b),\mathcal{C}(s,c)]\otimes\mathcal{C}(a,b))\otimes\mathcal{C}(s,a) \arrow[dr, "\alpha"] \arrow[dd, "(\mathrm{id}\otimes F)\otimes\mathrm{id}"'] & \arrow[r, phantom, "(\otimes)"] & \mathcal{C}(b,c)\otimes\mathcal{C}(s,b) \arrow[dd, "F\otimes\mathrm{id}"] \arrow[dddd, bend left, "m"] \\
& {[\mathcal{C}(s,b),\mathcal{C}(s,c)]\otimes(\mathcal{C}(a,b)\otimes\mathcal{C}(s,a))} \arrow[dr, "\mathrm{id}\otimes m"] \arrow[dd, "\mathrm{id}\otimes(F\otimes\mathrm{id})"] \arrow[d, phantom, "(\alpha)"] & \\
([\mathcal{C}(s,b),\mathcal{C}(s,c)]\otimes[\mathcal{C}(s,a),\mathcal{C}(s,b)])\otimes\mathcal{C}(s,a) \arrow[dr, "\alpha"] \arrow[dd, "m\otimes\mathrm{id}"'] & \arrow[r, phantom, "(F)"] & {[\mathcal{C}(s,b),\mathcal{C}(s,c)]\otimes\mathcal{C}(s,b)} \arrow[dd, "\mathrm{ev}"] \arrow[d, phantom, "(F)"] \\
& {[\mathcal{C}(s,b),\mathcal{C}(s,c)]\otimes([\mathcal{C}(s,a),\mathcal{C}(s,b)]\otimes\mathcal{C}(s,a))} \arrow[ur, "\mathrm{id}\otimes\mathrm{ev}"'] \arrow[d, phantom, "(26)"] & \\
{[\mathcal{C}(s,a),\mathcal{C}(s,c)]\otimes\mathcal{C}(s,a)} \arrow[rr, "\mathrm{ev}"'] & & \mathcal{C}(s,c)
\end{tikzcd}
$$

(α) は α の自然性から可換である．(F) は F の定義から可換である．(m) は豊穣圏の定義から可換である．$(\otimes)$ は $\otimes$ が関手だから可換である．(26) は補題 26 により可換である．以上によりこの図式は可換である．

後は次の図式の可換性を示せばよい．

$$
\begin{tikzcd}
I \arrow[r, "j_a"] \arrow[dr, "j_{\mathcal{C}(s,a)}"'] & \mathcal{C}(a,a) \arrow[d, "F_{aa}"] \\
& {[\mathcal{C}(s,a),\mathcal{C}(s,a)]}
\end{tikzcd}
$$

随伴 $-\otimes\mathcal{C}(s,a)\dashv[\mathcal{C}(s,a),-]$ により，次の図式が可換であることを示せばよい．

$$
\begin{tikzcd}
I\otimes\mathcal{C}(s,a) \arrow[r, "j_a\otimes\mathrm{id}"] \arrow[dr, "\lambda"'] & \mathcal{C}(a,a)\otimes\mathcal{C}(s,a) \arrow[d, "m"] \\
& \mathcal{C}(s,a)
\end{tikzcd}
$$

それは豊穣圏の定義から明らか． $\square$

このｖ V-関手 F を $\mathcal{C}(s,-)$ と書く．

$\mathcal{C}$ として $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ を考えれば V-関手 $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}(s,-)\colon \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{V}$ が得られる．これを $\mathcal{C}(-,s)$ で表す．$\mathcal{C}(-,s)_{ab}\colon \mathcal{C}^{\mathrm{op}}(a,b) \to [\mathcal{C}(a,s),\mathcal{C}(b,s)]$ の随伴射は定義より

$$\mathcal{C}(b,a)\otimes\mathcal{C}(a,s) \xrightarrow{\gamma} \mathcal{C}(a,s)\otimes\mathcal{C}(b,a) \xrightarrow{m} \mathcal{C}(b,s)$$

である．

命題 36. $\mathcal{C}(-,\Box)\colon \langle a,b\rangle \mapsto \mathcal{C}(a,b)$ は V-関手 $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}\otimes\mathcal{C} \to \mathcal{V}$ を定める．

証明. 補題 31 により次の図式が可換であることを示せばよい．(ここでスペースの都合上，$\mathcal{C}(a,b)$ を $\mathcal{C}_{ab}$ と表記した．)

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}_{dt}\otimes\mathcal{C}_{ca} \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes\mathcal{C}(-,d)"] \arrow[dd, "\gamma"'] & \mathcal{C}_{dt}\otimes[\mathcal{C}_{ad},\mathcal{C}_{cd}] \arrow[r, "\mathcal{C}(c,-)\otimes\mathrm{id}"] & {[\mathcal{C}_{cd},\mathcal{C}_{ct}]\otimes[\mathcal{C}_{ad},\mathcal{C}_{cd}]} \arrow[d, "m"] \\
 & & {[\mathcal{C}_{ad},\mathcal{C}_{ct}]} \\
\mathcal{C}_{ca}\otimes\mathcal{C}_{dt} \arrow[r, "\mathcal{C}(-,t)\otimes\mathrm{id}"'] & {[\mathcal{C}_{at},\mathcal{C}_{ct}]\otimes\mathcal{C}_{dt}} \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes\mathcal{C}(a,-)"'] & {[\mathcal{C}_{at},\mathcal{C}_{ct}]\otimes[\mathcal{C}_{ad},\mathcal{C}_{at}]} \arrow[u, "m"']
\end{tikzcd}$$

随伴 $-\otimes\mathcal{C}_{ad} \dashv [\mathcal{C}_{ad},-]$ により，次の可換性を示せばよい．(スペースの都合上 $\otimes$ は省略した．)

$$\begin{tikzcd}
(\mathcal{C}_{dt}\mathcal{C}_{ca})\mathcal{C}_{ad} \arrow[r, "(\mathrm{id}\otimes\mathcal{C}(-,d))\otimes\mathrm{id}"] \arrow[dddddd, "\gamma\otimes\mathrm{id}"'] & (\mathcal{C}_{dt}[\mathcal{C}_{ad},\mathcal{C}_{cd}])\mathcal{C}_{ad} \arrow[r, "(\mathcal{C}(c,-)\otimes\mathrm{id})\otimes\mathrm{id}"] & ({[\mathcal{C}_{cd},\mathcal{C}_{ct}][\mathcal{C}_{ad},\mathcal{C}_{cd}]})\mathcal{C}_{ad} \arrow[d, "\alpha"] \\
 & & {[\mathcal{C}_{cd},\mathcal{C}_{ct}]([\mathcal{C}_{ad},\mathcal{C}_{cd}]\mathcal{C}_{ad})} \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes\mathrm{ev}"] \\
 & & {[\mathcal{C}_{cd},\mathcal{C}_{ct}]\mathcal{C}_{cd}} \arrow[d, "\mathrm{ev}"] \\
 & & \mathcal{C}_{ct} \\
 & & {[\mathcal{C}_{at},\mathcal{C}_{ct}]\mathcal{C}_{at}} \arrow[u, "\mathrm{ev}"'] \\
 & & {[\mathcal{C}_{at},\mathcal{C}_{ct}]([\mathcal{C}_{ad},\mathcal{C}_{at}]\mathcal{C}_{ad})} \arrow[u, "\mathrm{id}\otimes\mathrm{ev}"'] \\
(\mathcal{C}_{ca}\mathcal{C}_{dt})\mathcal{C}_{ad} \arrow[r, "(\mathcal{C}(-,t)\otimes\mathrm{id})\otimes\mathrm{id}"'] & ({[\mathcal{C}_{at},\mathcal{C}_{ct}]\mathcal{C}_{dt}})\mathcal{C}_{ad} \arrow[r, "(\mathrm{id}\otimes\mathcal{C}(a,-))\otimes\mathrm{id}"'] & ({[\mathcal{C}_{at},\mathcal{C}_{ct}][\mathcal{C}_{ad},\mathcal{C}_{at}]})\mathcal{C}_{ad} \arrow[u, "\alpha"']
\end{tikzcd}$$

即ち次の図式が可換であることを示せばよい．

$$
\begin{tikzcd}
 & (\mathcal{C}_{dt}[\mathcal{C}_{ad},\mathcal{C}_{cd}])\mathcal{C}_{ad} \arrow[rr, "(\mathcal{C}(c,-)\otimes\mathrm{id})\otimes\mathrm{id}"] \arrow[d, "\alpha"] \arrow[drr, phantom, "(\alpha)"] & & ([\mathcal{C}_{cd},\mathcal{C}_{ct}][\mathcal{C}_{ad}\mathcal{C}_{cd}])\mathcal{C}_{ad} \arrow[d, "\alpha"] \\
 & \mathcal{C}_{dt}([\mathcal{C}_{ad},\mathcal{C}_{cd}]\mathcal{C}_{ad}) \arrow[rr, "\mathcal{C}(c,-)\otimes(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})"] \arrow[ddr, "\mathrm{id}\otimes\mathrm{ev}"'] \arrow[drr, phantom, "(\otimes)"] & & {[\mathcal{C}_{cd},\mathcal{C}_{ct}]}([\mathcal{C}_{ad}\mathcal{C}_{cd}]\mathcal{C}_{ad}) \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes\mathrm{ev}"] \\
(\mathcal{C}_{dt}\mathcal{C}_{ca})\mathcal{C}_{ad} \arrow[uur, bend left, "(\mathrm{id}\otimes\mathcal{C}(-,d))\otimes\mathrm{id}"] \arrow[r, "\alpha"] \arrow[dddd, "\gamma\otimes\mathrm{id}"'] \arrow[ur, phantom, "(\alpha)"] & \mathcal{C}_{dt}(\mathcal{C}_{ca}\mathcal{C}_{ad}) \arrow[u, "\mathrm{id}\otimes(\mathcal{C}(-,d)\otimes\mathrm{id})"'] \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes\gamma"'] \arrow[dr, phantom, "(*)"] & & {[\mathcal{C}_{cd},\mathcal{C}_{ct}]}\mathcal{C}_{cd} \arrow[dd, "\mathrm{ev}"] \\
 & \mathcal{C}_{dt}(\mathcal{C}_{ad}\mathcal{C}_{ca}) \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes m"] & \mathcal{C}_{dt}\mathcal{C}_{cd} \arrow[ur, "\mathcal{C}(c,-)\otimes\mathrm{id}"] \arrow[dr, "m"] \arrow[r, phantom, "(*)"] & {} \\
 & {} \arrow[l, phantom, "(V)"] \arrow[r, phantom, "(m)"] & {} & \mathcal{C}_{ct} \\
 & (\mathcal{C}_{dt}\mathcal{C}_{ad})\mathcal{C}_{ca} \arrow[uu, "\alpha"] \arrow[r, "m\otimes\mathrm{id}"'] & \mathcal{C}_{at}\mathcal{C}_{ca} \arrow[ur, "m"'] \arrow[dr, phantom, "(*)"] & \\
(\mathcal{C}_{ca}\mathcal{C}_{dt})\mathcal{C}_{ad} \arrow[r, "\alpha"'] \arrow[ddr, bend right, "(\mathcal{C}(-,t)\otimes\mathrm{id})\otimes\mathrm{id}"'] \arrow[dr, phantom, "(\alpha)"] & \mathcal{C}_{ca}(\mathcal{C}_{dt}\mathcal{C}_{ad}) \arrow[u, "\gamma"] \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes m"'] \arrow[d, "\mathcal{C}(-,t)\otimes(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})"'] \arrow[ur, phantom, "(\gamma)"] \arrow[dr, phantom, "(\otimes)"] & \mathcal{C}_{ca}\mathcal{C}_{at} \arrow[u, "\gamma"] \arrow[r, "\mathcal{C}(-,t)\otimes\mathrm{id}"] & {[\mathcal{C}_{at},\mathcal{C}_{ct}]}\mathcal{C}_{at} \arrow[uu, "\mathrm{ev}"'] \\
 & {[\mathcal{C}_{at},\mathcal{C}_{ct}]}(\mathcal{C}_{dt}\mathcal{C}_{ad}) \arrow[urr, "\mathrm{id}\otimes m"] \arrow[rr, "\mathrm{id}\otimes(\mathcal{C}(a,-)\otimes\mathrm{id})"'] \arrow[urr, phantom, "(*)"'] & & {[\mathcal{C}_{at},\mathcal{C}_{ct}]}([\mathcal{C}_{ad}\mathcal{C}_{at}]\mathcal{C}_{ad}) \arrow[u, "\mathrm{id}\otimes\mathrm{ev}"'] \\
 & ([\mathcal{C}_{at},\mathcal{C}_{ct}]\mathcal{C}_{dt})\mathcal{C}_{ad} \arrow[u, "\alpha"] \arrow[rr, "(\mathrm{id}\otimes\mathcal{C}(a,-))\otimes\mathrm{id}"'] \arrow[urr, phantom, "(\alpha)"] & & ([\mathcal{C}_{at},\mathcal{C}_{ct}][\mathcal{C}_{ad}\mathcal{C}_{at}])\mathcal{C}_{ad} \arrow[u, "\alpha"']
\end{tikzcd}
$$

(α) は α の自然性から可換である．(γ) は γ の自然性から可換である．(m) は豊穣圏の定義から可換である．(V) は対称モノイダル圏の定義から可換である．$(\otimes)$ は $\otimes$ が関手だから可換である．$(*)$ は $\mathcal{C}(a,-)$，$\mathcal{C}(-,a)$ の定義から可換である．以上により一番外側も可換である． $\square$

特に $\mathcal{C}$ として $\mathcal{V}$ を考えれば $[-,\square]$ は V-関手 $[-,\square]\colon \mathcal{V}^{\mathrm{op}}\otimes\mathcal{V}\to\mathcal{V}$ を与えることが分かる．

2.7 underlying category $U(\mathcal{C})$: 以降での記法について

特別な V の場合を除いて，V-豊穣圏 $\mathcal{C}$ の「射」$f\in\mathcal{C}(a,b)$ を取ることはできない．そこで代わりに (既に見てきた通り) V の射 $f\colon I\to\mathcal{C}(a,b)$ を考えることがある．以降では，この $f\colon I\to\mathcal{C}(a,b)$ のことを $\mathcal{C}$ の射と呼び，記号で $f\colon a \nrightarrow b$ と表すことにする．

$f\colon a\nrightarrow b$，$g\colon b\nrightarrow c$ とする．即ち $f\colon I\to\mathcal{C}(a,b)$，$g\colon I\to\mathcal{C}(b,c)$ である．このとき

合成 $g \circ f\colon a \nrightarrow c$ (即ち $g \circ f\colon I \to \mathcal{C}(a,c)$) を

$$I \xrightarrow{\lambda^{-1}} I \otimes I \xrightarrow{g \otimes f} \mathcal{C}(b,c) \otimes \mathcal{C}(a,b) \xrightarrow{m} \mathcal{C}(a,c)$$

により定める．この合成は結合律を満たす．

∵) $f\colon a \nrightarrow b$, $g\colon b \nrightarrow c$, $h\colon c \nrightarrow d$ とする．定義より $(h \circ g) \circ f\colon a \nrightarrow d$ は

$$\begin{aligned}&I \xrightarrow{\lambda^{-1}} I \otimes I \xrightarrow{\lambda^{-1} \otimes \mathrm{id}} (I \otimes I) \otimes I \xrightarrow{(h \otimes g) \otimes f} (\mathcal{C}(c,d) \otimes \mathcal{C}(b,c)) \otimes \mathcal{C}(a,b)\\ &\xrightarrow{m \otimes \mathrm{id}} \mathcal{C}(b,d) \otimes \mathcal{C}(a,b) \xrightarrow{m} \mathcal{C}(a,d)\end{aligned}$$

であり，$h \circ (g \circ f)\colon a \nrightarrow d$ は

$$\begin{aligned}&I \xrightarrow{\lambda^{-1}} I \otimes I \xrightarrow{\mathrm{id} \otimes \lambda^{-1}} I \otimes (I \otimes I) \xrightarrow{h \otimes (g \otimes f)} \mathcal{C}(c,d) \otimes (\mathcal{C}(b,c) \otimes \mathcal{C}(a,b))\\ &\xrightarrow{\mathrm{id} \otimes m} \mathcal{C}(c,d) \otimes \mathcal{C}(a,c) \xrightarrow{m} \mathcal{C}(a,d)\end{aligned}$$

である．そこで次の図式を考える．

$$\begin{tikzcd}
 & (I \otimes I) \otimes I \arrow[r, "(h \otimes g) \otimes f"] \arrow[d, "\alpha"] \arrow[dr, phantom, "(\alpha)"] & (\mathcal{C}(c,d) \otimes \mathcal{C}(b,c)) \otimes \mathcal{C}(a,b) \arrow[r, "m \otimes \mathrm{id}"] \arrow[d, "\alpha"] \arrow[dr, phantom, "(\mathcal{C})"] & \mathcal{C}(b,d) \otimes \mathcal{C}(a,b) \arrow[d, "m"] \\
I \otimes I \arrow[ur, "\lambda^{-1} \otimes \mathrm{id}"] \arrow[dr, "\mathrm{id} \otimes \lambda^{-1}"'] \arrow[r, phantom, "(12)"] & {} & {} & \mathcal{C}(a,d) \\
 & I \otimes (I \otimes I) \arrow[r, "h \otimes (g \otimes f)"'] & \mathcal{C}(c,d) \otimes (\mathcal{C}(b,c) \otimes \mathcal{C}(a,b)) \arrow[r, "\mathrm{id} \otimes m"'] & \mathcal{C}(c,d) \otimes \mathcal{C}(a,c) \arrow[u, "m"']
\end{tikzcd}$$

(12) は coherence 定理から可換である．(α) は α の自然性から可換である．$(\mathcal{C})$ は豊穣圏の定義から可換である．故にこの図式は可換であり $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$ が分かった．

次に $j_a\colon I \to \mathcal{C}(a,a)$ を $\mathcal{C}$ の射 $j_a\colon a \nrightarrow a$ とみなしたとき，これは「恒等射」である．(そこで以降，$\mathcal{C}$ の射 j_a を id_a とも書く．)

∵) $f\colon a \nrightarrow b$ とする．定義より $f \circ j_a$ は合成

$$I \xrightarrow{\lambda^{-1}} I \otimes I \xrightarrow{f \otimes j_a} \mathcal{C}(a,b) \otimes \mathcal{C}(a,a) \xrightarrow{m} \mathcal{C}(a,b)$$

である．次の図式が可換であるから $f \circ j_a = f$ が分かる．

$$
\begin{tikzcd}
I \otimes I \arrow[r, "f \otimes \mathrm{id}"] \arrow[dr, "\lambda = \rho"'] & \mathcal{C}(a,b) \otimes I \arrow[r, "\mathrm{id} \otimes j_a"] \arrow[dr, "\rho"] \arrow[d, phantom, "(\rho)"] & \mathcal{C}(a,b) \otimes \mathcal{C}(a,a) \arrow[d, "m"] \arrow[d, phantom, "(\mathcal{C})"'] \\
& I \arrow[r, "f"'] & \mathcal{C}(a,b)
\end{tikzcd}
$$

同様に次の図式から $j_b \circ f = f$ も分かる．

$$
\begin{tikzcd}
I \otimes I \arrow[r, "\mathrm{id} \otimes f"] \arrow[dr, "\lambda"'] & I \otimes \mathcal{C}(a,b) \arrow[r, "j_b \otimes \mathrm{id}"] \arrow[dr, "\lambda"] \arrow[d, phantom, "(\lambda)"] & \mathcal{C}(b,b) \otimes \mathcal{C}(a,b) \arrow[d, "m"] \arrow[d, phantom, "(\mathcal{C})"'] \\
& I \arrow[r, "f"'] & \mathcal{C}(a,b)
\end{tikzcd}
$$

故に $\mathcal{C}$ の対象と $\mathcal{C}$ の射は圏をなすことが分かる．この圏を $\mathcal{C}$ の underlying category という．(定理 63 の後で定義するが，underlying category を $U(\mathcal{C})$ で表す．)

$F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ を V-関手とする．$\mathcal{C}$ の射 $f\colon a \nrightarrow b$ に対して $\mathcal{D}$ の射 $Ff\colon Fa \nrightarrow Fb$ を合成 $I \xrightarrow{f} \mathcal{C}(a,b) \xrightarrow{F_{ab}} \mathcal{D}(Fa, Fb)$ で定義する．このとき $F(g \circ f) = Fg \circ Ff$，$F(\mathrm{id}_a) = \mathrm{id}_{Fa}$ である．即ち V-関手は underlying category の間の関手を導く．

V-豊穣圏 $\mathcal{C}$ における同型を underlying category を使って次のように定義しておく．

定義. $\mathcal{C}$ を V-豊穣圏とする．

(1) $\mathcal{C}$ の射 $f\colon a \nrightarrow b$ が同型 $\Longleftrightarrow$ $U(\mathcal{C})$ の射として同型.

(2) $a, b \in \mathcal{C}$ が同型 (記号では $a \cong b$ と書く)
$\Longleftrightarrow$ $\mathcal{C}$ の同型射 $a \nrightarrow b$ が存在する．

特に V-関手 $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ は $\mathcal{C}$ の同型射を $\mathcal{D}$ の同型射に写すことが分かる．

例 **37.** 圏 C を **Set**-豊穣圏とみなしたときの $U(C)$ は C そのものである． □

例 **38.** 前順序集合 P を 2-豊穣圏とみなしたとき (例 17)，$U(P)$ は P を圏とみなしたものである． □

例 **39.** $\mathcal{C}$ を **Ab**-豊穣圏として $U(\mathcal{C})$ について考える．まず $X \in \mathbf{Ab}$ に対して標準的な全単射 $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Ab}}(\mathbb{Z}, X) \cong X$ があるから，$a, b \in \mathcal{C}$ に対して (集合として)

$$\mathrm{Hom}_{U\mathcal{C}}(a,b) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ab}}(\mathbb{Z}, \mathcal{C}(a,b)) \cong \mathcal{C}(a,b)$$

である．これにより $\mathrm{Hom}_{U\mathcal{C}}(a,b)$ はアーベル群 $\mathcal{C}(a,b)$ (の演算を忘れた集合) とみなせる．この全単射で $f \in \mathrm{Hom}_{U\mathcal{C}}(a,b)$ に対応する元を $\underline{f} \in \mathcal{C}(a,b)$ と書く．$f\colon \mathbb{Z} \to \mathcal{C}(a,b)$ であり $\underline{f} = f(1)$ となる．$U\mathcal{C}$ の射の合成 $\circ\colon \mathrm{Hom}_{U\mathcal{C}}(b,c) \times \mathrm{Hom}_{U\mathcal{C}}(a,b) \to \mathrm{Hom}_{U\mathcal{C}}(a,c)$ から写像

$$\mathcal{C}(b,c) \times \mathcal{C}(a,b) \cong \mathrm{Hom}_{U\mathcal{C}}(b,c) \times \mathrm{Hom}_{U\mathcal{C}}(a,b) \xrightarrow{\circ} \mathrm{Hom}_{U\mathcal{C}}(a,c) \cong \mathcal{C}(a,c)$$

が得られるから，これも $\circ$ で表す．即ち $\underline{f} \in \mathcal{C}(a,b)$，$\underline{g} \in \mathcal{C}(b,c)$ に対して $\underline{g} \circ \underline{f} := \underline{g \circ f}$ である．ここでこの合成 $g \circ f$ の定義は

$$\mathbb{Z} \xrightarrow{\lambda^{-1}} \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z} \xrightarrow{g \otimes f} \mathcal{C}(b,c) \otimes \mathcal{C}(a,b) \xrightarrow{m} \mathcal{C}(a,c)$$

であった．よって次の図式が可換である．

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}(b,c) \otimes \mathcal{C}(a,b) \arrow[r, "m"] & \mathcal{C}(a,c) \arrow[d, "\mathrm{id}"] \\
\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z} \arrow[u, "g \otimes f"] \arrow[d, "\mathrm{id} \otimes \mathrm{id}"'] & \mathcal{C}(a,c) \\
\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z} \arrow[r, "\lambda"'] & \mathbb{Z} \arrow[u, "h := g \circ f"']
\end{tikzcd}$$

従って随伴 $- \otimes X \dashv [X, -]$ により次の可換図式を得る．

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}(b,c) \arrow[r, "\widetilde{m} := m\text{の随伴射}"] & {[\mathcal{C}(a,b), \mathcal{C}(a,c)]} \arrow[d, "{[f,\mathrm{id}]}"] \\
\mathbb{Z} \arrow[u, "g"] \arrow[d, "\mathrm{id}"'] & {[\mathbb{Z}, \mathcal{C}(a,c)]} \\
\mathbb{Z} \arrow[r, "\widetilde{\lambda} := \lambda\text{の随伴射}"'] & {[\mathbb{Z}, \mathbb{Z}]} \arrow[u, "{[\mathrm{id},h]}"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\underline{g} \arrow[r, mapsto, "\widetilde{m}"] & \widetilde{m}(\underline{g}) \arrow[d, mapsto, "{[f,\mathrm{id}]}"] \\
1 \arrow[u, mapsto, "g"] \arrow[dd, mapsto, "\mathrm{id}"'] & \widetilde{m}(\underline{g}) \circ f \\
 & h \\
1 \arrow[r, mapsto, "\widetilde{\lambda}"'] & \mathrm{id}_{\mathbb{Z}} \arrow[u, mapsto, "{[\mathrm{id},h]}"']
\end{tikzcd}$$

故に $1 \in \mathbb{Z}$ の行き先を考えれば $\widetilde{m}(\underline{g}) \circ f = h$ が分かる．これらは写像 $\mathbb{Z} \to \mathcal{C}(a,c)$ だから $1 \in \mathbb{Z}$ の行き先を考えれば

$$\widetilde{m}(\underline{g})(\underline{f}) = \underline{h} = \underline{g} \circ \underline{f} \tag{40}$$

である．よって $\underline{f_0}, \underline{f_1} \in \mathcal{C}(a,b)$，$\underline{g} \in \mathcal{C}(b,c)$ に対して

$$\underline{g} \circ (\underline{f_0} + \underline{f_1}) = (\underline{g} \circ \underline{f_0}) + (\underline{g} \circ \underline{f_1})$$

である (ここでアーベル群 $\mathcal{C}(a,b)$ の演算を $+$ で表した).

∵) $f \in \mathcal{C}(a,b)$ を $\underline{f} = \underline{f_0} + \underline{f_1}$ となるように取る．このとき (40) を使えば

$$\underline{g} \circ \underline{f} = \widetilde{m}(\underline{g})(\underline{f}) = \widetilde{m}(\underline{g})(\underline{f_0} + \underline{f_1})$$

である．ここで $\widetilde{m}(\underline{g})\colon \mathcal{C}(a,b) \to \mathcal{C}(a,c)$ は準同型写像だから

$$\underline{g} \circ \underline{f} = \widetilde{m}(\underline{g})(\underline{f_0}) + \widetilde{m}(\underline{g})(\underline{f_1}) = (\underline{g} \circ \underline{f_0}) + (\underline{g} \circ \underline{f_1})$$

が分かる．

同様に，$\underline{f} \in \mathcal{C}(a,b)$，$\underline{g_0}, \underline{g_1} \in \mathcal{C}(b,c)$ に対して

$$(\underline{g_0} + \underline{g_1}) \circ \underline{f} = (\underline{g_0} \circ \underline{f}) + (\underline{g_1} \circ \underline{f})$$

も成り立つ．

∵) $g \in \mathcal{C}(b,c)$ を $\underline{g} = \underline{g_0} + \underline{g_1}$ となるように取る．このとき (40) を使えば

$$\underline{g} \circ \underline{f} = \widetilde{m}(\underline{g_0} + \underline{g_1})(\underline{f})$$

である．$\widetilde{m}\colon \mathcal{C}(b,c) \to [\mathcal{C}(a,b), \mathcal{C}(a,c)]$ は準同型だから $\widetilde{m}(\underline{g_0} + \underline{g_1}) = \widetilde{m}(\underline{g_0}) + \widetilde{m}(\underline{g_1})$ となる．よって

$$\underline{g} \circ \underline{f} = \widetilde{m}(\underline{g_0})(\underline{f}) + \widetilde{m}(\underline{g_1})(\underline{f}) = \underline{g_0} \circ \underline{f} + \underline{g_1} \circ \underline{f}$$

が分かる．

即ち $\circ\colon \mathcal{C}(b,c) \times \mathcal{C}(a,b) \to \mathcal{C}(a,c)$ は双線型写像となる．

逆に C を通常の圏として各 $a, b \in C$ に対して $\mathrm{Hom}_C(a,b)$ にアーベル群の構造が与えられて，射の合成が与える写像

$$\mathrm{Hom}_C(b,c) \times \mathrm{Hom}_C(a,b) \to \mathrm{Hom}_C(a,c)$$

が双線型とする．このとき $\mathbf{Ab}$-豊穣圏 $\mathcal{C}$ を，アーベル群として $\mathcal{C}(a,b) = \mathrm{Hom}_C(a,b)$ となるように取ることができる．

∵) 一般に，アーベル群 X, Y, Z に対して双線型写像 $f\colon X \times Y \to Z$ が与えられたとき，写像 $\widetilde{f}\colon X \to [Y,Z]$ を $\widetilde{f}(x) := f(x,-)$ で定義すると $\widetilde{f}$ は $\mathbf{Ab}$ の射となる．よって随伴 $- \otimes Y \dashv [Y,-]$ により $\mathbf{Ab}$ の射 $X \otimes Y \to Z$ が得られる．この方法で

$\mathrm{Hom}_C(b,c) \times \mathrm{Hom}_C(a,b) \to \mathrm{Hom}_C(a,c)$ から得られる射を

$$m_{abc} \colon \mathrm{Hom}_C(b,c) \otimes \mathrm{Hom}_C(a,b) \to \mathrm{Hom}_C(a,c)$$

とすればこれが **Ab**-豊穣圏の条件を満たすことが分かる．

こうして **Ab**-豊穣圏は通常の圏に追加の条件が入ったものとみなすことができる．

R を (可換とは限らない) 単位的環とする．R は乗法についてモノイドであるから，圏とみなすことができる．即ち圏 C を

- $\mathrm{Ob}(C) := \{*\}$ とする．
- $\mathrm{Hom}_C(*,*) := R$ とする．
- 合成 $m \colon \mathrm{Hom}_C(*,*) \times \mathrm{Hom}_C(*,*) \to \mathrm{Hom}_C(*,*)$ は R の乗法 $R \times R \ni \langle r, s \rangle \mapsto rs \in R$ で定める．
- 恒等射 id_* は R の単位元とする．

によって定義することができる．このとき R の加法によって $\mathrm{Hom}_C(*,*)$ にアーベル群の構造が入るが，R が環だから m は双線型写像である．故にこの C は **Ab**-豊穣圏とみなすことができる．

逆に，$\mathrm{Ob}(\mathcal{C}) = \{*\}$ となるような **Ab**-豊穣圏 $\mathcal{C}$ に対して $R := \mathcal{C}(*,*)$ は単位的環である．この対応により，単位的環と，1 点 **Ab**-豊穣圏を同一視することができる．また小 **Ab**-豊穣圏を ringoid と呼ぶことがある． □

$\mathcal{V}$ の underlying category を考える．この場合，対象 $u, v \in V$ に対して同型

$$\mathrm{Hom}_V(I, [u,v]) \cong \mathrm{Hom}_V(I \otimes u, v) \cong \mathrm{Hom}_V(u, v)$$

が成り立つから，$\mathcal{V}$ の射 $u \nrightarrow v$ と (通常の意味での) V の射 $u \to v$ は 1 対 1 に対応する．ev が随伴 $- \otimes u \dashv [u, -]$ の counit だったから，この同型は

$$\mathrm{Hom}_V(I, [u,v]) \ni f \mapsto \mathrm{ev} \circ (f \otimes \mathrm{id}) \circ \lambda^{-1} \in \mathrm{Hom}_V(u, v)$$

で与えられる．即ち，$\mathcal{V}$ の射 $f \colon u \nrightarrow v$ と V の射 $g \colon u \to v$ が対応するのは

$$\begin{tikzcd}
u \arrow[d, "\lambda^{-1}"'] \arrow[dr, "g"] & \\
I \otimes u \arrow[d, "f \otimes \mathrm{id}"'] & v \\
{[u,v] \otimes u} \arrow[ur, "\mathrm{ev}"'] &
\end{tikzcd} \tag{41}$$

が可換となるときである．これは随伴 $- \otimes u \dashv [u, -]$ を使えば

$$
\begin{tikzcd}
I \arrow[r, "j_u"] \arrow[d, "f"'] & {[u,u]} \arrow[d, "{[\mathrm{id},g]}"] \\
{[u,v]} \arrow[r, "\mathrm{id}"'] & {[u,v]}
\end{tikzcd}
$$

が可換となるということもできる．

以下この節では，$\mathcal{V}$ の射 $f\colon u \nrightarrow v$ に対応する V の射を下線を使って $\underline{f}$ と表すことにする．

命題 42. $\mathcal{V}$ の射 $f\colon u \nrightarrow v$，$g\colon v \nrightarrow w$ に対して $\underline{g \circ f} = \underline{g} \circ \underline{f}$ である．

証明. 次の図式が可換であることを示せばよい．

$$
\begin{tikzcd}
& & u \arrow[d, "\lambda^{-1}"'] \arrow[drr, "\underline{f}"] & & & \\
& & I \otimes u \arrow[dll, "\lambda^{-1}\otimes\mathrm{id}"'] \arrow[d, "f\otimes\mathrm{id}"'] \arrow[rr, phantom, "(41)"] \arrow[ddddrr, bend right=60, "(g\circ f)\otimes\mathrm{id}"'] & & v \arrow[d, "\lambda^{-1}"] \arrow[dr, "\underline{g}"] & \\
(I \otimes I) \otimes u \arrow[d, "(\mathrm{id}\otimes f)\otimes\mathrm{id}"'] \arrow[rr, phantom, "(\lambda)"] & & {[u,v] \otimes u} \arrow[urr, "\mathrm{ev}"'] \arrow[dll, "\lambda^{-1}\otimes\mathrm{id}"'] \arrow[d, "\lambda^{-1}"'] \arrow[dl, phantom, "(12)"] \arrow[rr, phantom, "(\lambda)"] & & I \otimes v \arrow[d, "g\otimes\mathrm{id}"] \arrow[r, phantom, "(41)"] & w \\
(I \otimes [u,v]) \otimes u \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[d, "(g\otimes\mathrm{id})\otimes\mathrm{id}"'] \arrow[drr, phantom, "(\alpha)"] & & I \otimes ([u,v] \otimes u) \arrow[urr, "\mathrm{id}\otimes\mathrm{ev}"'] \arrow[d, "g\otimes(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})"'] \arrow[rr, phantom, "(\otimes)"] & & {[v,w] \otimes v} \arrow[ur, "\mathrm{ev}"'] & \\
([v,w] \otimes [u,v]) \otimes u \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[drrrr, "m\otimes\mathrm{id}"] \arrow[d, phantom, "(g\circ f)"] & & {[v,w] \otimes ([u,v] \otimes u)} \arrow[urr, "\mathrm{id}\otimes\mathrm{ev}"'] \arrow[drr, phantom, "(26)"] & & & \\
& & & & {[v,w] \otimes v} \arrow[uuur, "\mathrm{ev}"'] &
\end{tikzcd}
$$

ここで (α)，(λ) は α, λ の自然性から可換である．(26) は補題 26 から可換である．(12) は coherence 定理 (定理 12) から可換である．(41) は $\underline{f}$ の定義から可換である．$(g \circ f)$ は $g \circ f$ の定義から可換である．$(\otimes)$ は $\otimes$ が関手だから可換である． □

命題 43. $\mathcal{V}$ の射 $j_u\colon u \nrightarrow u$ に対して $\underline{j_u} = \mathrm{id}_u\colon u \to u$ である．

証明. 次の図式が可換であることを示せばよい．

$$
\begin{tikzcd}
u \arrow[d, "\lambda^{-1}"'] \arrow[dr, "\mathrm{id}_u"] & \\
I \otimes u \arrow[d, "j_u \otimes \mathrm{id}"'] & u \\
{[u,u] \otimes u} \arrow[ur, "\mathrm{ev}"'] &
\end{tikzcd}
$$

それは随伴 $- \otimes u \dashv [u, -]$ により対応する図式を考えると

$$
\begin{tikzcd}
I \arrow[r, "j_u"] \arrow[d, "j_u"'] & {[u,u]} \\
{[u,u]} \arrow[ur, "\mathrm{id}"'] &
\end{tikzcd}
$$

となり明らか． $\square$

従ってこの対応 $f \mapsto \underline{f}$ は圏同型 $U(\mathcal{V}) \to V$ を与えることが分かる．特に $\mathcal{V}$ の同型射とは V の同型射のことである．

一般の $\mathcal{C}$ の場合に戻り，$f \colon a \nrightarrow b$ を $\mathcal{C}$ の射とする．$\mathcal{C}(c, -)$ は V-関手 $\mathcal{C} \to \mathcal{V}$ だったから，$\mathcal{C}(c, f) \colon \mathcal{C}(c, a) \nrightarrow \mathcal{C}(c, b)$ は $\mathcal{V}$ の射である．$f \circ - := \underline{\mathcal{C}(c, f)}$ と書くことにする．つまり $f \circ -$ とは可換図式

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{C}(c,a) \arrow[d, "\lambda^{-1}"'] \arrow[dr, "f \circ -"] & \\
I \otimes \mathcal{C}(c,a) \arrow[d, "f \otimes \mathrm{id}"'] & \mathcal{C}(c,b) \\
\mathcal{C}(a,b) \otimes \mathcal{C}(c,a) \arrow[d, "\mathcal{C}(c,-) \otimes \mathrm{id}"'] & \\
{[\mathcal{C}(c,a), \mathcal{C}(c,b)] \otimes \mathcal{C}(c,a)} \arrow[uur, "\mathrm{ev}"'] &
\end{tikzcd}
$$

を満たす V の射である．ここで $\mathcal{C}(c,-)$ の定義より，この図式は

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}(c,a) \arrow[d, "\lambda^{-1}"'] \arrow[dr, "f\circ-"] & \\
I\otimes\mathcal{C}(c,a) \arrow[d, "f\otimes\mathrm{id}"'] & \mathcal{C}(c,b) \\
\mathcal{C}(a,b)\otimes\mathcal{C}(c,a) \arrow[ur, "m"'] &
\end{tikzcd}$$

と書き直せる．また今まで述べてきたことから，f が $\mathcal{C}$ の同型射ならば $f\circ -$ も (圏 V における) 同型射である．

次に $\mathcal{C}(a,b)=\mathcal{C}^{\mathrm{op}}(b,a)$ だったから，$\mathcal{C}$ の射 $f\colon a \nrightarrow b$ は $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ の射 $b \nrightarrow a$ とみなせる．これを区別のため f^{op} と書いて，$-\circ f := f^{\mathrm{op}}\circ -$ と定義する．即ち $-\circ f$ とは

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}^{\mathrm{op}}(c,b) \arrow[d, "\lambda^{-1}"'] \arrow[dr, "-\circ f"] & \\
I\otimes\mathcal{C}^{\mathrm{op}}(c,b) \arrow[d, "f^{\mathrm{op}}\otimes\mathrm{id}"'] & \mathcal{C}^{\mathrm{op}}(c,a) \\
\mathcal{C}^{\mathrm{op}}(b,a)\otimes\mathcal{C}^{\mathrm{op}}(c,b) \arrow[ur, "m"'] &
\end{tikzcd}$$

を可換にする V の射である．これは $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ の定義を使って書き直せば

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}(b,c) \arrow[d, "\lambda^{-1}"'] \arrow[dr, "-\circ f"] & \\
I\otimes\mathcal{C}(b,c) \arrow[d, "f\otimes\mathrm{id}"'] & \mathcal{C}(a,c) \\
\mathcal{C}(a,b)\otimes\mathcal{C}(b,c) \arrow[d, "\gamma"'] & \\
\mathcal{C}(b,c)\otimes\mathcal{C}(a,b) \arrow[uur, "m"'] &
\end{tikzcd}$$

となる．$\mathcal{C}(-,c)$ の定義より，これは

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{C}(b,c) \arrow[d, "\lambda^{-1}"'] \arrow[drr, "-\circ f"] & & \\
I \otimes \mathcal{C}(b,c) \arrow[d, "f\otimes\mathrm{id}"'] & & \mathcal{C}(a,c) \\
\mathcal{C}(a,b) \otimes \mathcal{C}(b,c) \arrow[d, "\mathcal{C}(-,c)\otimes\mathrm{id}"'] & & \\
{[\mathcal{C}(b,c), \mathcal{C}(a,c)]} \otimes \mathcal{C}(b,c) \arrow[uurr, "\mathrm{ev}"'] & &
\end{tikzcd}
$$

と書き直せる．従って $-\circ f = \underline{\mathcal{C}(f,c)}$ である．もしくは，γ の自然性を使って

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{C}(b,c) \arrow[d, "\rho^{-1}"'] \arrow[drr, "-\circ f"] & & \\
\mathcal{C}(b,c) \otimes I \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes f"'] & & \mathcal{C}(a,c) \\
\mathcal{C}(b,c) \otimes \mathcal{C}(a,b) \arrow[urr, "m"'] & &
\end{tikzcd}
$$

としてもよい．

命題 44. $f\colon a \nrightarrow b$，$g\colon b \nrightarrow c$ を $\mathcal{C}$ の射とするとき，次の図式は可換である．

$$
\begin{tikzcd}
I \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, "g\circ f"] & \\
\mathcal{C}(a,b) \arrow[r, "g\circ -"'] & \mathcal{C}(a,c)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
I \arrow[d, "g"'] \arrow[dr, "g\circ f"] & \\
\mathcal{C}(b,c) \arrow[r, "-\circ f"'] & \mathcal{C}(a,c)
\end{tikzcd}
$$

証明. 次の図式より分かる.

$$
\begin{tikzcd}
 & & I \arrow[dll, "f"'] \arrow[d, "\lambda^{-1}"] \arrow[dddr, bend left, "g\circ f"] & \\
\mathcal{C}(a,b) \arrow[rr, phantom, "(\lambda)"] \arrow[drr, "\lambda^{-1}"'] \arrow[ddr, phantom, "(g\circ -)"] \arrow[dddrrr, bend right, "g\circ -"'] & & I\otimes I \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes f"] \arrow[r, phantom, "(g\circ f)"] & {} \\
 & & I\otimes \mathcal{C}(a,b) \arrow[d, "g\otimes\mathrm{id}"] & \\
 & & \mathcal{C}(b,c)\otimes\mathcal{C}(a,b) \arrow[r, "m"] & \mathcal{C}(a,c)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & & I \arrow[dll, "g"'] \arrow[d, "\rho^{-1}"] \arrow[dddr, bend left, "g\circ f"] & \\
\mathcal{C}(b,c) \arrow[rr, phantom, "(\rho)"] \arrow[drr, "\rho^{-1}"'] \arrow[ddr, phantom, "(-\circ f)"] \arrow[dddrrr, bend right, "-\circ f"'] & & I\otimes I \arrow[d, "g\otimes\mathrm{id}"] \arrow[r, phantom, "(g\circ f)"] & {} \\
 & & \mathcal{C}(b,c)\otimes I \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes f"] & \\
 & & \mathcal{C}(b,c)\otimes\mathcal{C}(a,b) \arrow[r, "m"] & \mathcal{C}(a,c)
\end{tikzcd}
$$

□

命題 45. $f\colon a \not\rightarrow b$, $g\colon b \not\rightarrow c$ を $\mathcal{C}$ の射とするとき，次の図式は可換である.

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{C}(s,a) \arrow[d, "f\circ -"'] \arrow[dr, "(g\circ f)\circ -"] & \\
\mathcal{C}(s,b) \arrow[r, "g\circ -"'] & \mathcal{C}(s,c)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathcal{C}(c,s) \arrow[d, "-\circ g"'] \arrow[dr, "-\circ(g\circ f)"] & \\
\mathcal{C}(b,s) \arrow[r, "-\circ f"'] & \mathcal{C}(a,s)
\end{tikzcd}
$$

証明. $\mathcal{V}$ の射 $\mathcal{C}(s,f)$，$\mathcal{C}(s,g)$，$\mathcal{C}(s,g\circ f)$ に対応する V の射が $f\circ -$，$g\circ -$，$(g\circ f)\circ -$ である．今 $\mathcal{C}(s,-)$ が V-関手だから $\mathcal{C}(s,g)\circ\mathcal{C}(s,f)=\mathcal{C}(s,g\circ f)$ である．よって命題 42 により $(g\circ -)\circ(f\circ -)=(g\circ f)\circ -$ が分かる．同様に $(-\circ f)\circ(-\circ g)=-\circ(g\circ f)$ も分かる. □

命題 46. $f\colon a \not\rightarrow b$, $g\colon c \not\rightarrow d$ を $\mathcal{C}$ の射とするとき，次の図式は可換である.

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{C}(b,c) \arrow[r, "-\circ f"] \arrow[d, "g\circ -"'] & \mathcal{C}(a,c) \arrow[d, "g\circ -"] \\
\mathcal{C}(b,d) \arrow[r, "-\circ f"'] & \mathcal{C}(a,d)
\end{tikzcd}
$$

証明. 命題 30 より $\mathcal{C}(f,d)\circ\mathcal{C}(b,g)=\mathcal{C}(f,g)=\mathcal{C}(a,g)\circ\mathcal{C}(f,c)$ である．従って命題 42 から分かる. □

命題 47. $j_a\circ - = \mathrm{id}_{\mathcal{C}(s,a)}$ かつ $-\circ j_a = \mathrm{id}_{\mathcal{C}(a,s)}$ である.

証明. 豊穣圏の定義より

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{C}(s,a) \arrow[d, "\lambda^{-1}"'] \arrow[drr, "\mathrm{id}"] & & \\
I \otimes \mathcal{C}(s,a) \arrow[d, "j_a \otimes \mathrm{id}"'] & & \mathcal{C}(s,a) \\
\mathcal{C}(a,a) \otimes \mathcal{C}(s,a) \arrow[urr, "m"'] & &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathcal{C}(a,s) \arrow[d, "\rho^{-1}"'] \arrow[drr, "\mathrm{id}"] & & \\
\mathcal{C}(a,s) \otimes I \arrow[d, "\mathrm{id} \otimes j_a"'] & & \mathcal{C}(a,s) \\
\mathcal{C}(a,s) \otimes \mathcal{C}(a,a) \arrow[urr, "m"'] & &
\end{tikzcd}
$$

が可換となるから分かる. □

命題 48. $f\colon c \nrightarrow s$ を $\mathcal{C}$ の射とするとき，次の図式は可換である.

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{C}(b,c) \otimes \mathcal{C}(a,b) \arrow[r, "(f\circ -)\otimes \mathrm{id}"] \arrow[d, "m"'] & \mathcal{C}(b,s) \otimes \mathcal{C}(a,b) \arrow[d, "m"] \\
\mathcal{C}(a,c) \arrow[r, "f\circ -"'] & \mathcal{C}(a,s)
\end{tikzcd}
$$

証明. まず次の図式を考える.

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathcal{C}_{bc} \otimes \mathcal{C}_{ab} \arrow[dl, bend right, "\lambda^{-1}"'] \arrow[d, "\lambda^{-1}\otimes \mathrm{id}"] \arrow[dr, "(f\circ -)\otimes \mathrm{id}"] & \\
I \otimes (\mathcal{C}_{bc} \otimes \mathcal{C}_{ab}) \arrow[r, "\alpha^{-1}"'] \arrow[d, "f\otimes(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})"'] \arrow[ur, phantom, "(12)"] \arrow[dr, phantom, "(\alpha)"] & (I \otimes \mathcal{C}_{bc}) \otimes \mathcal{C}_{ab} \arrow[d, "(f\otimes\mathrm{id})\otimes\mathrm{id}"] \arrow[r, phantom, "(f\circ -)"] & \mathcal{C}_{bs} \otimes \mathcal{C}_{ab} \arrow[dddd, "m"] \\
\mathcal{C}_{cs} \otimes (\mathcal{C}_{bc} \otimes \mathcal{C}_{ab}) \arrow[r, "\alpha^{-1}"'] \arrow[d, "\mathcal{C}(b,-)\otimes(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})"'] \arrow[dr, phantom, "(\alpha)"] & (\mathcal{C}_{cs} \otimes \mathcal{C}_{bc}) \otimes \mathcal{C}_{ab} \arrow[d, "(\mathcal{C}(b,-)\otimes\mathrm{id})\otimes\mathrm{id}"] & \\
{[\mathcal{C}_{bc}, \mathcal{C}_{bs}]} \otimes (\mathcal{C}_{bc} \otimes \mathcal{C}_{ab}) \arrow[r, "\alpha^{-1}"'] \arrow[d, "(-\otimes\mathcal{C}_{ab})\otimes(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})"'] & ([\mathcal{C}_{bc}, \mathcal{C}_{bs}] \otimes \mathcal{C}_{bc}) \otimes \mathcal{C}_{ab} \arrow[uur, "\mathrm{ev}\otimes\mathrm{id}"'] \arrow[d, phantom, "(-\otimes \mathcal{C}_{ab})"] & \\
{[\mathcal{C}_{bc} \otimes \mathcal{C}_{ab}, \mathcal{C}_{bs} \otimes \mathcal{C}_{ab}]} \otimes (\mathcal{C}_{bc} \otimes \mathcal{C}_{ab}) \arrow[uuurr, "\mathrm{ev}"'] \arrow[d, "{[\mathrm{id},m]}\otimes(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})"'] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{ev})"] & & \\
{[\mathcal{C}_{bc} \otimes \mathcal{C}_{ab}, \mathcal{C}_{as}]} \otimes (\mathcal{C}_{bc} \otimes \mathcal{C}_{ab}) \arrow[rr, "\mathrm{ev}"'] & & \mathcal{C}_{as}
\end{tikzcd}
$$

(12) は coherence 定理 (定理 12) から可換である. (α) は α の自然性により可換である. (ev) は ev の自然性により可換である. $(f\circ -)$ は $f\circ -$ の定義から可換である. $(-\otimes\mathcal{C}_{ab})$ は $-\otimes\mathcal{C}_{ab}$ の定義から可換である. 以上によりこの図式は可換である. 従って V の射

$m \circ ((f\circ -)\otimes \mathrm{id})$ に対応する $\mathcal{V}$ の射は

$$I \xrightarrow{f} \mathcal{C}_{cs} \xrightarrow{\mathcal{C}(b,-)} [\mathcal{C}_{bc}, \mathcal{C}_{bs}] \xrightarrow{-\otimes \mathcal{C}_{ab}} [\mathcal{C}_{bc}\otimes \mathcal{C}_{ab}, \mathcal{C}_{bs}\otimes \mathcal{C}_{ab}] \xrightarrow{[\mathrm{id},m]} [\mathcal{C}_{bc}\otimes \mathcal{C}_{ab}, \mathcal{C}_{as}]$$

である．

次に，次の図式を考える．

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}_{bc}\otimes\mathcal{C}_{ab} \arrow[r, "m"] \arrow[d, "\lambda^{-1}"'] \arrow[dr, phantom, "(\lambda)"] & \mathcal{C}_{ac} \arrow[d, "\lambda^{-1}"'] \arrow[ddr, "f\circ-"] & \\
I\otimes(\mathcal{C}_{bc}\otimes\mathcal{C}_{ab}) \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes m"] \arrow[d, "f\otimes(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})"'] \arrow[dr, phantom, "(\otimes)"] & I\otimes\mathcal{C}_{ac} \arrow[d, "f\otimes\mathrm{id}"'] \arrow[dr, phantom, "(f\circ -)"] & \\
\mathcal{C}_{cs}\otimes(\mathcal{C}_{bc}\otimes\mathcal{C}_{ab}) \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes m"] \arrow[d, "\mathcal{C}(a,-)\otimes(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})"'] \arrow[dr, phantom, "(\otimes)"] & \mathcal{C}_{cs}\otimes\mathcal{C}_{ac} \arrow[d, "\mathcal{C}(a,-)\otimes\mathrm{id}"'] & \mathcal{C}_{as} \\
{[\mathcal{C}_{ac},\mathcal{C}_{as}]\otimes(\mathcal{C}_{bc}\otimes\mathcal{C}_{ab})} \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes m"'] \arrow[d, "{[m,\mathrm{id}]\otimes(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})}"'] & {[\mathcal{C}_{ac},\mathcal{C}_{as}]\otimes\mathcal{C}_{ac}} \arrow[ur, "\mathrm{ev}"'] \arrow[d, phantom, "(\mathrm{ev})"] & \\
{[\mathcal{C}_{bc}\otimes\mathcal{C}_{ab},\mathcal{C}_{as}]\otimes(\mathcal{C}_{bc}\otimes\mathcal{C}_{ab})} \arrow[rr, "\mathrm{ev}"'] & & \arrow[uu]
\end{tikzcd}$$

(λ)，(ev) は λ, ev の自然性により可換である．$(f\circ -)$ は $f\circ -$ の定義より可換である．$(\otimes)$ は $\otimes$ が関手だから可換である．以上によりこの図式は可換である．従って V の射 $(f\circ -)\circ m$ に対応する $\mathcal{V}$ の射は

$$I \xrightarrow{f} \mathcal{C}_{cs} \xrightarrow{\mathcal{C}(a,-)} [\mathcal{C}_{ac}, \mathcal{C}_{as}] \xrightarrow{[m,\mathrm{id}]} [\mathcal{C}_{bc}\otimes \mathcal{C}_{ab}, \mathcal{C}_{as}]$$

である．

上記の 2 つから，次の図式が可換であることを示せば証明が終わる．

$$\begin{tikzcd}
{[\mathcal{C}_{bc},\mathcal{C}_{bs}]} \arrow[r, "-\otimes\mathcal{C}_{ab}"] & {[\mathcal{C}_{bc}\otimes\mathcal{C}_{ab},\mathcal{C}_{bs}\otimes\mathcal{C}_{ab}]} \arrow[d, "{[\mathrm{id}\otimes\mathrm{id},m]}"] \\
\mathcal{C}_{cs} \arrow[u, "{\mathcal{C}(b,-)}"] \arrow[d, "\mathrm{id}"'] & {[\mathcal{C}_{bc}\otimes\mathcal{C}_{ab},\mathcal{C}_{as}]} \\
\mathcal{C}_{cs} \arrow[r, "{\mathcal{C}(a,-)}"'] & {[\mathcal{C}_{ac},\mathcal{C}_{as}]} \arrow[u, "{[m,\mathrm{id}]}"']
\end{tikzcd}$$

それは，随伴により次の図式から分かる．

$$
\begin{tikzcd}
{[\mathcal{C}_{bc}, \mathcal{C}_{bs}] \otimes (\mathcal{C}_{bc} \otimes \mathcal{C}_{ab})} \arrow[r, "\alpha^{-1}"] \arrow[dr, phantom, "(\alpha)"] & {([\mathcal{C}_{bc}, \mathcal{C}_{bs}] \otimes \mathcal{C}_{bc}) \otimes \mathcal{C}_{ab}} \arrow[r, "\mathrm{ev}\otimes\mathrm{id}"] \arrow[dr, phantom, "(\mathcal{C}(b,-))"] & \mathcal{C}_{bs} \otimes \mathcal{C}_{ab} \arrow[d, "m"] \\
\mathcal{C}_{cs} \otimes (\mathcal{C}_{bc} \otimes \mathcal{C}_{ab}) \arrow[u, "\mathcal{C}(b,-)\otimes(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})"] \arrow[r, "\alpha^{-1}"'] \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes m"'] \arrow[drr, phantom, "(\mathcal{C})"] & (\mathcal{C}_{cs} \otimes \mathcal{C}_{bc}) \otimes \mathcal{C}_{ab} \arrow[u, "(\mathcal{C}(b,-)\otimes\mathrm{id})\otimes\mathrm{id}"] \arrow[ur, bend right, "m\otimes\mathrm{id}"'] & \mathcal{C}_{as} \\
\mathcal{C}_{cs} \otimes \mathcal{C}_{ac} \arrow[rr, "m"'] & & \mathcal{C}_{as} \arrow[u, "\mathrm{id}"']
\end{tikzcd}
$$

□

命題 49. $f\colon s \nrightarrow a$ を $\mathcal{C}$ の射とするとき，次の図式は可換である．

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{C}(b,c) \otimes \mathcal{C}(a,b) \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes(-\circ f)"] \arrow[d, "m"'] & \mathcal{C}(b,c) \otimes \mathcal{C}(s,b) \arrow[d, "m"] \\
\mathcal{C}(a,c) \arrow[r, "-\circ f"'] & \mathcal{C}(s,c)
\end{tikzcd}
$$

証明. $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ において命題 48 を考えれば次の可換図式を得る．

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{C}^{\mathrm{op}}(b,a) \otimes \mathcal{C}^{\mathrm{op}}(c,b) \arrow[r, "(f^{\mathrm{op}}\circ-)\otimes\mathrm{id}"] \arrow[d, "m"'] & \mathcal{C}^{\mathrm{op}}(b,s) \otimes \mathcal{C}^{\mathrm{op}}(c,b) \arrow[d, "m"] \\
\mathcal{C}^{\mathrm{op}}(c,a) \arrow[r, "f^{\mathrm{op}}\circ-"'] & \mathcal{C}^{\mathrm{op}}(c,s)
\end{tikzcd}
$$

これを定義を使って書き直せば次のようになる．

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{C}(a,b) \otimes \mathcal{C}(b,c) \arrow[r, "(-\circ f)\otimes\mathrm{id}"] \arrow[d, "\gamma"'] & \mathcal{C}(s,b) \otimes \mathcal{C}(b,c) \arrow[d, "\gamma"] \\
\mathcal{C}(b,c) \otimes \mathcal{C}(a,b) \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes(-\circ f)"'] \arrow[d, "m"'] & \mathcal{C}(b,c) \otimes \mathcal{C}(s,b) \arrow[d, "m"] \\
\mathcal{C}(a,c) \arrow[r, "-\circ f"'] & \mathcal{C}(s,c)
\end{tikzcd}
$$

外側の四角と上の四角が可換であり，また γ が同型射だから，下の四角も可換になる． □

命題 50. $f\colon b \nrightarrow c$ を $\mathcal{C}$ の射とするとき，次の図式は可換である．

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{C}(c,d)\otimes\mathcal{C}(a,b) \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes(f\circ -)"] \arrow[d, "(-\circ f)\otimes\mathrm{id}"'] & \mathcal{C}(c,d)\otimes\mathcal{C}(a,c) \arrow[d, "m"] \\
\mathcal{C}(b,d)\otimes\mathcal{C}(a,b) \arrow[r, "m"'] & \mathcal{C}(a,d)
\end{tikzcd}
$$

証明. 次の図式より分かる．

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathcal{C}_{cd}\otimes\mathcal{C}_{ab} \arrow[rr, "\mathrm{id}"] \arrow[dl, "(-\circ f)\otimes\mathrm{id}"'] \arrow[d, "\rho^{-1}\otimes\mathrm{id}"] \arrow[drr, phantom, "(V)"] & & \mathcal{C}_{cd}\otimes\mathcal{C}_{ab} \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes\lambda^{-1}"'] \arrow[dr, "\mathrm{id}\otimes(f\circ -)"] & \\
\mathcal{C}_{bd}\otimes\mathcal{C}_{ab} \arrow[r, phantom, "(-\circ f)"] \arrow[drr, bend right, "m"'] & (\mathcal{C}_{cd}\otimes I)\otimes\mathcal{C}_{ab} \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[d, "(\mathrm{id}\otimes f)\otimes\mathrm{id}"] \arrow[drr, phantom, "(\alpha)"] & & \mathcal{C}_{cd}\otimes(I\otimes\mathcal{C}_{ab}) \arrow[r, phantom, "(f\circ -)"] \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes(f\otimes\mathrm{id})"'] & \mathcal{C}_{cd}\otimes\mathcal{C}_{ac} \arrow[dll, bend left, "m"] \\
 & (\mathcal{C}_{cd}\otimes\mathcal{C}_{bc})\otimes\mathcal{C}_{ab} \arrow[rr, "\alpha"'] \arrow[ul, "m\otimes\mathrm{id}"] \arrow[dr, phantom, "(\mathcal{C})"] & & \mathcal{C}_{cd}\otimes(\mathcal{C}_{bc}\otimes\mathcal{C}_{ab}) \arrow[ur, "\mathrm{id}\otimes m"'] & \\
 & & \mathcal{C}_{ad} & &
\end{tikzcd}
$$

□

命題 51. $f\colon a \nrightarrow b$ を $\mathcal{C}$ の射とするとき，次の図式は可換である．

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{C}(b,c) \arrow[r, "-\circ f"] \arrow[d, "\mathcal{C}(a,-)"'] & \mathcal{C}(a,c) \arrow[d, "i"] \\
{[\mathcal{C}(a,b),\mathcal{C}(a,c)]} \arrow[r, "{[f,\mathrm{id}]}"'] & {[I,\mathcal{C}(a,c)]}
\end{tikzcd}
$$

証明. $-\circ f$ の定義より次の図式が可換であることを示せばよい．

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{C}(b,c) \arrow[r, "\mathcal{C}(a,-)"] \arrow[d, "\rho^{-1}"'] & {[\mathcal{C}(a,b),\mathcal{C}(a,c)]} \arrow[r, "{[f,\mathrm{id}]}"] & {[I,\mathcal{C}(a,c)]} \arrow[r, "i^{-1}"] & \mathcal{C}(a,c) \\
\mathcal{C}(b,c)\otimes I \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes f"'] & & & \\
\mathcal{C}(b,c)\otimes\mathcal{C}(a,b) \arrow[urrr, "m"'] & & &
\end{tikzcd}
$$

これは書き換えると次の図式になる.

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{C}(b,c) \arrow[r, "\mathcal{C}(a,-)"] & {[\mathcal{C}(a,b),\mathcal{C}(a,c)]} \arrow[d, "{[f,\mathrm{id}]}"] \\
\mathcal{C}(b,c)\otimes I \arrow[u, "\mathrm{id}"] & {[I,\mathcal{C}(a,c)]} \arrow[d, "\mathrm{id}"] \\
\mathcal{C}(b,c)\otimes I \arrow[u, "\rho"] \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes f"'] & {[I,\mathcal{C}(a,c)]} \\
\mathcal{C}(b,c)\otimes\mathcal{C}(a,b) \arrow[d, "m"'] & {[I,\mathcal{C}(a,c)]} \arrow[u, "\mathrm{id}"'] \\
\mathcal{C}(a,c) \arrow[r, "i"'] & {[I,\mathcal{C}(a,c)]} \arrow[u, "\mathrm{id}"']
\end{tikzcd}
$$

これが可換であることを示すには，随伴により次の図式が可換であることを示せばよい.

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{C}(b,c)\otimes\mathcal{C}(a,b) \arrow[rr, "m"] & & \mathcal{C}(a,c) \arrow[d, "\mathrm{id}"] \\
\mathcal{C}(b,c)\otimes I \arrow[u, "\mathrm{id}\otimes f"] \arrow[dr, "\mathrm{id}"] \arrow[r, phantom, "(*)"] & {} & \mathcal{C}(a,c) \arrow[d, "\mathrm{id}"] \\
(\mathcal{C}(b,c)\otimes I)\otimes I \arrow[u, "\rho\otimes\mathrm{id}"] \arrow[r, "\rho"'] \arrow[d, "(\mathrm{id}\otimes f)\otimes\mathrm{id}"'] \arrow[ur, phantom, "(12)"] & \mathcal{C}(b,c)\otimes I \arrow[ul, bend right, "\mathrm{id}\otimes f"'] \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes f"] \arrow[r, phantom, "(*)"] & \mathcal{C}(a,c) \\
(\mathcal{C}(b,c)\otimes\mathcal{C}(a,b))\otimes I \arrow[r, "\rho"'] \arrow[d, "m\otimes\mathrm{id}"'] \arrow[ur, phantom, "(\rho)"] & \mathcal{C}(b,c)\otimes\mathcal{C}(a,b) \arrow[dr, "m"] \arrow[d, phantom, "(\rho)"] & \mathcal{C}(a,c) \arrow[u, "\mathrm{id}"'] \\
\mathcal{C}(a,c)\otimes I \arrow[rr, "\rho"'] & {} & \mathcal{C}(a,c) \arrow[u, "\mathrm{id}"']
\end{tikzcd}
$$

$(*)$ は明らかに可換である．(ρ) は ρ の自然性により可換である．(12) は coherence 定理 (定理 12) から可換である．以上によりこの図式は可換である． □

命題 52. $F\colon \mathcal{C}\to\mathcal{D}$ を V-関手，$f\colon b \nrightarrow c$ を $\mathcal{C}$ の射とするとき，次の図式は可換である.

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{C}(a,b) \arrow[r, "F_{ab}"] \arrow[d, "f\circ-"'] & \mathcal{D}(Fa,Fb) \arrow[d, "Ff\circ-"] \\
\mathcal{C}(a,c) \arrow[r, "F_{ac}"'] & \mathcal{D}(Fa,Fc)
\end{tikzcd}
$$

証明. 次の図式が可換であることを示せばよい.

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{C}(a,b) \arrow[r, "F_{ab}"] \arrow[d, "\lambda^{-1}"'] \arrow[dddd, bend right=60, "f\circ-"'] \arrow[dr, phantom, "(\lambda)"] & \mathcal{D}(Fa,Fb) \arrow[d, "\lambda^{-1}"] \arrow[dddd, bend left=60, "Ff\circ-"] \\
I\otimes\mathcal{C}(a,b) \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes F_{ab}"] \arrow[d, "f\otimes\mathrm{id}"'] \arrow[dr, phantom, "(\otimes)"] & I\otimes\mathcal{D}(Fa,Fb) \arrow[d, "f\otimes\mathrm{id}"] \arrow[r, phantom, "(*)"] & {} \\
\mathcal{C}(b,c)\otimes\mathcal{C}(a,b) \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes F_{ab}"'] \arrow[dd, "m"'] \arrow[ddr, phantom, "(F)"] & \mathcal{C}(b,c)\otimes\mathcal{D}(Fa,Fb) \arrow[d, "F_{bc}\otimes\mathrm{id}"] \\
{} \arrow[r, phantom, "(*)", near start] & \mathcal{D}(Fb,Fc)\otimes\mathcal{D}(Fa,Fb) \arrow[d, "m"] \\
\mathcal{C}(a,c) \arrow[r, "F_{ac}"'] & \mathcal{D}(Fa,Fc)
\end{tikzcd}
$$

(F) は F が V-関手だから可換である. (λ) は λ の自然性により可換である. $(\otimes)$ は $\otimes$ が関手だから可換である. $(*)$ は $f\circ -$, $Ff\circ -$ の定義より可換である. 以上によりこの図式は可換である. □

命題 53. $F\colon \mathcal{C}\to\mathcal{D}$ を V-関手, $f\colon b \nrightarrow c$ を $\mathcal{C}$ の射とするとき, 次の図式は可換である.

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{C}(b,c) \arrow[r, "F_{bc}"] \arrow[d, "-\circ f"'] & \mathcal{D}(Fb,Fc) \arrow[d, "-\circ Ff"] \\
\mathcal{C}(a,c) \arrow[r, "F_{ac}"'] & \mathcal{D}(Fa,Fc)
\end{tikzcd}
$$

証明. 次の図式が可換であることを示せばよい.

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{C}(b,c) \arrow[r, "F_{bc}", "(\lambda)"' {yshift=20pt}] \arrow[d, "\lambda^{-1}"'] \arrow[ddddd, bend right=60, "-\circ f"'] & \mathcal{D}(Fb,Fc) \arrow[d, "\lambda^{-1}"] \arrow[ddddd, bend left=60, "-\circ Ff"] \\
I\otimes\mathcal{C}(b,c) \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes F_{bc}"] \arrow[d, "f\otimes\mathrm{id}"'] \arrow[dr, phantom, "(\otimes)"] & I\otimes\mathcal{D}(Fb,Fc) \arrow[d, "f\otimes\mathrm{id}"] \\
\mathcal{C}(a,b)\otimes\mathcal{C}(b,c) \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes F_{bc}"'] \arrow[dd, "\gamma"'] \arrow[ddr, phantom, "(\gamma)"] & \mathcal{C}(a,b)\otimes\mathcal{D}(Fb,Fc) \arrow[d, "F_{ab}\otimes\mathrm{id}"] \\
(*) & \mathcal{D}(Fa,Fb)\otimes\mathcal{D}(Fb,Fc) \arrow[d, "\gamma"] & (*) \\
\mathcal{C}(b,c)\otimes\mathcal{C}(a,b) \arrow[r, "F_{bc}\otimes F_{ab}"] \arrow[d, "m"'] \arrow[dr, phantom, "(F)"] & \mathcal{D}(Fb,Fc)\otimes\mathcal{D}(Fa,Fb) \arrow[d, "m"] \\
\mathcal{C}(a,c) \arrow[r, "F_{ac}"'] & \mathcal{D}(Fa,Fc)
\end{tikzcd}
$$

(F) は F が $\mathcal{V}$-関手だから可換である. (λ), (γ) は λ,γ の自然性により可換である. $(\otimes)$ は $\otimes$ が関手だから可換である. $(*)$ は $-\circ f$, $-\circ Ff$ の定義より可換である. 以上によりこの図式は可換である. □

最後に, $\mathcal{C}=\mathcal{V}$ の場合は次のようになる.

命題 54. $f\colon u \nrightarrow v$ を $\mathcal{V}$ の射とするとき $f\circ -\colon [x,u]\to[x,v]$ は $[\mathrm{id}_x, \underline{f}]$ と一致し, $-\circ f\colon [v,x]\to[u,x]$ は $[\underline{f},\mathrm{id}_x]$ と一致する.

証明. 次の図式は可換である.

$$
\begin{tikzcd}
 & {[x,u]\otimes x} \arrow[rr, bend left, "\mathrm{ev}"] & & u \\
(I\otimes[x,u])\otimes x \arrow[ur, bend left, "\lambda\otimes\mathrm{id}"] \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "(f\otimes\mathrm{id})\otimes\mathrm{id}"'] \arrow[dr, phantom, "(\alpha)"] & I\otimes([x,u]\otimes x) \arrow[u, "\lambda"] \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes\mathrm{ev}"] \arrow[d, "f\otimes(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})"] \arrow[dr, phantom, "(\otimes)"] & I\otimes u \arrow[ur, "\lambda"'] \arrow[d, "f\otimes\mathrm{id}"] \arrow[r, phantom, "(41)"] & u \arrow[d, "\underline{f}"] \\
([u,v]\otimes[x,u])\otimes x \arrow[r, "\alpha"] \arrow[dr, bend right, "m\otimes\mathrm{id}"'] & {[u,v]\otimes([x,u]\otimes x)} \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes\mathrm{ev}"] \arrow[d, phantom, "(26)"] & {[u,v]\otimes u} \arrow[r, "\mathrm{ev}"] & v \\
 & {[x,v]\otimes x} \arrow[urr, bend right, "\mathrm{ev}"'] & &
\end{tikzcd}
$$

(12) $\quad (\lambda)$

よって随伴 $-\otimes x \dashv [x,-]$ により得られる次の図式も可換である.

$$
\begin{tikzcd}
I\otimes [x,u] \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "f\otimes \mathrm{id}"'] & {[x,u]} \arrow[d, "{[\mathrm{id},\underline{f}]}"] \\
{[u,v]\otimes [x,u]} \arrow[r, "m"'] & {[x,v]}
\end{tikzcd}
$$

故に $f\circ -$ の定義から $f\circ - = [\mathrm{id},\underline{f}]$ が分かる.

次の図式も可換である.

$$
\begin{tikzcd}
([v,x]\otimes I)\otimes v \arrow[r, "\rho\otimes\mathrm{id}"] & {[v,x]\otimes v} \arrow[rr, "\mathrm{ev}"] & & x \arrow[d, "\mathrm{id}"] \\
([v,x]\otimes I)\otimes u \arrow[u, "(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})\otimes\underline{f}"] \arrow[r, "\rho\otimes\mathrm{id}"] \arrow[ur, phantom, "(\otimes)"] \arrow[drr, bend right, "\alpha"'] \arrow[dd, "(\mathrm{id}\otimes f)\otimes\mathrm{id}"'] \arrow[ddr, phantom, "(\alpha)"] & {[v,x]\otimes u} \arrow[u, "\mathrm{id}\otimes\underline{f}"'] \arrow[ur, phantom, "(41)"] \arrow[d, phantom, "(V)"] & {[v,x]\otimes([u,v]\otimes u)} \arrow[ul, "\mathrm{id}\otimes\mathrm{ev}"'] \arrow[dr, phantom, "(26)"] & x \\
 & & {[v,x]\otimes(I\otimes u)} \arrow[ul, "\mathrm{id}\otimes\lambda"] \arrow[u, "\mathrm{id}\otimes(f\otimes\mathrm{id})"'] & \\
([v,x]\otimes [u,v])\otimes u \arrow[r, "m\otimes\mathrm{id}"'] \arrow[uurr, bend right, "\alpha"] & {[u,x]\otimes u} \arrow[rr, "\mathrm{ev}"'] & & x \arrow[uu, "\mathrm{id}"']
\end{tikzcd}
$$

よって随伴により得られる次の図式も可換である.

$$
\begin{tikzcd}
{[v,x]\otimes I} \arrow[r, "\rho"] & {[v,x]} \arrow[d, "{[\underline{f},\mathrm{id}]}"] \\
{[v,x]\otimes I} \arrow[u, "\mathrm{id}\otimes\mathrm{id}"] \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes f"'] & {[u,x]} \\
{[v,x]\otimes [u,v]} \arrow[r, "m"'] & {[u,x]} \arrow[u, "{[\mathrm{id},\mathrm{id}]}"']
\end{tikzcd}
$$

故に $-\circ f = [\underline{f},\mathrm{id}]$ が分かる. □

2.8 まとめ

- $-\otimes x$ の随伴射:

$$[u,v]\otimes(u\otimes x) \xrightarrow{\alpha^{-1}} ([u,v]\otimes u)\otimes x \xrightarrow{\mathrm{ev}\otimes\mathrm{id}} v\otimes x$$

- $x\otimes -$ の随伴射:

$$[u,v]\otimes(x\otimes u) \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes\gamma} [u,v]\otimes(u\otimes x) \xrightarrow{\alpha^{-1}} ([u,v]\otimes u)\otimes x \xrightarrow{\mathrm{ev}\otimes\mathrm{id}} v\otimes x \xrightarrow{\gamma} x\otimes v$$

- $\mathcal{C}(s,-)$ の随伴射:

$$\mathcal{C}(a,b)\otimes\mathcal{C}(s,a)\xrightarrow{m}\mathcal{C}(s,b)$$

- $\mathcal{C}(-,s)$ の随伴射:

$$\mathcal{C}(b,a)\otimes\mathcal{C}(a,s)\xrightarrow{\gamma}\mathcal{C}(a,s)\otimes\mathcal{C}(b,a)\xrightarrow{m}\mathcal{C}(b,s)$$

- $f\circ-$ と $-\circ f$ が満たす図式:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}(c,a) \arrow[d, "\lambda^{-1}"'] \arrow[rrd, "f\circ-"] & & \\
I\otimes\mathcal{C}(c,a) \arrow[d, "f\otimes\mathrm{id}"'] & & \mathcal{C}(c,b) \\
\mathcal{C}(a,b)\otimes\mathcal{C}(c,a) \arrow[rru, "m"'] & &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathcal{C}(b,c) \arrow[d, "\rho^{-1}"'] \arrow[rrd, "-\circ f"] & & \\
\mathcal{C}(b,c)\otimes I \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes f"'] & & \mathcal{C}(a,c) \\
\mathcal{C}(b,c)\otimes\mathcal{C}(a,b) \arrow[rru, "m"'] & &
\end{tikzcd}$$

3 V-自然変換

3.1 2-category V-$\mathbf{CAT}$

定義. $\mathcal{C},\mathcal{D}$ を V-豊穣圏，$F,G\colon\mathcal{C}\to\mathcal{D}$ を V-関手とする．V-自然変換 $\theta\colon F\Rightarrow G$ とは $\mathcal{D}$ の射の族 $\theta=\{\theta_a\colon Fa\not\to Ga\}_{a\in\mathcal{C}}$ であって，任意の $a,b\in\mathcal{C}$ に対して次の図式が可換となるものである．

$$\begin{tikzcd}
& I\otimes\mathcal{C}(a,b) \arrow[r, "\theta_b\otimes F_{ab}"] & \mathcal{D}(Fb,Gb)\otimes\mathcal{D}(Fa,Fb) \arrow[dr, "m"] & \\
\mathcal{C}(a,b) \arrow[ur, "\lambda^{-1}"] \arrow[dr, "\rho^{-1}"'] & & & \mathcal{D}(Fa,Gb) \\
& \mathcal{C}(a,b)\otimes I \arrow[r, "G_{ab}\otimes\theta_a"'] & \mathcal{D}(Ga,Gb)\otimes\mathcal{D}(Fa,Ga) \arrow[ur, "m"'] &
\end{tikzcd}$$

またこのとき $\theta_a\colon Fa\not\to Ga$ は $a\in\mathcal{C}$ について自然であるという．

θ が V-自然変換のとき，$\mathcal{C}$ の射 $f\colon a\not\to b$ に対して $\theta_b\circ Ff=Gf\circ\theta_a$ である．即ち $\mathcal{D}$ の射の図式

$$\begin{tikzcd}
Fa \arrow[r, "\theta_a", "V"'] \arrow[d, "Ff"'] & Ga \arrow[d, "Gf"] \\
Fb \arrow[r, "V", "\theta_b"'] & Gb
\end{tikzcd}$$

が可換となる．(逆にこの図式が可換になるからといって θ が V-自然変換になるとは限らない．)

命題 55. $F, G\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ を V-関手とする．$\theta_a\colon Fa \nrightarrow Ga$ が $a \in \mathcal{C}$ について自然
$\Longleftrightarrow$ 任意の $a, b \in \mathcal{C}$ に対して，次の図式が可換となる．

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{D}(Fa,Fb) \arrow[dr, "\theta_b \circ -"] & \\
\mathcal{C}(a,b) \arrow[ur, "F_{ab}"] \arrow[dr, "G_{ab}"'] \arrow[rr, phantom, "(\Diamond)"] & & \mathcal{D}(Fa,Gb) \\
 & \mathcal{D}(Ga,Gb) \arrow[ur, "- \circ \theta_a"'] &
\end{tikzcd}$$

証明. 次の図式を考える．

$$\begin{tikzcd}
 & I \otimes \mathcal{C}(a,b) \arrow[r, "\mathrm{id} \otimes F"] \arrow[dr, phantom, "(\lambda)"] & I \otimes \mathcal{D}(Fa,Fb) \arrow[r, "\theta_b \otimes \mathrm{id}"] \arrow[dr, phantom, "(*)"] & \mathcal{D}(Fb,Gb) \otimes \mathcal{D}(Fa,Fb) \arrow[ddr, "m"] & \\
 & & \mathcal{D}(Fa,Fb) \arrow[u, "\lambda^{-1}"] \arrow[drr, "\theta_b \circ -"] & & \\
\mathcal{C}(a,b) \arrow[uur, "\lambda^{-1}"] \arrow[urr, "F_{ab}"] \arrow[drr, "G_{ab}"'] \arrow[ddr, "\rho^{-1}"'] & & (\Diamond) & & \mathcal{D}(Fa,Gb) \\
 & & \mathcal{D}(Ga,Gb) \arrow[urr, "- \circ \theta_a"'] \arrow[d, "\rho^{-1}"'] & & \\
 & \mathcal{C}(a,b) \otimes I \arrow[r, "G \otimes \mathrm{id}"'] \arrow[ur, phantom, "(\rho)"] & \mathcal{D}(Ga,Gb) \otimes I \arrow[r, "\mathrm{id} \otimes \theta_a"'] \arrow[ur, phantom, "(*)"] & \mathcal{D}(Ga,Gb) \otimes \mathcal{D}(Fa,Ga) \arrow[uur, "m"'] &
\end{tikzcd}$$

(λ)，(ρ) は λ, ρ の自然性から可換である．$(*)$ は $- \circ \theta_a$，$\theta_b \circ -$ の定義から可換である．従って

$$\theta_a \text{ が } a \in \mathcal{C} \text{ について自然 } (= \text{一番外側が可換}) \Longleftrightarrow (\Diamond) \text{ が可換}$$

が分かる． □

例 56. $V = \mathbf{Cat}$ の場合を考える．$\mathcal{C}, \mathcal{D}$ を $\mathbf{Cat}$-豊穣圏，$F, G\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ を $\mathbf{Cat}$-関手とする (即ち $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ は strict 2-category で F, G は strict 2-functor である)．この場合 $\mathcal{D}$ の射とは $\mathcal{D}$ の 1-morphism のことであるから，$\mathbf{Cat}$-自然変換 $\theta\colon F \Rightarrow G$ とは 1-morphism の

族 $\theta = \{\theta_a \colon Fa \to Ga\}_{a \in \mathcal{C}}$ であって

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{D}(Fa,Fb) \arrow[dr, "\theta_b\circ-"] & \\
\mathcal{C}(a,b) \arrow[ur, "F_{ab}"] \arrow[dr, "G_{ab}"'] & & \mathcal{D}(Fa,Gb) \\
 & \mathcal{D}(Ga,Gb) \arrow[ur, "-\circ\theta_a"'] &
\end{tikzcd}$$

が可換となるものである．つまり **Cat**-自然変換とは strict natural transformation である． □

例 57. $F, G \colon \mathcal{I} \to \mathcal{C}$ を V-関手として $\theta \colon F \Rightarrow G$ を V-自然変換とする．この場合 V-自然変換の条件は次の図式の可換性になる．

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{C}(F(*),F(*)) \arrow[dr, "\theta_*\circ-"] & \\
I \arrow[ur, "j_{F(*)}"] \arrow[dr, "j_{G(*)}"'] & & \mathcal{C}(F(*),G(*)) \\
 & \mathcal{C}(G(*),G(*)) \arrow[ur, "-\circ\theta_*"'] &
\end{tikzcd}$$

命題 44 よりこれは $\theta_* \circ \mathrm{id} = \mathrm{id} \circ \theta_*$ を意味するから，常に成り立つ．故にこの場合の V-自然変換とは $\mathcal{C}$ の射 $F(*) \nrightarrow G(*)$ のことである． □

通常の圏の場合と同様にして，V-自然変換により V-**CAT** を strict 2-category にすることができる (定理 63)．そのために以下の命題を証明する．

命題 58. $F, G, H \colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ を V-関手として $\theta_a \colon Fa \nrightarrow Ga$，$\tau_a \colon Ga \nrightarrow Ha$ は $a \in \mathcal{C}$ について自然であるとする．このとき $\tau_a \circ \theta_a$ も a について自然である．

証明．命題 45，46，55 により次の図式が可換となるからである．

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{D}(Fa,Fb) \arrow[dr, "\theta_b\circ-"] \arrow[dd, phantom, "(55)"] \arrow[rrdd, bend left, "(\tau_b\circ\theta_b)\circ-"] & & \\
 & & \mathcal{D}(Fa,Gb) \arrow[dr, "\tau_b\circ-"] \arrow[dd, phantom, "(46)"] \arrow[r, phantom, "(45)"] & {} \\
\mathcal{C}(a,b) \arrow[uur, "F_{ab}"] \arrow[r, "G_{ab}"'] \arrow[ddr, "H_{ab}"'] & \mathcal{D}(Ga,Gb) \arrow[ur, "-\circ\theta_a"'] \arrow[dr, "\tau_b\circ-"] \arrow[dd, phantom, "(55)"] & & \mathcal{D}(Fa,Hb) \\
 & & \mathcal{D}(Ga,Hb) \arrow[ur, "-\circ\theta_a"'] \arrow[r, phantom, "(45)"] & {} \\
 & \mathcal{D}(Ha,Hb) \arrow[ur, "-\circ\tau_a"'] \arrow[rruu, bend right, "-\circ(\tau_a\circ\theta_a)"'] & &
\end{tikzcd}$$

□

よって V-自然変換 $\theta\colon F \Rightarrow G,\ \tau\colon G \Rightarrow H$ が与えられたとき，垂直合成 $\tau * \theta\colon F \Rightarrow H$ を $(\tau * \theta)_a := \tau_a \circ \theta_a$ により定義することができる．

命題 59. $\mathcal{C}$ の恒等射 $\mathrm{id}_a\colon a \not\rightarrow a$ は $a \in \mathcal{C}$ について自然である．

証明. V-豊穣圏の定義より次の図式が可換だからである．

$$\begin{tikzcd}
 & I \otimes \mathcal{C}(a,b) \arrow[r, "j_b \otimes \mathrm{id}"] & \mathcal{C}(b,b) \otimes \mathcal{C}(a,b) \arrow[dr, "m"] & \\
\mathcal{C}(a,b) \arrow[ur, "\lambda^{-1}"] \arrow[rrr, "\mathrm{id}"] \arrow[dr, "\rho^{-1}"'] & & & \mathcal{C}(a,b) \\
 & \mathcal{C}(a,b) \otimes I \arrow[r, "\mathrm{id} \otimes j_a"'] & \mathcal{C}(a,b) \otimes \mathcal{C}(a,a) \arrow[ur, "m"'] &
\end{tikzcd}$$

□

命題 60. $F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B},\ G, H\colon \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ を V-関手とする．$\mathcal{C}$ の射 $\theta_b\colon Gb \not\rightarrow Hb$ が $b \in \mathcal{B}$ について自然ならば，$\theta_{Fa}\colon GFa \not\rightarrow HFa$ も $a \in \mathcal{A}$ について自然である．

証明. 次の図式から分かる．

$$\begin{tikzcd}
 & & \mathcal{C}(GFa, GFb) \arrow[dr, "\theta_{Fb} \circ -"] & \\
\mathcal{A}(a,b) \arrow[urr, bend left, "(GF)_{ab}"] \arrow[drr, bend right, "(HF)_{ab}"'] \arrow[r, "F_{ab}"] & \mathcal{B}(Fa, Fb) \arrow[ur, "G_{FaFb}"'] \arrow[dr, "H_{FaFb}"] & & \mathcal{C}(GFa, HFb) \\
 & & \mathcal{C}(HFa, HFb) \arrow[ur, "- \circ \theta_{Fa}"'] &
\end{tikzcd}$$

□

故に V-関手 $F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ と V-自然変換 $\theta = \{\theta_b\colon Gb \not\rightarrow Hb\}_{b \in \mathcal{B}}\colon G \Rightarrow H$ が与えられたとき，V-自然変換 $\theta_F\colon GF \Rightarrow HF$ を $(\theta_F)_a := \theta_{Fa}$ により定めることができる．

命題 61. $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ を V-関手とするとき $\mathrm{id}_{Fa}\colon Fa \not\rightarrow Fa$ は $a \in \mathcal{C}$ について自然である．（よって V-自然変換 $\mathrm{id}_F\colon F \Rightarrow F$ を定める．）

証明. 命題 59, 60 より明らか． □

上で定義した垂直合成とこの id_F により，$\mathcal{C}$ から $\mathcal{D}$ への V-関手全体 $\mathrm{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ は (通常の) 圏となる．また圏 $\mathrm{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ における同型射を V-自然同型という．

命題 62. $F, G\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, $H\colon \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ を V-関手とする．$\mathcal{B}$ の射 $\theta_a\colon Fa \nrightarrow Ga$ が $a \in \mathcal{A}$ について自然ならば，$H(\theta_a)\colon HFa \nrightarrow HGa$ も $a \in \mathcal{A}$ について自然である．

証明. 命題 52，53，55 により次の図式が可換となるからである．

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{B}(Fa,Fb) \arrow[r, "H_{FaFb}"] \arrow[dr, "\theta_b\circ-"] & \mathcal{C}(HFa,HFb) \arrow[dr, "H\theta_b\circ-"] \arrow[d, phantom, "(52)"] & \\
\mathcal{A}(a,b) \arrow[ur, "F_{ab}"] \arrow[dr, "G_{ab}"'] & (55) & \mathcal{B}(Fa,Gb) \arrow[r, "H_{FaGb}"] & \mathcal{C}(HFa,HGb) \\
 & \mathcal{B}(Ga,Gb) \arrow[r, "H_{GaGb}"'] \arrow[ur, "-\circ\theta_a"'] & \mathcal{C}(HGa,HGb) \arrow[ur, "-\circ H\theta_a"'] \arrow[u, phantom, "(53)"] &
\end{tikzcd}$$

□

故に V-自然変換 $\theta\colon F \Rightarrow G$ に対して V-自然変換 $H\theta\colon HF \Rightarrow HG$ を $(H\theta)_a := H(\theta_a)$ により定めることができる．

以上により，**CAT** の場合と同様に次の定理が証明できる．

定理 63. V-**CAT** は $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in V$-**CAT** に対して V-$\mathbf{CAT}(\mathcal{A},\mathcal{B}) := \mathrm{Fun}(\mathcal{A},\mathcal{B})$ と定めることにより strict 2-category となる．

証明. $\theta\colon F \Rightarrow G\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ と $\sigma\colon K \Rightarrow L\colon \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ を V-自然変換とする．

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A} \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, bend right, "G"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\theta"] & \mathcal{B} \arrow[r, bend left, "K"] \arrow[r, bend right, "L"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\sigma"] & \mathcal{C}
\end{tikzcd}$$

θ と σ の水平合成 $\sigma \bullet \theta$ を $\sigma \bullet \theta := \sigma_G * K\theta$ で定義する．これは関手

$$\bullet\colon V\text{-}\mathbf{CAT}(\mathcal{B},\mathcal{C}) \times V\text{-}\mathbf{CAT}(\mathcal{A},\mathcal{B}) \to V\text{-}\mathbf{CAT}(\mathcal{A},\mathcal{C})$$

を与える．

∵) まず $\bullet$ が合成と交換することを示す．即ち

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A} \arrow[r, bend left=60, "F"] \arrow[r, "G" description] \arrow[r, bend right=60, "H"'] \arrow[r, phantom, shift left=3, "\theta\Downarrow"] \arrow[r, phantom, shift right=3, "\gamma\Downarrow"] & \mathcal{B} \arrow[r, bend left=60, "K"] \arrow[r, "L" description] \arrow[r, bend right=60, "M"'] \arrow[r, phantom, shift left=3, "\sigma\Downarrow"] \arrow[r, phantom, shift right=3, "\tau\Downarrow"] & \mathcal{C}
\end{tikzcd}$$

において $(\tau * \sigma) \bullet (\gamma * \theta) = (\sigma \bullet \theta) * (\tau \bullet \gamma)$ を示す．まず $a \in \mathcal{A}$ に対して

$$\begin{aligned}
\big((\tau * \sigma) \bullet (\gamma * \theta)\big)_a &= (\tau * \sigma)_{Ha} \circ K(\gamma * \theta)_a \\
&= (\tau_{Ha} \circ \sigma_{Ha}) \circ (K\gamma_a \circ K\theta_a) \\
\big((\tau \bullet \gamma) * (\sigma \bullet \theta)\big)_a &= (\tau \bullet \gamma)_a \circ (\sigma \bullet \theta)_a \\
&= (\tau_{Ha} \circ L\gamma_a) \circ (\sigma_{Ga} \circ K\theta_a)
\end{aligned}$$

だから $\sigma_{Ha} \circ K\gamma_a = L\gamma_a \circ \sigma_{Ga}$ を示せばよい．$\sigma\colon K \Rightarrow L$ が V-自然変換だから

$$\begin{tikzcd}
& I \otimes \mathcal{B}(Ga, Ha) \arrow[r, "\sigma_{Ha} \otimes K"] & \mathcal{C}(KHa, LHa) \otimes \mathcal{C}(KGa, KHa) \arrow[dr, "m"] & \\
\mathcal{B}(Ga, Ha) \arrow[ur, "\lambda^{-1}"] \arrow[dr, "\rho^{-1}"'] & & & \mathcal{C}(KGa, LHa) \\
& \mathcal{B}(Ga, Ha) \otimes I \arrow[r, "L \otimes \sigma_{Ga}"'] & \mathcal{C}(LGa, LHa) \otimes \mathcal{C}(KGa, LGa) \arrow[ur, "m"'] &
\end{tikzcd}$$

が可換である．よって $\mathcal{B}$ の射 $\gamma_a\colon Ga \nrightarrow Ha$ を考えれば $\sigma_{Ha} \circ K\gamma_a = L\gamma_a \circ \sigma_{Ga}$ を得る．

次に恒等射について示す．即ち $\mathrm{id}_K \bullet \mathrm{id}_F = \mathrm{id}_{KF}$ を示す．これは

$$(\mathrm{id}_K \bullet \mathrm{id}_F)_a = \mathrm{id}_{KFa} \circ K(\mathrm{id}_{Fa}) = \mathrm{id}_{KFa}$$

から分かる．

結合律が成り立つことを示す．即ち，次の図式が可換であることを示す．

$$\begin{tikzcd}
& V\text{-}\mathbf{CAT}(\mathcal{C}, \mathcal{D}) \times V\text{-}\mathbf{CAT}(\mathcal{B}, \mathcal{C}) \times V\text{-}\mathbf{CAT}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \arrow[dl, "\bullet \times \mathrm{id}"'] \arrow[dr, "\mathrm{id} \times \bullet"] & \\
V\text{-}\mathbf{CAT}(\mathcal{B}, \mathcal{D}) \times V\text{-}\mathbf{CAT}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \arrow[dr, "\bullet"'] & & V\text{-}\mathbf{CAT}(\mathcal{C}, \mathcal{D}) \times V\text{-}\mathbf{CAT}(\mathcal{A}, \mathcal{C}) \arrow[dl, "\bullet"] \\
& V\text{-}\mathbf{CAT}(\mathcal{A}, \mathcal{D}) &
\end{tikzcd}$$

そのために次の状況を考える．

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A} \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, bend right, "G"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\theta"] & \mathcal{B} \arrow[r, bend left, "K"] \arrow[r, bend right, "L"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\sigma"] & \mathcal{C} \arrow[r, bend left, "P"] \arrow[r, bend right, "Q"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\tau"] & \mathcal{D}
\end{tikzcd}$$

$a \in \mathcal{A}$ に対して

$$
\begin{aligned}
((\tau \bullet \sigma) \bullet \theta)_a &= (\tau \bullet \sigma)_{Ga} \circ PK\theta_a = (\tau_{LGa} \circ P\sigma_{Ga}) \circ PK\theta_a \\
(\tau \bullet (\sigma \bullet \theta))_a &= \tau_{LGa} \circ P(\sigma \bullet \theta)_a = \tau_{LGa} \circ P(\sigma_{Ga} \circ K\theta_a)
\end{aligned}
$$

だから $(\tau \bullet \sigma) \bullet \theta = \tau \bullet (\sigma \bullet \theta)$ となり結合律が成り立つことが分かる．

単位元についても同様に

$$
\begin{aligned}
(\sigma \bullet \mathrm{id}_F)_a &= \sigma_{Fa} \circ K(\mathrm{id}_{Fa}) = \sigma_{Fa} \\
(\mathrm{id}_K \bullet \theta)_a &= \mathrm{id}_{KGa} \circ K\theta_a = K\theta_a
\end{aligned}
$$

となって成り立つ． □

$U := V\text{-}\mathbf{CAT}(\mathcal{I}, -) \colon V\text{-}\mathbf{CAT} \to \mathbf{CAT}$ と定める．$V\text{-}\mathbf{CAT}$ が strict 2-category だから U は strict 2-functor である．$\mathcal{C}$ を V-豊穣圏とすると，定義より $U(\mathcal{C}) = \mathrm{Fun}(\mathcal{I}, \mathcal{C})$ である．今 $\mathrm{Ob}(\mathcal{I}) = \{*\}$ だったから，$F \in U(\mathcal{C})$ に対して対象 $F(*) \in \mathcal{C}$ が定まる．逆に対象 $a \in \mathcal{C}$ に対して，$F(*) = a$ となる $F \in U(\mathcal{C})$ が一意に存在する．

$\because$) まず $F(*) := a$，$F_{**} := j_a$ と定義すれば，次の図式は可換である．

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{I}(*,*) \otimes \mathcal{I}(*,*) \arrow[r, "m"] \arrow[d, "F_{**} \otimes F_{**}"'] & \mathcal{I}(*,*) \arrow[d, "F_{**}"] \\
\mathcal{C}(a,a) \otimes \mathcal{C}(a,a) \arrow[r, "m"'] & \mathcal{C}(a,a)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
I \arrow[r, "j_*"] \arrow[dr, "j_{F*}"'] & \mathcal{I}(*,*) \arrow[d, "F_{**}"] \\
& \mathcal{C}(a,a)
\end{tikzcd}
$$

実際右の図式は明らかに可換で，左の図式は次の図式により可換である．

$$
\begin{tikzcd}
I \otimes I \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "\mathrm{id} \otimes j_a"'] & I \arrow[d, "j_a"] \\
I \otimes \mathcal{C}(a,a) \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "j_a \otimes \mathrm{id}"'] & \mathcal{C}(a,a) \\
\mathcal{C}(a,a) \otimes \mathcal{C}(a,a) \arrow[ur, "m"'] &
\end{tikzcd}
$$

従ってこの F は V-関手 $F \colon \mathcal{I} \to \mathcal{C}$ を定める．故に $F(*) = a$ となる $F \in U(\mathcal{C})$ は存在する．

逆に $F \in U(\mathcal{C})$ が $F(*) = a$ を満たすとする．このとき $F_{**} \colon \mathcal{I}(*,*) \to \mathcal{C}(a,a)$ は

V の射であり，V-関手の条件から次の図式は可換である．

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "j_*"] \arrow[dr, "j_a"'] & \mathcal{I}(*,*) \arrow[d, "F_{**}"] \\ & \mathcal{C}(a,a) \end{tikzcd}$$

$\mathcal{I}$ の定義から $\mathcal{I}(*,*) = I$，$j_* = \mathrm{id}_I$ である．故に $F_{**} = j_a$ でなければならない．よって，$a \in \mathcal{C}$ に対して $F(*) = a$ となる V-関手 $F\colon \mathcal{I} \to \mathcal{C}$ は唯 1 つであることがわかる．

従って $\mathrm{Ob}(U(\mathcal{C})) = \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ とみなすことができる．

次に Hom については例 57 より，$a, b \in U(\mathcal{C})$ に対して

$$\mathrm{Hom}_{U(\mathcal{C})}(a,b) = \{f\colon a \nrightarrow\!\!\!\rightarrow b\} = \mathrm{Hom}_V(I, \mathcal{C}(a,b))$$

である．即ち $U(\mathcal{C})$ は $\mathcal{C}$ の underlying category である．

V-関手 $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ に対して関手 $U(F)\colon U(\mathcal{C}) \to U(\mathcal{D})$ を F の underlying functor という．$U(F)$ は次のような関手である．

- $a \in U(\mathcal{C})$ に対して $U(F)(a) := Fa$.
- $a, b \in U(\mathcal{C})$ に対して $U(F)(f) := F(f) = F_{ab} \circ f$.

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_{U(\mathcal{C})}(a,b) \arrow[r, "U(F)"] & \mathrm{Hom}_{U(\mathcal{D})}(Fa,Fb) \\ \rotatebox{90}{$\in$} & \rotatebox{90}{$\in$} \\ \left(I \xrightarrow{f} \mathcal{C}(a,b)\right) \arrow[r, mapsto] & \left(I \xrightarrow{f} \mathcal{C}(a,b) \xrightarrow{F_{ab}} \mathcal{D}(Fa,Fb)\right) \end{tikzcd}$$

例 64. $\mathcal{C}$ を V-豊穣圏とすると $c \in \mathcal{C}$ に対して $\mathcal{C}(c,-)\colon \mathcal{C} \to \mathcal{V}$ は V-関手である．よってその underlying functor は $F := U(\mathcal{C}(c,-))\colon U\mathcal{C} \to U\mathcal{V}$ となる．この F は $\mathcal{C}$ の射 $f\colon a \nrightarrow\!\!\!\rightarrow b$ に対して $\mathcal{V}$ の射 $\mathcal{C}(c,f)$ を対応させる関手である．つまり $F\colon U\mathcal{C} \to V$ とみなせば $Ff = (f \circ -)\colon \mathcal{C}(c,a) \to \mathcal{C}(c,b)$ となる．従って命題 44 より

$$\begin{tikzcd} U\mathcal{C} \arrow[r, "U(\mathcal{C}(c,-))"] \arrow[dr, "\mathrm{Hom}_{U\mathcal{C}}(c,-)"'] & V \arrow[d, "\mathrm{Hom}_V(I,-)"] \\ & \mathbf{Set} \end{tikzcd}$$

は可換である．

また特別な場合として $\mathcal{C}=\mathcal{V}$, $c=x$ の場合を考える．上記の通り $\mathcal{V}$ の射 $f\colon u \not\rightarrow v$ に対して $Ff=(f\circ -)\colon [x,u]\to[x,v]$ である．故に $F\colon V\to V$ とみなせば命題 54 により $F\underline{f}=[\mathrm{id}_x,\underline{f}]$ である．故に $U(\mathcal{V}(x,-))=[x,-]\colon V\to V$ である． □

命題 65. $F,G\colon \mathcal{A}\otimes\mathcal{B}\to\mathcal{C}$ を V-関手として $a\in\mathcal{A}$, $b\in\mathcal{B}$ に対して $\theta_{ab}\colon F(a,b)\not\rightarrow G(a,b)$ を $\mathcal{C}$ の射とする．このとき θ_{ab} が $\langle a,b\rangle\in\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$ について自然
$\iff$ 各 $a\in\mathcal{A}$ に対して θ_{ab} が $b\in\mathcal{B}$ について自然かつ，各 $b\in\mathcal{B}$ に対して θ_{ab} が $a\in\mathcal{A}$ について自然.

証明. ($\Longrightarrow$) 明らか.
($\Longleftarrow$) 次の図式が可換であることから分かる.

$$
\begin{tikzcd}[column sep=tiny]
 & & \mathcal{A}(a,a')\otimes\mathcal{B}(b,b') \arrow[dl, "G(-,b')\otimes\mathrm{id}"'] \arrow[dr, "\mathrm{id}\otimes F(a,-)"] & & \\
 & \mathcal{C}(Gab',Ga'b')\otimes\mathcal{B}(b,b') \arrow[dl, "\mathrm{id}\otimes\lambda^{-1}"'] \arrow[dddr, "\mathrm{id}\otimes F(a,-)"] \arrow[rr, phantom, "(\otimes)"] & & \mathcal{A}(a,a')\otimes\mathcal{C}(Fab,Fab') \arrow[dr, "\rho^{-1}\otimes\mathrm{id}"] \arrow[dddl, "G(-,b')\otimes\mathrm{id}"'] & \\
\mathcal{C}(Gab',Ga'b')\otimes(I\otimes\mathcal{B}(b,b')) \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes(j_a\otimes\mathrm{id})"'] & & & & (\mathcal{A}(a,a')\otimes I)\otimes\mathcal{C}(Fab,Fab') \arrow[d, "(\mathrm{id}\otimes j_{b'})\otimes\mathrm{id}"] \\
\mathcal{C}(Gab',Ga'b')\otimes(\mathcal{A}(a,a)\otimes\mathcal{B}(b,b')) \arrow[dd, "\mathrm{id}\otimes G"'] \arrow[drr, "\mathrm{id}\otimes F"] \arrow[ur, phantom, "(F(a,-))"] & & & & (\mathcal{A}(a,a')\otimes\mathcal{B}(b',b'))\otimes\mathcal{C}(Fab,Fab') \arrow[dll, "G\otimes\mathrm{id}"'] \arrow[dd, "F\otimes\mathrm{id}"] \arrow[ul, phantom, "(G(-,b'))"] \\
 & & \mathcal{C}(Gab',Ga'b')\otimes\mathcal{C}(Fab,Fab') \arrow[dl, "\mathrm{id}\otimes(\theta_{ab'}\circ-)"] \arrow[dr, "(-\circ\theta_{ab'})\otimes\mathrm{id}"] & & \\
\mathcal{C}(Gab',Ga'b')\otimes\mathcal{C}(Gab,Gab') \arrow[dr, "\mathrm{id}\otimes(-\circ\theta_{ab})"] \arrow[dd, bend right, "m"'] \arrow[ur, phantom, "(\theta)"] & & & & \mathcal{C}(Fab',Fa'b')\otimes\mathcal{C}(Fab,Fab') \arrow[dl, "(\theta_{a'b'}\circ-)\otimes\mathrm{id}"'] \arrow[dd, bend left, "m"] \arrow[ul, phantom, "(\theta)"] \\
 & \mathcal{C}(Gab',Ga'b')\otimes\mathcal{C}(Fab,Gab') \arrow[dr, "m"] \arrow[d, phantom, "(48)"] & & \mathcal{C}(Fab',Ga'b')\otimes\mathcal{C}(Fab,Fab') \arrow[dl, "m"'] \arrow[d, phantom, "(49)"] & \\
\mathcal{C}(Gab,Ga'b') \arrow[rr, "-\circ\theta_{ab}"'] & {} & \mathcal{C}(Fab,Ga'b') \arrow[u, phantom, "(50)"] & {} & \mathcal{C}(Fab,Fa'b') \arrow[ll, "\theta_{a'b'}\circ-"]
\end{tikzcd}
$$

□

命題 66. V-自然変換 $\theta\colon F\Rightarrow G\colon\mathcal{C}\to\mathcal{D}$ に対して

$$\theta \text{ が } V\text{-自然同型} \iff \text{各 } a\in\mathcal{C} \text{ について } \theta_a\colon Fa\not\rightarrow Ga \text{ が同型.}$$

証明. ($\Longrightarrow$) θ が V-自然同型だとすると，ある $\sigma\colon G\Rightarrow F$ が存在して $\sigma*\theta=\mathrm{id}_F$, $\theta*\sigma=\mathrm{id}_G$ となる．このとき σ_a は θ_a の逆射である.
($\Longleftarrow$) 各 $a\in\mathcal{C}$ について θ_a が逆射 θ_a^{-1} を持つとする．θ_a^{-1} が $a\in\mathcal{C}$ について自然であ

ること，即ち次の図式が可換であることを示せばよい．(命題 47 も参照．)

$$
\begin{tikzcd}
 & & \mathcal{D}(Ga,Fb) \arrow[dr, "-\circ\theta_a"] \arrow[ddrr, bend left, "-\circ\mathrm{id}_{Ga}"] & & \\
 & \mathcal{D}(Ga,Gb) \arrow[ur, "\theta_b^{-1}\circ-"] \arrow[dr, "-\circ\theta_a"] \arrow[rr, phantom, "(46)"] & & \mathcal{D}(Fa,Fb) \arrow[dr, "-\circ\theta_a^{-1}"] \arrow[ur, phantom, "(45)"] & \\
\mathcal{C}(a,b) \arrow[ur, "G_{ab}"] \arrow[dr, "F_{ab}"'] \arrow[rr, phantom, "(\theta)"] & & \mathcal{D}(Fa,Gb) \arrow[ur, "\theta_b^{-1}\circ-"] \arrow[dr, "-\circ\theta_a^{-1}"] \arrow[rr, phantom, "(46)"] & & \mathcal{D}(Ga,Fb) \\
 & \mathcal{D}(Fa,Fb) \arrow[ur, "\theta_b\circ-"] \arrow[dr, "-\circ\theta_a^{-1}"'] \arrow[rr, phantom, "(46)"] & & \mathcal{D}(Ga,Gb) \arrow[ur, "\theta_b^{-1}\circ-"'] \arrow[dr, phantom, "(45)"] & \\
 & & \mathcal{D}(Ga,Fb) \arrow[ur, "\theta_b\circ-"'] \arrow[uurr, bend right, "\mathrm{id}_{Fb}\circ-"'] & &
\end{tikzcd}
$$

(θ) は θ が V-自然変換だから可換である．また (45) と (46) は命題 45, 46 により可換である． □

3.2 もう 1 つの自然性

この節では命題 55 の条件を参考にして，もう 1 つの「自然性」を定義する．つまり今までの $\theta_a\colon Fa \nrightarrow Ga$ のように a がドメインとコドメインに分かれている場合ではなく，片方に寄っている場合の自然性である[*8]．以下 $T\colon \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \otimes \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ を V-関手とする．

定義． $d \in \mathcal{D}$ を対象として，$a \in \mathcal{C}$ に対して $\sigma_a\colon d \nrightarrow T(a,a)$ を $\mathcal{D}$ の射とする．σ_a が $a \in \mathcal{C}$ について自然とは，任意の $a, b \in \mathcal{C}$ に対して，次の図式が可換であることをいう．

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathcal{D}(T(a,a),T(a,b)) \arrow[dr, "-\circ\sigma_a"] & \\
\mathcal{C}(a,b) \arrow[ur, "T(a,-)"] \arrow[dr, "T(-,b)"'] & & \mathcal{D}(d,T(a,b)) \\
 & \mathcal{D}(T(b,b),T(a,b)) \arrow[ur, "-\circ\sigma_b"'] &
\end{tikzcd}
$$

またこのとき $\sigma = \{\sigma_a\}_{a\in\mathcal{C}}$ を wedge という．

[*8] これを通常の自然性と区別して extranatural と呼ぶ場合もあるが，この PDF では特に区別せずどちらも「自然」と書く．

定義. $\sigma_a\colon T(a,a)\nrightarrow d$ を $\mathcal{D}$ の射とする．これを $\mathcal{D}^{\mathrm{op}}$ の射 $\sigma_a^{\mathrm{op}}\colon d\nrightarrow T^{\mathrm{op}}(a,a)$ とみなして

$$\sigma_a \text{ が } a\in\mathcal{C} \text{ について自然} \iff \sigma_a^{\mathrm{op}} \text{ が } a\in\mathcal{C}^{\mathrm{op}} \text{ について自然}$$

と定める (ここで T^{op} は V-関手 $T^{\mathrm{op}}\colon(\mathcal{C}^{\mathrm{op}})^{\mathrm{op}}\otimes\mathcal{C}^{\mathrm{op}}\to\mathcal{D}^{\mathrm{op}}$ とみなしている)．またこのとき $\sigma=\{\sigma_a\}_{a\in\mathcal{C}}$ を cowedge という．

定義より，$\sigma_a\colon T(a,a)\nrightarrow d$ が $a\in\mathcal{C}$ について自然というのは

$$\begin{tikzcd}
 & & \mathcal{D}(T(a,b),T(a,a)) \arrow[d, equal] \arrow[ddrr, "\sigma_a\circ-"] & & \\
 & (32) & \mathcal{D}^{\mathrm{op}}(T^{\mathrm{op}}(a,a),T^{\mathrm{op}}(a,b)) \arrow[dr, "-\circ\sigma_a^{\mathrm{op}}"'] & (定義) & \\
\mathcal{C}(b,a) \arrow[r, equal] \arrow[uurr, "T(a,-)"] \arrow[ddrr, "T(-,b)"'] & \mathcal{C}^{\mathrm{op}}(a,b) \arrow[ur, "T^{\mathrm{op}}(a,-)"'] \arrow[dr, "T^{\mathrm{op}}(-,b)"] & & \mathcal{D}^{\mathrm{op}}(d,T^{\mathrm{op}}(a,b)) \arrow[r, equal] & \mathcal{D}(T(a,b),d) \\
 & (32) & \mathcal{D}^{\mathrm{op}}(T^{\mathrm{op}}(b,b),T^{\mathrm{op}}(a,b)) \arrow[ur, "-\circ\sigma_b^{\mathrm{op}}"] & (定義) & \\
 & & \mathcal{D}(T(a,b),T(b,b)) \arrow[u, equal] \arrow[uurr, "\sigma_b\circ-"'] & &
\end{tikzcd}$$

の一番外側が可換ということである．

例 67. $T\colon\mathcal{I}^{\mathrm{op}}\otimes\mathcal{I}\to\mathcal{C}$ を V-関手として $c\in\mathcal{C}$ とする．$\sigma_*\colon c\nrightarrow T(*,*)$ を $\mathcal{C}$ の射とすると wedge の条件は次の図式になる．

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{C}(T(*,*),T(*,*)) \arrow[dr, "-\circ\sigma_*"] & \\
I \arrow[ur, "j_{T(*,*)}"] \arrow[dr, "j_{T(*,*)}"'] & & \mathcal{C}(c,T(*,*)) \\
 & \mathcal{C}(T(*,*),T(*,*)) \arrow[ur, "-\circ\sigma_*"'] &
\end{tikzcd}$$

この図式は常に可換である．故にこの場合 $\mathcal{C}$ の射 $\sigma_*\colon c\nrightarrow T(*,*)$ は常に $*\in\mathcal{I}$ について自然である．同様にして $\mathcal{C}$ の射 $\sigma_*\colon T(*,*)\nrightarrow c$ も $*\in\mathcal{I}$ について自然である． $\square$

命題 68. $F\colon\mathcal{A}\to\mathcal{B}$, $T\colon\mathcal{B}^{\mathrm{op}}\otimes\mathcal{B}\to\mathcal{C}$ を V-関手とする．$\mathcal{C}$ の射 $\sigma_b\colon c\nrightarrow T(b,b)$ は $b\in\mathcal{B}$ について自然とする．このとき $\sigma_{Fa}\colon c\nrightarrow T(Fa,Fa)$ は $a\in\mathcal{A}$ について自然である．

証明. 次の図式から分かる.

$$\begin{tikzcd}
 & & \mathcal{C}(T(Fa,Fa),T(Fa,Fb)) \arrow[dr, "-\circ\sigma_{Fa}"] & \\
\mathcal{A}(a,b) \arrow[r, "F_{ab}"] \arrow[urr, bend left, "{T(Fa,F-)}"] \arrow[drr, bend right, "{T(F-,Fb)}"'] & \mathcal{B}(Fa,Fb) \arrow[ur, "{T(Fa,-)}"] \arrow[dr, "{T(-,Fb)}"'] & & \mathcal{C}(c,T(Fa,Fb)) \\
 & & \mathcal{C}(T(Fb,Fb),T(Fa,Fb)) \arrow[ur, "-\circ\sigma_{Fb}"'] &
\end{tikzcd}$$

□

命題 **69.** $T\colon \mathcal{A}^{\mathrm{op}} \otimes \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, $F\colon \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ を V-関手とする. $\mathcal{B}$ の射 $\sigma_a\colon b \nrightarrow T(a,a)$ は $a \in \mathcal{A}$ について自然とする. このとき $F\sigma_a\colon Fb \nrightarrow FT(a,a)$ は $a \in \mathcal{A}$ について自然である.

証明. $a, c \in \mathcal{A}$ に対して次の図式が可換であることを示せばよい.

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{B}(T(a,a),T(a,c)) \arrow[rr, "F"] \arrow[dr, "-\circ\sigma_a"] & & \mathcal{C}(FT(a,a),FT(a,c)) \arrow[dr, "-\circ F\sigma_a"] \arrow[d, phantom, "(53)"] & \\
\mathcal{A}(a,c) \arrow[ur, "{T(a,-)}"] \arrow[dr, "{T(-,c)}"'] \arrow[rr, phantom, "(\sigma)"] & & \mathcal{B}(b,T(a,c)) \arrow[rr, "F"] & {} & \mathcal{C}(Fb,FT(a,c)) \\
 & \mathcal{B}(T(c,c),T(a,c)) \arrow[rr, "F"'] \arrow[ur, "-\circ\sigma_c"'] & & \mathcal{C}(FT(c,c),FT(a,c)) \arrow[ur, "-\circ F\sigma_c"'] \arrow[u, phantom, "(53)"] &
\end{tikzcd}$$

(σ) は σ_a が a について自然だから可換である. (53) は命題 53 により可換である. □

双対を考えれば, cowedge についても同様の命題が成り立つことが分かる.

3.3 自然な射の合成について

命題 **70.** $T\colon \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \otimes \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ を V-関手とする. $f\colon d \nrightarrow d'$ と $\sigma_a\colon d' \nrightarrow T(a,a)$ を $\mathcal{D}$ の射とするとき, σ_a が $a \in \mathcal{C}$ について自然であれば合成 $d \overset{f}{\nrightarrow} d' \overset{\sigma_a}{\nrightarrow} T(a,a)$ も a について自然である.

証明. 命題 45 と次の図式により明らか.

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathcal{D}(T(a,a),T(a,b)) \arrow[dr, "-\circ\sigma_a"] \arrow[drr, bend left, "-\circ(\sigma_a\circ f)"] & & \\
\mathcal{C}(a,b) \arrow[ur, "{T(a,-)}"] \arrow[dr, "{T(-,b)}"'] & & \mathcal{D}(d',T(a,b)) \arrow[r, "-\circ f"] & \mathcal{D}(d,T(b,a)) \\
 & \mathcal{D}(T(b,b),T(a,b)) \arrow[ur, "-\circ\sigma_b"'] \arrow[urr, bend right, "-\circ(\sigma_b\circ f)"'] & &
\end{tikzcd}
$$

□

命題 71. $S,T\colon \mathcal{C}^{\mathrm{op}}\otimes\mathcal{C}\to\mathcal{D}$ を V-関手として，$\sigma_a\colon d \xrightarrow[V]{} S(a,a)$ が $a\in\mathcal{C}$ について自然，$\theta_{ab}\colon S(a,b)\xrightarrow[V]{} T(a,b)$ が $a,b\in\mathcal{C}$ について自然であるとする．このとき，これらの合成 $d \xrightarrow[V]{\sigma_a} S(a,a) \xrightarrow[V]{\theta_{aa}} T(a,a)$ も $a\in\mathcal{C}$ について自然である.

証明. 次の図式により，a について自然であることが分かる.

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathcal{D}(T(a,a),T(a,b)) \arrow[dr, "-\circ\theta_{aa}"] \arrow[dd, phantom, "(\theta)"] & & \\
 & & \mathcal{D}(S(a,a),T(a,b)) \arrow[dddr, "-\circ\sigma_a"] & \\
 & \mathcal{D}(S(a,a),S(a,b)) \arrow[ur, "\theta_{ab}\circ-"'] \arrow[ddr, "-\circ\sigma_a"] \arrow[r, phantom, "(46)"] & {} & \\
 & & & \\
\mathcal{C}(a,b) \arrow[uuuur, "{T(a,-)}"] \arrow[uur, "{S(a,-)}"'] \arrow[ddr, "{S(-,b)}"] \arrow[ddddr, "{T(-,b)}"'] \arrow[r, phantom, "(\sigma)"] & {} & \mathcal{D}(d,S(a,b)) \arrow[r, "\theta_{ab}\circ-"] & \mathcal{D}(d,T(a,b)) \\
 & & & \\
 & \mathcal{D}(S(b,b),S(a,b)) \arrow[uur, "-\circ\sigma_b"'] \arrow[dr, "\theta_{ab}\circ-"] \arrow[r, phantom, "(46)"] \arrow[dd, phantom, "(\theta)"] & {} & \\
 & & \mathcal{D}(S(b,b),T(a,b)) \arrow[uuur, "-\circ\sigma_b"'] & \\
 & \mathcal{D}(T(b,b),T(a,b)) \arrow[ur, "-\circ\theta_{bb}"'] & &
\end{tikzcd}
$$

□

命題 72. $S\colon \mathcal{C}^{\mathrm{op}}\otimes\mathcal{C}\otimes\mathcal{C}^{\mathrm{op}}\otimes\mathcal{C}\to\mathcal{D}$，$T\colon \mathcal{C}^{\mathrm{op}}\otimes\mathcal{C}\to\mathcal{D}$ を V-関手とする．$\sigma_{ab}\colon x\xrightarrow[V]{} S(a,a,b,b)$，$\tau_{abc}\colon S(a,b,b,c)\xrightarrow[V]{} T(a,c)$ を $\mathcal{D}$ の射とする．σ_{ab} は a,b について自然で，τ_{abc} は a,b,c について自然とする．このとき $x\xrightarrow[V]{\sigma_{aa}} S(a,a,a,a)\xrightarrow[V]{\tau_{aaa}} T(a,a)$ は a について自然である.

証明. 次の図式により，a について自然であることが分かる．

$$
\begin{tikzcd}
 & & \mathcal{D}(T(a,a),T(a,b)) \arrow[dr, "-\circ\tau_{aaa}"] & & & \\
 & (\tau) & & \mathcal{D}(S(a,a,a,a),T(a,b)) \arrow[ddddrr, "-\circ\sigma_{aa}"] & & \\
 & & \mathcal{D}(S(a,a,a,a),S(a,a,a,b)) \arrow[ur, "\tau_{aab}\circ-"'] \arrow[dr, "-\circ\sigma_{aa}"] & & (46) & \\
 & (\sigma) & & \mathcal{D}(x,S(a,a,a,b)) \arrow[ddrr, "\tau_{aab}\circ-"] & & \\
 & & \mathcal{D}(S(a,a,b,b),S(a,a,a,b)) \arrow[ur, "-\circ\sigma_{ab}"'] \arrow[dr, "\tau_{aab}\circ-"] & & (46) & \\
\mathcal{C}(a,b) \arrow[uuuuurr, "T(a,-)"] \arrow[uuurr, "S(a,a,a,-)"] \arrow[urr, "S(a,a,-,b)"] \arrow[drr, "S(a,-,b,b)"'] \arrow[dddrr, "S(-,b,b,b)"'] \arrow[dddddrr, "T(-,b)"'] & (\tau) & & \mathcal{D}(S(a,a,b,b),T(a,b)) \arrow[rr, "-\circ\sigma_{ab}"] & & \mathcal{D}(x,T(a,b)) \\
 & & \mathcal{D}(S(a,a,b,b),S(a,b,b,b)) \arrow[ur, "\tau_{abb}\circ-"'] \arrow[dr, "-\circ\sigma_{ab}"] & & (46) & \\
 & (\sigma) & & \mathcal{D}(x,S(a,b,b,b)) \arrow[uurr, "\tau_{abb}\circ-"'] & & \\
 & & \mathcal{D}(S(b,b,b,b),S(a,b,b,b)) \arrow[ur, "-\circ\sigma_{bb}"'] \arrow[dr, "\tau_{abb}\circ-"] & & (46) & \\
 & (\tau) & & \mathcal{D}(S(b,b,b,b),T(a,b)) \arrow[uuuurr, "-\circ\sigma_{bb}"'] & & \\
 & & \mathcal{D}(T(b,b),T(a,b)) \arrow[ur, "-\circ\tau_{bbb}"'] & & &
\end{tikzcd}
$$

□

命題 73. $F, G\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, $T\colon \mathcal{C} \otimes \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \otimes \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ を V-関手とする．$\sigma_{ab}\colon Fa \not\xrightarrow{V} T(a,b,b)$, $\tau_{ab}\colon T(a,a,b) \not\xrightarrow{V} Gb$ を $\mathcal{D}$ の射とする．σ_{ab}, τ_{ab} は a, b について自然であるとする．このとき $Fa \xrightarrow[V]{\sigma_{aa}} T(a,a,a) \xrightarrow[V]{\tau_{aa}} Ga$ は a について自然である．

証明．次の図式により，a について自然であることが分かる．

$$
\begin{tikzcd}
 & & \mathcal{D}(Fa,Fb) \arrow[dr, "\sigma_{bb}\circ-"] & & & \\
 & (\sigma) & & \mathcal{D}(Fa,T(b,b,b)) \arrow[dddrr, "\tau_{bb}\circ-"] & & \\
 & & \mathcal{D}(T(a,b,b),T(b,b,b)) \arrow[ur, "-\circ\sigma_{ab}"'] \arrow[dr, "\tau_{bb}\circ-"] & & (46) & \\
 & (\tau) & & \mathcal{D}(T(a,b,b),Gb) \arrow[drr, "-\circ\sigma_{ab}"] & & \\
\mathcal{C}(a,b) \arrow[uuuurr, "F"] \arrow[uurr, "{T(-,b,b)}"] \arrow[rr, "{T(a,-,b)}"] \arrow[ddrr, "{T(a,a,-)}"'] \arrow[ddddrr, "G"'] & & \mathcal{D}(T(a,b,b),T(a,a,b)) \arrow[ur, "\tau_{ab}\circ-"'] \arrow[dr, "-\circ\sigma_{ab}"] & & (46) & \mathcal{D}(Fa,Gb) \\
 & (\sigma) & & \mathcal{D}(Fa,T(a,a,b)) \arrow[urr, "\tau_{ab}\circ-"'] & & \\
 & & \mathcal{D}(T(a,a,a),T(a,a,b)) \arrow[ur, "-\circ\sigma_{aa}"'] \arrow[dr, "\tau_{ab}\circ-"] & & (46) & \\
 & (\tau) & & \mathcal{D}(T(a,a,a),Gb) \arrow[uuurr, "-\circ\sigma_{aa}"'] & & \\
 & & \mathcal{D}(Ga,Gb) \arrow[ur, "-\circ\tau_{aa}"'] & & &
\end{tikzcd}
$$

□

3.4 V-随伴

$F, G\colon \mathcal{C} \to \mathcal{V}$ を V-関手とする．V の射の族 $\{\theta_a\colon Fa \to Ga\}_{a\in\mathcal{C}}$ を $\mathcal{V}$ の射の族と見なしたものを $\{\theta'_a\colon Fa \nrightarrow Ga\}_{a\in\mathcal{C}}$ とする．θ'_a が a について自然であるとき θ_a が a について自然であると言う事にすると，θ_a が a について自然である条件は (命題 54，55 によれば) 任意の $a, b \in \mathcal{C}$ に対して

$$
\begin{tikzcd}
 & {[Fa,Fb]} \arrow[dr, "{[\mathrm{id},\theta_b]}"] & \\
\mathcal{C}(a,b) \arrow[ur, "F_{ab}"] \arrow[dr, "G_{ab}"'] & & {[Fa,Gb]} \\
 & {[Ga,Gb]} \arrow[ur, "{[\theta_a,\mathrm{id}]}"'] &
\end{tikzcd}
$$

が可換となることである．V の射 $\sigma_a\colon d \to T(a,a)$，$\sigma_a\colon T(a,a) \to d$ についても同様とする．

定義． $\mathcal{C},\mathcal{D}$ を V-豊穣圏，$F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$，$G\colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ を V-関手とする．組 $\langle F, G\rangle$ が V-随伴とは $c \in \mathcal{C}$，$d \in \mathcal{D}$ について自然な同型

$$\varphi_{cd}\colon \mathcal{D}(Fc,d) \to \mathcal{C}(c,Gd)$$

が存在することをいう．記号では $F \dashv G\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ で表す．

$F \dashv G\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ が V-随伴のとき，φ_{cd} から全単射 $\mathrm{Hom}_{U\mathcal{D}}(Fc,d) \to \mathrm{Hom}_{U\mathcal{C}}(c,Gd)$ が得られる．これにより対応する射を随伴射という．以下の命題のように，この随伴射を取る操作は自然性を保つ．

命題 74. V-随伴 $F \dashv G\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ が成り立つとする．$H\colon \mathcal{A} \to \mathcal{C}$，$K\colon \mathcal{A} \to \mathcal{D}$ を V-関手として，$\theta_a\colon FHa \nrightarrow Ka$ を $\mathcal{D}$ の射，$\widetilde{\theta}_a\colon Ha \nrightarrow GKa$ をその随伴射とするとき

$$\theta_a \text{ が } a \in \mathcal{A} \text{ について自然} \iff \widetilde{\theta}_a \text{ が } a \in \mathcal{A} \text{ について自然}$$

証明．随伴射の定義より

$$\widetilde{\theta}_a = \bigl(I \xrightarrow{\theta_a} \mathcal{D}(FHa,Ka) \xrightarrow{\varphi_{Ha,Ka}} \mathcal{C}(Ha,GKa)\bigr)$$
$$\theta_a = \bigl(I \xrightarrow{\widetilde{\theta}_a} \mathcal{C}(Ha,GKa) \xrightarrow{\varphi^{-1}_{Ha,Ka}} \mathcal{D}(FHa,Ka)\bigr)$$

である．よって命題 66 の証明と命題 60, 71 より

$$\theta_a \text{ が } a \in \mathcal{A} \text{ について自然} \iff \widetilde{\theta}_a \text{ が } a \in \mathcal{A} \text{ について自然}$$

となる． □

命題 75. V-随伴 $F \dashv G\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ が成り立つとする．$T\colon \mathcal{A}^{\mathrm{op}} \otimes \mathcal{A} \to \mathcal{D}$ を V-関手として，$\theta_a\colon Fc \nrightarrow T(a,a)$ を $\mathcal{D}$ の射，$\widetilde{\theta}_a\colon c \nrightarrow GT(a,a)$ をその随伴射とするとき

$$\theta_a \text{ が } a \in \mathcal{A} \text{ について自然} \iff \widetilde{\theta}_a \text{ が } a \in \mathcal{A} \text{ について自然}$$

証明．命題 74 と同様． □

命題 76. $F\colon \mathcal{C} \otimes \mathcal{A} \to \mathcal{D}$，$G\colon \mathcal{A}^{\mathrm{op}} \otimes \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ を V-関手として，対象 $a \in \mathcal{A}$ に対して V-随伴 $F(-,a) \dashv G(a,-)$ が成り立つとする．この V-随伴による同型

$$\varphi_{cad}\colon \mathcal{D}(F(c,a),d) \to \mathcal{C}(c,G(a,d))$$

は $a \in \mathcal{C}$ について自然とする．$K\colon \mathcal{A} \to \mathcal{D}$ を V-関手として，$\theta_a\colon F(c,a) \not\mapsto Ka$ を $\mathcal{D}$ の射，$\widetilde{\theta}_a\colon c \not\mapsto G(a,Ka)$ をその随伴射とするとき

$$\theta_a \text{ が } a \in \mathcal{A} \text{ について自然} \iff \widetilde{\theta}_a \text{ が } a \in \mathcal{A} \text{ について自然}$$

証明. 随伴射の定義より

$$\begin{aligned}\widetilde{\theta}_a &= \left(I \xrightarrow{\theta_a} \mathcal{D}(F(c,a),Ka) \xrightarrow{\varphi_{caKa}} \mathcal{C}(c,G(a,Ka))\right)\\ \theta_a &= \left(I \xrightarrow{\widetilde{\theta}_a} \mathcal{C}(c,G(a,Ka)) \xrightarrow{\varphi^{-1}_{caKa}} \mathcal{D}(F(c,a),Ka)\right)\end{aligned}$$

である．よって命題 74 と同様にして

$$\theta_a \text{ が } a \in \mathcal{A} \text{ について自然} \iff \widetilde{\theta}_a \text{ が } a \in \mathcal{A} \text{ について自然}$$

となる． □

3.5 標準的な射の自然性

この節では豊穣圏において標準的に与えられている射が自然であることを証明する．

命題 77. $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ を V-関手とするとき，V の射 $F_{ab}\colon \mathcal{C}(a,b) \to \mathcal{D}(Fa,Fb)$ は $a,b \in \mathcal{C}$ について自然である．

証明. まず b について自然であることを示す．F が V-関手であるから，次の図式が可換である．

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}(s,t)\otimes\mathcal{C}(a,s) \arrow[r, "m"] & \mathcal{C}(a,t) \arrow[d, "F_{at}"] \\
\mathcal{C}(s,t)\otimes\mathcal{C}(a,s) \arrow[u, "\mathrm{id}\otimes\mathrm{id}"] \arrow[d, "F_{st}\otimes F_{as}"'] & \mathcal{D}(Fa,Ft) \\
\mathcal{D}(Fs,Ft)\otimes\mathcal{D}(Fa,Fs) \arrow[r, "m"'] & \mathcal{D}(Fa,Ft) \arrow[u, "\mathrm{id}"']
\end{tikzcd}$$

よって随伴により次の可換図式を得る.

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{C}(s,t) \arrow[r, "\mathcal{C}(a,-)"] & {[\mathcal{C}(a,s),\mathcal{C}(a,t)]} \arrow[d, "{[\mathrm{id},F_{at}]}"] \\
\mathcal{C}(s,t) \arrow[u, "\mathrm{id}"] \arrow[d, "F_{st}"'] & {[\mathcal{C}(a,s),\mathcal{D}(Fa,Ft)]} \\
\mathcal{D}(Fs,Ft) \arrow[r, "\mathcal{D}(Fa,-)"'] & {[\mathcal{D}(Fa,Fs),\mathcal{D}(Fa,Ft)]} \arrow[u, "{[F_{as},\mathrm{id}]}"']
\end{tikzcd}
$$

故に次の図式が可換であることが分かり, F_{ab} は b について自然である.

$$
\begin{tikzcd}
 & {[\mathcal{C}(a,s),\mathcal{C}(a,t)]} \arrow[dr, "{[\mathrm{id},F_{at}]}"] & \\
\mathcal{C}(s,t) \arrow[ur, "\mathcal{C}(a,-)"] \arrow[dr, "\mathcal{D}(Fa,F-)"'] & & {[\mathcal{C}(a,s),\mathcal{D}(Fa,Ft)]} \\
 & {[\mathcal{D}(Fa,Fs),\mathcal{D}(Fa,Ft)]} \arrow[ur, "{[F_{as},\mathrm{id}]}"'] &
\end{tikzcd}
$$

a についても同様に, 次の図式の可換性から

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{C}(s,t)\otimes\mathcal{C}(t,b) \arrow[r, "\gamma"] & \mathcal{C}(t,b)\otimes\mathcal{C}(s,t) \arrow[r, "m"] & \mathcal{C}(s,b) \arrow[d, "F_{sb}"] \\
\mathcal{C}(s,t)\otimes\mathcal{C}(t,b) \arrow[u, "\mathrm{id}\otimes\mathrm{id}"] \arrow[r, "\gamma"'] \arrow[d, "F_{st}\otimes F_{tb}"'] & \mathcal{C}(t,b)\otimes\mathcal{C}(s,t) \arrow[u, "\mathrm{id}\otimes\mathrm{id}"] \arrow[d, "F_{tb}\otimes F_{st}"'] & \mathcal{D}(Fs,Fb) \\
\mathcal{D}(Fs,Ft)\otimes\mathcal{D}(Ft,Fb) \arrow[r, "\gamma"'] & \mathcal{D}(Ft,Fb)\otimes\mathcal{D}(Fs,Ft) \arrow[r, "m"'] & \mathcal{D}(Fs,Fb) \arrow[u, "\mathrm{id}"']
\end{tikzcd}
$$

次の図式の可換性が分かり,

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{C}(s,t) \arrow[r, "\mathcal{C}(-,b)"] & {[\mathcal{C}(t,b),\mathcal{C}(s,b)]} \arrow[d, "{[\mathrm{id},F_{sb}]}"] \\
\mathcal{C}(s,t) \arrow[u, "\mathrm{id}"] \arrow[d, "F_{st}"'] & {[\mathcal{C}(t,b),\mathcal{D}(Fs,Fb)]} \\
\mathcal{D}(Fs,Ft) \arrow[r, "\mathcal{D}(-,Fb)"'] & {[\mathcal{D}(Ft,Fb),\mathcal{D}(Fs,Fb)]} \arrow[u, "{[F_{tb},\mathrm{id}]}"']
\end{tikzcd}
$$

F_{ab} が a について自然だと分かる．

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & {[\mathcal{C}(t,b),\mathcal{C}(s,b)]} \arrow[dr, "{[\mathrm{id},F_{sb}]}"] & \\
\mathcal{C}(s,t) \arrow[ur, "{\mathcal{C}(-,b)}"] \arrow[dr, "{\mathcal{D}(F-,Fb)}"'] & & {[\mathcal{C}(t,b),\mathcal{D}(Fs,Fb)]} \\
 & {[\mathcal{D}(Ft,Fb),\mathcal{D}(Fs,Fb)]} \arrow[ur, "{[F_{tb},\mathrm{id}]}"'] &
\end{tikzcd}
$$

□

補題 78. $F,G\colon \mathcal{C}\to\mathcal{D}$ を V-関手として，$\mathcal{D}$ の射 $\theta_a\colon Fa \mathrel{\rlap{\,V}{\rightarrow}} Ga$ に対応する V の射を $\widetilde{\theta}_a\colon I\to\mathcal{D}(Fa,Ga)$ とする．このとき

$$
\theta_a \text{ が } a\in\mathcal{C} \text{ について自然} \iff \widetilde{\theta}_a \text{ が } a\in\mathcal{C} \text{ について自然.}
$$

証明. $\widetilde{\theta}_a$ が $a\in\mathcal{C}$ について自然であるとは，次の図式が可換であることである．

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{D}(Ga,Gb) \arrow[r, "{\mathcal{D}(Fa,-)}"] & {[\mathcal{D}(Fa,Ga),\mathcal{D}(Fa,Gb)]} \arrow[d, "{[\widetilde{\theta}_a,\mathrm{id}]}"] \\
\mathcal{C}(a,b) \arrow[u, "G_{ab}"] \arrow[d, "F_{ab}"'] & {[I,\mathcal{D}(Fa,Gb)]} \\
\mathcal{C}(Fa,Fb) \arrow[r, "{\mathcal{D}(-,Gb)}"'] & {[\mathcal{D}(Fb,Gb),\mathcal{D}(Fa,Gb)]} \arrow[u, "{[\widetilde{\theta}_b,\mathrm{id}]}"']
\end{tikzcd}
$$

随伴により，これは次の図式が可換であることと同値である．

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{D}(Ga,Gb)\otimes\mathcal{D}(Fa,Ga) \arrow[rr, "m"] & & \mathcal{D}(Fa,Gb) \arrow[d, "\mathrm{id}"] \\
\mathcal{C}(a,b)\otimes I \arrow[u, "G_{ab}\otimes\widetilde{\theta}_a"] \arrow[d, "F_{ab}\otimes\widetilde{\theta}_b"'] & & \mathcal{D}(Fa,Gb) \\
\mathcal{C}(Fa,Fb)\otimes\mathcal{D}(Fb,Gb) \arrow[r, "\gamma"'] & \mathcal{C}(Fb,Gb)\otimes\mathcal{D}(Fa,Fb) \arrow[r, "m"'] & \mathcal{D}(Fa,Gb) \arrow[u, "\mathrm{id}"']
\end{tikzcd}
$$

そこでこの図式の中身を埋めて，次の図式を考える．

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & \mathcal{D}(Ga,Gb)\otimes\mathcal{D}(Fa,Ga) \arrow[dddddr, rounded corners, "m"] & \\
 & & \mathcal{D}(Fa,Ga)\otimes\mathcal{D}(Ga,Gb) \arrow[u, "\gamma"'] & \\
 & & I\otimes\mathcal{D}(Ga,Gb) \arrow[u, "\widetilde{\theta}_a\otimes\mathrm{id}"'] \arrow[dd, "\lambda"] \arrow[dddr, phantom, "(-\circ\theta_a)"] & \\
 & I\otimes\mathcal{C}(a,b) \arrow[ur, "\mathrm{id}\otimes G_{ab}"] \arrow[dd, "\lambda"'] \arrow[uu, phantom, "(\gamma)"] \arrow[dr, phantom, "(\lambda)"] & & \\
 & & \mathcal{D}(Ga,Gb) \arrow[dr, "-\circ\theta_a"] \arrow[dd, phantom, "(*)"] & \\
\mathcal{C}(a,b)\otimes I \arrow[uuuuurr, rounded corners, "G_{ab}\otimes\widetilde{\theta}_a"] \arrow[ddddd, "F_{ab}\otimes\widetilde{\theta}_b"'] \arrow[uur, "\gamma"] \arrow[ddr, "\gamma"'] \arrow[r, phantom, "\shortparallel"] & \mathcal{C}(a,b) \arrow[ur, "G_{ab}"] \arrow[dr, "F_{ab}"'] & & \mathcal{D}(Fa,Gb) \\
 & & \mathcal{D}(Fa,Fb) \arrow[ur, "\theta_b\circ-"'] & \\
 & I\otimes\mathcal{C}(a,b) \arrow[uu, "\lambda"] \arrow[dr, "\mathrm{id}\otimes F_{ab}"'] \arrow[ur, phantom, "(\lambda)"] \arrow[dd, phantom, "(\gamma)"] & & \\
 & & I\otimes\mathcal{D}(Fa,Fb) \arrow[uu, "\lambda"'] \arrow[d, "\widetilde{\theta}_b\otimes\mathrm{id}"] \arrow[uuur, phantom, "(\theta_b\circ-)"] & \\
\mathcal{D}(Fa,Fb)\otimes\mathcal{D}(Fb,Gb) \arrow[rr, "\gamma"'] & & \mathcal{D}(Fb,Gb)\otimes\mathcal{D}(Fa,Fb) \arrow[uuuur, rounded corners, "m"'] &
\end{tikzcd}
$$

γ,λ が同型だから

$$
\begin{array}{lcl}
\theta_a \text{ が } a \text{ について自然} & \multirow{2}{*}{$\Longleftrightarrow$} & \widetilde{\theta}_a \text{ が } a \text{ について自然} \\
(= (*) \text{ が可換}) & & (= \text{一番外側が可換})
\end{array}
$$

である． □

命題 79. V の射 $j_a\colon I\to\mathcal{C}(a,a)$ は $a\in\mathcal{C}$ について自然である．

証明. 命題 59 と補題 78 により明らか． □

補題 80. $F,G\colon\mathcal{C}\to\mathcal{V}$ を V-関手，$x\in\mathcal{V}$ とする．V の射 $\theta_a\colon Fa\otimes x\to Ga$ の随伴射を $\widetilde{\theta}_a\colon Fa\to[x,Ga]$ とする．このとき

$$\theta_a \text{ が } a \text{ について自然} \Longleftrightarrow \widetilde{\theta}_a \text{ が } a \text{ について自然.}^{*9}$$

---

*9 この同値は $-\otimes x\dashv[x,-]$ が V-随伴であること (定理 88) を使えば命題 74 から分かるが，ここでは定理 88 を証明するためにこの同値を直接証明する．

証明．まず θ_a が a について自然とは次の図式が可換になることである．

$$\begin{tikzcd}
{[Fa,Fb]} \arrow[r, "-\otimes x"] & {[Fa\otimes x, Fb\otimes x]} \arrow[d, "{[\mathrm{id}\otimes\mathrm{id},\theta_b]}"] \\
\mathcal{C}(a,b) \arrow[u, "F_{ab}"] \arrow[d, "G_{ab}"'] & {[Fa\otimes x, Gb]} \\
{[Ga,Gb]} \arrow[r, "\mathrm{id}"'] & {[Ga,Gb]} \arrow[u, "{[\theta_a,\mathrm{id}]}"']
\end{tikzcd}$$

これは随伴により，次の図式の可換性と同値である．

$$\begin{tikzcd}
{[Fa,Fb]\otimes(Fa\otimes x)} \arrow[r, "\alpha^{-1}"] & {([Fa,Fb]\otimes Fa)\otimes x} \arrow[r, "\mathrm{ev}\otimes\mathrm{id}"] & Fb\otimes x \arrow[d, "\theta_b"] \\
\mathcal{C}(a,b)\otimes(Fa\otimes x) \arrow[u, "F_{ab}\otimes(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})"] \arrow[d, "G_{ab}\otimes\theta_a"'] & & Gb \\
{[Ga,Gb]\otimes Ga} \arrow[rr, "\mathrm{ev}"'] & & Gb \arrow[u, "\mathrm{id}"']
\end{tikzcd} \tag{81}$$

次に $\widetilde{\theta}_a$ の自然性は

$$\begin{tikzcd}
{[Fa,Fb]} \arrow[r, "\mathrm{id}"] & {[Fa,Fb]} \arrow[d, "{[\mathrm{id},\widetilde{\theta}_b]}"] \\
\mathcal{C}(a,b) \arrow[u, "F_{ab}"] \arrow[d, "G_{ab}"'] & {[Fa,[x,Gb]]} \\
{[Ga,Gb]} \arrow[r, "{[x,-]}"'] & {[[x,Ga],[x,Gb]]} \arrow[u, "{[\widetilde{\theta}_a,\mathrm{id}]}"']
\end{tikzcd}$$

の可換性であり，これは

$$\begin{tikzcd}
{[Fa,Fb]\otimes Fa} \arrow[r, "\mathrm{ev}"] & Fb \arrow[d, "\widetilde{\theta}_b"] \\
\mathcal{C}(a,b)\otimes Fa \arrow[u, "F_{ab}\otimes\mathrm{id}"] \arrow[d, "G_{ab}\otimes\widetilde{\theta}_a"'] & {[x,Gb]} \\
{[Ga,Gb]\otimes[x,Ga]} \arrow[r, "m"'] & {[x,Gb]} \arrow[u, "\mathrm{id}"']
\end{tikzcd}$$

の可換性と同値である．再び随伴により，これは次の図式の一番外側の可換性と同値で

ある.

$$
\begin{tikzcd}
([Fa,Fb]\otimes Fa)\otimes x \arrow[rrr, bend left, "\mathrm{ev}\otimes\mathrm{id}"] & {[Fa,Fb]\otimes(Fa\otimes x)} \arrow[l, "\alpha^{-1}"'] & & Fb\otimes x \arrow[d, "\theta_b"] \\
(\mathcal{C}(a,b)\otimes Fa)\otimes x \arrow[u, "(F_{ab}\otimes\mathrm{id})\otimes\mathrm{id}"] \arrow[r, "\alpha"'] \arrow[d, "(G_{ab}\otimes\mathrm{id})\otimes\mathrm{id}"'] \arrow[ur, phantom, "(\alpha)"] & \mathcal{C}(a,b)\otimes(Fa\otimes x) \arrow[u, "F_{ab}\otimes(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})"'] \arrow[d, "G_{ab}\otimes(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})"] \arrow[r, phantom, "(81)"] & & Gb \\
([Ga,Gb]\otimes Fa)\otimes x \arrow[r, "\alpha"'] \arrow[d, "(\mathrm{id}\otimes\widetilde{\theta}_a)\otimes\mathrm{id}"'] \arrow[ur, phantom, "(\alpha)"] & {[Ga,Gb]\otimes(Fa\otimes x)} \arrow[dr, "\mathrm{id}\otimes\theta_a"] \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes(\widetilde{\theta}_a\otimes\mathrm{id})"] & & \\
([Ga,Gb]\otimes[x,Ga])\otimes x \arrow[r, "\alpha"'] \arrow[ur, phantom, "(\alpha)"] & {[Ga,Gb]\otimes([x,Ga]\otimes x)} \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes\mathrm{ev}"'] \arrow[ur, phantom, "(\widetilde{\theta})"] & {[Ga,Gb]\otimes Ga} \arrow[r, "\mathrm{ev}"'] & Gb \arrow[uu, "\mathrm{id}"']
\end{tikzcd}
$$

従って α が同型であることから

$$
\begin{array}{l}
\theta_a \text{ が } a \text{ について自然} \\
(= (81) \text{ が可換})
\end{array}
\iff
\begin{array}{l}
\widetilde{\theta}_a \text{ が } a \text{ について自然} \\
(= \text{一番外側が可換})
\end{array}
$$

が分かる. □

補題 82. $F\colon \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{V}$, $G\colon \mathcal{C} \to \mathcal{V}$ を V-関手, $x \in \mathcal{V}$ とする. $\theta_a\colon Fa \otimes Ga \to x$ の随伴射を $\widetilde{\theta}_a\colon Fa \to [Ga, x]$ とする. このとき

$$\theta_a \text{ が } a \text{ について自然} \iff \widetilde{\theta}_a \text{ が } a \text{ について自然}.$$

証明. まず θ_a が a について自然とは次の図式が可換になることである.

$$
\begin{tikzcd}
{[Fb,Fa]} \arrow[r, "-\otimes Ga"] & {[Fb\otimes Ga, Fa\otimes Ga]} \arrow[d, "{[\mathrm{id},\theta_a]}"] \\
\mathcal{C}(a,b) \arrow[u, "F_{ba}"] \arrow[d, "G_{ab}"'] & {[Fb\otimes Ga, x]} \\
{[Ga,Gb]} \arrow[r, "Fb\otimes -"'] & {[Fb\otimes Ga, Fb\otimes Gb]} \arrow[u, "{[\mathrm{id},\theta_b]}"']
\end{tikzcd}
$$

これは随伴により，次の図式の可換性と同値である．

$$
\begin{tikzcd}
{[Fb,Fa]\otimes(Fb\otimes Ga)} \arrow[r, "\alpha^{-1}"] & {([Fb,Fa]\otimes Fb)\otimes Ga} \arrow[r, "\mathrm{ev}\otimes\mathrm{id}"] & Fa\otimes Ga \arrow[d, "\theta_a"] \\
\mathcal{C}(a,b)\otimes(Fb\otimes Ga) \arrow[u, "F_{ba}\otimes(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})"] \arrow[d, "G_{ab}\otimes(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})"'] & & x \\
{[Ga,Gb]\otimes(Fb\otimes Ga)} \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes\gamma"'] & & Fb\otimes Gb \arrow[u, "\theta_b"'] \\
{[Ga,Gb]\otimes(Ga\otimes Fb)} \arrow[r, "\alpha^{-1}"'] & {([Ga,Gb]\otimes Ga)\otimes Fb} \arrow[r, "\mathrm{ev}\otimes\mathrm{id}"'] & Gb\otimes Fb \arrow[u, "\gamma"']
\end{tikzcd}
\tag{83}
$$

次に $\widetilde{\theta}_a$ の自然性は

$$
\begin{tikzcd}
{[Fb,Fa]} \arrow[r, "\mathrm{id}"] & {[Fb,Fa]} \arrow[d, "{[\mathrm{id},\widetilde{\theta}_a]}"] \\
\mathcal{C}(a,b) \arrow[u, "F_{ba}"] \arrow[d, "G_{ab}"'] & {[Fb,[Ga,x]]} \\
{[Ga,Gb]} \arrow[r, "{[-,x]}"'] & {[[Gb,x],[Ga,x]]} \arrow[u, "{[\widetilde{\theta}_b,\mathrm{id}]}"']
\end{tikzcd}
$$

の可換性であり，これは

$$
\begin{tikzcd}
{[Fb,Fa]\otimes Fb} \arrow[rr, "\mathrm{ev}"] & & Fa \arrow[d, "\widetilde{\theta}_a"] \\
\mathcal{C}(a,b)\otimes Fb \arrow[u, "F_{ba}\otimes\mathrm{id}"] \arrow[d, "G_{ab}\otimes\widetilde{\theta}_b"'] & & {[Ga,x]} \\
{[Ga,Gb]\otimes[Gb,x]} \arrow[r, "\gamma"'] & {[Gb,x]\otimes[Ga,Gb]} \arrow[r, "m"'] & {[Ga,x]} \arrow[u, "\mathrm{id}"']
\end{tikzcd}
$$

の可換性と同値である．再び随伴により，これは次の図式の一番外側の可換性と同値で

ある．

$$
\begin{tikzcd}
([Fb,Fa]Fb)Ga \arrow[rrrr, bend left, "\mathrm{ev}\otimes\mathrm{id}"] & {[Fb,Fa](FbGa)} \arrow[l, "\alpha^{-1}"'] & & GbFb \arrow[dr, "\theta_b\circ\gamma"] & FaGa \arrow[d, "\theta_a"] \\
(\mathcal{C}(a,b)Fb)Ga \arrow[u, "(F_{ba}\otimes\mathrm{id})\otimes\mathrm{id}"] \arrow[d, "(G_{ab}\otimes\mathrm{id})\otimes\mathrm{id}"'] \arrow[r, "\alpha"] \arrow[ur, phantom, "(\alpha)"] & \mathcal{C}(a,b)(FbGa) \arrow[u, "F_{ba}\otimes(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})"'] \arrow[d, "G_{ab}\otimes(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})"] & (83) & ([Ga,Gb]Ga)Fb \arrow[u, "\mathrm{ev}\otimes\mathrm{id}"] & x \\
([Ga,Gb]Fb)Ga \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "(\mathrm{id}\otimes\widetilde{\theta}_b)\otimes\mathrm{id}"'] \arrow[ur, phantom, "(\alpha)"] & {[Ga,Gb](FbGa)} \arrow[rr, "\mathrm{id}\otimes\gamma"] \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes(\widetilde{\theta}_b\otimes\mathrm{id})"] & & {[Ga,Gb](GaFb)} \arrow[u, "\alpha^{-1}"] \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes(\mathrm{id}\otimes\widetilde{\theta}_b)"] & \\
([Ga,Gb][Gb,x])Ga \arrow[r, "\alpha"'] \arrow[d, "\gamma\otimes\mathrm{id}"'] \arrow[ur, phantom, "(\alpha)"] & {[Ga,Gb]([Gb,x]Ga)} \arrow[rr, "\mathrm{id}\otimes\gamma"'] \arrow[ur, phantom, "(\gamma)"] \arrow[d, phantom, "(V)"] & & {[Ga,Gb](Ga[Gb,x])} \arrow[d, "\alpha^{-1}"'] \arrow[dr, phantom, "(*)"] & \\
([Gb,x][Ga,Gb])Ga \arrow[r, "\alpha"'] & {[Gb,x]([Ga,Gb]Ga)} \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes\mathrm{ev}"'] & & ([Ga,Gb]Ga)[Gb,x] \arrow[ll, "\gamma"'] \arrow[d, "\mathrm{ev}\otimes\mathrm{id}"'] \arrow[dll, phantom, "(\gamma)"] & \\
 & {[Gb,x]Gb} \arrow[rrr, bend right, "\mathrm{ev}"'] & & Gb[Gb,x] \arrow[ll, "\gamma"] & x \arrow[uuuu, "\mathrm{id}"']
\end{tikzcd}
$$

ここで $(*)$ は次の図式により可換である．

$$
\begin{tikzcd}
{[Ga,Gb](GaFb)} \arrow[r, "\alpha^{-1}"] \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes(\mathrm{id}\otimes\widetilde{\theta}_b)"'] & ([Ga,Gb]Ga)Fb \arrow[r, "\mathrm{ev}\otimes\mathrm{id}"] \arrow[d, "(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})\otimes\widetilde{\theta}_b"'] & GbFb \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes\widetilde{\theta}_b"'] & FbGb \arrow[d, "\widetilde{\theta}_b\otimes\mathrm{id}"'] \arrow[dr, "\theta_b"] & \\
{[Ga,Gb](Ga[Gb,x])} \arrow[r, "\alpha^{-1}"'] & ([Ga,Gb]Ga)[Gb,x] \arrow[r, "\mathrm{ev}\otimes\mathrm{id}"'] & Gb[Gb,x] \arrow[r, "\gamma"'] & {[Gb,x]Gb} \arrow[r, "\mathrm{ev}"'] & x
\end{tikzcd}
$$

従って α が同型だから

$$
\begin{array}{lcl}
\theta_a \text{ が } a \text{ について自然} & \iff & \widetilde{\theta}_a \text{ が } a \text{ について自然} \\
(=(83) \text{ が可換}) & & (= \text{一番外側が可換})
\end{array}
$$

が分かる． □

命題 84. V の射 $\mathrm{ev}\colon [u,v]\otimes u \to v$ は $u,v \in \mathcal{V}$ について自然である．

証明．命題 61 より $\mathrm{id}\colon [u,v] \to [u,v]$ は u,v について自然である．ev は id の随伴射だから，補題 82 より ev は u について自然である．同様にして補題 80 より v についても自然である． □

補題 85. $T\colon \mathcal{A}\otimes\mathcal{B}\to\mathcal{C}$ を V-関手とする．$f\colon a \nrightarrow a'$ を $\mathcal{A}$ の射，$b\in\mathcal{B}$ を対象とすると $T(f,b)\colon T(a,b)\nrightarrow T(a',b)$ は $\mathcal{C}$ の射であるが，これは $b\in\mathcal{B}$ について自然である．

証明. 次の図式から分かる．

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{B}(b,b') \arrow[r, "{T(a,-)}"] \arrow[d, "\lambda^{-1}"] \arrow[d, phantom, "(13)"', shift right=40] \arrow[dr, phantom, "(\lambda)"] \arrow[dddddddd, bend right=60, "\mathrm{id}"'] & \mathcal{C}(T(a,b),T(a,b')) \arrow[d, "\lambda^{-1}"'] \arrow[ddddr, bend left, "{T(f,b')\circ-}"] & \\
I\otimes\mathcal{B}(b,b') \arrow[r, "{\mathrm{id}\otimes T(a,-)}"] \arrow[d, "f\otimes\mathrm{id}"] \arrow[dr, phantom, "(\otimes)"] \arrow[dddddd, bend right=50, "\gamma"] & I\otimes\mathcal{C}(T(a,b),T(a,b')) \arrow[d, "f\otimes\mathrm{id}"'] \arrow[dr, phantom, "(\text{定義})"] & \\
\mathcal{A}(a,a')\otimes\mathcal{B}(b,b') \arrow[r, "{\mathrm{id}\otimes T(a,-)}"] \arrow[dddd, "\gamma"] \arrow[dddd, phantom, "(\gamma)"', shift right=40] \arrow[ddddr, phantom, "(30)"] & \mathcal{A}(a,a')\otimes\mathcal{C}(T(a,b),T(a,b')) \arrow[d, "{T(-,b')\otimes\mathrm{id}}"'] & \\
& \mathcal{C}(T(a,b'),T(a',b'))\otimes\mathcal{C}(T(a,b),T(a,b')) \arrow[dr, "m"] & \\
& & \mathcal{C}(T(a,b),T(a',b')) \\
& \mathcal{C}(T(a',b),T(a',b'))\otimes\mathcal{C}(T(a,b),T(a',b)) \arrow[ur, "m"'] & \\
\mathcal{B}(b,b')\otimes\mathcal{A}(a,a') \arrow[r, "{T(a',-)\otimes\mathrm{id}}"'] \arrow[dr, phantom, "(\otimes)"] & \mathcal{C}(T(a',b),T(a',b'))\otimes\mathcal{A}(a,a') \arrow[u, "{\mathrm{id}\otimes T(-,b)}"] \arrow[dr, phantom, "(\text{定義})"] & \\
\mathcal{B}(b,b')\otimes I \arrow[u, "\mathrm{id}\otimes f"'] \arrow[r, "{T(a',-)\otimes\mathrm{id}}"'] \arrow[dr, phantom, "(\rho)"] & \mathcal{C}(T(a',b),T(a',b'))\otimes I \arrow[u, "\mathrm{id}\otimes f"] & \\
\mathcal{B}(b,b') \arrow[u, "\rho^{-1}"'] \arrow[r, "{T(a',-)}"'] & \mathcal{C}(T(a',b),T(a',b')) \arrow[u, "\rho^{-1}"] \arrow[uuuur, bend right, "{-\circ T(f,b)}"'] &
\end{tikzcd}
$$

$\square$

命題 86. V-関手 $T\colon \mathcal{A}\otimes\mathcal{B}\to\mathcal{C}$ に対して $T(a,-)_{bc}\colon \mathcal{B}(b,c)\to\mathcal{C}(T(a,b),T(a,c))$ は a,b,c について自然である．

証明. 命題 77 により b,c については自然である．また $T(a,-)_{bc}$ は合成

$$\mathcal{B}(b,c)\xrightarrow{\lambda^{-1}} I\otimes\mathcal{B}(b,c)\xrightarrow{j_a\otimes\mathrm{id}}\mathcal{A}(a,a)\otimes\mathcal{B}(b,c)\xrightarrow{T}\mathcal{C}(T(a,b),T(a,c))$$

で定義されていたから，命題 70, 71, 77, 79 と補題 85 を組み合わせれば a について自然であることが分かる． $\square$

命題 87. V の射 $m_{abc}\colon \mathcal{C}(b,c)\otimes\mathcal{C}(a,b)\to\mathcal{C}(a,c)$ は a,b,c について自然である．

証明. $m_{abc}=\left(\mathcal{C}(b,c)\otimes\mathcal{C}(a,b)\xrightarrow{\mathcal{C}(a,-)_{bc}\otimes\mathrm{id}}[\mathcal{C}(a,b),\mathcal{C}(a,c)]\otimes\mathcal{C}(a,b)\xrightarrow{\mathrm{ev}}\mathcal{C}(a,c)\right)$ であったから，補題 85 と命題 84, 86 により，a,b,c について自然である． □

定理 88. $x\in V$ に対して V-随伴 $-\otimes x\dashv[x,-]\colon\mathcal{V}\to\mathcal{V}$ が成り立つ．

証明. 随伴 $-\otimes x\dashv[x,-]$ による全単射を $\varphi_{uxv}\colon\mathrm{Hom}_V(u\otimes x,v)\to\mathrm{Hom}_V(u,[x,v])$ とすると，全単射

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_V(w,[u,[x,v]]) &\xrightarrow{\varphi^{-1}_{w,u,[x,v]}} \mathrm{Hom}_V(w\otimes u,[x,v])\\
&\xrightarrow{\varphi^{-1}_{w\otimes u,x,v}} \mathrm{Hom}_V((w\otimes u)\otimes x,v)\\
&\xrightarrow{-\circ\alpha^{-1}} \mathrm{Hom}_V(w\otimes(u\otimes x),v)\\
&\xrightarrow{\varphi_{w,u\otimes x,v}} \mathrm{Hom}_V(w,[u\otimes x,v])
\end{aligned}
$$

で $w:=[u,[x,v]]$ としたときの id_w に対応する射が同型

$$\psi_{uxv}\colon[u,[x,v]]\to[u\otimes x,v]$$

を与える．これが u,x,v について自然であることを示せばよい．まず ev が $-\otimes x\dashv[x,-]$ の counit だから，写像 φ^{-1}_{uxv} は合成

$$\mathrm{Hom}_V(u,[x,v])\xrightarrow{-\otimes x}\mathrm{Hom}_V(u\otimes x,[x,v]\otimes x)\xrightarrow{\mathrm{ev}\circ-}\mathrm{Hom}_V(u\otimes x,v)$$

である．そこで id_w の行き先を考えると

$$
\begin{array}{ccc}
\mathrm{Hom}_V([u,[x,v]],[u,[x,v]]) & & \mathrm{id}_{[u,[x,v]]}\\
\big\downarrow{\scriptstyle\varphi^{-1}_{w,u,[x,v]}} & & \big\downarrow{\scriptstyle\varphi^{-1}_{w,u,[x,v]}}\\
\mathrm{Hom}_V([u,[x,v]]\otimes u,[x,v]) & & \mathrm{ev}\\
\big\downarrow{\scriptstyle\varphi^{-1}_{w\otimes u,x,v}} & & \big\downarrow{\scriptstyle\varphi^{-1}_{w\otimes u,x,v}}\\
\mathrm{Hom}_V(([u,[x,v]]\otimes u)\otimes x,v) & & \mathrm{ev}\circ(\mathrm{ev}\otimes x)\\
\big\downarrow{\scriptstyle-\circ\alpha^{-1}} & & \big\downarrow{\scriptstyle-\circ\alpha^{-1}}\\
\mathrm{Hom}_V([u,[x,v]]\otimes(u\otimes x),v) & & \mathrm{ev}\circ(\mathrm{ev}\otimes x)\circ\alpha^{-1}\\
\big\downarrow{\scriptstyle\varphi_{w,u\otimes x,v}} & & \\
\mathrm{Hom}_V([u,[x,v]],[u\otimes x,v]) & & \psi_{uxv}
\end{array}
$$

となるから $\varphi^{-1}_{w,u\otimes x,v}(\psi_{uxv}) = \mathrm{ev}\circ(\mathrm{ev}\otimes x)\circ\alpha^{-1}$ である．即ち次の図式が可換となる．

$$\begin{tikzcd}
{[u,[x,v]]\otimes(u\otimes x)} \arrow[r, "\alpha^{-1}"] \arrow[d, "\psi_{uxv}\otimes\mathrm{id}"'] & {([u,[x,v]]\otimes u)\otimes x} \arrow[r, "\mathrm{ev}\otimes x"] & {[x,v]\otimes x} \arrow[d, "\mathrm{ev}"] \\
{[u\otimes x,v]\otimes(u\otimes x)} \arrow[rr, "\mathrm{ev}"'] & & v
\end{tikzcd}$$

故に随伴から次の可換図式を得る．

$$\begin{tikzcd}
{[u,[x,v]]} \arrow[r, "-\otimes x"] \arrow[d, "\psi_{uxv}"'] & {[u\otimes x,[x,v]\otimes x]} \arrow[d, "{[\mathrm{id},\mathrm{ev}]}"] \\
{[u\otimes x,v]} \arrow[r, "\mathrm{id}"'] & {[u\otimes x,v]}
\end{tikzcd}$$

$-\otimes x$ は命題 86 により $u,x,v\in\mathcal{V}$ について自然である．$\mathrm{ev}\colon[x,v]\otimes x\to v$ は命題 84 により $x,v\in\mathcal{V}$ について自然である．よって補題 58, 62, 69, 73 により ψ_{uxv} は $u,x,v\in\mathcal{V}$ について自然である． □

命題 89. V の射 $\rho_x\colon x\otimes I\to x$ は $x\in\mathcal{V}$ について自然である．

証明. $u,v\in\mathcal{V}$ に対して次の図式が可換であることを示せばよい．

$$\begin{tikzcd}
{[u,v]} \arrow[r, "-\otimes I"] & {[u\otimes I,v\otimes I]} \arrow[d, "{[\mathrm{id},\rho_v]}"] \\
{[u,v]} \arrow[u, "\mathrm{id}"] \arrow[d, "\mathrm{id}"'] & {[u\otimes I,v]} \\
{[u,v]} \arrow[r, "\mathrm{id}"'] & {[u,v]} \arrow[u, "{[\rho_u,\mathrm{id}]}"']
\end{tikzcd}$$

それは次の図式が可換であることから，随伴により分かる．

$$\begin{tikzcd}
{[u,v]\otimes(u\otimes I)} \arrow[r, "\alpha^{-1}"] & {([u,v]\otimes u)\otimes I} \arrow[r, "\mathrm{ev}\otimes\mathrm{id}"] \arrow[ddl, "\rho_{[u,v]\otimes u}"] & v\otimes I \arrow[d, "\rho_v"] \\
{[u,v]\otimes(u\otimes I)} \arrow[u, "\mathrm{id}\otimes\mathrm{id}"] \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes\rho_u"'] \arrow[r, phantom, "(12)"] & {} \arrow[r, phantom, "(\rho)"] & v \\
{[u,v]\otimes u} \arrow[rr, "\mathrm{ev}"'] & & v \arrow[u, "\mathrm{id}"']
\end{tikzcd}$$

□

命題 90. V の射 $\lambda_x\colon I \otimes x \to x$ は $x \in \mathcal{V}$ について自然である．

証明. λ_x の随伴射が $j_x\colon I \to [x,x]$ だから補題 76 と命題 79 より分かる． □

命題 91. V の射 $i\colon x \to [I,x]$ は $x \in \mathcal{V}$ について自然である．

証明. i の随伴射が $\rho_x\colon x \otimes I \to x$ だから補題 80 と命題 89 より分かる． □

補題 92. $f\colon a \nrightarrow b$ を $\mathcal{C}$ の射とするとき $f \circ -\colon \mathcal{C}(c,a) \to \mathcal{C}(c,b)$ は $c \in \mathcal{C}$ について自然である．

証明. $f \circ - := \underline{\mathcal{C}(c,f)}$ という定義だったから補題 78, 85 から分かる． □

補題 93. $F, G\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ を V-関手として，$\theta_a\colon Fa \nrightarrow Ga$ が $a \in \mathcal{C}$ について自然であるとする．このとき $\theta_a \circ -\colon \mathcal{D}(d,Fa) \to \mathcal{D}(d,Ga)$ は $a \in \mathcal{C}$，$d \in \mathcal{D}$ について自然である．

証明. $d \in \mathcal{D}$ については補題 92 より分かる．$a \in \mathcal{C}$ については，$\theta_a\colon Fa \nrightarrow Ga$ が $a \in \mathcal{C}$ について自然だから命題 62 と補題 78 により $\theta_a \circ - = \underline{\mathcal{D}(d,\theta_a)}$ も a について自然である． □

4 エンド

第 3.1 節で V-関手のなす圏 $\mathrm{Fun}(\mathcal{C},\mathcal{D})$ を定義したが，これは通常の圏である．そこでこれを V-豊穣圏にしたい (つまり V-豊穣圏 $[\mathcal{C},\mathcal{D}]$ を $U([\mathcal{C},\mathcal{D}]) \cong \mathrm{Fun}(\mathcal{C},\mathcal{D})$ となるように定義したい)．そのために V-豊穣圏におけるエンドを導入する．通常の圏論では，関手 $F, G\colon C \to D$ に対して

$$\mathrm{Hom}_{D^C}(F,G) \cong \int_{c \in C} \mathrm{Hom}_D(Fc, Gc)$$

だったから，もしエンドが定義できれば，これと同じ方法で $[\mathcal{C},\mathcal{D}]$ を定義することができる．

4.1 $\mathcal{V}$ のエンド

ここではまず，$\mathcal{V}$ におけるエンドを考える．

定義. $\mathcal{C}$ を V-豊穣圏，$T\colon \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \otimes \mathcal{C} \to \mathcal{V}$ を V-関手とする．T のエンドとは組 $\langle e, \zeta \rangle$ であって，以下を満たすものである．

(1) $e \in \mathcal{V}$ は対象である．

(2) $a \in \mathcal{C}$ に対して $\zeta_a\colon e \to T(a,a)$ は V の射で，これは a について自然である．

(3) V の射 $\sigma_a\colon x \to T(a,a)$ が $a \in \mathcal{C}$ について自然なとき，V の射 $h\colon x \to e$ が一意に存在して $\zeta_a \circ h = \sigma_a$ となる．

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, dashed, "h"] \arrow[dr, "\sigma_a"'] & e \arrow[d, "\zeta_a"] \\ & T(a,a) \end{tikzcd}$$

この e を記号 $\displaystyle\int_{c\in\mathcal{C}} T(c,c)$ で表す．また ζ をこのエンドの counit という．双対的にコエンド $\displaystyle\int^{c\in\mathcal{C}} T(c,c)$ も定義される (省略)．

$T\colon \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \otimes \mathcal{C} \to \mathcal{V}$ を V-関手として，V の射 $\sigma_a\colon x \to T(a,a)$ が a について自然であるとすると次の図式が可換である．

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}(a,b) \arrow[r, "T(a,-)_{ab}"] & {[T(a,a),T(a,b)]} \arrow[d, "{[\sigma_a,\mathrm{id}]}"] \\ \mathcal{C}(a,b) \arrow[u, "\mathrm{id}"] \arrow[d, "\mathrm{id}"'] & {[x,T(a,b)]} \\ \mathcal{C}(a,b) \arrow[r, "T(-,b)_{ab}"'] & {[T(b,b),T(a,b)]} \arrow[u, "{[\sigma_b,\mathrm{id}]}"'] \end{tikzcd}$$

この可換性は，随伴により次の図式の可換性と同値である．(ここで τ'_{ab}, ξ'_{ab} は随伴射である．)

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}(a,b)\otimes T(a,a) \arrow[r, "\tau'_{ab}"] & T(a,b) \arrow[d, "\mathrm{id}"] \\ \mathcal{C}(a,b)\otimes x \arrow[u, "\mathrm{id}\otimes\sigma_a"] \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes\sigma_b"'] & T(a,b) \\ \mathcal{C}(a,b)\otimes T(b,b) \arrow[r, "\xi'_{ab}"'] & T(a,b) \arrow[u, "\mathrm{id}"'] \end{tikzcd}$$

更に随伴により，次の図式の可換性と同値である．(τ_{ab}, ξ_{ab} は随伴射である．)

$$\begin{tikzcd}
T(a,a) \arrow[r, "\tau_{ab}"] & {[\mathcal{C}(a,b), T(a,b)]} \arrow[d, "\mathrm{id}"] \\
x \arrow[u, "\sigma_a"] \arrow[d, "\sigma_b"'] & {[\mathcal{C}(a,b), T(a,b)]} \\
T(b,b) \arrow[r, "\xi_{ab}"'] & {[\mathcal{C}(a,b), T(a,b)]} \arrow[u, "\mathrm{id}"']
\end{tikzcd} \tag{94}$$

よって $\sigma_a\colon x \to T(a,a)$ が a について自然であるとは，(94) が可換であることだと分かる．故に T のエンドとは $\tau, \xi\colon \prod_{a \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})} T(a,a) \to \prod_{a,b \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})} [\mathcal{C}(a,b), T(a,b)]$ の (圏 V における) equalizer である．今 V は完備だから，$\mathcal{C}$ が小さければこのエンドは存在する．

次に V-関手 $T, S\colon \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \otimes \mathcal{C} \to \mathcal{V}$ のエンド $\langle \int_c T(c,c), \zeta \rangle$，$\langle \int_c S(c,c), \xi \rangle$ が存在するとする．$\theta_{ab}\colon T(a,b) \to S(a,b)$ を $a, b \in \mathcal{C}$ について自然な V の射とすると，命題 71 より合成 $\int_c T(c,c) \xrightarrow{\zeta_a} T(a,a) \xrightarrow{\theta_{aa}} S(a,a)$ は $a \in \mathcal{C}$ について自然である．故にエンドの普遍性により，次の点線の射 h が存在して可換となる．

$$\begin{tikzcd}
\int_c T(c,c) \arrow[r, dashed, "h"] \arrow[d, "\zeta_a"'] & \int_c S(c,c) \arrow[d, "\xi_a"] \\
T(a,a) \arrow[r, "\theta_{aa}"'] & S(a,a)
\end{tikzcd}$$

この h を $\displaystyle\int_{c \in \mathcal{C}} \theta_{cc}$ で表す．普遍性から明らかに，θ が同型ならば $\displaystyle\int_{c \in \mathcal{C}} \theta_{cc}$ も同型である．よって $T \cong S$ ならば $\int_c T(c,c) \cong \int_c S(c,c)$ となることが分かる．

4.2 関手圏 $[\mathcal{C}, \mathcal{D}]$

$\mathcal{C}, \mathcal{D}$ を V-豊穣圏，$F, G\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ を V-関手とする．このとき対象 $[\mathcal{C}, \mathcal{D}](F,G) \in \mathcal{V}$ を $[\mathcal{C}, \mathcal{D}](F,G) := \displaystyle\int_{c \in \mathcal{C}} \mathcal{D}(Fc, Gc)$ で定義する．このエンドは一般には存在するか分からないが，例えば $\mathcal{C}$ が小さければ第 4.1 節の通り存在する．以下この節では，任意の F, G に対してこのエンドが存在するとする．またこのエンドの counit を $(\mathrm{ev}_a)_{FG}$ で表す．即ち $(\mathrm{ev}_a)_{FG}\colon [\mathcal{C}, \mathcal{D}](F,G) \to \mathcal{D}(Fa, Ga)$ である．これは $a \in \mathcal{C}$ について自然である．

$F, G, H\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ として V の射 ξ_a を合成

$$[\mathcal{C},\mathcal{D}](G,H) \otimes [\mathcal{C},\mathcal{D}](F,G) \xrightarrow{(\mathrm{ev}_a)_{GH} \otimes (\mathrm{ev}_a)_{FG}} \mathcal{D}(Ga,Ha) \otimes \mathcal{D}(Fa,Ga) \xrightarrow{m_{Fa,Ga,Ha}} \mathcal{D}(Fa,Ha)$$

で定義する．補題 85 により $(\mathrm{ev}_a)_{GH} \otimes (\mathrm{ev}_b)_{FG}$ は a, b について自然である．命題 60, 68, 87 により $m_{Fa,Gb,Hc}$ は a, b, c について自然である．従って命題 72 により ξ_a は $a \in \mathcal{C}$ について自然である．故にエンドの普遍性から，次の点線の射 m_{FGH} が得られる．

$$\begin{tikzcd}
[\mathcal{C},\mathcal{D}](G,H) \otimes [\mathcal{C},\mathcal{D}](F,G) \arrow[r, dashed, "m_{FGH}"] \arrow[d, "(\mathrm{ev}_a)_{GH} \otimes (\mathrm{ev}_a)_{FG}"'] & {[\mathcal{C},\mathcal{D}](F,H)} \arrow[d, "(\mathrm{ev}_a)_{FH}"] \\
\mathcal{D}(Ga,Ha) \otimes \mathcal{D}(Fa,Ga) \arrow[r, "m_{Fa,Ga,Ha}"'] & \mathcal{D}(Fa,Ha)
\end{tikzcd}$$

また，命題 68, 79 より $j_{Fa}\colon I \to \mathcal{D}(Fa,Fa)$ は $a \in \mathcal{C}$ について自然である．故にエンドの普遍性から，次の点線の射 j_F が得られる．

$$\begin{tikzcd}
I \arrow[r, dashed, "j_F"] \arrow[dr, "j_{Fa}"'] & {[\mathcal{C},\mathcal{D}](F,F)} \arrow[d, "(\mathrm{ev}_a)_{FF}"] \\
& \mathcal{D}(Fa,Fa)
\end{tikzcd}$$

$\mathrm{Ob}([\mathcal{C},\mathcal{D}]) := \mathrm{Ob}(\mathrm{Fun}(\mathcal{C},\mathcal{D}))$ と定める．

定理 95. $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ を V-豊穣圏とする．条件

$$\text{任意の } F, G\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D} \text{ に対してエンド } [\mathcal{C},\mathcal{D}](F,G) \text{ が存在する} \tag{96}$$

が成り立つならば，上で定義した $\mathrm{Ob}([\mathcal{C},\mathcal{D}])$，$[\mathcal{C},\mathcal{D}](F,G)$，$m_{FGH}$，$j_F$ によって $[\mathcal{C},\mathcal{D}]$ は V-豊穣圏となる．(この $[\mathcal{C},\mathcal{D}]$ を関手圏という．以下この PDF では，$[\mathcal{C},\mathcal{D}]$ と書いたときには特に断らなくとも条件 (96) が仮定されているものとする．)

証明．まず結合律について示すため，次の五角柱の図式を考える．

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & \big([\mathcal{C},\mathcal{D}](H,K)\otimes[\mathcal{C},\mathcal{D}](G,H)\big)\otimes[\mathcal{C},\mathcal{D}](F,G) \arrow[dl, "m_{GHK}\otimes\mathrm{id}"'] \arrow[ddr, "\alpha"] \arrow[dddd, "(\mathrm{ev}_a\otimes\mathrm{ev}_a)\otimes\mathrm{ev}_a"'] & \\
 & {[\mathcal{C},\mathcal{D}](G,K)\otimes[\mathcal{C},\mathcal{D}](F,G)} \arrow[dl, "m_{FGK}"'] \arrow[dddd, "\mathrm{ev}_a\otimes\mathrm{ev}_a"] & & \\
{[\mathcal{C},\mathcal{D}](F,K)} \arrow[dddd, "\mathrm{ev}_a"'] & & & {[\mathcal{C},\mathcal{D}](H,K)\otimes\big([\mathcal{C},\mathcal{D}](G,H)\otimes[\mathcal{C},\mathcal{D}](F,G)\big)} \arrow[dl, "\mathrm{id}\otimes m_{FGH}"'] \arrow[dddd, "\mathrm{ev}_a\otimes(\mathrm{ev}_a\otimes\mathrm{ev}_a)"] \\
 & & {[\mathcal{C},\mathcal{D}](H,K)\otimes[\mathcal{C},\mathcal{D}](F,H)} \arrow[ull, "m_{FHK}"'] \arrow[dddd, "\mathrm{ev}_a\otimes\mathrm{ev}_a"] & \\
 & & \big(\mathcal{D}(Ha,Ka)\otimes\mathcal{D}(Ga,Ha)\big)\otimes\mathcal{D}(Fa,Ga) \arrow[dl, "m\otimes\mathrm{id}"] \arrow[ddr, "\alpha"] & \\
 & \mathcal{D}(Ga,Ka)\otimes\mathcal{D}(Fa,Ga) \arrow[dl, "m"] & & \\
\mathcal{D}(Fa,Ka) & & & \mathcal{D}(Ha,Ka)\otimes\big(\mathcal{D}(Ga,Ha)\otimes\mathcal{D}(Fa,Ga)\big) \arrow[dl, "\mathrm{id}\otimes m"] \\
 & & \mathcal{D}(Ha,Ka)\otimes\mathcal{D}(Fa,Ha) \arrow[ull, "m"] &
\end{tikzcd}
$$

上面の五角形が示すべき可換性である．底面の五角形は $\mathcal{D}$ が V-豊穣圏だから可換である．側面の四角は m_{FGH} の定義と α の自然性からすべて可換である．故にエンド $[\mathcal{C},\mathcal{D}](F,K)$ の普遍性から上面の五角形が可換であることが分かる．

恒等射についても同様で，エンドの普遍性と次の図式から分かる．

$$
\begin{tikzcd}
I\otimes[\mathcal{C},\mathcal{D}](F,G) \arrow[rr, "\lambda"] \arrow[dr, "j_G\otimes\mathrm{id}"'] \arrow[dd, "\mathrm{id}\otimes\mathrm{ev}_a"'] & & {[\mathcal{C},\mathcal{D}](F,G)} \arrow[dd, "\mathrm{ev}_a"] \\
 & {[\mathcal{C},\mathcal{D}](G,G)\otimes[\mathcal{C},\mathcal{D}](F,G)} \arrow[ur, "m_{FGG}"'] \arrow[dd, "\mathrm{ev}_a\otimes\mathrm{ev}_a"] & \\
I\otimes\mathcal{D}(Fa,Ga) \arrow[rr, "\lambda"'] \arrow[dr, "j_{Ga}\otimes\mathrm{id}"'] & & \mathcal{D}(Fa,Ga) \\
 & \mathcal{D}(Ga,Ga)\otimes\mathcal{D}(Fa,Ga) \arrow[ur, "m"'] &
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
{[\mathcal{C},\mathcal{D}](F,G)\otimes I} \arrow[rr, "\rho"] \arrow[dr, "\mathrm{id}\otimes j_F"] \arrow[dd, "\mathrm{ev}_a\otimes\mathrm{id}"'] & & {[\mathcal{C},\mathcal{D}](F,G)} \arrow[dd, "\mathrm{ev}_a"] \\
& {[\mathcal{C},\mathcal{D}](F,G)\otimes[\mathcal{C},\mathcal{D}](F,F)} \arrow[ur, "m_{FFG}"'] \arrow[dd, "\mathrm{ev}_a\otimes\mathrm{ev}_a"] & \\
\mathcal{D}(Fa,Ga)\otimes I \arrow[rr, "\rho"', crossing over] \arrow[dr, "\mathrm{id}\otimes j_{Fa}"'] & & \mathcal{D}(Fa,Ga) \\
& \mathcal{D}(Fa,Ga)\otimes\mathcal{D}(Fa,Fa) \arrow[ur, "m"'] &
\end{tikzcd}
$$

$\square$

$\theta\colon F \nrightarrow G$ を $[\mathcal{C},\mathcal{D}]$ の射 (即ち V の射 $\theta\colon I\to[\mathcal{C},\mathcal{D}](F,G)$) とすると，$a\in\mathcal{C}$ に対して $\theta_a := \bigl(I \xrightarrow{\theta} [\mathcal{C},\mathcal{D}](F,G) \xrightarrow{(\mathrm{ev}_a)_{FG}} \mathcal{D}(Fa,Ga)\bigr)$ は $\mathcal{D}$ の射 $Fa \nrightarrow Ga$ であり，これは $a\in\mathcal{C}$ について自然である (命題 70, 78)．逆に $\theta_a\colon Fa\nrightarrow Ga$ を $a\in\mathcal{C}$ について自然な $\mathcal{D}$ の射とすると，エンドの普遍性により

$$
\begin{tikzcd}
I \arrow[r, dashed, "\theta"] \arrow[dr, "\theta_a"'] & {[\mathcal{C},\mathcal{D}](F,G)} \arrow[d, "(\mathrm{ev}_a)_{FG}"] \\
& \mathcal{D}(Fa,Ga)
\end{tikzcd}
$$

が可換となる $\theta\colon F\nrightarrow G$ が得られる．この対応によって $[\mathcal{C},\mathcal{D}]$ の射とは V-自然変換のことであり $U([\mathcal{C},\mathcal{D}])\cong\mathrm{Fun}(\mathcal{C},\mathcal{D})$ となる．

命題 97. 上で定めた $(\mathrm{ev}_a)_{FG}$ は V-関手 $\mathrm{ev}_a\colon[\mathcal{C},\mathcal{D}]\to\mathcal{D}$ を与える．

証明. m_{FGH} と j_F を定義したときの図式から明らかに，ev_a が V-関手の条件を満たすことが分かる． $\square$

上で述べたことから，$\theta\colon F\Rightarrow G$ を V-自然変換とすると $\mathrm{ev}_a(\theta)=\theta_a$ となる．つまり ev_a は a 成分を取る V-関手である．

この ev_a を使って V-関手 $\mathrm{ev}\colon[\mathcal{C},\mathcal{D}]\otimes\mathcal{C}\to\mathcal{D}$ を $\mathrm{ev}(F,-):=F$，$\mathrm{ev}(-,a):=\mathrm{ev}_a$ により定義することができる．

∵) 補題 31 を適用すればよい．即ち次の図式が可換であることを示せばよい．

$$\begin{tikzcd}
{[\mathcal{C},\mathcal{D}](F,G)\otimes\mathcal{C}(a,b)} \arrow[r, "\mathrm{ev}_b\otimes F"] \arrow[dd, "\gamma"'] & \mathcal{D}(Fb,Gb)\otimes\mathcal{D}(Fa,Fb) \arrow[d, "m"] \\
 & \mathcal{D}(Fa,Gb) \\
{\mathcal{C}(a,b)\otimes[\mathcal{C},\mathcal{D}](F,G)} \arrow[r, "G\otimes\mathrm{ev}_a"'] & \mathcal{D}(Ga,Gb)\otimes\mathcal{D}(Fa,Ga) \arrow[u, "m"']
\end{tikzcd}$$

この図式は書きかえると

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{D}(Ga,Gb)\otimes\mathcal{D}(Fa,Ga) \arrow[rr, "m"] & & \mathcal{D}(Fa,Gb) \arrow[d, "\mathrm{id}"] \\
{\mathcal{C}(a,b)\otimes[\mathcal{C},\mathcal{D}](F,G)} \arrow[u, "G\otimes\mathrm{ev}_a"] \arrow[d, "F\otimes\mathrm{ev}_b"'] & & \mathcal{D}(Fa,Gb) \\
\mathcal{D}(Fa,Fb)\otimes\mathcal{D}(Fb,Gb) \arrow[r, "\gamma"'] & \mathcal{D}(Fb,Gb)\otimes\mathcal{D}(Fa,Fb) \arrow[r, "m"'] & \mathcal{D}(Fa,Gb) \arrow[u, "\mathrm{id}"']
\end{tikzcd} \tag{98}$$

となるから，随伴により

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{D}(Ga,Gb) \arrow[r, "\mathcal{D}(Fa,-)"] & {[\mathcal{D}(Fa,Ga),\mathcal{D}(Fa,Gb)]} \arrow[d, "{[\mathrm{ev}_a,\mathrm{id}]}"] \\
\mathcal{C}(a,b) \arrow[u, "G"] \arrow[d, "F"'] & {[[\mathcal{C},\mathcal{D}](F,G),\mathcal{D}(Fa,Gb)]} \\
\mathcal{D}(Fa,Fb) \arrow[r, "\mathcal{D}(-,Gb)"'] & {[\mathcal{D}(Fb,Gb),\mathcal{D}(Fa,Gb)]} \arrow[u, "{[\mathrm{ev}_b,\mathrm{id}]}"']
\end{tikzcd}$$

の可換性を示せばよいが，これは counit $\mathrm{ev}_a\colon [\mathcal{C},\mathcal{D}](F,G)\to\mathcal{D}(Fa,Ga)$ が a について自然であることから可換である．

命題 99. $F_{ab}\colon \mathcal{C}(a,b)\to\mathcal{D}(\mathrm{ev}_a(F),\mathrm{ev}_b(F))$ は $F\in[\mathcal{C},\mathcal{D}]$ について自然である．

証明. 次の図式が可換であることを示せばよい.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{D}(Fb,Gb) \arrow[r, "\mathcal{D}(Fa,-)"] & {[\mathcal{D}(Fa,Fb),\mathcal{D}(Fa,Gb)]} \arrow[d, "{[F_{ab},\mathrm{id}]}"] \\
{[\mathcal{C},\mathcal{D}](F,G)} \arrow[u, "\mathrm{ev}_b"] \arrow[d, "\mathrm{ev}_a"'] & {[\mathcal{C}(a,b),\mathcal{D}(Fa,Gb)]} \\
\mathcal{D}(Fa,Ga) \arrow[r, "\mathcal{D}(-,Gb)"'] & {[\mathcal{D}(Ga,Gb),\mathcal{D}(Fa,Gb)]} \arrow[u, "{[G_{ab},\mathrm{id}]}"']
\end{tikzcd}$$

これは随伴により次の可換性と同値である.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{D}(Fb,Gb)\otimes\mathcal{D}(Fa,Fb) \arrow[rr, "m"] & & \mathcal{D}(Fa,Gb) \arrow[d, "\mathrm{id}"] \\
{[\mathcal{C},\mathcal{D}](F,G)\otimes\mathcal{C}(a,b)} \arrow[u, "\mathrm{ev}_b\otimes F_a"] \arrow[d, "\mathrm{ev}_a\otimes G_{ab}"'] & & \mathcal{D}(Fa,Gb) \\
\mathcal{D}(Fa,Ga)\otimes\mathcal{D}(Ga,Gb) \arrow[r, "\gamma"'] & \mathcal{D}(Ga,Gb)\otimes\mathcal{D}(Fa,Ga) \arrow[r, "m"'] & \mathcal{D}(Fa,Gb) \arrow[u, "\mathrm{id}"']
\end{tikzcd}$$

これは (98) と同様にして可換である. □

命題 100. V-豊穣圏 $\mathcal{C}$ に対して $\mathrm{ev}_*\colon [\mathcal{I},\mathcal{C}] \to \mathcal{C}$ は同型である.

証明. $a \in \mathcal{C}$ に対して V-関手 $F_a\colon \mathcal{I} \to \mathcal{C}$ を $F_a(*) = a$ により定めれば, $\mathrm{ev}_*(F_a) = a$ であり, これにより対象 $a \in \mathcal{C}$ と V-関手 $F_a\colon \mathcal{I} \to \mathcal{C}$ は 1 対 1 に対応するのであった. 故に $a, b \in \mathcal{C}$ に対して $(\mathrm{ev}_*)_{F_aF_b}\colon [\mathcal{I},\mathcal{C}](F_a,F_b) \to \mathcal{C}(a,b)$ が同型射であることを示せばよい.

まず $\mathcal{C}(F_a(*),F_b(*)) = \mathcal{C}(a,b)$ であり, V の射 $\mathrm{id}\colon \mathcal{C}(a,b) \to \mathcal{C}(F_a(*),F_b(*))$ は $* \in \mathcal{I}$ について自然である (例 67). 故にエンドの普遍性から, 次の図式を可換にする射 h が一意に存在する.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}(a,b) \arrow[r, dashed, "h"] \arrow[dr, "\mathrm{id}"'] & {[\mathcal{I},\mathcal{C}](F_a,F_b)} \arrow[d, "(\mathrm{ev}_*)_{F_aF_b}"] \\
& \mathcal{C}(F_a(*),F_b(*))
\end{tikzcd}$$

この h が $(\mathrm{ev}_*)_{F_aF_b}$ の逆射であることを示せばよい. まず定義より $(\mathrm{ev}_*)_{F_aF_b} \circ h = \mathrm{id}$ で

ある．次に $h \circ (\mathrm{ev}_*)_{F_aF_b} = \mathrm{id}$ は次の図式が可換であることから，普遍性により分かる．

$$
\begin{tikzcd}
{[\mathcal{I},\mathcal{C}](F_a,F_b)} \arrow[r, "(\mathrm{ev}_*)_{F_aF_b}"] \arrow[drr, "(\mathrm{ev}_*)_{F_aF_b}"'] & \mathcal{C}(a,b) \arrow[r, "h"] \arrow[dr, "\mathrm{id}"] & {[\mathcal{I},\mathcal{C}](F_a,F_b)} \arrow[d, "(\mathrm{ev}_*)_{F_aF_b}"] \\
 & & \mathcal{C}(F_a(*),F_b(*))
\end{tikzcd}
$$

□

命題 101. 全単射 $\mathrm{Hom}_{V\text{-}\mathbf{CAT}}(\mathcal{A}\otimes\mathcal{B},\mathcal{C}) \cong \mathrm{Hom}_{V\text{-}\mathbf{CAT}}(\mathcal{A},[\mathcal{B},\mathcal{C}])$ が存在する．

証明. $T\colon \mathcal{A}\otimes\mathcal{B} \to \mathcal{C}$ を V-関手とする．$a \in \mathcal{A}$ に対して $\widetilde{T}(a) := T(a,-)$ とすれば $\widetilde{T}(a) \in [\mathcal{B},\mathcal{C}]$ である．

次に $a,a' \in \mathcal{A}$, $b \in \mathcal{B}$ とすると $T(-,b)_{aa'}\colon \mathcal{A}(a,a') \to \mathcal{C}(T(a,b),T(a',b))$ は $b \in \mathcal{B}$ について自然である (命題 86)．従ってエンドの普遍性により次の点線の射 $\widetilde{T}_{aa'}$ が得られる．

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{A}(a,a') \arrow[r, dashed, "\widetilde{T}_{aa'}"] \arrow[dr, "T(-,b)_{aa'}"'] & \displaystyle\int_{b\in\mathcal{B}} \mathcal{C}(T(a,b),T(a',b)) \arrow[r, equal] \arrow[d, "\mathrm{ev}_b"] & {[\mathcal{B},\mathcal{C}](\widetilde{T}(a),\widetilde{T}(a'))} \\
 & \mathcal{C}(T(a,b),T(a',b)) &
\end{tikzcd}
$$

これは V-関手 $\widetilde{T}\colon \mathcal{A} \to [\mathcal{B},\mathcal{C}]$ を定める．

∵) まず次の図式を考える．

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{A}(a_1,a_2)\otimes\mathcal{A}(a_0,a_1) \arrow[rr, "m"] \arrow[dr, "\widetilde{T}_{a_1a_2}\otimes\widetilde{T}_{a_0a_1}"] \arrow[ddr, bend right, "T(-,b)\otimes T(-,b)"'] & & \mathcal{A}(a_0,a_2) \arrow[dr, "\widetilde{T}_{a_0a_2}"] \arrow[ddr, bend right, "T(-,b)"'] & \\
 & {[\mathcal{B},\mathcal{C}](\widetilde{T}a_1,\widetilde{T}a_2)\otimes[\mathcal{B},\mathcal{C}](\widetilde{T}a_0,\widetilde{T}a_1)} \arrow[rr, "m"'] \arrow[d, "\mathrm{ev}_b\otimes\mathrm{ev}_b"] & & {[\mathcal{B},\mathcal{C}](\widetilde{T}a_0,\widetilde{T}a_2)} \arrow[d, "\mathrm{ev}_b"] \\
 & \mathcal{C}(T(a_1,b),T(a_2,b))\otimes\mathcal{C}(T(a_0,b),T(a_1,b)) \arrow[rr, "m"'] & & \mathcal{C}(T(a_0,b),T(a_2,b))
\end{tikzcd}
$$

この図式の左右の三角は定義より可換である．奥と手前の四角は $T(-,b), \mathrm{ev}_b$ が V-

関手だから可換である．従ってエンド $[\mathcal{B},\mathcal{C}](\widetilde{T}a_0,\widetilde{T}a_2)$ の普遍性により上面の四角も可換である．即ち $\widetilde{T}$ は合成と交換する．

恒等射についても同様に

$$
\begin{tikzcd}
I \arrow[r, "j_a"] \arrow[drr, "j_{\widetilde{T}(a)}"'] \arrow[ddrr, bend right, "j_{T(a,b)}"'] & \mathcal{A}(a,a) \arrow[dr, "\widetilde{T}_{aa}"] \arrow[ddr, bend right, "T(-,b)"'] & \\
& & {[\mathcal{B},\mathcal{C}](\widetilde{T}a,\widetilde{T}a)} \arrow[d, "\mathrm{ev}_b"] \\
& & \mathcal{C}(T(a,b),T(a,b))
\end{tikzcd}
$$

から分かる．

この対応 $\mathrm{Hom}_{V\text{-}\mathbf{CAT}}(\mathcal{A}\otimes\mathcal{B},\mathcal{C}) \ni T \mapsto \widetilde{T} \in \mathrm{Hom}_{V\text{-}\mathbf{CAT}}(\mathcal{A},[\mathcal{B},\mathcal{C}])$ が全単射であることを示せばよい．そのために V-関手 $K\colon \mathcal{A}\to[\mathcal{B},\mathcal{C}]$ に対して $\widetilde{K}$ を合成

$$\mathcal{A}\otimes\mathcal{B} \xrightarrow{K\otimes\mathrm{id}} [\mathcal{B},\mathcal{C}]\otimes\mathcal{B} \xrightarrow{\mathrm{ev}} \mathcal{C}$$

で定める．このとき $T\colon \mathcal{A}\otimes\mathcal{B}\to\mathcal{C}$ に対して $\widetilde{\widetilde{T}} = T$ と，$K\colon \mathcal{A}\to[\mathcal{B},\mathcal{C}]$ に対して $\widetilde{\widetilde{K}} = K$ を示せばよい．

$a,a'\in\mathcal{A}$，$b,b'\in\mathcal{B}$ とする．まず対象については $\widetilde{\widetilde{T}}(a,b) = \mathrm{ev}(\widetilde{T}(a),b) = T(a,b)$ である．また $\widetilde{\widetilde{T}}_{\langle a,b\rangle\langle a',b'\rangle}$ は

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A}(a,a')\otimes\mathcal{B}(b,b') &\xrightarrow{\widetilde{T}_{aa'}\otimes\mathrm{id}} [\mathcal{B},\mathcal{C}](\widetilde{T}a,\widetilde{T}a')\otimes\mathcal{B}(b,b') \\
&\xrightarrow{\mathrm{ev}_{\langle\widetilde{T}a,b\rangle\langle\widetilde{T}a',b'\rangle}} \mathcal{C}(T(a,b),T(a',b'))
\end{aligned}
$$

で与えられる．ここで $\mathrm{ev}_{\langle\widetilde{T}a,b\rangle\langle\widetilde{T}a',b'\rangle}$ は定義より

$$
\begin{aligned}
&[\mathcal{B},\mathcal{C}](\widetilde{T}a,\widetilde{T}a')\otimes\mathcal{B}(b,b') \\
&\xrightarrow{(\mathrm{ev}_{b'})_{\widetilde{T}a\widetilde{T}a'}\otimes T(a,-)_{bb'}} \mathcal{C}(T(a,b'),T(a',b'))\otimes\mathcal{C}(T(a,b),T(a,b')) \\
&\xrightarrow{m} \mathcal{C}(T(a,b),T(a',b'))
\end{aligned}
$$

である．また $\widetilde{T}_{aa'}$ の定義より

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}(a,a') \arrow[r, "\widetilde{T}_{aa'}"] \arrow[dr, "T(-,b')_{aa'}"'] & {[\mathcal{B},\mathcal{C}](\widetilde{T}a,\widetilde{T}a')} \arrow[d, "(\mathrm{ev}_{b'})_{\widetilde{T}a\widetilde{T}a'}"] \\ & \mathcal{C}(T(a,b'),T(a',b')) \end{tikzcd}$$

は可換である．故に $\widetilde{\widetilde{T}}_{\langle a,b\rangle\langle a',b'\rangle}$ は

$$\begin{aligned} &\mathcal{A}(a,a')\otimes\mathcal{B}(b,b') \\ &\xrightarrow{T(-,b')_{aa'}\otimes T(a,-)_{bb'}} \mathcal{C}(T(a,b'),T(a',b'))\otimes\mathcal{C}(T(a,b),T(a,b')) \\ &\xrightarrow{m} \mathcal{C}(T(a,b),T(a',b')) \end{aligned}$$

即ち $T_{\langle a,b\rangle\langle a',b'\rangle}$ に一致する．以上により $\widetilde{\widetilde{T}}=T$ が分かった．

次に K について考える．まず対象については $\widetilde{\widetilde{K}}(a)=\widetilde{K}(a,-)=\mathrm{ev}(Ka,-)=Ka$ である．また $\widetilde{\widetilde{K}}_{aa'}$ は $\widetilde{K}(-,b)_{aa'}\colon\mathcal{A}(a,a')\to\mathcal{C}(Ka(b),Ka'(b))$ からエンドの普遍性によって得られる射である．ここで $\widetilde{K}(-,b)_{aa'}$ は

$$\mathcal{A}(a,a')\xrightarrow{K_{aa'}}[\mathcal{B},\mathcal{C}](Ka,Ka')\xrightarrow{(\mathrm{ev}_b)_{KaKa'}}\mathcal{C}(Ka(b),Ka'(b))$$

で与えられる．故にエンド $[\mathcal{B},\mathcal{C}](Ka,Ka')$ の普遍性から $\widetilde{\widetilde{K}}_{aa'}=K_{aa'}$ である．従って $\widetilde{\widetilde{K}}=K$ である． $\square$

V-関手 $[\mathcal{A},\mathcal{C}]\otimes\mathcal{A}\xrightarrow{\mathrm{ev}}\mathcal{C}\xrightarrow{F}\mathcal{D}$ に命題 101 で対応する V-関手を $[1,F]\colon[\mathcal{A},\mathcal{C}]\to[\mathcal{A},\mathcal{D}]$ と書く．定義から，$G\in[\mathcal{A},\mathcal{C}]$ に対して $[1,F](G)=F(\mathrm{ev}(G,-))=FG$ である．また命題 101 の証明によれば，$G,H\in[\mathcal{A},\mathcal{C}]$ に対して $[1,F]_{GH}$ は

$$\begin{tikzcd} {[\mathcal{A},\mathcal{C}](G,H)} \arrow[r, dashed, "{[1,F]_{GH}}"] \arrow[d, "\mathrm{ev}_a"'] & {[\mathcal{A},\mathcal{D}](FG,FH)} \arrow[d, "\mathrm{ev}_a"] \\ \mathcal{C}(Ga,Ha) \arrow[r, "F_{GaHa}"'] & \mathcal{D}(FGa,FHa) \end{tikzcd}$$

で与えられる．従って $U([1,F])=F\bullet-$ となる．

同様に V-関手 $[\mathcal{D},\mathcal{M}]\otimes\mathcal{C}\xrightarrow{\mathrm{id}\otimes F}[\mathcal{D},\mathcal{M}]\otimes\mathcal{D}\xrightarrow{\mathrm{ev}}\mathcal{M}$ に命題 101 で対応する V-関手を

$[F,1]\colon [\mathcal{D},\mathcal{M}] \to [\mathcal{C},\mathcal{M}]$ と書く．これは $[F,1](G) = \mathrm{ev}(G, F-) = GF$ であり

$$\begin{tikzcd}
{[\mathcal{D},\mathcal{M}](G,H)} \arrow[r, dashed, "{[F,1]_{GH}}"] \arrow[dr, "\mathrm{ev}_{Fa}"'] & {[\mathcal{C},\mathcal{M}](GF,HF)} \arrow[d, "\mathrm{ev}_a"] \\
 & \mathcal{M}(GFa, HFa)
\end{tikzcd}$$

となる．よって $U([F,1]) = - \bullet F$ である．

4.3 米田の補題

V-豊穣圏 $\mathcal{C}$ に対して $\widehat{\mathcal{C}} := [\mathcal{C}^{\mathrm{op}}, \mathcal{V}]$ と書く．$\widehat{\mathcal{C}}$ が存在すれば，命題 101 により全単射

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_{V\text{-}\mathbf{CAT}}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}} \otimes \mathcal{C}, \mathcal{V}) &\cong \mathrm{Hom}_{V\text{-}\mathbf{CAT}}(\mathcal{C} \otimes \mathcal{C}^{\mathrm{op}}, \mathcal{V}) \cong \mathrm{Hom}_{V\text{-}\mathbf{CAT}}(\mathcal{C}, [\mathcal{C}^{\mathrm{op}}, \mathcal{V}]) \\
&= \mathrm{Hom}_{V\text{-}\mathbf{CAT}}(\mathcal{C}, \widehat{\mathcal{C}})
\end{aligned}$$

が得られる．

定義． この全単射で $\mathcal{C}(-,\Box)\colon \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \otimes \mathcal{C} \to \mathcal{V}$ に対応する V-関手を $y\colon \mathcal{C} \to \widehat{\mathcal{C}}$ と書き米田埋込と呼ぶ．

命題 101 の証明より，$y_{ab}\colon \mathcal{C}(a,b) \to \widehat{\mathcal{C}}(y(a), y(b))$ はエンドの普遍性を使って

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}(a,b) \arrow[r, "y_{ab}"] \arrow[dr, "\mathcal{C}(c,-)_{ab}"'] & \widehat{\mathcal{C}}(y(a), y(b)) \arrow[d, "\mathrm{ev}_c"] \\
 & {[\mathcal{C}(c,a), \mathcal{C}(c,b)]}
\end{tikzcd}$$

によって与えられる．従って $\mathcal{C}$ の射 $f\colon a \not\mapsto b$ に対して V-自然変換 $y(f)\colon y(a) \Rightarrow y(b)$ の c 成分は $f \circ -\colon \mathcal{C}(c,a) \to \mathcal{C}(c,b)$ である．

補題 102. $\mathcal{C}$ を V-豊穣圏，$G\colon \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{V}$ を V-関手とする．このとき $a \in \mathcal{C}$ に対して全単射 $\mathrm{Hom}_{U(\widehat{\mathcal{C}})}(y(a), G) \cong \mathrm{Hom}_V(I, Ga)$ が存在する．

証明. $\theta\colon y(a) \Rightarrow G$ を V-自然変換とする．このとき $\theta_a\colon \mathcal{C}(a,a) \to Ga$ とみなせる．よって $h(\theta) := \theta_a \circ j_a\colon I \to Ga$ が定義できる．逆に $h\colon I \to Ga$ と $c \in \mathcal{C}$ に対して V の射 $\theta(h)_c$ を $\mathcal{C}(c,a) \xrightarrow{G_{ac}} [Ga, Gc] \xrightarrow{[h,\mathrm{id}]} [I, Gc] \xrightarrow{i^{-1}} Gc$ により定めれば，これは命題 60, 77, 85, 91 により c について自然である．よって V-自然変換 $\theta(h)\colon y(a) \Rightarrow G$ が定まる．これらの対応が互いに逆であることを示せばよい．

まず $h\colon I \to Ga$ とする．V-関手の条件 $G(j_a) = j_{Ga}$ に注意すると

$$h(\theta(h)) = \theta(h)_a \circ j_a = (i^{-1} \circ [h, \mathrm{id}] \circ G_{aa}) \circ j_a = i^{-1} \circ [h, \mathrm{id}] \circ j_{Ga}$$

だから $[h, \mathrm{id}] \circ j_{Ga} = i \circ h$ を示せばよい．それは

$$\begin{tikzcd}
I \otimes Ga \arrow[rr, "\lambda"] & & Ga \arrow[d, "\mathrm{id}"] \\
I \otimes I \arrow[u, "\mathrm{id}\otimes h"] \arrow[r, "\lambda=\rho"] \arrow[d, "h\otimes\mathrm{id}"'] & I \arrow[ur, "h"] \arrow[dr, "h"'] & Ga \\
Ga \otimes I \arrow[rr, "\rho"'] & & Ga \arrow[u, "\mathrm{id}"']
\end{tikzcd}$$

が可換であるから，随伴により

$$\begin{tikzcd}
I \arrow[r, "j_{Ga}"] & {[Ga, Ga]} \arrow[d, "{[h,\mathrm{id}]}"] \\
I \arrow[u, "\mathrm{id}"] \arrow[d, "h"'] & {[I, Ga]} \\
Ga \arrow[r, "i"'] & {[I, Ga]} \arrow[u, "{[\mathrm{id},\mathrm{id}]}"']
\end{tikzcd}$$

が可換となり $[h, \mathrm{id}] \circ j_{Ga} = i \circ h$ である．

次に $\theta\colon y(a) \Rightarrow G$ に対して $\theta(h(\theta)) = \theta$ を示す．そのために次の図式を考える．

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}(c,a) \arrow[r, "\mathcal{C}(-,a)_{ac}"] \arrow[d, "G_{ac}"'] \arrow[dr, phantom, "(\theta)"] & {[\mathcal{C}(a,a), \mathcal{C}(c,a)]} \arrow[r, "{[j_a,\mathrm{id}]}"] \arrow[d, "{[\mathrm{id},\theta_c]}"] \arrow[dr, phantom, "({[-,\square]})"] & {[I, \mathcal{C}(c,a)]} \arrow[r, "i^{-1}"] \arrow[d, "{[\mathrm{id},\theta_c]}"] \arrow[dr, phantom, "(i)"] & \mathcal{C}(c,a) \arrow[d, "\theta_c"] \\
{[Ga, Gc]} \arrow[r, "{[\theta_a,\mathrm{id}]}"'] & {[\mathcal{C}(a,a), Gc]} \arrow[r, "{[j_a,\mathrm{id}]}"'] & {[I, Gc]} \arrow[r, "i^{-1}"'] & Gc
\end{tikzcd}$$

(θ) は θ が V-自然変換だから可換である．$([-, \square])$ は $[-, \square]$ が関手だから可換である．
(i) は i が自然だから可換である．

この図式で射を左回りに合成すると

$$i^{-1} \circ [j_a, \mathrm{id}] \circ [\theta_a, \mathrm{id}] \circ G_{ac} = i^{-1} \circ [h(\theta), \mathrm{id}] \circ G_{ac} = \theta(h(\theta))_c$$

である．故に右回りが θ_c になること，つまり

$$\bigl(\mathcal{C}(c,a) \xrightarrow{\mathcal{C}(-,a)_{ac}} [\mathcal{C}(a,a), \mathcal{C}(c,a)] \xrightarrow{[j_a,\mathrm{id}]} [I, \mathcal{C}(c,a)] \xrightarrow{i^{-1}} \mathcal{C}(c,a)\bigr) = \mathrm{id}$$

を示せばよい．それは次の図式が可換であり (ここで $j_a\colon I \to \mathcal{C}(a,a)$ に対応する $\mathcal{V}$ の射を $\widetilde{j}_a\colon I \nrightarrow \mathcal{C}(a,a)$ とする)，

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{C}(c,a) \arrow[r, "\mathcal{C}(-,a)_{ac}"] \arrow[d, "\rho^{-1}"'] \arrow[dr, phantom, "(\rho)"] & {[\mathcal{C}(a,a),\mathcal{C}(c,a)]} \arrow[d, "\rho^{-1}"] \arrow[ddr, "{[j_a,\mathrm{id}]}"] & \\
\mathcal{C}(c,a)\otimes I \arrow[r, "\mathcal{C}(-,a)_{ac}\otimes\mathrm{id}"] \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes\widetilde{j}_a"'] \arrow[dr, phantom, "(\otimes)"] & {[\mathcal{C}(a,a),\mathcal{C}(c,a)]\otimes I} \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes\widetilde{j}_a"] \arrow[r, phantom, "(54)"] & \\
\mathcal{C}(c,a)\otimes[I,\mathcal{C}(a,a)] \arrow[r, "\mathcal{C}(-,a)_{ac}\otimes\mathrm{id}"'] \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes i^{-1}"'] \arrow[dr, phantom, "(\otimes)"] & {[\mathcal{C}(a,a),\mathcal{C}(c,a)]\otimes[I,\mathcal{C}(a,a)]} \arrow[r, "m"'] \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes i^{-1}"] & {[I,\mathcal{C}(c,a)]} \arrow[ddl, "i^{-1}"] \\
\mathcal{C}(c,a)\otimes\mathcal{C}(a,a) \arrow[r, "\mathcal{C}(-,a)_{ac}\otimes\mathrm{id}"'] \arrow[d, "\gamma"'] \arrow[dr, phantom, "(\mathcal{C}(-,a))"] & {[\mathcal{C}(a,a),\mathcal{C}(c,a)]\otimes\mathcal{C}(a,a)} \arrow[d, "\mathrm{ev}"] \arrow[r, phantom, "(15)"] & \\
\mathcal{C}(a,a)\otimes\mathcal{C}(c,a) \arrow[r, "m"'] & \mathcal{C}(c,a) &
\end{tikzcd}
$$

更に左回りの合成が次の図式から id となり分かる．

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{C}(c,a) \arrow[r, "\rho^{-1}"] \arrow[dr, bend right, "\lambda^{-1}"'] \arrow[ddrrr, rounded corners, "\mathrm{id}"'] \arrow[dr, phantom, "(12)"] & \mathcal{C}(c,a)\otimes I \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes\widetilde{j}_a"] \arrow[d, "\gamma"] \arrow[dr, phantom, "(\gamma)"] & \mathcal{C}(c,a)\otimes[I,\mathcal{C}(a,a)] \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes i^{-1}"] \arrow[d, "\gamma"] \arrow[dr, phantom, "(\gamma)"] & \mathcal{C}(c,a)\otimes\mathcal{C}(a,a) \arrow[d, "\gamma"] \\
 & I\otimes\mathcal{C}(c,a) \arrow[r, "\widetilde{j}_a\otimes\mathrm{id}"'] \arrow[rr, bend right, "j_a\otimes\mathrm{id}"'] \arrow[dr, phantom, "(\mathcal{C})"] & {[I,\mathcal{C}(a,a)]\otimes\mathcal{C}(c,a)} \arrow[r, "i^{-1}\otimes\mathrm{id}"'] \arrow[d, phantom, "(j_a)"] & \mathcal{C}(a,a)\otimes\mathcal{C}(c,a) \arrow[d, "m"] \\
 & & & \mathcal{C}(c,a)
\end{tikzcd}
$$

$\square$

定理 103 (米田の補題)**.** $\mathcal{C}$ を V-豊穣圏，$F\colon \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{V}$ を V-関手とする．このとき $a \in \mathcal{C}$ に対して V での同型 $\widehat{\mathcal{C}}(y(a), F) \cong Fa$ が成り立つ．

証明. まず $c \in \mathcal{C}$，$x \in V$ に対して全単射

$$\mathrm{Hom}_V(x, [\mathcal{C}(c,a), Fc]) \cong \mathrm{Hom}_V(x \otimes \mathcal{C}(c,a), Fc) \cong \mathrm{Hom}_V(\mathcal{C}(c,a), [x, Fc]) \tag{104}$$

が存在する．以下この証明の中では，この全単射により $f\colon x \to [\mathcal{C}(c,a), Fc]$ に対応する射を $f'\colon \mathcal{C}(c,a) \to [x, Fc]$ で表す．命題 76 と補題 80 により，f が c について自然であることは f' が c について自然であることと同値である．

さて，定義により $\widehat{\mathcal{C}}(y(a),F)=[\mathcal{C}^{\mathrm{op}},\mathcal{V}](y(a),F)=\displaystyle\int_{c\in\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}[\mathcal{C}(c,a),Fc]$ である．$c\in\mathcal{C}$ に対して $\zeta_c^{aF}\colon Fa\to[\mathcal{C}(c,a),Fc]$ を $(\zeta_c^{aF})'=F_{ac}$ となるように取る．命題 77 より F_{ac} は c について自然だから，ζ_c^{aF} も c について自然である．$\langle Fa,\zeta^{aF}\rangle$ が $[\mathcal{C}(-,a),F\Box]$ のエンドであることを示せばよい．

そのために $\sigma_c\colon x\to[\mathcal{C}(c,a),Fc]$ が c について自然とする．このとき σ'_c は V-自然変換 $\sigma'\colon y(a)\Rightarrow[x,F-]$ を与える．補題 102 より，ある $h\colon I\to[x,Fa]$ が存在して $\sigma'=\theta(h)$ と書ける．この h に対応する V の射 $\widetilde{h}\colon x\to Fa$ を取ると $\zeta_c^{aF}\circ\widetilde{h}=\sigma_c$ となる．

∵) つまり図式

$$
\begin{tikzcd}
x \arrow[r, "\sigma_c"] \arrow[d, "\widetilde{h}"'] & {[\mathcal{C}(c,a),Fc]} \\
Fa \arrow[r, "\zeta_c^{aF}"'] & {[\mathcal{C}(c,a),Fc]} \arrow[u, "{[\mathrm{id},\mathrm{id}]}"']
\end{tikzcd}
$$

の可換性を示せばよい．そのためには同型 (104) により

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{C}(c,a) \arrow[r, "\sigma'_c"] \arrow[d, "\mathrm{id}"'] & {[x,Fc]} \\
\mathcal{C}(c,a) \arrow[r, "F_{ac}"'] & {[Fa,Fc]} \arrow[u, "{[\widetilde{h},\mathrm{id}]}"']
\end{tikzcd}
\tag{105}
$$

の可換性を示せばよい．そこで次の図式を考える．

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{C}(c,a) \arrow[rr, "\sigma'_c"] \arrow[d, "F_{ac}"'] \arrow[dr, phantom, "(105)"] & & {[x,Fc]} \arrow[d, phantom, "(i)"] \\
{[Fa,Fc]} \arrow[rru, "{[\widetilde{h},\mathrm{id}]}"'] \arrow[rr, "i"'] \arrow[dd, "\mathrm{id}"'] & & {[I,[Fa,Fc]]} \arrow[d, "{[\mathrm{id},[\widetilde{h},\mathrm{id}]]}"'] \\
& (*) & {[I,[x,Fc]]} \arrow[uu, bend right=60, "i^{-1}"'] \\
{[Fa,Fc]} \arrow[rr, "{[x,-]}"'] & & {[[x,Fa],[x,Fc]]} \arrow[u, "{[h,\mathrm{id}]}"']
\end{tikzcd}
$$

まず $\theta(h)$ の定義と $\sigma'=\theta(h)$ より，一番外側は可換である．(i) は i の自然性により

可換である．(∗) の可換性は，随伴により

$$\begin{tikzcd}
{[Fa,Fc]\otimes I} \arrow[rr, "\rho"] & & {[Fa,Fc]} \arrow[d, "{[\widetilde{h},\mathrm{id}]}"] \\
{[Fa,Fc]\otimes I} \arrow[u, "\mathrm{id}\otimes\mathrm{id}"] \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes h"'] & & {[x,Fc]} \\
{[Fa,Fc]\otimes[x,Fa]} \arrow[rr, "m"'] & & {[x,Fc]} \arrow[u, "\mathrm{id}"']
\end{tikzcd}$$

の可換性と同値であるが，これは命題 54 により可換である．以上により (105) も可換である．

従って $\widetilde{h}$ の一意性を示せば $\langle Fa, \zeta^{aF}\rangle$ が $[\mathcal{C}(-,a), F\square]$ のエンドであると分かる．

そこで $\widetilde{k}\colon x \to Fa$ が $\zeta^{aF}_c \circ \widetilde{k} = \sigma_c$ を満たすとする．すると上記と同様の議論により $\theta(k) = \theta(h)$ が分かる．故に $h = k$，即ち $\widetilde{h} = \widetilde{k}$ となる． $\square$

定理 106. 米田の補題 (定理 103) の同型を $\varphi_{aF}\colon \widehat{\mathcal{C}}(y(a), F) \to Fa = \mathrm{ev}(F, a)$ とするとき φ_{aF} は $a \in \mathcal{C}$ と $F \in \widehat{\mathcal{C}}$ について自然である．

証明． 命題 66 より $\psi_{aF} := \varphi_{aF}^{-1}$ の自然性を示せばよい．ここで ψ_{aF} は

$$\begin{tikzcd}
Fa \arrow[r, "\psi_{aF}"] \arrow[dr, "\zeta^{aF}_c"'] & \widehat{\mathcal{C}}(y(a),F) \arrow[d, "\mathrm{ev}_c"] \\
& {[\mathcal{C}(c,a), Fc]}
\end{tikzcd}$$

を可換にする射である．(ζ^{aF}_c は定理 103 の証明を参照．)

まず a について自然であることを示す．即ち

$$\begin{tikzcd}
{[Fa,Fb]} \arrow[rr, "\mathrm{id}"] & & {[Fa,Fb]} \arrow[d, "{[\mathrm{id},\psi_{bF}]}"] \\
\mathcal{C}(b,a) \arrow[u, "F_{ab}"] \arrow[d, "y_{ba}"'] & & {[Fa,\widehat{\mathcal{C}}(y(b),F)]} \\
\widehat{\mathcal{C}}(y(b),y(a)) \arrow[rr, "\widehat{\mathcal{C}}(-,F)"'] & & {[\widehat{\mathcal{C}}(y(a),F),\widehat{\mathcal{C}}(y(b),F)]} \arrow[u, "{[\psi_{aF},\mathrm{id}]}"']
\end{tikzcd}$$

の可換性を示す．そのためには随伴により次の図式の可換性を示せばよい．

$$
\begin{tikzcd}
{[Fa,Fb]\otimes Fa} \arrow[rr, "\mathrm{ev}"] & & Fb \arrow[d, "\psi_{bF}"] \\
\mathcal{C}(b,a)\otimes Fa \arrow[u, "F_{ab}\otimes\mathrm{id}"] \arrow[d, "y_{ba}\otimes\psi_{aF}"'] & (*) & \widehat{\mathcal{C}}(y(b),F) \\
\widehat{\mathcal{C}}(y(b),y(a))\otimes\widehat{\mathcal{C}}(y(a),F) \arrow[r, "\gamma"'] & \widehat{\mathcal{C}}(y(a),F)\otimes\widehat{\mathcal{C}}(y(b),y(a)) \arrow[r, "m"'] & \widehat{\mathcal{C}}(y(b),F) \arrow[u, "\mathrm{id}"']
\end{tikzcd}
$$

そのために次の図式を考える．(上面が $(*)$ である．)

$$
\begin{tikzcd}
 & & {[Fa,Fb]\otimes Fa} \arrow[rr, "\mathrm{ev}"] \arrow[ddd, "\mathrm{id}"] & & Fb \arrow[dl, "\psi_{bF}"] \arrow[ddd, "\mathrm{id}"] \\
 & \mathcal{C}(b,a)\otimes Fa \arrow[ur, "F_{ab}\otimes\mathrm{id}"] \arrow[dl, "y_{ba}\otimes\psi_{aF}"'] \arrow[ddd, "\mathrm{id}"] & & \widehat{\mathcal{C}}(y(b),F) \arrow[ddd, "\mathrm{ev}_c"] & \\
\widehat{\mathcal{C}}(y(b),y(a))\otimes\widehat{\mathcal{C}}(y(a),F) \arrow[rr, "\gamma"'] \arrow[ddd, "\mathrm{ev}_c\otimes\mathrm{ev}_c"'] & & \widehat{\mathcal{C}}(y(a),F)\otimes\widehat{\mathcal{C}}(y(b),y(a)) \arrow[ur, "m"'] \arrow[ddd, "\mathrm{ev}_c\otimes\mathrm{ev}_c"] & & \\
 & & {[Fa,Fb]\otimes Fa} \arrow[rr, "\mathrm{ev}"] & & Fb \arrow[dl, "\zeta_c^{bF}"] \\
 & \mathcal{C}(b,a)\otimes Fa \arrow[ur, "F_{ab}\otimes\mathrm{id}"'] \arrow[dl, "\mathcal{C}(c,-)\otimes\zeta_c^{aF}"] & & {[\mathcal{C}(c,b),Fc]} & \\
{[\mathcal{C}(c,b),\mathcal{C}(c,a)]\otimes[\mathcal{C}(c,a),Fc]} \arrow[rr, "\gamma"'] & & {[\mathcal{C}(c,a),Fc]\otimes[\mathcal{C}(c,b),\mathcal{C}(c,a)]} \arrow[rr, "m"'] & & {[\mathcal{C}(c,b),Fc]} \arrow[ul, "\mathrm{id}"']
\end{tikzcd}
$$

側面は ψ,ev,y の定義などから可換である．底面の可換性は随伴により次の図式の可換性と同値である．

$$
\begin{tikzcd}
{[Fa,Fb]} \arrow[r, "\mathrm{id}"] & {[Fa,Fb]} \arrow[d, "{[\mathrm{id},\zeta_c^{bF}]}"] \\
\mathcal{C}(b,a) \arrow[u, "F_{ab}"] \arrow[d, "\mathcal{C}(c,-)"'] & {[Fa,[\mathcal{C}(c,b),Fc]]} \\
{[\mathcal{C}(c,b),\mathcal{C}(c,a)]} \arrow[r, "{[-,Fc]}"'] & {[[\mathcal{C}(c,a),Fc],[\mathcal{C}(c,b),Fc]]} \arrow[u, "{[\zeta_c^{aF},\mathrm{id}]}"']
\end{tikzcd}
$$

これは ζ_c^{aF} が a について自然だから可換である．

以上によりエンド $\widehat{\mathcal{C}}(y(b), F)$ の普遍性から上面も可換となり，$(*)$ が可換であることが分かった．

次に F について自然であることを示す．即ち

$$
\begin{tikzcd}
{[Fa, Ga]} \arrow[rr, "\mathrm{id}"] & & {[Fa, Ga]} \arrow[d, "{[\mathrm{id}, \psi_{aG}]}"] \\
\widehat{\mathcal{C}}(F, G) \arrow[u, "\mathrm{ev}_a"] \arrow[d, "\mathrm{id}"'] & & {[Fa, \widehat{\mathcal{C}}(y(a), G)]} \\
\widehat{\mathcal{C}}(F, G) \arrow[rr, "\widehat{\mathcal{C}}(y(a), -)"'] & & {[\widehat{\mathcal{C}}(y(a), F), \widehat{\mathcal{C}}(y(a), G)]} \arrow[u, "{[\psi_{aF}, \mathrm{id}]}"']
\end{tikzcd}
$$

の可換性を示す．そのためには随伴により次の図式の可換性を示せばよい．

$$
\begin{tikzcd}
{[Fa, Ga] \otimes Fa} \arrow[rr, "\mathrm{ev}"] & & Ga \arrow[d, "\psi_{aG}"] \\
\widehat{\mathcal{C}}(F, G) \otimes Fa \arrow[u, "\mathrm{ev}_a \otimes \mathrm{id}"] \arrow[d, "\mathrm{id} \otimes \psi_{aF}"'] & (**) & \widehat{\mathcal{C}}(y(a), G) \\
\widehat{\mathcal{C}}(F, G) \otimes \widehat{\mathcal{C}}(y(a), F) \arrow[rr, "m"'] & & \widehat{\mathcal{C}}(y(a), G) \arrow[u, "\mathrm{id}"']
\end{tikzcd}
$$

そのために次の図式を考える．(上面が $(**)$ である．)

$$
\begin{tikzcd}
 & & {[Fa, Ga] \otimes Fa} \arrow[rrr, "\mathrm{ev}"] \arrow[ddd, "\mathrm{id}"] & & & Ga \arrow[dl, "\psi_{aG}"] \arrow[ddd, "\mathrm{id}"] \\
 & \widehat{\mathcal{C}}(F, G) \otimes Fa \arrow[ur, "\mathrm{ev}_a \otimes \mathrm{id}"] \arrow[dl, "\mathrm{id} \otimes \psi_{aF}"'] \arrow[ddd, "\mathrm{id}"] & & & \widehat{\mathcal{C}}(y(a), G) \arrow[ddd, "\mathrm{ev}_c"] & \\
\widehat{\mathcal{C}}(F, G) \otimes \widehat{\mathcal{C}}(y(a), F) \arrow[rrr, "m"'] \arrow[ddd, "\mathrm{ev}_c \otimes \mathrm{ev}_c"'] & & & \widehat{\mathcal{C}}(y(a), G) \arrow[ur, "\mathrm{id}"'] \arrow[ddd, "\mathrm{ev}_c"] & & \\
 & & {[Fa, Ga] \otimes Fa} \arrow[rrr, "\mathrm{ev}"] & & & Ga \arrow[dl, "\zeta_c^{aG}"] \\
 & \widehat{\mathcal{C}}(F, G) \otimes Fa \arrow[ur, "\mathrm{ev}_a \otimes \mathrm{id}"'] \arrow[dl, "\mathrm{ev}_c \otimes \zeta_c^{aF}"] & & & {[\mathcal{C}(c, a), Gc]} & \\
{[Fc, Gc] \otimes [\mathcal{C}(c, a), Fc]} \arrow[rrr, "m"'] & & & {[\mathcal{C}(c, a), Gc]} \arrow[ur, "\mathrm{id}"'] & &
\end{tikzcd}
$$

側面の四角は ψ, ev の定義などから可換である．底面の可換性は随伴により次の図式の可換性と同値である．

$$\begin{tikzcd}
{[Fa, Ga]} \arrow[rr, "\mathrm{id}"] & & {[Fa, Ga]} \arrow[d, "{[\mathrm{id}, \zeta_c^{aG}]}"] \\
\widehat{\mathcal{C}}(F, G) \arrow[u, "\mathrm{ev}_a"] \arrow[d, "\mathrm{ev}_c"'] & & {[Fa, [\mathcal{C}(c, a), Gc]]} \\
{[Fc, Gc]} \arrow[r, "{[\mathcal{C}(c,a), -]}"'] & {[[\mathcal{C}(c, a), Fc], [\mathcal{C}(c, a), Gc]]} \arrow[ru, "{[\zeta_c^{aF}, \mathrm{id}]}"'] &
\end{tikzcd}$$

これは命題 99 と命題 75, 76 より ζ_c^{aF} が F について自然だから可換である．

以上によりエンド $\widehat{\mathcal{C}}(y(a), G)$ の普遍性から上面も可換となり，$(**)$ が可換であることが分かった．□

命題 107. 米田の補題 (定理 103) で得られた同型を $\varphi\colon \widehat{\mathcal{C}}(y(a), F) \to Fa$ とするとき，次の図式は可換である．

$$\begin{tikzcd}
\widehat{\mathcal{C}}(y(a), F) \arrow[r, "\mathrm{ev}_a"] \arrow[d, "\varphi"'] & {[\mathcal{C}(a, a), Fa]} \arrow[d, "{[j_a, \mathrm{id}]}"] \\
Fa \arrow[r, "i"'] & {[I, Fa]}
\end{tikzcd}$$

証明. φ の定義より

$$\begin{tikzcd}
Fa \arrow[r, "\zeta_a^{aF}"] & {[\mathcal{C}(a, a), Fa]} \arrow[d, "{[j_a, \mathrm{id}]}"] \\
Fa \arrow[u, "\mathrm{id}"] \arrow[r, "i"'] & {[I, Fa]}
\end{tikzcd}$$

が可換であることを示せばよい．この可換性は同型 104 により

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}(a, a) \arrow[r, "F_{aa}"] & {[Fa, Fa]} \arrow[d, "{[\mathrm{id}, \mathrm{id}]}"] \\
I \arrow[u, "j_a"] \arrow[r, "j_{Fa}"'] & {[Fa, Fa]}
\end{tikzcd}$$

の可換性と同値である．これは F が V-関手だから可換である．□

命題 108. $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, $G\colon \mathcal{D}^{\mathrm{op}} \otimes \mathcal{C} \to \mathcal{V}$ を V-関手として各 $c \in \mathcal{C}$ に対して，$d \in \mathcal{D}$ について自然な V の射 $\theta^c_d\colon \mathcal{D}(d, Fc) \to G(d,c)$ が与えられているとする．これは V-自然変換 $\theta^c\colon y(Fc) \Rightarrow G(-,c)$ であるから補題 102 により V の射 $\sigma_c := h(\theta^c)\colon I \to G(Fc,c)$ が得られる．このとき

$$\theta^c_d \text{ が } c \in \mathcal{C} \text{ について自然} \Longleftrightarrow \sigma_c \text{ が } c \in \mathcal{C} \text{ について自然}.$$

証明. $(\Longrightarrow)$ $\sigma_c = h(\theta^c) = (I \xrightarrow{j_{Fc}} \mathcal{D}(Fc, Fc) \xrightarrow{\theta^c_{Fc}} G(Fc,c))$ であるから命題 60, 68, 71, 79 より σ_c は $c \in \mathcal{C}$ について自然である．

$(\Longleftarrow)$ 補題 102 の証明より θ^c_d は合成

$$\mathcal{D}(d, Fc) \xrightarrow{G(-,c)} [G(Fc,c), G(d,c)] \xrightarrow{[\sigma_c, \mathrm{id}]} [I, G(d,c)] \xrightarrow{i^{-1}} G(d,c)$$

で与えられる．よって命題 69, 73, 86, 91 より θ^c_d は $c \in \mathcal{C}$ について自然である． □

例 109. 単位的環 R を 1 点 **Ab**-豊穣圏とみなしたとき (例 39)，$U(\widehat{R})$ は「右 R 加群と準同型写像がなす圏」とみなすことができる．

∵) まず $F\colon R^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Ab}$ を **Ab**-関手とする．このとき $M := F(*)$ はアーベル群である．すると $r \in R$ の M への右からの作用が $Fr\colon M \to M$ によって定まり，M は右 R 加群となる．逆に M を右 R 加群とすれば，**Ab**-関手 $R^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Ab}$ が定まることも分かる．

次に $F, G\colon R^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Ab}$ を **Ab**-関手として **Ab**-自然変換 $\theta\colon F \Rightarrow G$ を考える．即ち $\theta_*\colon F(*) \to G(*)$ は **Ab** の射である．θ_* は $* \in R^{\mathrm{op}}$ について自然だから

$$\begin{tikzcd} & \mathbf{Ab}(F(*), F(*)) \arrow[dr, "\theta_* \circ -"] & \\ R(*,*) \arrow[ur, "F_{**}"] \arrow[dr, "G_{**}"'] & & \mathbf{Ab}(F(*), G(*)) \\ & \mathbf{Ab}(G(*), G(*)) \arrow[ur, "- \circ \theta_*"'] & \end{tikzcd}$$

は可換である．よって $r \in R$ に対して $\theta_* \circ Fr = Gr \circ \theta_*$ となる．これは $m \in F(*)$ に対して

$$\theta_*(rm) = r\theta_*(m)$$

を意味する．即ち $\theta_*\colon F(*) \to G(*)$ は R 準同型写像である．逆に R 準同型写像からは **Ab**-自然変換が定まる．

以上の対応により $U(\widehat{R})$ は「右 R 加群と準同型写像がなす圏」とみなせる．

同様にして $R \to \mathbf{Ab}$ は左 R 加群であり，$R \otimes S^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Ab}$ は左 R 右 S 加群である．

$F, G \in \widehat{R}$ とする．このとき $\widehat{R}(F, G)$ はアーベル群である．これがどのような加法でアーベル群になっているか確認しよう．まず集合としては

$$\widehat{R}(F, G) = \{\theta \colon F \Rightarrow G\}$$

である．一方定義より $\widehat{R}(F, G) = \displaystyle\int_{* \in R^{\mathrm{op}}} \mathbf{Ab}(F(*), G(*))$ だから

$$(\mathrm{ev}_*)_{FG} \colon \widehat{R}(F, G) \to \mathbf{Ab}(F(*), G(*))$$

が定まっている．$(\mathrm{ev}_*)_{FG}$ は $\mathbf{Ab}$ の射だから，$\theta, \sigma \in \widehat{R}(F, G)$ に対して

$$\mathrm{ev}_*(\theta + \sigma) = \mathrm{ev}_*(\theta) + \mathrm{ev}_*(\sigma)$$

となる．更に ev_* の定義より $\mathrm{ev}_*(\theta) = \theta_*$ である．よって

$$(\theta + \sigma)_* = \theta_* + \sigma_*$$

である．つまり R 準同型写像 $f, g \colon F(*) \to G(*)$ を上記の方法で $f, g \in \widehat{R}(F, G)$ とみなしたとき，$f + g \colon F(*) \to G(*)$ は

$$(f + g)(m) := f(m) + g(m)$$

で与えられる R 準同型写像である．

$y \colon R \to \widehat{R}$ を米田埋込とすると $y(*) \in \widehat{R}$ である．これは R を乗法によって右 R 加群とみなしたものに対応する．米田の補題 (定理 103) によれば $F \in \widehat{R}$ に対して $\mathbf{Ab}$ の同型 $\widehat{R}(y(*), F) \cong F(*)$ が成り立つ．従って上で述べた対応によれば，R 準同型写像 $R = y(*)(*) \to F(*)$ と $F(*)$ の元は 1 対 1 に対応する．

次に $M \colon R^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Ab}$，$N \colon R \to \mathbf{Ab}$ を $\mathbf{Ab}$-関手とする．即ち M は右 R-加群で N は左 R-加群とみなせる．このとき $\mathbf{Ab}$-関手 $T \colon R^{\mathrm{op}} \otimes R \to \mathbf{Ab}$ が $T(*, *) := M \otimes_{\mathbb{Z}} N$，$T(r, s) := Mr \otimes_{\mathbb{Z}} Ns$ により定まる．このとき

$$\int^{* \in R} T(*, *) = M \otimes_R N$$

となる．最後にこれを示そう．まず写像 $f \colon M \times N \to M \otimes_R N$ を $f(m, n) := m \otimes_R n$

で定める．これは双線型である．

$$
\begin{tikzcd}
M \times N \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\otimes"'] & M \otimes_R N \\
M \otimes_{\mathbb{Z}} N \arrow[ur, dashed, "\zeta_*"'] &
\end{tikzcd}
$$

よってテンソル積の普遍性により準同型 $\zeta_*\colon M \otimes_{\mathbb{Z}} N \to M \otimes_R N$ が得られる．$m \in M$，$n \in N$，$r \in R$ に対して

$$
\begin{aligned}
\zeta_* \circ T(\mathrm{id}, r)(m \otimes_{\mathbb{Z}} n) &= m \otimes_R rn, \\
\zeta_* \circ T(r, \mathrm{id})(m \otimes_{\mathbb{Z}} n) &= mr \otimes_R n
\end{aligned}
$$

となる．従って $\zeta_* \circ T(\mathrm{id}, r) = \zeta_* \circ T(r, \mathrm{id})$ である．故に $\zeta_*\colon T(*, *) \to M \otimes_R N$ は $* \in R$ について自然である．

$\sigma_*\colon T(*, *) \to X$ が $* \in R$ について自然であるとする．$m \in M$，$n \in N$，$r \in R$ に対して

$$
\begin{aligned}
\sigma_* \circ T(\mathrm{id}, r)(m \otimes_{\mathbb{Z}} n) &= \sigma_*(m \otimes_{\mathbb{Z}} rn), \\
\sigma_* \circ T(r, \mathrm{id})(m \otimes_{\mathbb{Z}} n) &= \sigma_*(mr \otimes_{\mathbb{Z}} n)
\end{aligned}
$$

なので $\sigma_*(m \otimes_{\mathbb{Z}} rn) = \sigma_*(mr \otimes_{\mathbb{Z}} n)$ である．故に $f\colon M \otimes_R N \to X$ を $f(m \otimes_R n) := \sigma_*(m \otimes_{\mathbb{Z}} n)$ で定めれば $f \circ \zeta_* = \sigma_*$ となる．またこのような f は明らかに一意である．以上により $\displaystyle\int^{* \in R} T(*, *) = M \otimes_R N$ である． □

定義. V-関手 $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ が V-忠実充満
$\iff$ 各対象 $a, b \in \mathcal{C}$ に対して，V の射 $F_{ab}\colon \mathcal{C}(a, b) \to \mathcal{D}(Fa, Fb)$ が同型射.

系 110. 米田埋込 $y\colon \mathcal{C} \to \widehat{\mathcal{C}}$ は V-忠実充満である．

証明. $y_{ab}\colon \mathcal{C}(a, b) \to \widehat{\mathcal{C}}(y(a), y(b))$ はエンドの普遍性により

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{C}(a, b) \arrow[r, "y_{ab}"] \arrow[dr, "\mathcal{C}(c, -)_{ab}"'] & \widehat{\mathcal{C}}(y(a), y(b)) \arrow[d, "\mathrm{ev}_c"] \\
& {[\mathcal{C}(c, a), \mathcal{C}(c, b)]}
\end{tikzcd}
$$

から定まる V の射である．これは定理 106 で $F = \mathcal{C}(-, b)$ としたときの ψ_{aF} と一致

する．

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}(a,b) \arrow[r, "\psi_{aF}"] \arrow[dr, "\mathcal{C}(c,-)_{ab} = \zeta_c^{aF}"'] & \widehat{\mathcal{C}}(y(a),y(b)) \arrow[d, "\mathrm{ev}_c"] \\ & {[\mathcal{C}(c,a),\mathcal{C}(c,b)]} \end{tikzcd}$$

ψ_{aF} は同型だったから y_{ab} も同型である． □

V-関手 $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ に対して，$U(F)$ が与える写像 $\mathrm{Hom}_{U\mathcal{C}}(a,b) \to \mathrm{Hom}_{U\mathcal{D}}(Fa,Fb)$ は $\mathrm{Hom}_V(I,F_{ab}) = (F_{ab} \circ -)$ で与えられる．故に F が V-忠実充満ならば $U(F)$ は忠実充満である．

系 111. $y(a) \cong y(b)$ ならば $a \cong b$ である．

証明. y が V-忠実充満だから $U(y)$ も忠実充満であり，従って成り立つ． □

命題 112. $\theta_c\colon \mathcal{C}(c,a) \to \mathcal{C}(c,b)$ が $c \in \mathcal{C}$ について自然なとき，ある $h\colon a \nrightarrow b$ が存在して $\theta_c = h \circ -$ と書ける．また，このとき $h = \bigl(I \xrightarrow{j_a} \mathcal{C}(a,a) \xrightarrow{\theta_a} \mathcal{C}(a,b)\bigr)$ である．(従ってこのような h は一意である．)

証明. $\theta\colon y(a) \Rightarrow y(b)$ が V-自然変換 (即ち $\widehat{\mathcal{C}}$ の射) で，$y\colon \mathcal{C} \to \widehat{\mathcal{C}}$ が V-忠実充満だから，ある $\mathcal{C}$ の射 $h\colon a \nrightarrow b$ が存在して $\theta = y(h)$ と書ける．このとき $\theta_c = y(h)_c = h \circ -$ である．また命題 44 より

$$\begin{aligned}\bigl(I \xrightarrow{j_a} \mathcal{C}(a,a) \xrightarrow{\theta_a} \mathcal{C}(a,b)\bigr) &= \bigl(I \xrightarrow{j_a} \mathcal{C}(a,a) \xrightarrow{h\circ -} \mathcal{C}(a,b)\bigr) \\ &= h \circ j_a = h\end{aligned}$$

である． □

命題 113. 命題 112 において θ が V-自然同型 $\iff$ h が同型.

証明. 命題 112 の証明より $\theta = y(h)$ で，y が V-忠実充満であるから明らか. □

定義. V-関手 $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{V}$ が表現可能
$\iff$ ある $a \in \mathcal{C}$ と V-自然同型 $F \cong \mathcal{C}(a,-)$ が存在する．

このとき a は F を表現するという．系 111 により，表現可能 V-関手を表現する対象は同型を除いて一意である．

定理 114. $T\colon \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \otimes \mathcal{D} \to \mathcal{V}$ を V-関手として，各 $c \in \mathcal{C}$ に対して $T(c,-)$ が表現可能であるとする．即ち対象 $d_c \in \mathcal{D}$ と V-自然同型 $\theta_c\colon \mathcal{D}(d_c,-) \Rightarrow T(c,-)$ が存在するとする．このとき次の条件を満たす V-関手 $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ が一意に存在する．

(1) $c \in \mathcal{C}$ に対して $Fc = d_c$ である．

(2) $\theta_c\colon \mathcal{D}(Fc,-) \Rightarrow T(c,-)$ は $c \in \mathcal{C}$ について自然である．

証明. 証明の前に準備として $\eta_c := \big(I \xrightarrow{j_{d_c}} \mathcal{D}(d_c,d_c) \xrightarrow{(\theta_c)_{d_c}} T(c,d_c)\big)$ と定める．補題 102 の証明により，$(\theta_c)_d$ は合成

$$\mathcal{D}(d_c,d) \xrightarrow{T(c,-)} [T(c,d_c),T(c,d)] \xrightarrow{[\eta_c,\mathrm{id}]} [I,T(c,d)] \xrightarrow{i^{-1}} T(c,d) \tag{115}$$

と一致する．

さて，まず F の一意性を示す．そのために条件を満たす V-関手 $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ が存在したとする．このとき $(\theta_c)_d\colon \mathcal{D}(Fc,d) \to T(c,d)$ が $c \in \mathcal{C}$ について自然だから，命題 71 により $\eta_c\colon I \to T(c,Fc)$ は c について自然である．即ち次の図式の一番外側は可換である．

$$\begin{tikzcd}
 & & {[T(a,Fa),T(a,Fb)]} \arrow[ddr, "{[\eta_a,\mathrm{id}]}"] & \\
 & \mathcal{D}(Fa,Fb) \arrow[ur, "{T(a,-)}"] \arrow[dr, "(\theta_a)_{Fb}"'] & (115) & \\
\mathcal{C}(a,b) \arrow[ur, "F_{ab}"] \arrow[ddrr, "{T(-,Fb)_{ab}}"'] & & T(a,Fb) \arrow[r, "i"'] & {[I,T(a,Fb)]} \\
 & & (\triangle) & \\
 & & {[T(b,Fb),T(a,Fb)]} \arrow[uur, "{[\eta_b,\mathrm{id}]}"'] &
\end{tikzcd} \tag{116}$$

ここで (115) は合成 (115) により可換である．故に $(\triangle)$ も可換となる．従って $a,b \in \mathcal{C}$ に対して V の射 F_{ab} は合成

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}(a,b) &\xrightarrow{T(-,Fb)_{ab}} [T(b,Fb),T(a,Fb)] \xrightarrow{[\eta_b,\mathrm{id}]} [I,T(a,Fb)] \\
&\xrightarrow{i^{-1}} T(a,Fb) \xrightarrow{(\theta_a)_{Fb}^{-1}} \mathcal{D}(Fa,Fb)
\end{aligned}$$

になるしかない．故にこのような V-関手 F は一意である．

F の存在を示す．そのために $c \in \mathcal{C}$ に対して $Fc := d_c$ として，V の射 F_{ab} を合成

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}(a,b) &\xrightarrow{T(-,Fb)_{ab}} [T(b,Fb),T(a,Fb)] \xrightarrow{[\eta_b,\mathrm{id}]} [I,T(a,Fb)] \\
&\xrightarrow{i^{-1}} T(a,Fb) \xrightarrow{(\theta_a)_{Fb}^{-1}} \mathcal{D}(Fa,Fb)
\end{aligned}$$

により定める (上の $(\triangle)$ を参照)．これにより F は V-関手 $\mathcal{C} \to \mathcal{D}$ となる．

∵) まず次の図式 [A] を考える．

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}_{bc}\mathcal{C}_{ab} \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "F\otimes\mathrm{id}"'] \arrow[dr, phantom, "(\gamma)"] & \mathcal{C}_{ab}\mathcal{C}_{bc} \arrow[r, "T(-,Fc)\otimes\mathrm{id}"] \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes F"] \arrow[dr, phantom, "(\otimes)"] & {[T_{bFc},T_{aFc}]}\mathcal{C}_{bc} \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes F"] \\
\mathcal{D}_{FbFc}\mathcal{C}_{ab} \arrow[r, "\gamma"'] \arrow[dd, "\mathrm{id}\otimes T(-,Fb)"'] & \mathcal{C}_{ab}\mathcal{D}_{FbFc} \arrow[r, "T(-,Fc)\otimes\mathrm{id}"'] & {[T_{bFc},T_{aFc}]}\mathcal{D}_{FbFc} \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes T(b,-)"] \\
 & (30) & {[T_{bFc},T_{aFc}][T_{bFb},T_{bFc}]} \arrow[d, "m"] \\
\mathcal{D}_{FbFc}[T_{bFb},T_{aFb}] \arrow[r, "T(a,-)\otimes\mathrm{id}"] \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes{[(\theta_b)_{Fb},\mathrm{id}]}"'] \arrow[dr, phantom, "(\otimes)"] & {[T_{aFb},T_{aFc}][T_{bFb},T_{aFb}]} \arrow[r, "m"] \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes{[(\theta_b)_{Fb},\mathrm{id}]}"] \arrow[dr, phantom, "(m)"] & {[T_{bFb},T_{aFc}]} \arrow[d, "{[(\theta_b)_{Fb},\mathrm{id}]}"] \\
\mathcal{D}_{FbFc}[\mathcal{D}_{FbFb},T_{aFb}] \arrow[r, "T(a,-)\otimes\mathrm{id}"] \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes{[j_{Fb},\mathrm{id}]}"'] \arrow[dr, phantom, "(\otimes)"] & {[T_{aFb},T_{aFc}][\mathcal{D}_{FbFb},T_{aFb}]} \arrow[r, "m"] \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes{[j_{Fb},\mathrm{id}]}"] \arrow[dr, phantom, "(m)"] & {[\mathcal{D}_{FbFb},T_{aFc}]} \arrow[d, "{[j_{Fb},\mathrm{id}]}"] \\
\mathcal{D}_{FbFc}[I,T_{aFb}] \arrow[r, "T(a,-)\otimes\mathrm{id}"] \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes i^{-1}"'] \arrow[dr, phantom, "(\otimes)"] & {[T_{aFb},T_{aFc}][I,T_{aFb}]} \arrow[r, "m"] \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes i^{-1}"] \arrow[dr, phantom, "(15)"] & {[I,T_{aFc}]} \arrow[d, "i^{-1}"] \\
\mathcal{D}_{FbFc}T_{aFb} \arrow[r, "T(a,-)\otimes\mathrm{id}"] \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes(\theta_a)^{-1}_{Fb}"'] & {[T_{aFb},T_{aFc}]}T_{aFb} \arrow[r, "\mathrm{ev}"] \arrow[d, phantom, "(*)"] & T_{aFc} \arrow[d, "(\theta_a)^{-1}_{Fc}"] \\
\mathcal{D}_{FbFc}\mathcal{D}_{FaFb} \arrow[rr, "m"'] & & \mathcal{D}_{FaFc}
\end{tikzcd}$$

(γ)，(m) は γ，m の自然性により可換である．$(\otimes)$ は $\otimes$ が関手だから可換である．(15)，(30) は補題 15, 30 により可換である．$(*)$ については，$(\theta_a)_d^{-1}\colon T(a,d)\to\mathcal{D}(Fa,d)$ が $d\in\mathcal{D}$ について自然だから，次の図式が可換となり，従って随伴を考えれば分かる．

$$\begin{tikzcd}
{[T(a,Fb),T(a,Fc)]} \arrow[r, "\mathrm{id}"] & {[T(a,Fb),T(a,Fc)]} \arrow[d, "{[\mathrm{id},(\theta_a)^{-1}_{Fc}]}"] \\
\mathcal{D}(Fb,Fc) \arrow[u, "T(a,-)"] \arrow[d, "\mathrm{id}"'] & {[T(a,Fb),\mathcal{D}(Fa,Fc)]} \\
\mathcal{D}(Fb,Fc) \arrow[r, "\mathcal{D}(Fa,-)"'] & {[\mathcal{D}(Fa,Fb),\mathcal{D}(Fa,Fc)]} \arrow[u, "{[(\theta_a)^{-1}_{Fb},\mathrm{id}]}"']
\end{tikzcd}$$

次に次の図式 [B] を考える．

$$
\begin{tikzcd}
{[T_{bFc},T_{aFc}]\mathcal{C}_{bc}} \arrow[drr, "\mathrm{id}\otimes T(-,Fc)"] \arrow[ddddd, "\mathrm{id}\otimes F"'] & & & \\
& & {[T_{bFc},T_{aFc}][T_{cFc},T_{bFc}]} \arrow[r, "m"] \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes[(\theta_c)_{Fc},\mathrm{id}]"] \arrow[dr, phantom, "(m)"] & {[T_{cFc},T_{aFc}]} \arrow[d, "{[(\theta_c)_{Fc},\mathrm{id}]}"] \\
& & {[T_{bFc},T_{aFc}][\mathcal{D}_{FcFc},T_{bFc}]} \arrow[r, "m"] \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes[j_{Fc},\mathrm{id}]"] \arrow[dr, phantom, "(m)"] & {[\mathcal{D}_{FcFc},T_{aFc}]} \arrow[d, "{[j_{Fc},\mathrm{id}]}"] \\
& (F) & {[T_{bFc},T_{aFc}][I,T_{bFc}]} \arrow[r, "m"] \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes i^{-1}"] \arrow[dr, phantom, "(15)"] & {[I,T_{aFc}]} \arrow[d, "i^{-1}"] \\
& & {[T_{bFc},T_{aFc}]T_{bFc}} \arrow[r, "\mathrm{ev}"] \arrow[dll, "\mathrm{id}\otimes(\theta_b)^{-1}_{Fc}"'] \arrow[ddddd, bend left=60, "\mathrm{id}\otimes i"] & T_{aFc} \arrow[ddddddlll, bend left, "\mathrm{id}"] \\
{[T_{bFc},T_{aFc}]\mathcal{D}_{FbFc}} \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes T(b,-)"'] & & (*) & \\
{[T_{bFc},T_{aFc}][T_{bFb},T_{bFc}]} \arrow[d, "m"'] \arrow[drr, "\mathrm{id}\otimes[(\theta_b)_{Fb},\mathrm{id}]"] & & & \\
{[T_{bFb},T_{aFc}]} \arrow[d, "{[(\theta_b)_{Fb},\mathrm{id}]}"'] & (m) & {[T_{bFc},T_{aFc}][\mathcal{D}_{FbFb},T_{bFc}]} \arrow[dll, "m"] \arrow[dd, "\mathrm{id}\otimes[j_{Fb},\mathrm{id}]"] & \\
{[\mathcal{D}_{FbFb},T_{aFc}]} \arrow[d, "{[j_{Fb},\mathrm{id}]}"'] & (m) & & \\
{[I,T_{aFc}]} \arrow[d, "i^{-1}"'] & & {[T_{bFc},T_{aFc}][I,T_{bFc}]} \arrow[ll, "m"'] & \\
T_{aFc} & (15) & &
\end{tikzcd}
$$

(F) は F の定義である．(m) は m の自然性により可換である．(15) は補題 15 により可換である．$(*)$ が可換であることを示すには，η の定義より次の図式の可換性を示せばよいが，それは上で述べた合成 (115) より分かる．

$$
\begin{tikzcd}
{[T_{bFc},T_{aFc}]\mathcal{D}_{FbFc}} \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes T(b,-)"'] & {[T_{bFc},T_{aFc}]T_{bFc}} \arrow[l, "\mathrm{id}\otimes(\theta_b)^{-1}_{Fc}"'] \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes i"] \\
{[T_{bFc},T_{aFc}][T_{bFb},T_{bFc}]} \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes[\eta_b,\mathrm{id}]"'] & {[T_{bFc},T_{aFc}][I,T_{bFc}]}
\end{tikzcd}
$$

これらを組み合わせて次の図式を得る．

$$
\begin{tikzcd}
 & & \mathcal{C}_{ac} \arrow[d, "T(-,Fc)"] \arrow[dddl, bend left, "F_{ac}"] \\
\mathcal{C}_{bc}\mathcal{C}_{ab} \arrow[urr, bend left, "m_{abc}"] \arrow[r] \arrow[ddd, "F_{bc}\otimes F_{ab}"'] \arrow[ddr, phantom, "{[A]}"] & \cdot \arrow[r] \arrow[ddd] \arrow[ur, phantom, "(*)"] \arrow[dr, phantom, "{[B]}"] & \cdot \arrow[ddl] \arrow[dd, phantom, "(F \text{ の定義})"] \\
 & & \\
 & \cdot & \\
\mathcal{D}_{FbFc}\mathcal{D}_{FaFb} \arrow[r, "m_{FaFbFc}"'] & \mathcal{D}_{FaFc} &
\end{tikzcd}
$$

ここで $(*)$ は $T(-,Fc)$ が V-関手だから可換である．

また次の図式も明らかに可換である．

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathcal{C}(a,a) \arrow[d, "T(-,Fa)"] \arrow[dddd, bend left=60, "F"] \\
I \arrow[ur, bend left, "j_a"] \arrow[r, "j_{T(a,Fa)}"'] \arrow[dddr, bend right, "j_{Fa}"'] & {[T(a,Fa),T(a,Fa)]} \arrow[d, "{[\eta_a,\mathrm{id}]}"] \\
 & {[I,T(a,Fa)]} \arrow[d, "i^{-1}"] \\
 & T(a,Fa) \arrow[d, "(\theta_a)^{-1}_{Fa}"] \\
 & \mathcal{D}(Fa,Fa) \arrow[uuu, bend left=60, "T(a,-)"]
\end{tikzcd}
$$

故に F は V-関手である．

このとき $F_{ab}\colon \mathcal{C}(a,b) \to \mathcal{D}(Fa,Fb)$ の定義から $(\triangle)$ は可換なので，図式 (116) は可換である．即ち $\eta_c\colon I \to T(c,Fc)$ は $c \in \mathcal{C}$ について自然である．よって合成 (115) と命題 70, 77, 91 より $(\theta_c)_d\colon \mathcal{D}(Fc,d) \Rightarrow T(c,d)$ は $c \in \mathcal{C}$ について自然である． □

4.4 V-随伴と V-同値

命題 117. $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, $G\colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ を V-関手とするとき

$$V\text{-随伴 } F \dashv G \text{ が成り立つ} \iff V\text{-}\mathbf{CAT} \text{ における随伴 } F \dashv G \text{ が成り立つ}.$$

証明. まず $\eta\colon \mathrm{id}_{\mathcal{C}} \Rightarrow GF$, $\varepsilon\colon FG \Rightarrow \mathrm{id}_{\mathcal{D}}$ を V-自然変換とする．$c \in \mathcal{C}$, $d \in \mathcal{D}$ に対して

V の射 $\varphi_{cd}\colon \mathcal{D}(Fc,d)\to\mathcal{C}(c,Gd)$ を合成

$$\mathcal{D}(Fc,d)\xrightarrow{G_{Fc,d}}\mathcal{C}(GFc,Gd)\xrightarrow{-\circ\eta_c}\mathcal{C}(c,Gd) \tag{118}$$

で定める．$\eta_c\colon c \nrightarrow GFc$ は $c\in\mathcal{C}$ について自然だから，補題 93 の双対と命題 58, 77 により φ_{cd} は c,d について自然である．同様に σ_{cd} を合成

$$\mathcal{C}(c,Gd)\xrightarrow{F_{c,Gd}}\mathcal{D}(Fc,FGd)\xrightarrow{\varepsilon_d\circ-}\mathcal{D}(Fc,d) \tag{119}$$

として次の図式を考える．

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{D}_{Fcd} \arrow[r, "G"] \arrow[d, "\rho^{-1}"'] \arrow[dr, phantom, "(\rho)"] & \mathcal{C}_{GFcGd} \arrow[d, "\rho^{-1}"'] \arrow[dr, "-\circ\eta_c"] & \\
\mathcal{D}_{Fcd}(II) \arrow[dd, "\mathrm{id}\otimes(\mathrm{id}\otimes F\eta_c)"'] \arrow[ddr, phantom, "(\lambda)"] & \mathcal{D}_{Fcd}I \arrow[l, "\mathrm{id}\otimes\lambda^{-1}"'] \arrow[r, "G\otimes\mathrm{id}"] \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes\eta_c"'] \arrow[dr, phantom, "(\otimes)"] & \mathcal{C}_{GFcGd}I \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes\eta_c"'] \arrow[r, phantom, "(-\circ f)"] & \mathcal{C}_{cGd} \arrow[dd, "F"] \\
 & \mathcal{D}_{Fcd}\mathcal{C}_{cGFc} \arrow[r, "G\otimes\mathrm{id}"] \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes F"'] \arrow[dr, phantom, "(\otimes)"] & \mathcal{C}_{GFcGd}\mathcal{C}_{cGFc} \arrow[ur, "m"'] \arrow[d, "F\otimes F"'] \arrow[r, phantom, "(F)"] & \\
\mathcal{D}_{Fcd}(I\mathcal{D}_{FcFGFc}) \arrow[dddr, "\mathrm{id}"'] \arrow[ddr, phantom, "(V)"] & \mathcal{D}_{Fcd}\mathcal{D}_{FcFGFc} \arrow[l, "\mathrm{id}\otimes\lambda^{-1}"'] \arrow[r, "FG\otimes\mathrm{id}"] \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes\mathrm{id}"'] \arrow[dr, phantom, "(\varepsilon)"] & \mathcal{D}_{FGFcFGd}\mathcal{D}_{FcFGFc} \arrow[r, "m"] \arrow[d, "(\varepsilon_d\circ-)\otimes\mathrm{id}"'] \arrow[dr, phantom, "(48)"] & \mathcal{D}_{FcFGd} \arrow[d, "\varepsilon_d\circ-"] \\
 & \mathcal{D}_{Fcd}\mathcal{D}_{FcFGFc} \arrow[r, "(-\circ\varepsilon_{Fc})\otimes\mathrm{id}"'] \arrow[d, "\rho^{-1}\otimes\mathrm{id}"'] \arrow[dr, phantom, "(-\circ f)"] & \mathcal{D}_{FGFcd}\mathcal{D}_{FcFGFc} \arrow[r, "m"'] \arrow[ddr, phantom, "(\mathcal{D})"] & \mathcal{D}_{Fcd} \\
 & (\mathcal{D}_{Fcd}I)\mathcal{D}_{FcFGFc} \arrow[r, "(\mathrm{id}\otimes\varepsilon_{Fc})\otimes\mathrm{id}"'] \arrow[d, "\alpha"'] \arrow[dr, phantom, "(\alpha)"] & (\mathcal{D}_{Fcd}\mathcal{D}_{FGFcFc})\mathcal{D}_{FcFGFc} \arrow[u, "m\otimes\mathrm{id}"'] \arrow[d, "\alpha"'] & \\
 & \mathcal{D}_{Fcd}(I\mathcal{D}_{FcFGFc}) \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes(\varepsilon_{Fc}\otimes\mathrm{id})"'] & \mathcal{D}_{Fcd}(\mathcal{D}_{FGFcFc}\mathcal{D}_{FcFGFc}) \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes m"'] & \mathcal{D}_{Fcd}\mathcal{D}_{FcFc} \arrow[uu, "m"']
\end{tikzcd}$$

(α), (λ), (ρ) は自然性から可換である．(V) はモノイダル圏の定義より可換である．$(\otimes)$ は $\otimes$ が関手だから可換である．(ε) は ε が V-自然変換だから可換である．$(-\circ f)$ は $-\circ f$ の定義より可換である．(F) は F が V-関手だから可換である．$(\mathcal{D})$ は V-豊穣圏の条件より可換である．(48) は命題 48 より可換である．以上によりこの図式は可換であ

る．さて，この図式の左回りの合成から得られる射

$$
\begin{aligned}
\mathcal{D}(Fc,d) &\xrightarrow{\rho^{-1}} \mathcal{D}(Fc,d)\otimes I \\
&\xrightarrow{\mathrm{id}\otimes\lambda^{-1}} \mathcal{D}(Fc,d)\otimes(I\otimes I) \\
&\xrightarrow{\mathrm{id}\otimes(\varepsilon_{Fc}\otimes F\eta_c)} \mathcal{D}(Fc,d)\otimes(\mathcal{D}(FGFc,Fc)\otimes\mathcal{D}(Fc,FGFc)) \\
&\xrightarrow{\mathrm{id}\otimes m} \mathcal{D}(Fc,d)\otimes\mathcal{D}(Fc,Fc) \\
&\xrightarrow{m} \mathcal{D}(Fc,d)
\end{aligned}
$$

は $-\circ(\varepsilon_{Fc}\circ F\eta_c)\colon \mathcal{D}(Fc,d)\to\mathcal{D}(Fc,d)$ である．故に $-\circ(\varepsilon_{Fc}\circ F\eta_c)=\sigma_{cd}\circ\varphi_{cd}$ が分かった．同様にして次の図式から

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathcal{C}_{cGd} \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\lambda^{-1}"'] \arrow[dr, phantom, "(\lambda)"] & \mathcal{D}_{FcFGd} \arrow[dr, "\varepsilon_d\circ-"] \arrow[d, "\lambda^{-1}"'] & \\
(II)\mathcal{C}_{cGd} \arrow[ddd, rounded corners, to path={|- (\tikztotarget)}, "\mathrm{id}"'] \arrow[dd, "(G\varepsilon_d\otimes\mathrm{id})\otimes\mathrm{id}"'] \arrow[ddr, phantom, "(\rho)"] & I\mathcal{C}_{cGd} \arrow[l, "\rho^{-1}\otimes\mathrm{id}"'] \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes F"] \arrow[d, "\varepsilon_d\otimes\mathrm{id}"'] \arrow[dr, phantom, "(\otimes)"] & I\mathcal{D}_{FcFGd} \arrow[d, "\varepsilon_d\otimes\mathrm{id}"'] \arrow[r, phantom, "(f\circ-)"] & \mathcal{D}_{Fcd} \arrow[dd, "G"] \\
 & \mathcal{D}_{FGdd}\mathcal{C}_{cGd} \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes F"] \arrow[d, "G\otimes\mathrm{id}"'] \arrow[dr, phantom, "(\otimes)"] & \mathcal{D}_{FGdd}\mathcal{D}_{FcFGd} \arrow[ur, "m"'] \arrow[d, "G\otimes G"'] \arrow[r, phantom, "(G)"] & \\
(\mathcal{C}_{GFGdGd}I)\mathcal{C}_{cGd} \arrow[dddr, phantom, "(V)"] & \mathcal{C}_{GFGdGd}\mathcal{C}_{cGd} \arrow[l, "\rho^{-1}\otimes\mathrm{id}"'] \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes GF"] \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes\mathrm{id}"'] \arrow[dr, phantom, "(\eta)"] & \mathcal{C}_{GFGdGd}\mathcal{C}_{GFcGFGd} \arrow[r, "m"] \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes(-\circ\eta_c)"'] \arrow[dr, phantom, "(49)"] & \mathcal{C}_{GFcGd} \arrow[d, "-\circ\eta_c"] \\
 & \mathcal{C}_{GFGdGd}\mathcal{C}_{cGd} \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes(\eta_{Gd}\circ-)"'] \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes\lambda^{-1}"'] \arrow[dr, phantom, "(f\circ-)"] & \mathcal{C}_{GFGdGd}\mathcal{C}_{cGFGd} \arrow[r, "m"'] \arrow[ddr, phantom, "(\mathcal{D})"] & \mathcal{C}_{cGd} \\
 & \mathcal{C}_{GFGdGd}(I\mathcal{C}_{cGd}) \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes(\eta_{Gd}\otimes\mathrm{id})"'] \arrow[dr, phantom, "(\alpha)"] & \mathcal{C}_{GFGdGd}(\mathcal{C}_{GdGFGd}\mathcal{C}_{cGd}) \arrow[u, "\mathrm{id}\otimes m"'] & \\
 & (\mathcal{C}_{GFGdGd}I)\mathcal{C}_{cGd} \arrow[u, "\alpha"'] \arrow[r, "(\mathrm{id}\otimes\eta_{Gd})\otimes\mathrm{id}"'] & (\mathcal{C}_{GFGdGd}\mathcal{C}_{GdGFGd})\mathcal{C}_{cGd} \arrow[u, "\alpha"'] \arrow[r, "m\otimes\mathrm{id}"'] & \mathcal{C}_{GdGd}\mathcal{C}_{cGd} \arrow[uu, "m"']
\end{tikzcd}
$$

$(G\varepsilon_d\circ\eta_{Gd})\circ-=\varphi_{cd}\circ\sigma_{cd}$ が分かる．

$(\Longrightarrow)$ $\varphi\colon \mathcal{D}(F-,\Box)\Rightarrow\mathcal{C}(-,G\Box)$ を V-自然同型とする．$c\in\mathcal{C}$ に対して，補題 102 を $\varphi_{c\Box}\colon \mathcal{D}(Fc,\Box)\Rightarrow\mathcal{C}(c,G\Box)$ に適用して $\eta_c:=h(\varphi_{c\Box})\colon I\to\mathcal{C}(c,GFc)$ を得る．これは $\mathcal{C}$ の射 $\eta_c\colon c\not\rightarrow\!\!\!\!\rightarrow GFc$ であり，補題 78 と命題 108 より η_c は c について自然である．そこで

次の図式を考える．

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{D}(Fc,d) \arrow[r, "G_{Fc,d}"] \arrow[d, "\varphi_{cd}"'] & \mathcal{C}(GFc,Gd) \arrow[r, "\mathcal{C}(c,-)"] \arrow[dl, "-\circ\eta_c"] & {[\mathcal{C}(c,GFc),\mathcal{C}(c,Gd)]} \arrow[d, "{[\eta_c,\mathrm{id}]}"] \\
\mathcal{C}(c,Gd) \arrow[r, phantom, "(*)"] \arrow[rr, phantom, "(51)"] & & {[I,\mathcal{C}(c,Gd)]} \arrow[ll, "i^{-1}"]
\end{tikzcd}$$

(51) は命題 51 から可換である．また一番外側は補題 102 の証明により可換である．従って $(*)$ も可換である．即ちここでの φ_{cd} は (118) で定義した φ_{cd} と一致していることが分かる．次に φ^{-1} と $d\in\mathcal{D}$ から得られる V-自然変換 $\varphi^{-1}_{-d}\colon \mathcal{C}(-,Gd)\Rightarrow\mathcal{D}(F-,d)$ に対して $\varepsilon_d := h(\varphi^{-1}_{-d})\colon I\to\mathcal{D}(FGd,d)$ とすると，η_c の場合と同様に

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}(c,Gd) \arrow[r, "F_{c,Gd}"] \arrow[d, "\varphi^{-1}_{cd}"'] & \mathcal{D}(Fc,FGd) \arrow[r, "\mathcal{D}(-,d)"] \arrow[dl, "\varepsilon_d\circ-"] & {[\mathcal{D}(FGd,d),\mathcal{D}(Fc,d)]} \arrow[d, "{[\varepsilon_d,\mathrm{id}]}"] \\
\mathcal{D}(Fc,d) & & {[I,\mathcal{D}(Fc,d)]} \arrow[ll, "i^{-1}"]
\end{tikzcd}$$

から φ^{-1}_{cd} が (119) で定義した σ_{cd} と一致していることが分かる．従って先に述べたことが使えて $\varepsilon_{Fc}\circ F\eta_c=\mathrm{id}$，$G\varepsilon_d\circ\eta_{Gd}=\mathrm{id}$ が分かる．

($\Longleftarrow$) 随伴 $F\dashv G\colon\mathcal{C}\to\mathcal{D}$ の unit, counit を η,ε とする．このとき $\varepsilon_{Fc}\circ F\eta_c=\mathrm{id}$，$G\varepsilon_d\circ\eta_{Gd}=\mathrm{id}$ である．故に命題 47 と上記のことから $\varphi_{cd}\circ\sigma_{cd}=\mathrm{id}$，$\sigma_{cd}\circ\varphi_{cd}=\mathrm{id}$ となり φ_{cd} は同型である． □

系 120. V-豊穣圏 $F\colon\mathcal{C}\to\mathcal{D}$ に対して

$$F \text{ が右随伴を持つ} \iff \text{任意の } d\in\mathcal{D} \text{ に対して } \mathcal{D}(F-,d) \text{ が表現可能.}$$

証明. ($\Longrightarrow$) 命題 117 より明らか.

($\Longleftarrow$) 定理 114 より V-関手 $G\colon\mathcal{D}\to\mathcal{C}$ が存在して $\mathcal{D}(F-,d)\cong\mathcal{C}(-,Gd)$ となる．更にこの同型は $d\in\mathcal{D}$ についても自然である．故に命題 117 より $F\dashv G$ である． □

随伴射を $\widetilde{\ }$ を付けて表すと，命題 117 の証明から分かる通り $f\colon Fc\to d$，$g\colon c\to Gd$ に対して

$$\widetilde{f}=(\ c\xrightarrow[V]{\eta_c}GFc\xrightarrow[V]{Gf}Gd\ ),\quad \widetilde{g}=(\ Fc\xrightarrow[V]{Fg}FGd\xrightarrow[V]{\varepsilon_d}d\ ) \tag{121}$$

であり，特に $\widetilde{\mathrm{id}_{Fc}}=\eta_c$，$\widetilde{\mathrm{id}_{Gd}}=\varepsilon_d$ である．

命題 122. $F\dashv G\colon\mathcal{C}\to\mathcal{D}$ を V-随伴として η をその unit とするとき

$$F \text{ が } V\text{-忠実充満} \iff \eta \text{ が同型}.$$

証明. 命題 117 の証明で定義した V-自然変換 σ を取る．$F_{ab}\colon \mathcal{C}(a,b) \to \mathcal{D}(Fa, Fb)$ と $\mathcal{C}(a,b) \xrightarrow{\eta_b \circ -} \mathcal{C}(a, GFb) \xrightarrow{\sigma_{aFb}} \mathcal{D}(Fa, Fb)$ はどちらも $a \in \mathcal{C}$ について自然である．よって補題 102 で対応する射をそれぞれ $f, g\colon I \to \mathcal{D}(Fb, Fb)$ とすると，補題 102 の証明より

$$\begin{aligned} f &= \big(I \xrightarrow{j_b} \mathcal{C}(b,b) \xrightarrow{F_{bb}} \mathcal{D}(Fb, Fb)\big) = j_{Fb} \\ g &= \big(I \xrightarrow{j_b} \mathcal{C}(b,b) \xrightarrow{\eta_b \circ -} \mathcal{C}(b, GFb) \xrightarrow{\sigma_{bFb}} \mathcal{D}(Fb, Fb)\big) = j_{Fb} \end{aligned}$$

だから $f = g$ となり，故に $F_{ab} = \big(\mathcal{C}(a,b) \xrightarrow{\eta_b \circ -} \mathcal{C}(a, GFb) \xrightarrow{\sigma_{aFb}} \mathcal{D}(Fa, Fb)\big)$ である．$F \dashv G$ が V-随伴だから σ_{aFb} は同型であり，よって命題 113 より同値性が分かる $\square$

定理 123. $\mathcal{A}, \mathcal{C}, \mathcal{D}$ を V-豊穣圏，$G\colon \mathcal{A}^{\mathrm{op}} \otimes \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ を V-関手として，任意の $a \in \mathcal{A}$ に対して V-随伴 $F_a \dashv G(a, -)\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ が存在するとする．このとき次の条件を満たす V-関手 $F\colon \mathcal{C} \otimes \mathcal{A} \to \mathcal{D}$ が一意に存在する．

(1) $a \in \mathcal{A}$ に対して $F(-, a) = F_a$ である．
(2) V-随伴 $F(-, a) \dashv G(a, -)$ による同型 $\mathcal{D}(F(c, a), d) \cong \mathcal{C}(c, G(a, d))$ は $a \in \mathcal{A}$ について自然である．

証明. $a \in \mathcal{A}$ に対して随伴 $F_a \dashv G(a, -)$ から同型 $\mathcal{D}(F_a(c), d) \cong \mathcal{C}(c, G(a, d))$ が得られる．即ち $c \in \mathcal{C}$，$a \in \mathcal{A}$ に対して $\mathcal{C}(c, G(a, -))$ は表現可能である．よって定理 114 より V-関手 $F\colon \mathcal{C} \otimes \mathcal{A} \to \mathcal{D}$ が一意に存在して $F(c, a) = F_a(c)$ かつ，$c \in \mathcal{C}$，$a \in \mathcal{A}$ について自然な同型 $\mathcal{D}(F(c, a), -) \cong \mathcal{C}(c, G(a, -))$ が成り立つ．よって $F(-, a) \dashv G(a, -)$ となるから左随伴の一意性により $F(-, a) = F_a$ である． $\square$

定義. $x \in \mathcal{V}$，$a \in \mathcal{C}$ を対象とする．

(1) V-関手 $[x, \mathcal{C}(a, -)]$ が表現可能なとき，これを表現する対象を copower object (もしくは tensor object[*10]) といい $x \odot a$ で表す．
(2) V-関手 $[x, \mathcal{C}(-, a)]$ が表現可能なとき，これを表現する対象を power object (もしくは cotensor object) といい $x \pitchfork a$ で表す．

定義より $\mathcal{C}(x \odot a, b) \cong [x, \mathcal{C}(a, b)]$，$\mathcal{C}(b, x \pitchfork a) \cong [x, \mathcal{C}(b, a)]$ である．

[*10] copower ではなくて tensor の方を採用している文献が多い気がするが，例 159 で分かるように copower は余極限なので copower の方が良いと思う．power についても同様．

定義. $\mathcal{C}$ を V-豊穣圏とする.

(1) $\mathcal{C}$ が copower を持つ $\iff$ 任意の $x \in \mathcal{V}$, $a \in \mathcal{C}$ に対して $x \odot a$ が存在する.
(2) $\mathcal{C}$ が power を持つ $\iff$ 任意の $x \in \mathcal{V}$, $a \in \mathcal{C}$ に対して $x \pitchfork a$ が存在する.

例 124. $V = \mathbf{Set}$ の場合, 圏 C と $a, b \in C$, $x \in \mathbf{Set}$ に対して

$$x \odot a \cong \coprod_{i \in x} a, \quad x \pitchfork a \cong \prod_{i \in x} a$$

である. 実際, b について自然に

$$\begin{aligned}\mathbf{Set}(x, C(a,b)) &\cong \prod_{i \in x} C(a,b) \cong C\Big(\coprod_{i \in x} a, b\Big)\\ \mathbf{Set}(x, C(b,a)) &\cong \prod_{i \in x} C(b,a) \cong C\Big(b, \prod_{i \in x} a\Big)\end{aligned}$$

である. 特に余完備な圏は copower を持ち, 完備な圏は power を持つ. □

例 125. $\mathcal{C} = \mathcal{V}$ の場合を考える. $[u, [v, w]] \cong [v, [u, w]]$ だった. この同型は $u \in \mathcal{V}$ について自然である. よって $u \pitchfork w \cong [u, w]$ である. 同様にして $u \odot v \cong u \otimes v$ が分かる. 以上により $\mathcal{V}$ は power, copower を持つ. □

$\mathcal{C}$ が copower を持つとき, 定理 123 を適用すれば copower が V-関手 $\odot\colon \mathcal{V} \otimes \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ を定めることが分かる. 更に系 120 より, $a \in \mathcal{C}$ に対して $- \odot a \dashv \mathcal{C}(a, -)\colon \mathcal{V} \to \mathcal{C}$ が分かる. 同様にして power は V-関手 $\pitchfork\colon \mathcal{V}^{\mathrm{op}} \otimes \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ を定め, $- \pitchfork a \dashv \mathcal{C}(-, a)\colon \mathcal{V} \to \mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ である.

以下, この節では copower による同型を $\varphi^{\odot}\colon \mathcal{C}(x \odot a, b) \to [x, \mathcal{C}(a, b)]$ と書く.

補題 126. V-豊穣圏 $\mathcal{C}$ は copower を持つとする. このとき $a \in \mathcal{C}$ と $u, v \in \mathcal{V}$ について自然な同型 $\alpha_{uva}\colon (u \otimes v) \odot a \nrightarrow u \odot (v \odot a)$ が存在する.

証明. $a, s \in \mathcal{C}$, $u, v \in \mathcal{V}$ について自然に

$$\begin{aligned}\mathcal{C}\big((u \otimes v) \odot a, s\big) &\cong [u \otimes v, \mathcal{C}(a, s)]\\ &\cong [u, [v, \mathcal{C}(a, s)]]\\ &\cong [u, \mathcal{C}(v \odot a, s)]\\ &\cong \mathcal{C}\big(u \odot (v \odot a), s\big)\end{aligned}$$

だから米田の補題 (命題 113) により同型 $(u \otimes v) \odot a \cong u \odot (v \odot a)$ が得られる. これは補題 78 と命題 108 により $a \in \mathcal{C}$, $u, v \in \mathcal{V}$ について自然である. □

補題 127. V-豊穣圏 $\mathcal{C}$ は copower を持つとして $-\odot a \dashv \mathcal{C}(a,-)$ の counit を ev とする．このとき次の図式は可換である．

$$
\begin{tikzcd}
(\mathcal{C}(b,c)\otimes\mathcal{C}(a,b))\odot a \arrow[r, "m_{abc}\odot\mathrm{id}"] \arrow[r, "V" description] \arrow[dd, "\alpha"'] \arrow[dd, "V" description] & \mathcal{C}(a,c)\odot a \arrow[dr, "\mathrm{ev}"] \arrow[dr, "V" description] & \\
& & c \\
\mathcal{C}(b,c)\odot(\mathcal{C}(a,b)\odot a) \arrow[r, "\mathrm{id}\odot\mathrm{ev}"'] \arrow[r, "V" description] & \mathcal{C}(b,c)\odot b \arrow[ur, "\mathrm{ev}"'] \arrow[ur, "V" description] &
\end{tikzcd}
$$

証明. ($U\mathcal{C}$ における) 米田の補題より，任意の $s\in\mathcal{C}$ に対して

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{U\mathcal{C}}\big((\mathcal{C}(b,c)\otimes\mathcal{C}(a,b))\odot a, s\big) & & \mathrm{Hom}_{U\mathcal{C}}\big(\mathcal{C}(a,c)\odot a, s\big) \arrow[ll, "-\circ(m_{abc}\odot\mathrm{id})"'] \\
& & \mathrm{Hom}_{U\mathcal{C}}(c,s) \arrow[u, "-\circ\mathrm{ev}"'] \arrow[d, "-\circ\mathrm{ev}"] \\
\mathrm{Hom}_{U\mathcal{C}}\big(\mathcal{C}(b,c)\odot(\mathcal{C}(a,b)\odot a), s\big) \arrow[uu, "-\circ\alpha"] & & \mathrm{Hom}_{U\mathcal{C}}\big(\mathcal{C}(b,c)\odot b, s\big) \arrow[ll, "-\circ(\mathrm{id}\odot\mathrm{ev})"]
\end{tikzcd}
\tag{128}
$$

が可換であることを示せばよい．

まず

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_V(\mathcal{C}(a,b),\mathcal{C}(a,s)) \arrow[d, "\varphi^{\odot}"'] & \mathrm{Hom}_{U\mathcal{C}}(b,s) \arrow[l, "\mathcal{C}(a,-)"'] \arrow[dl, "-\circ\mathrm{ev}"] \\
\mathrm{Hom}_{U\mathcal{C}}(\mathcal{C}(a,b)\odot a, s) &
\end{tikzcd}
\tag{129}
$$

は可換である．

∵) ev が counit だから

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_V(\mathcal{C}(a,b),\mathcal{C}(a,s)) \arrow[d, "-\odot a"'] & \mathrm{Hom}_{U\mathcal{C}}(b,s) \arrow[l, "\mathcal{C}(a,-)"'] \arrow[d, "-\circ\mathrm{ev}"] \\
\mathrm{Hom}_{U\mathcal{C}}(\mathcal{C}(a,b)\odot a, \mathcal{C}(a,s)\odot a) \arrow[r, "\mathrm{ev}\circ-"'] & \mathrm{Hom}_{U\mathcal{C}}(\mathcal{C}(a,b)\odot a, s)
\end{tikzcd}
$$

が可換であることを示せばよい．そこで $f \in \mathrm{Hom}_{UC}(b,s)$ の行き先を考えると

$$
\begin{tikzcd}
f \circ - \arrow[d, mapsto, "-\odot a"'] & & f \arrow[ll, mapsto, "\mathcal{C}(a,-)"'] \arrow[d, mapsto, "-\circ \mathrm{ev}"] \\
 & & f \circ \mathrm{ev} \\
(f \circ -) \odot a \arrow[rr, mapsto, "\mathrm{ev}\circ -"'] & & \mathrm{ev} \circ ((f \circ -) \odot a)
\end{tikzcd}
$$

だから

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{C}(a,b) \odot a \arrow[r, "\mathrm{ev}"] \arrow[d, "(f\circ -)\odot a"'] & b \arrow[d, "f"] \\
\mathcal{C}(a,s) \odot a \arrow[r, "\mathrm{ev}"'] & s
\end{tikzcd}
$$

の可換性を示せばよいが，これは ev の自然性から成り立つ．

α の定義より，(128) は次のように書き換えられる．

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{UC}\big((\mathcal{C}(b,c)\otimes\mathcal{C}(a,b))\odot a, s\big) & \mathrm{Hom}_{UC}(\mathcal{C}(a,c)\odot a, s) \arrow[l, "-\circ(m_{abc}\odot \mathrm{id})"'] & \\
\mathrm{Hom}_V(\mathcal{C}(b,c)\otimes\mathcal{C}(a,b), \mathcal{C}(a,s)) \arrow[u, "(\varphi^{\odot})^{-1}"] \arrow[ur, phantom, "(\varphi^{\odot})"] & \mathrm{Hom}_V(\mathcal{C}(a,c), \mathcal{C}(a,s)) \arrow[l, "-\circ m_{abc}"'] \arrow[u, "(\varphi^{\odot})^{-1}"] \arrow[ur, phantom, "(129)"] & \\
\mathrm{Hom}_V(\mathcal{C}(b,c), [\mathcal{C}(a,b), \mathcal{C}(a,s)]) \arrow[u] & (*) & \\
\mathrm{Hom}_V(\mathcal{C}(b,c), \mathcal{C}(\mathcal{C}(a,b)\odot a, s)) \arrow[u, "\varphi^{\odot}\circ -"] \arrow[ur, phantom, "(129)"] & \mathrm{Hom}_V(\mathcal{C}(b,c), \mathcal{C}(b,s)) \arrow[l, "(-\circ \mathrm{ev})\circ -"] \arrow[ul, "\mathcal{C}(a,-)\circ -"'] & \mathrm{Hom}_{UC}(c,s) \arrow[l, "\mathcal{C}(b,-)"] \arrow[ul, "\mathcal{C}(a,-)"'] \arrow[uuul, bend right, "-\circ \mathrm{ev}"'] \arrow[dl, bend left, "-\circ \mathrm{ev}"] \\
\mathrm{Hom}_{UC}\big(\mathcal{C}(b,c)\odot(\mathcal{C}(a,b)\odot a), s\big) \arrow[u, "\varphi^{\odot}"] \arrow[ur, phantom, "(\varphi^{\odot})"] & \mathrm{Hom}_{UC}(\mathcal{C}(b,c)\odot b, s) \arrow[l, "-\circ(\mathrm{id}\odot \mathrm{ev})"] \arrow[u, "\varphi^{\odot}"] \arrow[ur, phantom, "(129)"] &
\end{tikzcd}
$$

よって $(*)$ が可換であることを示せばよい．そこで $f \in \mathrm{Hom}_{UC}(c,s)$ の行き先を考える．

$$
\begin{tikzcd}
(f\circ -)\circ m_{abc} & f \circ - \arrow[l, mapsto, "-\circ m_{abc}"'] & \\
\mathcal{C}(a,-)\circ(f\circ -) & (*) & \\
 & f \circ - \arrow[ul, mapsto, "\mathcal{C}(a,-)\circ -"] & f \arrow[l, mapsto, "\mathcal{C}(b,-)"] \arrow[uul, mapsto, "\mathcal{C}(a,-)"']
\end{tikzcd}
$$

全単射 $\mathrm{Hom}_V(\mathcal{C}(b,c)\otimes\mathcal{C}(a,b),\mathcal{C}(a,s))\cong\mathrm{Hom}_V(\mathcal{C}(b,c),[\mathcal{C}(a,b),\mathcal{C}(a,s)])$ で

$$\mathcal{C}(b,c)\otimes\mathcal{C}(a,b)\xrightarrow{m_{abc}}\mathcal{C}(a,c)\xrightarrow{f\circ-}\mathcal{C}(a,s)$$

に対応する射は

$$\mathcal{C}(b,c)\xrightarrow{\mathcal{C}(a,-)}[\mathcal{C}(a,b),\mathcal{C}(a,c)]\xrightarrow{[\mathrm{id},f\circ-]}[\mathcal{C}(a,s),\mathcal{C}(a,b)]$$

である．よって

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}(b,c) \arrow[r, "f\circ-"] \arrow[d, "\mathcal{C}(a,-)"'] & \mathcal{C}(b,s) \arrow[d, "\mathcal{C}(a,-)"] \\
{[\mathcal{C}(a,b),\mathcal{C}(a,c)]} \arrow[r, "{[\mathrm{id},f\circ-]}"'] & {[\mathcal{C}(a,b),\mathcal{C}(a,s)]}
\end{tikzcd}$$

が可換であることを示せばよいが，これは随伴 $-\otimes\mathcal{C}(a,b)\dashv[\mathcal{C}(a,b),-]$ により

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}(b,c)\otimes\mathcal{C}(a,b) \arrow[r, "(f\circ-)\otimes\mathrm{id}"] \arrow[d, "m"'] & \mathcal{C}(b,s)\otimes\mathcal{C}(a,b) \arrow[d, "m"] \\
\mathcal{C}(a,c) \arrow[r, "f\circ-"'] & \mathcal{C}(a,b)
\end{tikzcd}$$

となるから命題 48 より可換である． □

補題 130. V-豊穣圏 $\mathcal{C}$ は copower を持つとする．このとき $a\in\mathcal{C}$ について自然な同型 $\lambda_a\colon I\odot a\nrightarrow a$ が存在して次の図式が可換になる．

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}(a,b) \arrow[d, "-\circ\lambda_a"'] \arrow[dr, "i"] & \\
\mathcal{C}(I\odot a,b) \arrow[r, "\varphi^{\odot}"'] & {[I,\mathcal{C}(a,b)]}
\end{tikzcd} \tag{131}$$

証明. V-随伴 $-\odot a\dashv\mathcal{C}(a,-)$ による $j_a\colon I\to\mathcal{C}(a,a)$ の随伴射を $\lambda_a\colon I\odot a\nrightarrow a$ とする．

※ これは正確には次のようになる．同型 $\varphi^{\odot}\colon\mathcal{C}(I\odot a,a)\to[I,\mathcal{C}(a,a)]$ により全単射

$$\mathrm{Hom}_{U\mathcal{C}}(I\odot a,a)\to\mathrm{Hom}_{U\mathcal{V}}(I,\mathcal{C}(a,a))$$

が得られる．V の射 $j_a\colon I\to\mathcal{C}(a,a)$ を $\mathcal{V}$ の射とみなしたものを $\widetilde{j}_a\colon I\nrightarrow\mathcal{C}(a,a)$ と

書く (つまり $\widetilde{j}_a = (I \xrightarrow{i_I} [I,I] \xrightarrow{[I,j_a]} [I,\mathcal{C}(a,a)])$ である)．このとき $\widetilde{j}_a$ に対応するのが λ_a である．つまり次の図式が可換である．

$$
\begin{tikzcd}
I \arrow[r, "\lambda_a"] \arrow[d, "i_I"'] \arrow[dr, "\widetilde{j}_a"] & \mathcal{C}(I \odot a, a) \arrow[d, "\varphi^{\odot}"] \\
{[I,I]} \arrow[r, "{[\mathrm{id},j_a]}"'] & {[I,\mathcal{C}(a,a)]}
\end{tikzcd}
$$

補題 76 と命題 79 より，λ_a は $a \in \mathcal{C}$ について自然である．このとき (131) は可換である．

∵) これらの射は $b \in \mathcal{C}$ について自然なので，米田の補題により $\mathcal{C}$ の射 $\mathrm{id}_a\colon a \nrightarrow a$ の行き先が一致していることを示せばよい．そこで次の図式を考える．

$$
\begin{tikzcd}
I \arrow[r, "j_a"] \arrow[dr, bend right, "\lambda_a"'] \arrow[drr, bend right=60, "\widetilde{j}_a"'] \arrow[dr, phantom, "(\mathcal{C})"] & \mathcal{C}(a,a) \arrow[d, "-\circ\lambda_a"] \arrow[dr, "i"] \arrow[dr, phantom, "(131)"'] & \\
& \mathcal{C}(I \odot a, a) \arrow[r, "\varphi^{\odot}"'] \arrow[r, phantom, "(\lambda)", shift right=20] & {[I,\mathcal{C}(a,a)]}
\end{tikzcd}
$$

$(\mathcal{C})$ は豊穣圏の性質から可換である．(λ) は λ の定義から可換である．また一番外側については，随伴 $-\otimes I \dashv [I,-]$ を考えると

$$
\begin{tikzcd}
I \otimes I \arrow[r, "j_a \otimes \mathrm{id}"] \arrow[d, "\rho"'] & \mathcal{C}(a,a) \otimes I \arrow[d, "\rho"] \\
I \arrow[r, "j_a"'] & \mathcal{C}(a,a)
\end{tikzcd}
$$

となるから可換である．故に id_a の行き先を考えると

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{C}(a,a) \arrow[d, "-\circ\lambda_a"'] \arrow[dr, "i"] & \\
\mathcal{C}(I \odot a, a) \arrow[r, "\varphi^{\odot}"'] & {[I,\mathcal{C}(a,a)]}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathrm{id}_a \arrow[d, mapsto, "-\circ\lambda_a"'] \arrow[dr, mapsto, "i"] & \\
\lambda_a \arrow[r, mapsto, "\varphi^{\odot}"'] & i \circ j_a \quad \widetilde{j}_a
\end{tikzcd}
$$

となり一致する．

よって λ_a が同型であることを示せばよい．

そこで $\mathrm{id}\colon I \odot a \nrightarrow I \odot a$ の随伴射を $\xi'_a\colon I \nrightarrow \mathcal{C}(a, I \odot a)$ とする．これを V の射とみなすことで $\mathcal{C}$ の射 $\xi_a\colon a \nrightarrow I \odot a$ を得る．このとき $\lambda_a \circ \xi_a = \mathrm{id}$ と $\xi_a \circ \lambda_a = \mathrm{id}$，即ち

$$
\begin{tikzcd}
I \arrow[r, "\xi_a"] \arrow[dr, "j_a"'] & \mathcal{C}(a, I \odot a) \arrow[d, "\lambda_a \circ -"] \arrow[dl, phantom, "(*)"] \\
& \mathcal{C}(a, a)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
I \arrow[r, "\xi_a"] \arrow[dr, "j_{I \odot a}"'] & \mathcal{C}(a, I \odot a) \arrow[d, "- \circ \lambda_a"] \arrow[dl, phantom, "(\Diamond)"] \\
& \mathcal{C}(I \odot a, I \odot a)
\end{tikzcd}
$$

の可換性を示せばよい．$(*)$ は V-随伴により

$$
\begin{tikzcd}
I \odot a \arrow[r, "\mathrm{id}_{I \odot a}", "V"'] \arrow[dr, "\lambda_a"', "V"] & I \odot a \arrow[d, "\lambda_a"] \\
& a
\end{tikzcd}
$$

となるから可換である．$(\Diamond)$ の可換性を示すため次の図式を考える．

$$
\begin{tikzcd}
I \arrow[r, "\xi_a"] \arrow[dr, "j_{I \odot a}"'] & \mathcal{C}(a, I \odot a) \arrow[d, "- \circ \lambda_a"] \arrow[dl, phantom, "(\Diamond)"] \arrow[dr, "i"] \arrow[d, phantom, "(131)", shift left=8ex] & \\
& \mathcal{C}(I \odot a, I \odot a) \arrow[r, "\varphi^{\odot}"'] & {[I, \mathcal{C}(a, I \odot a)]}
\end{tikzcd}
$$

一番外側は ξ_a の定義より可換である．よって $\varphi^{\odot}$ が同型だから $(\Diamond)$ も可換である．　□

定義. strict 2-category V-**CAT** における同値を V-同値という．

定義. V-関手 $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ が本質的全射 $\iff$ underlying functor $U(F)$ が本質的全射.

定理 132. $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ が V-同値 $\iff$ F が V-忠実充満かつ本質的全射である．

証明. $(\Longrightarrow)$ F を V-同値とする．即ち V-**CAT** における同値だから $U(F)$ は **CAT** における同値，即ち圏同値である．故に関手 $U(F)$ は本質的全射である．次に $G\colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ を $\eta\colon \mathrm{id}_{\mathcal{C}} \cong GF$，$\varepsilon\colon FG \cong \mathrm{id}_{\mathcal{D}}$ となるように取る．$F \dashv G$ で η, ε がその unit, counit であるとしてよい (「2-category」の PDF を参照)．このとき η が V-自然同型だから命題 122 より F は V-忠実充満である．

$(\Longleftarrow)$ 仮定より F が本質的全射だから，各対象 $d \in \mathcal{D}$ に対して対象 $Gd \in \mathcal{C}$ と $\mathcal{D}$ の同型射 $\varepsilon_d\colon F(Gd) \nrightarrow d$ が取れる．すると F が V-忠実充満だから命題 77 と補題 92 を使う

と合成

$$\mathcal{C}(c, Gd) \xrightarrow{F_{cGd}} \mathcal{D}(Fc, FGd) \xrightarrow{\varepsilon_d \circ -} \mathcal{D}(Fc, d)$$

は $c \in \mathcal{C}$ について自然な同型である．従って系 120 より F は右随伴を持ち，その V-関手は $d \mapsto Gd$ で与えられる．これを G と書く．随伴 $F \dashv G$ の counit は ε であり，従って $FG \cong \mathrm{id}$ となる．

一方 $F \dashv G$ の unit を η とすると

$$\begin{tikzcd}
& \mathcal{D} \arrow[rr, "\mathrm{id}_{\mathcal{D}}"] \arrow[dr, "G"] \arrow[d, phantom, "\Uparrow \eta"] & {} \arrow[d, phantom, "\Uparrow \varepsilon"] & \mathcal{D} \\
\mathcal{C} \arrow[ur, "F"] \arrow[rr, "\mathrm{id}_{\mathcal{C}}"'] & {} & \mathcal{C} \arrow[ur, "F"'] &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
& \mathcal{D} \arrow[rr, "\mathrm{id}_{\mathcal{D}}"] & {} \arrow[d, phantom, "\Uparrow \mathrm{id}_F"] & \mathcal{D} \\
\mathcal{C} \arrow[ur, "F"] \arrow[rr, "\mathrm{id}_{\mathcal{C}}"'] & & \mathcal{C} \arrow[ur, "F"'] &
\end{tikzcd}$$

だから $F \bullet \eta$ は V-自然同型である．即ち $c \in \mathcal{C}$ に対して c 成分 $F(\eta_c)$ は同型である．F が V-忠実充満だから $U(F)$ は忠実充満，即ち conservative であり従って η_c も同型である．よって η は V-自然同型である． □

4.5 一般のエンド

この節では一般の V-豊穣圏 $\mathcal{M}$ におけるエンドを定義する．

命題 133. V-関手 $T \colon \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \otimes \mathcal{C} \to \mathcal{V}$ のエンド $\left\langle \displaystyle\int_c T(c, c), \zeta \right\rangle$ が存在するとする．

$$[x, \zeta_a] \colon \left[x, \int_c T(c, c)\right] \to [x, T(a, a)]$$

は $a \in \mathcal{C}$ について自然だから (命題 69)，これが定める wedge を $[x, \zeta]$ で表すことにする．このとき $x \in \mathcal{V}$ に対して $\left\langle \left[x, \displaystyle\int_c T(c, c)\right], [x, \zeta] \right\rangle$ は $[x, T(-, \square)]$ のエンドである．(従って $\left[x, \displaystyle\int_c T(c, c)\right] \cong \displaystyle\int_c [x, T(c, c)]$ であり $[x, -]$ はエンドと交換する．)

証明. V の射 $\sigma_a \colon u \to [x, T(a, a)]$ が $a \in \mathcal{C}$ について自然だとする．このとき命題 75 より σ_a の随伴射 $\widetilde{\sigma}_a \colon u \otimes x \to T(a, a)$ も $a \in \mathcal{C}$ について自然である．故にエンド $\displaystyle\int_c T(c, c)$

の普遍性から，V の射 $h\colon u\otimes x\to\displaystyle\int_c T(c,c)$ が一意に存在して

$$\begin{tikzcd}
u\otimes x \arrow[r, dashed, "h"] \arrow[dr, "\widetilde{\sigma}_a"'] & \displaystyle\int_c T(c,c) \arrow[d, "\zeta_a"] \\
& T(a,a)
\end{tikzcd}$$

が可換になる．このとき随伴により

$$\begin{tikzcd}
u \arrow[r, "\widetilde{h}:=h\text{の随伴射}"] \arrow[dr, "\sigma_a"'] & \left[x,\displaystyle\int_c T(c,c)\right] \arrow[d, "{[x,\zeta_a]}"] \\
& {[x,T(a,a)]}
\end{tikzcd}$$

も可換である．h が一意だからこのような $\widetilde{h}$ も一意である． □

命題 134. $T\colon\mathcal{C}^{\mathrm{op}}\otimes\mathcal{C}\otimes\mathcal{D}\to\mathcal{V}$ を V-関手として，任意の対象 $d\in\mathcal{D}$ に対して，エンド $\langle\int_c T(c,c,d),\zeta^d\rangle$ が存在するとする．このとき次の条件を満たす V-関手 $F\colon\mathcal{D}\to\mathcal{V}$ が一意に存在する．

(1) $d\in\mathcal{D}$ に対して $Fd=\displaystyle\int_c T(c,c,d)$ である．

(2) $s\in\mathcal{C}$ に対して，counit が定める $\zeta^d_s\colon Fd\to T(s,s,d)$ は d について自然である．

証明． まずこのような F が存在したとする．$\zeta^d_s\colon Fd\to T(s,s,d)$ が $d\in\mathcal{D}$ について自然だから

$$\begin{tikzcd}
& {[Fa,Fb]} \arrow[dr, "{[\mathrm{id},\zeta^b_s]}"] & \\
\mathcal{D}(a,b) \arrow[ur, "F_{ab}"] \arrow[dr, "{T(s,s,-)_{ab}}"'] & & {[Fa,T(s,s,b)]} \\
& {[T(s,s,a),T(s,s,b)]} \arrow[ur, "{[\zeta^a_s,\mathrm{id}]}"'] &
\end{tikzcd}$$

が可換である．この下回りの合成は命題 72, 86 より s について自然である．また命題 133 より $\langle[Fa,Fb],[\mathrm{id},\zeta^b]\rangle$ はエンドである．故にこのエンドの普遍性から，このような F_{ab} は一意であり，従って F も一意である．

よって F が存在することを示せばよい．そのためには，上記のエンドによって得られる射 (次の図式の点線の射) を F_{ab} として，これにより F が V-関手となることを示せば

よい.

$$
\begin{tikzcd}
 & {[Fa,Fb]} \arrow[dr, "{[\mathrm{id},\zeta_s^b]}"] & \\
\mathcal{D}(a,b) \arrow[ur, dashed, "F_{ab}"] \arrow[dr, "{T(s,s,-)_{ab}}"'] & & {[Fa,T(s,s,b)]} \\
 & {[T(s,s,a),T(s,s,b)]} \arrow[ur, "{[\zeta_s^a,\mathrm{id}]}"'] &
\end{tikzcd}
$$

まず次の図式が可換であることを示す.

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{D}(b,c)\otimes\mathcal{D}(a,b) \arrow[r, "m_{abc}"] \arrow[d, "F_{bc}\otimes F_{ab}"'] & \mathcal{D}(a,c) \arrow[d, "F_{ac}"] \\
{[Fb,Fc]\otimes[Fa,Fb]} \arrow[r, "m_{FaFbFc}"'] & {[Fa,Fc]}
\end{tikzcd}
$$

そのために次の図式を考える.

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathcal{D}(b,c)\otimes\mathcal{D}(a,b) \arrow[rr, "m"] \arrow[dr, "F\otimes F"] \arrow[dd, "{T(s,s,-)\otimes T(s,s,-)}"'] & & \mathcal{D}(a,c) \arrow[dr, "F"] \arrow[dd, "{T(s,s,-)}"'] & \\
 & & {[Fb,Fc]\otimes[Fa,Fb]} \arrow[rr, "m"'] & & {[Fa,Fc]} \arrow[dd, "{[\mathrm{id},\zeta_s^c]}"] \\
 & {[T(s,s,b),T(s,s,c)]\otimes[T(s,s,a),T(s,s,b)]} \arrow[rr, "m"] \arrow[dr, "{\mathrm{id}\otimes[\zeta_s^a,\mathrm{id}]}"'] & & {[T(s,s,a),T(s,s,c)]} \arrow[dr, "{[\zeta_s^a,\mathrm{id}]}"'] & \\
 & & {[T(s,s,b),T(s,s,c)]\otimes[Fa,T(s,s,b)]} \arrow[rr, "m"'] & & {[Fa,T(s,s,c)]}
\end{tikzcd}
$$

底面の四角は命題 49 より可換である．奥の四角は $T(s,s,-)$ が V-関手だから可換である．右の四角は F_{ab} の定義より可換である．手前の六角形は次の図式により可換である.

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{D}(b,c)\otimes\mathcal{D}(a,b) \arrow[r, "F\otimes F"] \arrow[d, "{T(s,s,-)\otimes F}"] \arrow[dd, bend right=60, "{T(s,s,-)\otimes T(s,s,-)}"'] \arrow[dr, phantom, "(F)"] & {[Fb,Fc]\otimes[Fa,Fb]} \arrow[r, "m"] \arrow[d, "{[\mathrm{id},\zeta_s^c]\otimes\mathrm{id}}"'] \arrow[dr, phantom, "(48)"] & {[Fa,Fc]} \arrow[d, "{[\mathrm{id},\zeta_s^c]}"] \\
{[T(s,s,b),T(s,s,c)]\otimes[Fa,Fb]} \arrow[r, "{[\zeta_s^b,\mathrm{id}]\otimes\mathrm{id}}"'] \arrow[dr, "{\mathrm{id}\otimes[\mathrm{id},\zeta_s^b]}"] \arrow[d, phantom, "(F)"] & {[Fb,T(s,s,c)]\otimes[Fa,Fb]} \arrow[r, "m"'] \arrow[dr, phantom, "(50)"] & {[Fa,T(s,s,c)]} \\
{[T(s,s,b),T(s,s,c)]\otimes[T(s,s,a),T(s,s,b)]} \arrow[r, "{\mathrm{id}\otimes[\zeta_s^a,\mathrm{id}]}"'] & {[T(s,s,b),T(s,s,c)]\otimes[Fa,T(s,s,b)]} \arrow[ur, "m"'] &
\end{tikzcd}
$$

従ってエンドの普遍性から上面の四角が可換であることが分かった.

後は

$$\begin{tikzcd}
I \arrow[r, "j_a"] \arrow[dr, "j_{Fa}"'] & \mathcal{D}(a,a) \arrow[d, "F_{aa}"] \arrow[dl, phantom, "(*)"] \\
& {[Fa, Fa]}
\end{tikzcd}$$

が可換であることを示せばよい．そのために次の図式を考える．

$$\begin{tikzcd}
I \arrow[r, "j_a"] \arrow[dr, "j_{Fa}"'] \arrow[rrr, bend left, "j_{T(s,s,a)}"] & \mathcal{D}(a,a) \arrow[r, "{T(s,s,-)}"] \arrow[d, "F_{aa}"] \arrow[dl, phantom, "(*)"] \arrow[r, phantom, bend left, "(T)"] & {[T(s,s,a), T(s,s,a)]} \arrow[d, "{[\zeta^a_s, \mathrm{id}]}"] \arrow[dl, phantom, "(F)"] \\
& {[Fa, Fa]} \arrow[r, "{[\mathrm{id}, \zeta^a_s]}"'] & {[Fa, T(s,s,a)]}
\end{tikzcd}$$

(T) は $T(s,s,-)$ が V-関手だから可換である．(F) は F_{ab} の定義より可換である．また一番外側も可換である．よってエンドの普遍性から $(*)$ が可換であると分かる． $\square$

このF を $\displaystyle\int_{c\in\mathcal{C}} T(c,c,-)$ で表す．

定義. $T\colon \mathcal{C}^{\mathrm{op}}\otimes\mathcal{C}\to\mathcal{M}$ を V-関手とするとき，$\displaystyle\int_{c\in\mathcal{C}} \mathcal{M}(-,T(c,c))$ を表現する対象を T のエンドといい $\displaystyle\int_{c\in\mathcal{C}} T(c,c)$ と書く．同様に $\displaystyle\int_{c\in\mathcal{C}} \mathcal{M}(T(c,c),-)$ を表現する対象を T のコエンドといい $\displaystyle\int^{c\in\mathcal{C}} T(c,c)$ と書く．

定義より，$m\in\mathcal{M}$ について自然な同型

$$\mathcal{M}\Big(m, \int_{c\in\mathcal{C}} T(c,c)\Big) \cong \int_{c\in\mathcal{C}} \mathcal{M}(m, T(c,c))$$
$$\mathcal{M}\Big(\int^{c\in\mathcal{C}} T(c,c), m\Big) \cong \int_{c\in\mathcal{C}} \mathcal{M}(T(c,c), m)$$

が成り立つ．命題 133 より，$\mathcal{M}=\mathcal{V}$ の場合のこの定義は第 4.1 節での定義と一致する．

T のエンド $\displaystyle\int_{c\in\mathcal{C}} T(c,c)$ が存在するとする．即ち $m\in\mathcal{M}$ について自然な同型

$$\mathcal{M}\Big(m, \int_{c\in\mathcal{C}} T(c,c)\Big) \cong \int_{c\in\mathcal{C}} \mathcal{M}(m, T(c,c))$$

が存在する．これを φ_m とする．またエンド $\displaystyle\int_{c\in\mathcal{C}}\mathcal{M}(m,T(c,c))$ の counit を ζ^m とする．$a\in\mathcal{C}$，$m\in\mathcal{M}$ について τ_a^m を合成

$$\mathcal{M}\Big(m,\int_{c\in\mathcal{C}}T(c,c)\Big)\xrightarrow{\varphi_m}\int_{c\in\mathcal{C}}\mathcal{M}(m,T(c,c))\xrightarrow{\zeta_a^m}\mathcal{D}(m,T(a,a))$$

で定める．τ_a^m は m について自然だから，命題 112 よりある $\xi_a\colon \displaystyle\int_c T(c,c)\nrightarrow T(a,a)$ が存在して $\xi_a\circ - =\tau_a^m$ と書けて，更に (簡単のため $e:=\int_{c\in\mathcal{C}}T(c,c)$ とする書くと) ξ_a は合成

$$\begin{aligned}I&\xrightarrow{j_e}\mathcal{M}\Big(\int_{c\in\mathcal{C}}T(c,c),\int_{c\in\mathcal{C}}T(c,c)\Big)\\&\xrightarrow{\varphi_e}\int_{c\in\mathcal{C}}\mathcal{M}\Big(\int_{c\in\mathcal{C}}T(c,c),T(c,c)\Big)\\&\xrightarrow{\zeta_a^e}\mathcal{M}\Big(\int_{c\in\mathcal{C}}T(c,c),T(a,a)\Big)\end{aligned}$$

と一致する．故に命題 70 と補題 78 より ξ_a は $a\in\mathcal{C}$ について自然な $\mathcal{M}$ の射である．この ξ_a は「普遍性」を満たす．(この ξ をエンド $\int_{c\in\mathcal{C}}T(c,c)$ の counit という．)

$\because$) a について自然な $\mathcal{M}$ の射 $\sigma_a\colon m\nrightarrow T(a,a)$ を取る．これは V の射 $\sigma_a\colon I\to\mathcal{M}(m,T(a,a))$ であり，a について自然である．故にエンド $\displaystyle\int_c\mathcal{M}(m,T(c,c))$ の普遍性より，V の射 h が存在して

$$\begin{tikzcd}
I \arrow[r, dashed, "h"] \arrow[dr, "\sigma_a"'] & \displaystyle\int_{c\in\mathcal{C}}\mathcal{M}(m,T(c,c)) \arrow[d, "\zeta_a^m"] \\
& \mathcal{M}(m,T(a,a))
\end{tikzcd}$$

が可換になる．このとき図式

$$\begin{tikzcd}
I \arrow[r, "h"] \arrow[dr, "\sigma_a"'] & \displaystyle\int_{c\in\mathcal{C}}\mathcal{M}(m,T(c,c)) \arrow[d, "\zeta_a^m"] \arrow[r, "\varphi_m^{-1}"] & \mathcal{M}\Big(m,\displaystyle\int_{c\in\mathcal{C}}T(c,c)\Big) \arrow[dl, "\tau_a^m=\xi_a\circ-"] \\
& \mathcal{M}(m,T(a,a)) &
\end{tikzcd}$$

は可換である．$\widetilde{h}:=\varphi_m^{-1}\circ h$ は $\mathcal{M}$ の射 $m\nrightarrow\displaystyle\int_{c\in\mathcal{C}}T(c,c)$ である．よって命題 44 よ

り $\xi_a \circ \widetilde{h} = \sigma_a$ である．

逆に $f\colon m \nrightarrow \displaystyle\int_{c\in\mathcal{C}} T(c,c)$ が $\xi_a \circ f = \sigma_a$ を満たすとする．このとき図式

$$
\begin{tikzcd}
I \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "\sigma_a"'] & \mathcal{M}\Big(m, \displaystyle\int_{c\in\mathcal{C}} T(c,c)\Big) \arrow[r, "\varphi_m"] \arrow[d, "\xi_a\circ -"] & \displaystyle\int_{c\in\mathcal{C}} \mathcal{M}(m, T(c,c)) \arrow[dl, "\zeta_a^m"] \\
 & \mathcal{M}(m, T(a,a)) &
\end{tikzcd}
$$

は可換である．故にエンドの普遍性から $\varphi_m \circ f = h$ が分かり，$\widetilde{h} = \varphi_m^{-1} \circ h = f$ である．

但し，逆に $a \in \mathcal{C}$ について自然な $\mathcal{M}$ の射 $\xi_a\colon e \nrightarrow T(a,a)$ が「普遍性」を満たしたからといって e がエンドになるとは限らない．

次に V-関手 $T, S\colon \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \otimes \mathcal{C} \to \mathcal{M}$ のエンド $\int_c T(c,c)$，$\int_c S(c,c)$ が存在するとして，その counit をそれぞれ $\xi_a\colon \int_c T(c,c) \nrightarrow T(a,a)$，$\zeta_a\colon \int_c S(c,c) \nrightarrow S(a,a)$ とする．

$\theta_{ab}\colon T(a,b) \to S(a,b)$ を $a, b \in \mathcal{C}$ について自然な $\mathcal{M}$ の射とすると，命題 71 より合成 $\int_c T(c,c) \xrightarrow{\zeta_a} T(a,a) \xrightarrow{\theta_{aa}} S(a,a)$ は $a \in \mathcal{C}$ について自然である．故にエンドの普遍性により，次の点線の射 h が存在して可換となる．

$$
\begin{tikzcd}
\displaystyle\int_{c\in\mathcal{C}} T(c,c) \arrow[r, dashed, "h"] \arrow[d, "\xi_a"'] & \displaystyle\int_{c\in\mathcal{C}} S(c,c) \arrow[d, "\zeta_a"] \\
T(a,a) \arrow[r, "\theta_{aa}"'] & S(a,a)
\end{tikzcd}
$$

この h を $\displaystyle\int_{c\in\mathcal{C}} \theta_{cc}$ で表す．

命題 135. $F, G, H\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ を V-関手，$\theta\colon G \Rightarrow H$ を V-自然変換とする．補題 93 より V の射 $\theta_b \circ -\colon \mathcal{D}(Fa, Gb) \to \mathcal{D}(Fa, Hb)$ は $a, b \in \mathcal{C}$ について自然である．従って V の射 $\int_c (\theta_c \circ -)\colon [\mathcal{C}, \mathcal{D}](F, G) \to [\mathcal{C}, \mathcal{D}](F, H)$ が得られる．このとき $\int_c (\theta_c \circ -) = \theta \circ -$ である．

証明．エンドの普遍性により次の図式が可換であることを示せばよい．

$$
\begin{tikzcd}
{[\mathcal{C},\mathcal{D}](F,G)} \arrow[rrr, "\theta\circ -"] \arrow[ddd, "\mathrm{ev}_a"'] \arrow[dr, "\lambda^{-1}"] \arrow[dd, phantom, "(\lambda)"] & & & {[\mathcal{C},\mathcal{D}](F,H)} \arrow[ddd, "\mathrm{ev}_a"] \\
& I\otimes[\mathcal{C},\mathcal{D}](F,G) \arrow[r, "\theta\otimes\mathrm{id}"] \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes\mathrm{ev}_a"] \arrow[urr, phantom, "(\theta\circ -)"] \arrow[dr, phantom, "(*)"] & {[\mathcal{C},\mathcal{D}](G,H)\otimes[\mathcal{C},\mathcal{D}](F,G)} \arrow[ur, "m"] \arrow[d, "\mathrm{ev}_a\otimes\mathrm{ev}_a"'] \arrow[ddr, phantom, "(\mathrm{ev}_a)"] & \\
& I\otimes[Fa,Ga] \arrow[r, "\theta_a\otimes\mathrm{id}"'] & {[Ga,Ha]\otimes[Fa,Ga]} \arrow[dr, "m"] & \\
{[Fa,Ga]} \arrow[rrr, "\theta_a\circ -"'] \arrow[ur, "\lambda^{-1}"'] \arrow[urr, phantom, "(\theta_a\circ -)"] & & & {[Fa,Ha]}
\end{tikzcd}
$$

$(\theta\circ -)$，$(\theta_a\circ -)$ は定義より可換である．(λ) は λ の自然性により可換である．(ev_a) は ev_a が V-関手だから可換である．$(*)$ は $\mathrm{ev}_a\circ\theta=\theta_a$ だから可換である． $\square$

補題 136. $T\colon \mathcal{C}^{\mathrm{op}}\otimes\mathcal{C}\otimes\mathcal{D}^{\mathrm{op}}\otimes\mathcal{D}\to\mathcal{V}$ を V-関手として，任意の $a,a'\in\mathcal{C}$ に対してエンド $\langle\int_d T(a,a',d,d),\zeta^{aa'}\rangle$ が存在すると仮定する．また対象 $x\in\mathcal{V}$，$a\in\mathcal{C}$ に対して V の射 $\sigma_a\colon x\to\int_d T(a,a,d,d)$ を取り $\tau_a:=\bigl(x\xrightarrow{\sigma_a}\int_d T(a,a,d,d)\xrightarrow{\zeta_d^{aa}}T(a,a,d,d)\bigr)$ とする．このとき

$$\sigma_a \text{ が } a\in\mathcal{C} \text{ について自然} \iff \tau_a \text{ が } a\in\mathcal{C} \text{ について自然.}$$

証明．($\Longrightarrow$) 命題 71 より明らか．

($\Longleftarrow$) τ_a が $a\in\mathcal{C}$ について自然とする．次の図式の $(*)$ が可換であることを示せば

よい.

$$
\begin{tikzcd}
 & {[T(a,a,b,b),T(a,a',b,b)]} \arrow[rrd, "{[\zeta_b^{aa},\mathrm{id}]}"] \arrow[d, phantom, "(134)"] & & \\
 & {\left[\int_{d\in\mathcal{D}}T(a,a,d,d),\int_{d\in\mathcal{D}}T(a,a',d,d)\right]} \arrow[rr, "{[\mathrm{id},\zeta_b^{aa'}]}"] \arrow[dr, "{[\sigma_a,\mathrm{id}]}"] \arrow[drr, phantom, "{([-,\square])}"] & & {\left[\int_{d\in\mathcal{D}}T(a,a,d,d),T(a,a',b,b)\right]} \arrow[d, "{[\sigma_a,\mathrm{id}]}"] \\
\mathcal{C}(a,a') \arrow[uur, bend left, "{T(a,-,b,b)}"] \arrow[ur, "{\int_d T(a,-,d,d)}"'] \arrow[dr, "{\int_d T(-,a',d,d)}"] \arrow[ddr, bend right, "{T(-,a',b,b)}"'] \arrow[rr, phantom, "(*)"] & & {\left[x,\int_{d\in\mathcal{D}}T(a,a',d,d)\right]} \arrow[r, "{[\mathrm{id},\zeta_b^{aa'}]}"] & {[x,T(a,a',b,b)]} \\
 & {\left[\int_{d\in\mathcal{D}}T(a',a',d,d),\int_{d\in\mathcal{D}}T(a,a',d,d)\right]} \arrow[ur, "{[\sigma_{a'},\mathrm{id}]}"'] \arrow[rr, "{[\mathrm{id},\zeta_b^{aa'}]}"'] \arrow[urr, phantom, "{([-,\square])}"] \arrow[d, phantom, "(134)"] & & {\left[\int_{d\in\mathcal{D}}T(a',a',d,d),T(a,a',b,b)\right]} \arrow[u, "{[\sigma_{a'},\mathrm{id}]}"'] \\
 & {[T(a',a',b,b),T(a,a',b,b)]} \arrow[rru, "{[\zeta_b^{a'a'},\mathrm{id}]}"'] & &
\end{tikzcd}
$$

まず (134) は命題 134 の証明より可換である．$([-,\square])$ は $[-,\square]$ が関手であるから可換である．また一番外側の四角は τ_a が a について自然だから可換である．よって，命題 133 より $\langle [x,\int_d T(a,a',d,d)], [\mathrm{id},\zeta^{aa'}]\rangle$ がエンドだから，エンドの普遍性より $(*)$ の可換性が分かる． $\square$

補題 137. $T\colon \mathcal{C}^{\mathrm{op}}\otimes\mathcal{C}\otimes\mathcal{D}^{\mathrm{op}}\otimes\mathcal{D}\to\mathcal{V}$ を V-関手として，任意の $a,a'\in\mathcal{C}$ に対してエンド $\langle\int_d T(a,a',d,d),\zeta^{aa'}\rangle$ が存在すると仮定する．このとき

$$\int_{\langle c,d\rangle\in\mathcal{C}\otimes\mathcal{D}} T(c,c,d,d) \cong \int_{c\in\mathcal{C}}\int_{d\in\mathcal{D}} T(c,c,d,d).$$

但しこの式は，片方が存在するならばもう片方も存在して同型となることを表す.

証明. まずエンド $\langle\int_{\langle c,d\rangle} T(c,c,d,d),\xi\rangle$ が存在するとする．このとき $\langle a,b\rangle\in\mathcal{C}\otimes\mathcal{D}$ に対して $\xi_{ab}\colon \int_{\langle c,d\rangle} T(c,c,d,d)\to T(a,a,b,b)$ でありこれは $b\in\mathcal{D}$ について自然である.

よって $\int_d T(a,a,d,d)$ の普遍性により，次の図式を可換とする σ_a が存在する．

$$\begin{tikzcd}
\displaystyle\int_{\langle c,d\rangle\in\mathcal{C}\otimes\mathcal{D}} T(c,c,d,d) \arrow[r, dashed, "\sigma_a"] \arrow[dr, "\xi_{ab}"'] & \displaystyle\int_{d\in\mathcal{D}} T(a,a,d,d) \arrow[d, "\zeta_b^{aa}"] \\
& T(a,a,b,b)
\end{tikzcd}$$

補題 136 より σ_a は $a \in \mathcal{A}$ について自然である．このとき $\langle \int_{\langle c,d\rangle} T(c,c,d,d), \sigma\rangle$ が $\int_d T(-,\square,d,d)$ のエンドである．

> $\because$) そのために $\tau_a\colon x \to \int_d T(a,a,d,d)$ が $a \in \mathcal{C}$ について自然であるとする．このとき合成
>
> $$x \xrightarrow{\tau_a} \int_{d\in\mathcal{D}} T(a,a,d,d) \xrightarrow{\zeta_b^{aa}} T(a,a,b,b)$$
>
> が a,b について自然だから $\langle \int_{\langle c,d\rangle} T(c,c,d,d), \xi\rangle$ の普遍性により，次の外側の四角を可換とする h が存在する．
>
> $$\begin{tikzcd}
x \arrow[r, dashed, "h"] \arrow[d, "\tau_a"'] & \displaystyle\int_{\langle c,d\rangle\in\mathcal{C}\otimes\mathcal{D}} T(c,c,d,d) \arrow[dl, "\sigma_a"] \arrow[d, "\xi_{ab}"] \\
\displaystyle\int_{d\in\mathcal{D}} T(a,a,d,d) \arrow[r, "\zeta_b^{aa}"'] & T(a,a,b,b)
\end{tikzcd}$$
>
> 右下の三角は可換だから，$\int_d T(a,a,d,d)$ の普遍性により左上の三角も可換となる．このような h は明らかに一意である．

次にエンド $\langle \int_c \int_d T(c,c,d,d), \sigma\rangle$ が存在するとする．このとき ξ_{ab} を合成

$$\int_{c\in\mathcal{C}} \int_{d\in\mathcal{D}} T(c,c,d,d) \xrightarrow{\sigma_a} \int_{d\in\mathcal{D}} T(a,a,d,d) \xrightarrow{\zeta_b^{aa}} T(a,a,b,b)$$

で定めれば，ξ_{ab} は $a \in \mathcal{C}$，$b \in \mathcal{D}$ について自然である．$\langle \int_c \int_d T(c,c,d,d), \xi\rangle$ が T のエンドであることを示せばよい．

そのために $\tau_{ab}\colon x \to T(a,a,b,b)$ が a,b について自然であるとする．$\int_{d\in\mathcal{D}} T(a,a,d,d)$

の普遍性により次の図式を可換とする h_a が存在する．

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, dashed, "h_a"] \arrow[dr, "\tau_{ab}"'] & \displaystyle\int_{d\in\mathcal{D}} T(a,a,d,d) \arrow[d, "\zeta_b^{aa}"] \\ & T(a,a,b,b) \end{tikzcd}$$

この h_a は a について自然だから次の図式を可換とする k が存在する．

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, dashed, "k"] \arrow[dr, "h_a"'] & \displaystyle\int_{c\in\mathcal{C}}\int_{d\in\mathcal{D}} T(c,c,d,d) \arrow[d, "\sigma_a"] \\ & \displaystyle\int_{d\in\mathcal{D}} T(a,a,d,d) \end{tikzcd}$$

この k は明らかに一意である． $\square$

定理 138. $T\colon \mathcal{C}^{\mathrm{op}}\otimes\mathcal{C}\otimes\mathcal{D}^{\mathrm{op}}\otimes\mathcal{D}\to\mathcal{M}$ を V-関手として，任意の $a,a'\in\mathcal{C}$ に対してエンド $\int_{d\in\mathcal{D}} T(a,a',d,d)$ が存在すると仮定する．このとき

$$\int_{\langle c,d\rangle\in\mathcal{C}\otimes\mathcal{D}} T(c,c,d,d) \cong \int_{c\in\mathcal{C}}\int_{d\in\mathcal{D}} T(c,c,d,d).$$

但しこの式は，片方が存在するならばもう片方も存在して同型となることを表す．

証明． $\int_{\langle c,d\rangle} T(c,c,d,d)$ が存在すれば，$m\in\mathcal{M}$ について

$$\begin{aligned} \mathcal{M}\Big(m, \int_{\langle c,d\rangle\in\mathcal{C}\otimes\mathcal{D}} T(c,c,d,d)\Big) &\cong \int_{\langle c,d\rangle\in\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}} \mathcal{M}(m, T(c,c,d,d)) \\ &\cong \int_{c\in\mathcal{C}}\int_{d\in\mathcal{D}} \mathcal{M}(m, T(c,c,d,d)) \\ &\cong \int_{c\in\mathcal{C}} \mathcal{M}\Big(m, \int_{d\in\mathcal{D}} T(c,c,d,d)\Big) \end{aligned}$$

だから $\displaystyle\int_{c\in\mathcal{C}}\int_{d\in\mathcal{D}} T(c,c,d,d) \cong \int_{\langle c,d\rangle\in\mathcal{C}\otimes\mathcal{D}} T(c,c,d,d)$ である．

一方 $\int_c\int_d T(c,c,d,d)$ が存在すれば

$$\begin{aligned} \mathcal{M}\Big(m, \int_{c\in\mathcal{C}}\int_{d\in\mathcal{D}} T(c,c,d,d)\Big) &\cong \int_{c\in\mathcal{C}}\int_{d\in\mathcal{D}} \mathcal{M}(M, T(c,c,d,d)) \\ &\cong \int_{\langle c,d\rangle\in\mathcal{C}\otimes\mathcal{D}} \mathcal{M}(m, T(c,c,d,d)) \end{aligned}$$

だから $\displaystyle\int_{\langle c,d\rangle\in\mathcal{C}\otimes\mathcal{D}} T(c,c,d,d) \cong \int_{c\in\mathcal{C}}\int_{d\in\mathcal{D}} T(c,c,d,d)$ である． □

5 Kan 拡張

V-**CAT** は strict 2-category だった (定理 63) から，V-**CAT** における Kan 拡張を考えることができる．これを具体的に書き下すと次の定義を得る[*11].

定義. $\mathcal{C},\mathcal{D},\mathcal{M}$ を V-豊穣圏，$F\colon\mathcal{C}\to\mathcal{D}$，$E\colon\mathcal{C}\to\mathcal{M}$ を V-関手とする．F に沿った E の左 Kan 拡張とは組 $\langle F^\dagger E,\eta\rangle$ であって，以下の条件を満たすものである．

(1) $F^\dagger E$ は V-関手 $\mathcal{D}\to\mathcal{M}$，$\eta$ は V-自然変換 $E\Rightarrow F^\dagger E\circ F$ である．

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{D} \arrow[drr, "F^\dagger E"] & & \\
\mathcal{C} \arrow[u, "F"] \arrow[rr, "E"'] \arrow[ur, phantom, "\eta\Uparrow"] & & \mathcal{M}
\end{tikzcd}$$

(2) 他に V-関手 $S\colon\mathcal{D}\to\mathcal{M}$ と V-自然変換 $\theta\colon E\Rightarrow S\circ F$ が存在したとき，V-自然変換 $\tau\colon F^\dagger E\Rightarrow S$ が一意に存在して $\theta=\tau_F\circ\eta$ となる．即ち次の等式が成り立つ．

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{D} \arrow[drr, "F^\dagger E"'] \arrow[drr, bend left=40, "S"] \arrow[drr, phantom, bend left=20, "\tau"] & & \\
\mathcal{C} \arrow[u, "F"] \arrow[rr, "E"'] \arrow[ur, phantom, "\eta\Uparrow"] & & \mathcal{M}
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
\mathcal{D} \arrow[drr, bend left=40, "S"] & & \\
\mathcal{C} \arrow[u, "F"] \arrow[rr, "E"'] \arrow[ur, phantom, "\theta\Uparrow"] & & \mathcal{M}
\end{tikzcd}$$

η を左 Kan 拡張の unit と呼ぶ．同様にして右 Kan 拡張，左 Kan リフト，右 Kan リフトも定義する．

定義を言い換えれば F に沿った E の左 Kan 拡張とは，E から $-\bullet F\colon\ \mathrm{Fun}(\mathcal{D},\mathcal{M})\to\mathrm{Fun}(\mathcal{C},\mathcal{M})$ への普遍射のことである．従って次の命題を得る．

命題 139. $F\colon\mathcal{C}\to\mathcal{D}$，$E\colon\mathcal{C}\to\mathcal{M}$ を V-関手とする．このとき

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Fun}(\mathcal{C},\mathcal{M})}(E,-\bullet F) \text{ が表現可能関手} \iff F^\dagger E \text{ が存在する}$$

が成り立つ．またこのとき $S\in\mathrm{Fun}(\mathcal{D},\mathcal{M})$ について自然な全単射

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Fun}(\mathcal{D},\mathcal{M})}(F^\dagger E,S)\cong\mathrm{Hom}_{\mathrm{Fun}(\mathcal{C},\mathcal{M})}(E,SF)$$

[*11] [1] での Kan 拡張は，後で定義する各点 Kan 拡張の意味で使われているので注意．

が成り立つ．この全単射で $\mathrm{id} \in \mathrm{Hom}(F^\dagger E, F^\dagger E)$ に対応する $\eta \in \mathrm{Hom}(E, (F^\dagger E) \circ F)$ が $F^\dagger E$ の unit である． $\square$

左 Kan 拡張 $F^\dagger E$ が存在したとしても，より強い条件である

$$[\mathcal{D}, \mathcal{M}](F^\dagger E, S) \cong [\mathcal{C}, \mathcal{M}](E, SF) = [\mathcal{C}, \mathcal{M}](E, [F, 1]S)$$

は一般には成り立たないが，逆に次の命題は成り立つ．

命題 140. $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, $E\colon \mathcal{C} \to \mathcal{M}$, $T\colon \mathcal{D} \to \mathcal{M}$ を V-関手として，$S \in [\mathcal{D}, \mathcal{M}]$ について自然な同型

$$\varphi_S\colon [\mathcal{D}, \mathcal{M}](T, S) \to [\mathcal{C}, \mathcal{M}](E, [F, 1]S)$$

が存在するとする．このときある V-自然変換 $\eta\colon E \Rightarrow TF$ が存在して，$\langle T, \eta \rangle$ が F に沿った E の左 Kan 拡張となる．更に φ_S は合成

$$[\mathcal{D}, \mathcal{M}](T, S) \xrightarrow{[F,1]} [\mathcal{C}, \mathcal{M}](TF, SF) \xrightarrow{- \circ \eta} [\mathcal{C}, \mathcal{M}](E, SF)$$

と一致する．

証明．仮定より，V-自然同型

$$\begin{tikzcd} {[\mathcal{D}, \mathcal{M}]} \arrow[rr, "{[\mathcal{D},\mathcal{M}](T,-)}"] \arrow[dr, "{[F,1]}"'] & \arrow[d, phantom, "\wr \Downarrow \varphi"] & \mathcal{V} \\ & {[\mathcal{C}, \mathcal{M}]} \arrow[ur, "{[\mathcal{C},\mathcal{M}](E,-)}"'] & \end{tikzcd}$$

が得られる．これに $U\colon V\text{-}\mathbf{CAT} \to \mathbf{CAT}$ を適用して，更に関手 $\mathrm{Hom}_V(I, -)\colon V \to \mathbf{Set}$ を組み合わせれば $\mathbf{CAT}$ の図式

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Fun}(\mathcal{D}, \mathcal{M}) \arrow[rrr, bend left, "{\mathrm{Hom}_{\mathrm{Fun}(\mathcal{D},\mathcal{M})}(T,-)}"] \arrow[rr, "{U([\mathcal{D},\mathcal{M}](T,-))}"] \arrow[dr, "- \bullet F"'] & \arrow[d, phantom, "\wr \Downarrow U\varphi"] & V \arrow[u, phantom, "(64)"] \arrow[r, "{\mathrm{Hom}_V(I,-)}"] & \mathbf{Set} \\ & \mathrm{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{M}) \arrow[ur, "{U([\mathcal{C},\mathcal{M}](E,-))}"'] \arrow[urr, bend right, "{\mathrm{Hom}_{\mathrm{Fun}(\mathcal{C},\mathcal{M})}(E,-)}"'] & & \arrow[ul, phantom, "(64)"] \end{tikzcd}$$

が得られる．ここで (64) は例 64 により可換である．従ってこの図式の合成は自然同型

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Fun}(\mathcal{D},\mathcal{M})}(T, -) \cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{Fun}(\mathcal{C},\mathcal{M})}(E, - \bullet F)$$

を与える．よって命題 139 により T は F に沿った E の左 Kan 拡張となる．その unit を $\eta\colon E \Rightarrow TF$ とすれば，η は

$$I \xrightarrow{j_T} [\mathcal{D},\mathcal{M}](T,T) \xrightarrow{\varphi_T} [\mathcal{C},\mathcal{M}](E,TF)$$

で与えられる．後は次の図式が可換であることを示せばよい．

$$\begin{tikzcd}
{[\mathcal{D},\mathcal{M}](T,S)} \arrow[d, "{[F,1]}"'] \arrow[rd, phantom, "(102)"] \arrow[rddd, bend left, "\varphi_S"] & \\
{[\mathcal{C},\mathcal{M}](TF,SF)} \arrow[r, "{[\mathcal{C},\mathcal{M}](E,-)}"] \arrow[rdd, bend right, "-\circ\eta"'] \arrow[rd, phantom, "(51)"] & \big[[\mathcal{C},\mathcal{M}](E,TF),[\mathcal{C},\mathcal{M}](E,SF)\big] \arrow[d, "{[\eta,\mathrm{id}]}"] \\
& \big[I,[\mathcal{C},\mathcal{M}](E,SF)\big] \arrow[d, "i^{-1}"] \\
& {[\mathcal{C},\mathcal{M}](E,SF)}
\end{tikzcd}$$

(102) は米田の補題 (補題 102) の証明より可換である．(51) は命題 51 より可換である． □

命題 140 の状況において，$\eta_c\colon Ec \nrightarrow TFc$ は

$$I \xrightarrow{j_T} [\mathcal{D},\mathcal{M}](T,T) \cong [\mathcal{C},\mathcal{M}](E,TF) \xrightarrow{\mathrm{ev}_c} \mathcal{M}(Ec,TFc)$$

である．これは次の図式の左回りの合成である．

$$
\begin{tikzcd}
{[\mathcal{D},\mathcal{M}](T,T)} \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "(j_T)"] & I \arrow[l, "j_T"'] \arrow[d, "j_{TFc}"] & \\
\displaystyle\int_{d\in\mathcal{D}} \mathcal{M}(Td,Td) \arrow[r, "\mathrm{ev}_{Fc}"] \arrow[d, "\wr"'] \arrow[dr, phantom, "(*)"] & \mathcal{M}(TFc,TFc) \arrow[d, "\wr"'] & \\
\displaystyle\int_{d\in\mathcal{D}} \widehat{\mathcal{C}}(\mathcal{D}(F-,d),\mathcal{M}(E-,Td)) \arrow[r, "\mathrm{ev}_{Fc}"'] \arrow[d, equal] & \widehat{\mathcal{C}}(\mathcal{D}(F-,Fc),\mathcal{M}(E-,TFc)) \arrow[dr, "\mathrm{ev}_c"] & \\
\displaystyle\int_{d\in\mathcal{D}}\int_{c\in\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}[\mathcal{D}(Fc,d),\mathcal{M}(Ec,Td)] \arrow[d, "\wr"'] \arrow[r, phantom, "(137)"] & & {[\mathcal{D}(Fc,Fc),\mathcal{M}(Ec,TFc)]} \arrow[dddd, "{[j_{Fc},\mathrm{id}]}"] \\
\displaystyle\int_{c\in\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}\int_{d\in\mathcal{D}}[\mathcal{D}(Fc,d),\mathcal{M}(Ec,Td)] \arrow[d, equal] & & \\
\displaystyle\int_{c\in\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}[\mathcal{D},\mathcal{V}](\mathcal{D}(Fc,-),\mathcal{M}(Ec,T-)) \arrow[r, "\mathrm{ev}_c"'] \arrow[d, "\wr"'] & {[\mathcal{D},\mathcal{V}](\mathcal{D}(Fc,-),\mathcal{M}(Ec,T-))} \arrow[uur, "\mathrm{ev}_{Fc}"'] \arrow[dd, "\wr"] \arrow[ddr, phantom, "(107)"] & \\
\displaystyle\int_{c\in\mathcal{C}} \mathcal{M}(Ec,TFc) \arrow[d, equal] \arrow[r, phantom, "(*)"] & & \\
{[\mathcal{C},\mathcal{M}](E,TF)} \arrow[r, "\mathrm{ev}_c"'] & \mathcal{M}(Ec,TFc) & {[I,\mathcal{M}(Ec,TFc)]} \arrow[l, "i^{-1}"]
\end{tikzcd}
$$

この図式で $(*)$ は同型の定め方より可換である．(j_T) は j_T の定義より可換である．(137) は補題 137 の証明より可換である．(107) は命題 107 より可換である．以上によりこの図式は可換であり，従って $\eta_c\colon Ec \nrightarrow TFc$ は

$$
\begin{aligned}
I &\xrightarrow{j_{TFc}} \mathcal{M}(TFc,TFc) \cong \widehat{\mathcal{C}}(\mathcal{D}(F-,Fc),\mathcal{M}(E-,TFc)) \\
&\xrightarrow{\mathrm{ev}_c} [\mathcal{D}(Fc,Fc),\mathcal{M}(Ec,TFc)] \xrightarrow{[j_{Fc},\mathrm{id}]} [I,\mathcal{M}(Ec,TFc)] \\
&\xrightarrow{i^{-1}} \mathcal{M}(Ec,TFc)
\end{aligned}
\tag{141}
$$

と一致する．

通常の圏の場合の各点左 Kan 拡張の特徴付けに倣って次の定義をする．

定義. $\mathcal{C},\mathcal{D},\mathcal{M}$ を V-豊穣圏，$F\colon\mathcal{C}\to\mathcal{D}$，$E\colon\mathcal{C}\to\mathcal{M}$，$T\colon\mathcal{D}\to\mathcal{M}$ を V-関手とする．このとき T が F に沿った E の各点左 Kan 拡張
$\iff d\in\mathcal{D}$，$m\in\mathcal{M}$ に対して自然な同型

$$\mathcal{M}(Td,m)\cong\widehat{\mathcal{C}}(\mathcal{D}(F-,d),\mathcal{M}(E-,m))$$

が成り立つ．

定理 142. T が F に沿った E の各点左 Kan 拡張のとき，$S\in[\mathcal{D},\mathcal{M}]$ について自然な同型 $[\mathcal{D},\mathcal{M}](T,S)\cong[\mathcal{C},\mathcal{M}](E,[F,1]S)$ が成り立つ．

証明. T が F に沿った E の各点左 Kan 拡張だとすると，$S\in[\mathcal{D},\mathcal{M}]$ について自然に

$$\begin{aligned}
[\mathcal{D},\mathcal{M}](T,S) &= \int_{d\in\mathcal{D}}\mathcal{M}(Td,Sd)\\
&\cong \int_{d\in\mathcal{D}}\widehat{\mathcal{C}}(\mathcal{D}(F-,d),\mathcal{M}(E-,Sd))\\
&= \int_{d\in\mathcal{D}}\int_{c\in\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}[\mathcal{D}(Fc,d),\mathcal{M}(Ec,Sd)]\\
&\cong \int_{c\in\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}\int_{d\in\mathcal{D}}[\mathcal{D}(Fc,d),\mathcal{M}(Ec,Sd)]\\
&= \int_{c\in\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}[\mathcal{D},\mathcal{V}](\mathcal{D}(Fc,-),\mathcal{M}(Ec,S-))\\
&\cong \int_{c\in\mathcal{C}}\mathcal{M}(Ec,SFc)\\
&= [\mathcal{C},\mathcal{M}](E,SF)
\end{aligned}$$

である． □

系 143. 各点左 Kan 拡張は左 Kan 拡張である．

証明. 定理 142 と命題 140 から分かる． □

そこで T が各点左 Kan 拡張であり，左 Kan 拡張としての unit が η であるとき $\langle T,\eta\rangle$ が各点左 Kan 拡張であるということにする．

定理 144. $\mathcal{C},\mathcal{D},\mathcal{M}$ を V-豊穣圏，$F\colon\mathcal{C}\to\mathcal{D}$ を V-関手とする．任意の V-関手 $E\colon\mathcal{C}\to\mathcal{M}$ に対して各点左 Kan 拡張 $F^\dagger E\colon\mathcal{D}\to\mathcal{M}$ が存在するとする．このとき $E\mapsto F^\dagger E$ は V-関手 $F^\dagger\colon[\mathcal{C},\mathcal{M}]\to[\mathcal{D},\mathcal{M}]$ を定める．更に $F^\dagger\dashv[F,1]$ は V-随伴である．

証明. 定理 142 より V-自然同型

$$[\mathcal{D},\mathcal{M}](F^\dagger E,-)\cong[\mathcal{C},\mathcal{M}](E,[F,1]-)$$

が成り立つ．よって系 120 (の双対) より主張が成り立つ． □

定理 145. 任意の $d\in\mathcal{D}$ に対して $\displaystyle\int^{c\in\mathcal{C}}\mathcal{D}(Fc,d)\odot Ec$ が存在するならば各点左 Kan 拡張 $F^\dagger E$ も存在して $F^\dagger E(d)\cong\displaystyle\int^{c\in\mathcal{C}}\mathcal{D}(Fc,d)\odot Ec$ である．

証明. $T:=\displaystyle\int^{c\in\mathcal{C}}\mathcal{D}(Fc,-)\odot Ec$ と置く．$d\in\mathcal{D}$，$m\in\mathcal{M}$ について自然に

$$\begin{aligned}\mathcal{M}(Td,m)&=\mathcal{M}\Big(\int^{c\in\mathcal{C}}\mathcal{D}(Fc,d)\odot Ec,m\Big)\\&\cong\int_{c\in\mathcal{C}}\mathcal{M}(\mathcal{D}(Fc,d)\odot Ec,m)\\&\cong\int_{c\in\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}[\mathcal{D}(Fc,d),\mathcal{M}(Ec,m)]\\&=\widehat{\mathcal{C}}(\mathcal{D}(F-,d),\mathcal{M}(E-,m))\end{aligned}$$

であるから T は F に沿った E の各点左 Kan 拡張である． □

定理 146. 左随伴は左 Kan 拡張と交換する．

証明. 2-category の一般論より従う．「2-category」の PDF を参照． □

6 モノイダル関手

定義. V,W をモノイダル圏とする．(V,W を対象が 1 つの bicategory とみなしたときの) lax 2-functor $F\colon V\to W$ を lax モノイダル関手という．同様に pseudofunctor $F\colon V\to W$ を strong モノイダル関手，strict 2-functor $F\colon V\to W$ を strict モノイダル関手，oplax 2-functor $F\colon V\to W$ を oplax モノイダル関手という．

モノイダル圏を積の与えられた圏とみなすとき，lax モノイダル関手 $F\colon V\to W$ とは，関手 $F\colon V\to W$ であって次の条件をみたすことである．

(1) 次の自然変換 φ^F が与えられている.

$$\begin{tikzcd} & V\times V \arrow[dl, "F\times F"'] \arrow[dr, "\otimes"] & \\ W\times W \arrow[dr, "\otimes"'] \arrow[rr, phantom, "\overset{\Longrightarrow}{\varphi^F}"] & & V \arrow[dl, "F"] \\ & W & \end{tikzcd}$$

即ち，$u,v\in V$ について自然な W の射 $\varphi^F_{uv}\colon Fu\otimes Fv\to F(u\otimes v)$ が与えられている.

(2) W の射 $\psi^F\colon I\to F(I)$ が与えられている.

(3) 対象 $u,v,w\in V$ に対して次の W の図式が可換である.

$$\begin{tikzcd} (Fu\otimes Fv)\otimes Fw \arrow[r, "\varphi^F_{uv}\otimes\mathrm{id}"] \arrow[d, "\alpha_{Fu,Fv,Fw}"'] & F(u\otimes v)\otimes Fw \arrow[r, "\varphi^F_{u\otimes v,w}"] & F((u\otimes v)\otimes w) \arrow[d, "F(\alpha_{uvw})"] \\ Fu\otimes(Fv\otimes Fw) \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes\varphi^F_{vw}"'] & Fu\otimes F(v\otimes w) \arrow[r, "\varphi^F_{u,v\otimes w}"'] & F(u\otimes(v\otimes w)) \end{tikzcd}$$

(4) 対象 $u\in V$ に対して次の W の図式が可換である.

$$\begin{tikzcd} I\otimes Fu \arrow[r, "\lambda_{Fu}"] \arrow[d, "\psi^F\otimes\mathrm{id}"'] & Fu \\ FI\otimes Fu \arrow[r, "\varphi^F_{I,u}"'] & F(I\otimes u) \arrow[u, "F(\lambda_u)"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} Fu\otimes I \arrow[r, "\rho_{Fu}"] \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes\psi^F"'] & Fu \\ Fu\otimes FI \arrow[r, "\varphi^F_{u,I}"'] & F(u\otimes I) \arrow[u, "F(\rho_u)"'] \end{tikzcd}$$

strong モノイダル関手は φ^F,ψ^F が同型な場合であり，strict モノイダル関手は id な場合である．また oplax モノイダル関手は φ^F,ψ^F が逆向きの場合である．φ^F,ψ^F の添え字の F はしばしば省略する.

命題 147. $F\colon V\to W$ を lax モノイダル関手として $\mathcal{C}$ を V-豊穣圏とする．このとき $F\mathcal{C}$ を次のように定義すると W-豊穣圏になる.

- $\mathrm{Ob}(F\mathcal{C}) := \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$.
- $a,b\in\mathcal{C}$ に対して $F\mathcal{C}(a,b) := F(\mathcal{C}(a,b))$.
- $a,b,c\in\mathcal{C}$ に対して W の射 $m_{abc}\colon F\mathcal{C}(b,c)\otimes F\mathcal{C}(a,b)\to F\mathcal{C}(a,c)$ を合成

$$F(\mathcal{C}(b,c))\otimes F(\mathcal{C}(a,b)) \xrightarrow{\varphi^F} F(\mathcal{C}(b,c)\otimes\mathcal{C}(a,b)) \xrightarrow{F(m_{abc})} F(\mathcal{C}(a,c))$$

で定める．

- $a \in \mathcal{C}$ に対して W の射 $j_a \colon I \to F\mathcal{C}(a,a)$ を合成

$$I \xrightarrow{\psi^F} F(I) \xrightarrow{F(j_a)} F(\mathcal{C}(a,a))$$

で定める．

証明．まず

$$\begin{tikzcd}
\bigl(F\mathcal{C}(c,d) \otimes F\mathcal{C}(b,c)\bigr) \otimes F\mathcal{C}(a,b) \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[d, "m_{bcd}\otimes\mathrm{id}"'] & & F\mathcal{C}(c,d) \otimes \bigl(F\mathcal{C}(b,c) \otimes F\mathcal{C}(a,b)\bigr) \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes m_{abc}"] \\
F\mathcal{C}(b,d) \otimes F\mathcal{C}(a,b) \arrow[dr, "m_{abd}"'] & & F\mathcal{C}(c,d) \otimes F\mathcal{C}(a,c) \arrow[dl, "m_{acd}"] \\
& F\mathcal{C}(a,d) &
\end{tikzcd}$$

が可換であることを示す．定義より次の図式が可換であることを示せばよい．(ここでスペースの都合上，$\mathcal{C}(a,b)$ を $\mathcal{C}_{ab}$ と表記した．)

$$\begin{tikzcd}
(F\mathcal{C}_{cd} \otimes F\mathcal{C}_{bc}) \otimes F\mathcal{C}_{ab} \arrow[rrrr, "\alpha"] \arrow[d, "\varphi\otimes\mathrm{id}"'] & & & & F\mathcal{C}_{cd} \otimes (F\mathcal{C}_{bc} \otimes F\mathcal{C}_{ab}) \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes\varphi"] \\
F(\mathcal{C}_{cd} \otimes \mathcal{C}_{bc}) \otimes F\mathcal{C}_{ab} \arrow[dr, "\varphi"] \arrow[dd, "Fm\otimes\mathrm{id}"'] & & (F) & & F\mathcal{C}_{cd} \otimes F(\mathcal{C}_{bc} \otimes \mathcal{C}_{ab}) \arrow[dl, "\varphi"'] \arrow[dd, "\mathrm{id}\otimes Fm"] \\
& F((\mathcal{C}_{cd} \otimes \mathcal{C}_{bc}) \otimes \mathcal{C}_{ab}) \arrow[rr, "F\alpha"] \arrow[dd, "F(m\otimes\mathrm{id})"] & & F(\mathcal{C}_{cd} \otimes (\mathcal{C}_{bc} \otimes \mathcal{C}_{ab})) \arrow[dd, "F(\mathrm{id}\otimes m)"'] & \\
F\mathcal{C}_{bd} \otimes F\mathcal{C}_{ab} \arrow[dr, "\varphi"'] \arrow[r, phantom, "(\varphi)"] & & (\mathcal{C}) & & F\mathcal{C}_{cd} \otimes F\mathcal{C}_{ac} \arrow[dl, "\varphi"] \arrow[l, phantom, "(\varphi)"] \\
& F(\mathcal{C}_{bd} \otimes \mathcal{C}_{ab}) \arrow[dr, "Fm"'] & & F(\mathcal{C}_{cd} \otimes \mathcal{C}_{ac}) \arrow[dl, "Fm"] & \\
& & F\mathcal{C}_{ad} & &
\end{tikzcd}$$

(F) は lax モノイダル関手の定義より可換である．(φ) は φ が自然変換であるから可換である．$(\mathcal{C})$ は V-豊穣圏の定義より可換である．故に全体も可換である．

次に

$$\begin{tikzcd}
I \otimes F\mathcal{C}(a,b) \arrow[rr, "\lambda"] \arrow[dr, "j_b\otimes\mathrm{id}"'] & & F\mathcal{C}(a,b) \\
& F\mathcal{C}(b,b) \otimes F\mathcal{C}(a,b) \arrow[ur, "m_{abb}"'] &
\end{tikzcd}$$

が可換であることを示す．そのためには

$$
\begin{tikzcd}
I \otimes F\mathcal{C}(a,b) \arrow[rrrr, bend left, "\lambda"] \arrow[dr, "\psi\otimes\mathrm{id}"'] & (F) & F(I \otimes \mathcal{C}(a,b)) \arrow[rr, "F\lambda"] \arrow[dr, "F(j_b\otimes\mathrm{id})"'] & (\mathcal{C}) & F\mathcal{C}(a,b) \\
& FI \otimes F\mathcal{C}(a,b) \arrow[ur, "\varphi"] \arrow[dr, "Fj_b\otimes\mathrm{id}"'] & (\varphi) & F(\mathcal{C}(b,b)\otimes\mathcal{C}(a,b)) \arrow[ur, "Fm"'] & \\
& & F\mathcal{C}(b,b)\otimes F\mathcal{C}(a,b) \arrow[ur, "\varphi"'] & &
\end{tikzcd}
$$

が可換であることを示せばよい．(F) は lax モノイダル関手の定義より可換である．(φ) は φ が自然変換であるから可換である．$(\mathcal{C})$ は V-豊穣圏の定義より可換である．故に全体も可換である．

$$
\begin{tikzcd}
F\mathcal{C}(a,b)\otimes I \arrow[rr, "\rho"] \arrow[dr, "\mathrm{id}\otimes j_a"'] & & F\mathcal{C}(a,b) \\
& F\mathcal{C}(a,b)\otimes F\mathcal{C}(a,a) \arrow[ur, "m_{aab}"'] &
\end{tikzcd}
$$

についても同様に

$$
\begin{tikzcd}
F\mathcal{C}(a,b)\otimes I \arrow[rrrr, bend left, "\lambda"] \arrow[dr, "\mathrm{id}\otimes\psi"'] & & F(\mathcal{C}(a,b)\otimes I) \arrow[rr, "F\rho"] \arrow[dr, "F(\mathrm{id}\otimes j_a)"'] & & F\mathcal{C}(a,b) \\
& F\mathcal{C}(a,b)\otimes FI \arrow[ur, "\varphi"] \arrow[dr, "\mathrm{id}\otimes Fj_a"'] & & F(\mathcal{C}(a,b)\otimes\mathcal{C}(a,a)) \arrow[ur, "Fm"'] & \\
& & F\mathcal{C}(a,b)\otimes F\mathcal{C}(a,a) \arrow[ur, "\varphi"'] & &
\end{tikzcd}
$$

から分かる． □

命題 148. $F\colon V \to W$ を lax モノイダル関手として $K\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ を V-関手とする．このとき FK を次のように定義すると W-関手 $F\mathcal{C} \to F\mathcal{D}$ になる．

- $a \in \mathcal{C}$ に対して $FK(a) := K(a)$.
- $a, b \in \mathcal{C}$ に対して $(FK)_{ab} := F(K_{ab})\colon F\mathcal{C}(a,b) \to F\mathcal{D}(Ka, Kb)$.

証明．まず

$$\begin{tikzcd}
F\mathcal{C}(b,c)\otimes F\mathcal{C}(a,b) \arrow[r, "m"] \arrow[d, "FK_{bc}\otimes FK_{ab}"'] & F\mathcal{C}(a,c) \arrow[d, "FK_{ac}"] \\
F\mathcal{D}(FKb,FKc)\otimes F\mathcal{D}(FKa,FKb) \arrow[r, "m"'] & F\mathcal{D}(FKa,FKc)
\end{tikzcd}$$

が可換であることを示す．定義より

$$\begin{tikzcd}
F\mathcal{C}(b,c)\otimes F\mathcal{C}(a,b) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "F(K_{bc})\otimes F(K_{ab})"'] & F(\mathcal{C}(b,c)\otimes\mathcal{C}(a,b)) \arrow[r, "Fm"] \arrow[d, "F(K_{bc}\otimes K_{ab})"'] & F\mathcal{C}(a,c) \arrow[d, "F(K_{ac})"] \\
F\mathcal{D}(Kb,Kc)\otimes F\mathcal{D}(Ka,Kb) \arrow[r, "\varphi"'] & F(\mathcal{D}(Kb,Kc)\otimes\mathcal{D}(Ka,Kb)) \arrow[r, "Fm"'] & F\mathcal{D}(Ka,Kc)
\end{tikzcd}$$

が可換であることを示せばよいが，左の四角は φ が自然変換だから可換であり，右の四角は K が V-関手だから可換である．

次に

$$\begin{tikzcd}
I \arrow[r, "j_a"] \arrow[dr, "j_{FKa}"'] & F\mathcal{C}(a,a) \arrow[d, "FK_{aa}"] \\
& F\mathcal{D}(FKa,FKa)
\end{tikzcd}$$

が可換であることを示す．定義より

$$\begin{tikzcd}
I \arrow[r, "\psi"] \arrow[dr, "\psi"'] & FI \arrow[r, "j_a"] \arrow[d, "\mathrm{id}"] & F\mathcal{C}(a,a) \arrow[d, "FK_{aa}"] \\
& FI \arrow[r, "j_{Ka}"'] & F\mathcal{D}(Ka,Ka)
\end{tikzcd}$$

が可換であることを示せばよいが，左の三角は明らかに可換で，右の四角は K が V-関手だから可換である． $\square$

命題 149. $F\colon V\to W$ を lax モノイダル関手として $\theta\colon K\Rightarrow L\colon\mathcal{C}\to\mathcal{D}$ を V-自然変換とする．このとき $F\theta$ を $(F\theta)_a := \bigl(I\xrightarrow{\psi} FI \xrightarrow{F(\theta_a)} F(\mathcal{D}(Ka,La))\bigr)$ により定義すると，これは W-自然変換 $F\theta\colon FK\Rightarrow FL\colon F\mathcal{C}\to F\mathcal{D}$ になる．

証明. 次の図式が可換であることを示せばよい.

$$
\begin{tikzcd}
& I \otimes F\mathcal{C}(a,b) \arrow[r, "(F\theta)_b \otimes FK_{ab}"] & F\mathcal{D}(FKb, FLb) \otimes F\mathcal{D}(FKa, FKb) \arrow[dr, "m"] & \\
F\mathcal{C}(a,b) \arrow[ur, "\lambda^{-1}"] \arrow[dr, "\rho^{-1}"'] & & & F\mathcal{D}(FKa, FLb) \\
& F\mathcal{C}(a,b) \otimes I \arrow[r, "FL_{ab} \otimes (F\theta)_a"'] & F\mathcal{D}(FLa, FLb) \otimes F\mathcal{D}(FKa, FLa) \arrow[ur, "m"'] &
\end{tikzcd}
$$

そのためには定義より次の図式が可換であることを示せばよい.

$$
\begin{tikzcd}
I \otimes F\mathcal{C}(a,b) \arrow[r, "\psi\otimes\mathrm{id}"] \arrow[dr, phantom, "(F)"] & FI \otimes F\mathcal{C}(a,b) \arrow[r, "F(\theta_b)\otimes F(K_{ab})"] \arrow[d, "\varphi"] \arrow[dr, phantom, "(\varphi)"] & F\mathcal{D}(Kb, Lb) \otimes F\mathcal{D}(Ka, Kb) \arrow[d, "\varphi"] \\
& F(I \otimes \mathcal{C}(a,b)) \arrow[r, "F(\theta_b \otimes K_{ab})"'] & F(\mathcal{D}(Kb, Lb) \otimes \mathcal{D}(Ka, Kb)) \arrow[d, "Fm"] \\
F(\mathcal{C}(a,b)) \arrow[uu, "\lambda^{-1}"] \arrow[dd, "\rho^{-1}"'] \arrow[ur, "F(\lambda^{-1})"'] \arrow[dr, "F(\rho^{-1})"] & \arrow[r, phantom, "(\theta)"] & F\mathcal{D}(Ka, Lb) \\
& F(\mathcal{C}(a,b) \otimes I) \arrow[r, "F(L_{ab}\otimes\theta_a)"] & F(\mathcal{D}(La, Lb) \otimes \mathcal{D}(Ka, La)) \arrow[u, "Fm"'] \\
F\mathcal{C}(a,b) \otimes I \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes\psi"'] \arrow[ur, phantom, "(F)"] & F\mathcal{C}(a,b) \otimes FI \arrow[r, "F(L_{ab})\otimes F(\theta_a)"'] \arrow[u, "\varphi"] \arrow[ur, phantom, "(\varphi)"] & F\mathcal{D}(La, Lb) \otimes F\mathcal{D}(Ka, La) \arrow[u, "\varphi"']
\end{tikzcd}
$$

(F) は lax モノイダル関手の定義より可換である. (φ) は φ が自然変換だから可換である. (θ) は V-自然変換の定義より可換である. $\square$

定理 150. $F\colon V \to W$ を lax モノイダル関手とするとき, 命題 147 から 149 により strict 2-functor $F\colon V\text{-}\mathbf{CAT} \to W\text{-}\mathbf{CAT}$ が得られる.

証明. $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ を V-豊穣圏とする.

まず命題 148, 149 の F が, 関手 $V\text{-}\mathbf{CAT}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \to W\text{-}\mathbf{CAT}(F\mathcal{A}, F\mathcal{B})$ を与えることを示す.

∵) 関手であることを示すため, まず F が恒等射を保つことを示そう. そのために V-関手 $K\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ を取る. $F(\mathrm{id}_K)$ の定義より

$$
F(\mathrm{id}_K)_a = \left(I \xrightarrow{\psi} FI \xrightarrow{F(j_{Ka})} F\mathcal{B}(Ka, Ka)\right)
$$

であるが，一方 $F\mathcal{B}$ の定義より

$$\mathrm{id}_{Ka} = \left(I \xrightarrow{\psi} FI \xrightarrow{F(j_{Ka})} F\mathcal{B}(Ka, Ka)\right)$$

なので $F(\mathrm{id}_K) = \mathrm{id}_{FK}$ が分かる．

次に F が合成と交換することを示すため，$\theta\colon K \Rightarrow L$, $\sigma\colon L \Rightarrow H$ を V-自然変換とする．$F(\sigma * \theta) = F(\sigma) * F(\theta)$ を示すためには $a \in \mathcal{A}$ に対して $F(\sigma*\theta)_a = F(\sigma)_a \circ F(\theta)_a$ を示せばよい．定義より

$$\begin{aligned} F(\sigma*\theta)_a &= \left(I \xrightarrow{\psi} FI \xrightarrow{F((\sigma*\theta)_a)} F\mathcal{B}(Ka, Ha)\right) \\ &= \left(I \xrightarrow{\psi} FI \xrightarrow{F(\sigma_a\circ\theta_a)} F\mathcal{B}(Ka, Ha)\right) \end{aligned}$$

であるが，ここで $\sigma_a \circ \theta_a$ は合成

$$I \xrightarrow{\lambda^{-1}} I \otimes I \xrightarrow{\sigma_a\otimes\theta_a} \mathcal{B}(La, Ha) \otimes \mathcal{B}(Ka, La) \xrightarrow{m} \mathcal{B}(Ka, Ha)$$

である．故に $F(\sigma*\theta)_a$ は合成

$$\begin{aligned} &I \xrightarrow{\varphi} FI \xrightarrow{F\lambda^{-1}} F(I\otimes I) \xrightarrow{F(\sigma_a\otimes\theta_a)} F(\mathcal{B}(La, Ha) \otimes \mathcal{B}(Ka, La)) \\ &\xrightarrow{Fm} F\mathcal{B}(Ka, Ha) \end{aligned}$$

となる．一方 $F(\sigma)_a \circ F(\theta)_a$ は合成

$$\begin{aligned} &I \xrightarrow{\lambda^{-1}} I\otimes I \xrightarrow{\psi\otimes\psi} FI\otimes FI \xrightarrow{F\sigma_a\otimes F\theta_a} F\mathcal{B}(La, Ha) \otimes F\mathcal{B}(Ka, La) \\ &\xrightarrow{m} F\mathcal{B}(Ka, Ha) \end{aligned}$$

である．よって $F(\sigma*\theta)_a = F(\sigma)_a \circ F(\theta)_a$ となるには次の図式が可換であればよい．

$$\begin{tikzcd}
I \arrow[r, "\psi"] \arrow[dd, "\lambda^{-1}"'] \arrow[ddr, phantom, "(\lambda)"] & FI \arrow[r, "F(\lambda^{-1})"] \arrow[dd, "\lambda^{-1}"] \arrow[ddr, phantom, "(F)"] & F(I\otimes I) \arrow[r, "F(\sigma_a\otimes\theta_a)"] \arrow[ddr, phantom, "(\varphi)"] & F(\mathcal{B}(La, Ha)\otimes\mathcal{B}(Ka, La)) \arrow[dr, "Fm"] \arrow[ddr, phantom, "(F\mathcal{B})"] & \\
 & & & & F\mathcal{B}(Ka, Ha) \\
I\otimes I \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes\psi"'] & I\otimes FI \arrow[r, "\psi\otimes\mathrm{id}"'] & FI\otimes FI \arrow[uu, "\varphi"] \arrow[r, "F\sigma_a\otimes F\theta_a"'] & F\mathcal{B}(La, Ha)\otimes F\mathcal{B}(Ka, La) \arrow[uu, "\varphi"] \arrow[ur, "m"'] &
\end{tikzcd}$$

(λ)，(φ) は λ, φ が自然変換であるから可換である．(F) は F が lax モノイダル関手だから可換である．$(F\mathcal{B})$ は $F\mathcal{B}$ の合成の定義より可換である．

次に W-関手の等式 $\mathrm{id}_{F\mathcal{A}} = F(\mathrm{id}_{\mathcal{A}})$ が成り立つことを示す．

$\because$) まず対象に関しては明らかに $\mathrm{id}_{F\mathcal{A}}(a) = F(\mathrm{id}_{\mathcal{A}})(a)$ である．よって $a, b \in \mathcal{A}$ に対して $(\mathrm{id}_{F\mathcal{A}})_{ab} = F(\mathrm{id}_{\mathcal{A}})_{ab}$ を示せばよい．まず $(\mathrm{id}_{F\mathcal{A}})_{ab} = \mathrm{id}_{F\mathcal{A}(a,b)}$ である．一方 $F(\mathrm{id}_{\mathcal{A}})_{ab} = F((\mathrm{id}_{\mathcal{A}})_{ab}) = F(\mathrm{id}_{\mathcal{A}(a,b)}) = \mathrm{id}_{F\mathcal{A}(a,b)}$ である．

よって後は

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
& V\text{-}\mathbf{CAT}(\mathcal{B},\mathcal{C}) \times V\text{-}\mathbf{CAT}(\mathcal{A},\mathcal{B}) \arrow[dl, "F\times F"'] \arrow[dr, "\bullet"] & \\
W\text{-}\mathbf{CAT}(F\mathcal{B},F\mathcal{C}) \times W\text{-}\mathbf{CAT}(F\mathcal{A},F\mathcal{B}) \arrow[dr, "\bullet"'] & & V\text{-}\mathbf{CAT}(\mathcal{A},\mathcal{C}) \arrow[dl, "F"] \\
& V\text{-}\mathbf{CAT}(F\mathcal{A},F\mathcal{C}) &
\end{tikzcd}$$

が可換であることを示せばよい．そのためには $\theta\colon K \Rightarrow L\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, $\sigma\colon P \Rightarrow Q\colon \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ として $F(\sigma \bullet \theta) = F\sigma \bullet F\theta$ を示せばよい．

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A} \arrow[r, bend left, "K"] \arrow[r, bend right, "L"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\theta"] & \mathcal{B} \arrow[r, bend left, "P"] \arrow[r, bend right, "Q"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\sigma"] & \mathcal{C}
\end{tikzcd}$$

$a \in \mathcal{A}$ とする．まず $(F\sigma \bullet F\theta)_a = (F\sigma)_{FLa} \circ FP((F\theta)_a)$ で

$$\begin{aligned}
F(\sigma)_{FLa} &= \bigl(I \xrightarrow{\psi} FI \xrightarrow{F(\sigma_{La})} F\mathcal{C}(PLa, QLa)\bigr) \\
FP((F\theta)_a) &= FP\bigl(I \xrightarrow{\psi} FI \xrightarrow{F(\theta_a)} F\mathcal{B}(Ka, La)\bigr) \\
&= \bigl(I \xrightarrow{\psi} FI \xrightarrow{F(\theta_a)} F\mathcal{B}(Ka, La) \xrightarrow{F(P_{KaLa})} F\mathcal{C}(PKa, PLa)\bigr)
\end{aligned}$$

だから $(F\sigma \bullet F\theta)_a$ は合成

$$\begin{aligned}
&I \xrightarrow{\lambda^{-1}} I \otimes I \xrightarrow{\psi\otimes\psi} FI \otimes FI \\
&\xrightarrow{F(\sigma_{La})\otimes F(\theta_a)} F\mathcal{C}(PLa, QLa) \otimes F\mathcal{B}(Ka, La) \\
&\xrightarrow{F(\mathrm{id})\otimes F(P_{KaLa})} F\mathcal{C}(PLa, QLa) \otimes F\mathcal{C}(PKa, PLa) \xrightarrow{m} \mathcal{C}(PKa, QLa)
\end{aligned}$$

となる．一方

$$\begin{aligned}
F(\sigma \bullet \theta)_a &= \bigl(I \xrightarrow{\psi} FI \xrightarrow{F((\sigma\bullet\theta)_a)} F\mathcal{C}(PKa, QLa)\bigr) \\
&= \bigl(I \xrightarrow{\psi} FI \xrightarrow{F(\sigma_{La}\circ P\theta_a)} F\mathcal{C}(PKa, QLa)\bigr)
\end{aligned}$$

で $\sigma_{La} \circ P\theta_a$ は合成

$$
\begin{aligned}
I &\xrightarrow{\lambda^{-1}} I \otimes I \xrightarrow{\sigma_{La} \otimes \theta_a} \mathcal{C}(PLa, QLa) \otimes \mathcal{B}(Ka, La) \\
&\xrightarrow{\mathrm{id} \otimes P_{KaLa}} \mathcal{C}(PLa, QLa) \otimes \mathcal{C}(PKa, PLa) \xrightarrow{m} \mathcal{C}(PKa, QLa)
\end{aligned}
$$

である．よって

$$
\begin{tikzcd}
I \otimes I \arrow[d, "\mathrm{id} \otimes \psi"'] \arrow[dr, phantom, "(\lambda)"] & I \arrow[l, "\lambda^{-1}"'] \arrow[d, "\psi"] \\
I \otimes FI \arrow[d, "\psi \otimes \mathrm{id}"'] \arrow[dr, phantom, "(F)"] & FI \arrow[l, "\lambda^{-1}"'] \arrow[d, "F(\lambda^{-1})"] \\
FI \otimes FI \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "F(\sigma_{La}) \otimes F(\theta_a)"'] \arrow[dr, phantom, "(\varphi)"] & F(I \otimes I) \arrow[d, "F(\sigma_{La} \otimes \theta_a)"] \\
F\mathcal{C}(PLa, QLa) \otimes F\mathcal{B}(Ka, La) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "F(\mathrm{id}) \otimes F(P_{KaLa})"'] \arrow[dr, phantom, "(\varphi)"] & F(\mathcal{C}(PLa, QLa) \otimes \mathcal{B}(Ka, La)) \arrow[d, "F(\mathrm{id} \otimes P_{KaLa})"] \\
F\mathcal{C}(PLa, QLa) \otimes F\mathcal{C}(PKa, PLa) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "m"'] \arrow[dr, phantom, "(F\mathcal{C})", near end, shift left=4] & F(\mathcal{C}(PLa, QLa) \otimes \mathcal{C}(PKa, PLa)) \arrow[d, "Fm"] \\
& F\mathcal{C}(PKa, QLa)
\end{tikzcd}
$$

が可換であることを示せばよい．(λ), (φ) は λ, φ が自然変換であるから可換である．(F) は F が lax モノイダル関手だから可換である．$(F\mathcal{C})$ は $F\mathcal{C}$ の合成の定義より可換である． □

例 151. モノイダル圏 V に対して, 関手 $\mathrm{Hom}_V(I, -)\colon V \to \mathbf{Set}$ は lax モノイダル関手である．故に strict 2-functor V-$\mathbf{CAT} \to \mathbf{CAT}$ が得られる．これは underlying category を与える strict 2-functor U と一致する．

証明. まず $f\colon I \to u,\ g\colon I \to v$ に対して $\varphi_{uv}(f, g) := \left(I \xrightarrow{\lambda^{-1}} I \otimes I \xrightarrow{f \otimes g} u \otimes v\right)$ と定義する．これは写像 $\varphi_{uv}\colon \mathrm{Hom}_V(I, u) \times \mathrm{Hom}_V(I, v) \to \mathrm{Hom}_V(I, u \otimes v)$ を定めるが，これは $u, v \in V$ について自然である．

∵) $k\colon u \to u'$，$l\colon v \to v'$ を V の射とする．

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_V(I,u)\times\mathrm{Hom}_V(I,v) \arrow[r, "\varphi_{uv}"] \arrow[d, "(k\circ -)\times(l\circ -)"'] & \mathrm{Hom}_V(I,u\otimes v) \arrow[d, "(k\otimes l)\circ -"] \\
\mathrm{Hom}_V(I,u')\times\mathrm{Hom}_V(I,v') \arrow[r, "\varphi_{u'v'}"'] & \mathrm{Hom}_V(I,u'\otimes v')
\end{tikzcd}$$

が可換であることを示せばよい．即ち $f\colon I \to u$，$g\colon I \to v$ に対して

$$(k\otimes l)\circ\varphi_{uv}(f,g) = \varphi_{u'v'}(k\circ f, l\circ g)$$

を示せばよいが，それは定義より明らか．

次に写像 $\psi\colon 1 \to \mathrm{Hom}_V(I,I)$ を $\psi(*) := \mathrm{id}_I$ で定義する．

以上で定義した φ, ψ が lax モノイダル関手の定義を満たすことを示せばよい．以下では $F := \mathrm{Hom}_V(I,-)$ と書く．

まず次の図式の可換性を示す．

$$\begin{tikzcd}
(Fu\times Fv)\times Fw \arrow[r, "\varphi_{uv}\times\mathrm{id}"] \arrow[d, "\alpha_{Fu,Fv,Fw}"'] & F(u\otimes v)\times Fw \arrow[r, "\varphi_{u\otimes v,w}"] & F((u\otimes v)\otimes w) \arrow[d, "F(\alpha_{uvw})"] \\
Fu\times(Fv\times Fw) \arrow[r, "\mathrm{id}\times\varphi_{vw}"'] & Fu\times F(v\otimes w) \arrow[r, "\varphi_{u,v\otimes w}"'] & F(u\otimes(v\otimes w))
\end{tikzcd}$$

任意の $\langle\langle f,g\rangle,h\rangle \in (Fu\times Fv)\times Fw$ を取る．これを時計回りに写した結果は

$$I \xrightarrow{\lambda^{-1}} I\otimes I \xrightarrow{\lambda^{-1}\otimes\mathrm{id}} (I\otimes I)\otimes I \xrightarrow{(f\otimes g)\otimes h} (u\otimes v)\otimes w \xrightarrow{\alpha} u\otimes(v\otimes w)$$

である．一方，反時計回りは

$$I \xrightarrow{\lambda^{-1}} I\otimes I \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes\lambda^{-1}} I\otimes(I\otimes I) \xrightarrow{f\otimes(g\otimes h)} u\otimes(v\otimes w)$$

である．よって次の図式が可換であることを示せばよい．

$$\begin{tikzcd}
I\otimes I \arrow[r, "\lambda^{-1}\otimes\mathrm{id}"] \arrow[dr, "\mathrm{id}\otimes\lambda^{-1}"'] & (I\otimes I)\otimes I \arrow[r, "(f\otimes g)\otimes h"] \arrow[d, "\alpha"] \arrow[d, phantom, "(12)"', shift right=4ex] \arrow[dr, phantom, "(\alpha)"] & (u\otimes v)\otimes w \arrow[d, "\alpha"] \\
& I\otimes(I\otimes I) \arrow[r, "f\otimes(g\otimes h)"'] & u\otimes(v\otimes w)
\end{tikzcd}$$

(12) は coherence 定理 (定理 12) から可換である．(α) は α が自然変換であるから可換である．従ってこの図式は可換である．

次に

$$\begin{tikzcd}
1 \times Fu \arrow[r, "\lambda_{Fu}"] \arrow[d, "\psi\times\mathrm{id}"'] & Fu \\
FI \times Fu \arrow[r, "\varphi_{I,u}"'] & F(I\otimes u) \arrow[u, "F(\lambda_u)"']
\end{tikzcd}$$

が可換であることを示す．$\langle *, f\rangle \in 1\times Fu$ を反時計回りに写すと

$$I \xrightarrow{\lambda^{-1}} I\otimes I \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes f} I\otimes u \xrightarrow{\lambda} u$$

であるが，λ が自然変換であるからこれは f に一致する．

最後に

$$\begin{tikzcd}
Fu \times 1 \arrow[r, "\rho_{Fu}"] \arrow[d, "\mathrm{id}\times\psi"'] & Fu \\
Fu \times FI \arrow[r, "\varphi_{u,I}"'] & F(u\otimes I) \arrow[u, "F(\rho_u)"']
\end{tikzcd}$$

についても同様に可換である． $\square$

命題 152. V, W をモノイダル圏として $F \dashv G\colon V\to W$ を随伴関手とする．このとき

$$F \text{ が oplax モノイダル関手} \iff G \text{ が lax モノイダル関手}.$$

証明. どちらも同様なので $\Longleftarrow$ を示す．

$F\dashv G$ の unit, counit を η, ε とする．$\langle G, \varphi, \psi\rangle$ が lax モノイダル関手を与えるとする．つまり $u, v\in V$ に対して $\varphi_{uv}\colon Gu\otimes Gv\to G(u\otimes v)$ で $\psi\colon I\to G(I)$ である．$w, x\in W$ に対して $\varphi'_{wx}\colon F(w\otimes x)\to Fw\otimes Fx$ を，合成

$$w\otimes x \xrightarrow{\eta_w\otimes\eta_x} GFw\otimes GFx \xrightarrow{\varphi_{FwFx}} G(Fw\otimes Fx)$$

の (随伴 $F\dashv G$ で対応する) 随伴射とする．φ' は自然変換である．

$\because$) 定義より，$w, x\in W$ に対して φ'_{wx} は合成

$$w\otimes x \xrightarrow{F(\eta_w\otimes\eta_x)} F(GFw\otimes GFx) \xrightarrow{F(\varphi_{FwFx})} FG(Fw\otimes Fx) \xrightarrow{\varepsilon_{Fw\otimes Fx}} Fw\otimes Fx$$

だから w, x について自然である．

また $\psi\colon I\to G(I)$ の随伴射を $\psi'\colon F(I)\to I$ とする．

後は $\langle F, \varphi', \psi' \rangle$ が oplax モノイダル関手の条件を満たすことを示せばよい．まず次の図式が可換であることを示す．

$$
\begin{tikzcd}
F((w \otimes x) \otimes z) \arrow[r, "\varphi'_{w \otimes x, z}"] \arrow[ddd, "F(\alpha_{wxz})"] & F(w \otimes x) \otimes Fz \arrow[d, "\varphi'_{wx} \otimes \mathrm{id}"] \\
& (Fw \otimes Fx) \otimes Fz \arrow[d, "\alpha_{Fw, Fx, Fz}"] \\
& Fw \otimes (Fx \otimes Fz) \\
F(w \otimes (x \otimes z)) \arrow[r, "\varphi'_{w, x \otimes z}"'] & Fw \otimes F(x \otimes z) \arrow[u, "\mathrm{id} \otimes \varphi'_{xz}"']
\end{tikzcd}
$$

そのためには随伴により次の図式が可換であることを示せばよい．

$$
\begin{tikzcd}
(w \otimes x) \otimes z \arrow[r, "\eta_{w \otimes x} \otimes \eta_z"] \arrow[d, "(\eta_w \otimes \eta_x) \otimes \eta_z"] \arrow[ddd, bend right=60, "\alpha"'] \arrow[dr, phantom, "(\varphi')"] & GF(w \otimes x) \otimes GFz \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "G(\varphi'_{wx}) \otimes G(\mathrm{id})"] \arrow[dr, phantom, "(\varphi)"] & G(F(w \otimes x) \otimes Fz) \arrow[d, "G(\varphi'_{wx} \otimes \mathrm{id})"] \\
(GFw \otimes GFx) \otimes GFz \arrow[r, "\varphi \otimes \mathrm{id}"'] \arrow[d, "\alpha"] \arrow[d, phantom, "(\alpha)"'] & G(Fw \otimes Fx) \otimes GFz \arrow[r, "\varphi"'] \arrow[d, phantom, "(G)"] & G((Fw \otimes Fx) \otimes Fz) \arrow[d, "G(\alpha)"] \\
GFw \otimes (GFx \otimes GFz) \arrow[r, "\mathrm{id} \otimes \varphi"] & GFw \otimes G(Fx \otimes Fz) \arrow[r, "\varphi"] & G(Fw \otimes (Fx \otimes Fz)) \\
w \otimes (x \otimes z) \arrow[r, "\eta_w \otimes \eta_{x \otimes z}"'] \arrow[u, "\eta_w \otimes (\eta_x \otimes \eta_z)"'] \arrow[ur, phantom, "(\varphi')"] & GFw \otimes GF(x \otimes z) \arrow[r, "\varphi"'] \arrow[u, "G(\mathrm{id}) \otimes G(\varphi'_{xz})"'] \arrow[ur, phantom, "(\varphi)"] & G(Fw \otimes F(x \otimes z)) \arrow[u, "G(\mathrm{id} \otimes \varphi'_{xz})"']
\end{tikzcd}
$$

(φ)，α は φ, α が自然変換であるから可換である．(G) は G が lax モノイダル関手だから可換である．(φ') は φ' の定義より可換である．以上によりこの図式は可換である．

次に

$$
\begin{tikzcd}
Fw \arrow[r, "\lambda^{-1}_{Fw}"] \arrow[d, "F(\lambda^{-1}_w)"'] & I \otimes Fw \\
F(I \otimes w) \arrow[r, "\varphi'_{I,w}"'] & FI \otimes Fw \arrow[u, "\psi' \otimes \mathrm{id}"']
\end{tikzcd}
$$

が可換であることを示す．そのためには随伴により次の図式が可換であることを示せば

よい．

$$\begin{tikzcd}
w \arrow[r, "\eta_w"] \arrow[dd, "\lambda_w^{-1}"'] \arrow[ddr, phantom, "(\lambda)"] & GFw \arrow[rr, "G(\lambda_{Fw}^{-1})"] \arrow[dd, "\lambda_{GFw}^{-1}"'] \arrow[dr, phantom, "(G)"] & & G(I \otimes Fw) \\
& & GI \otimes GFw \arrow[ur, "\varphi_{I,Fw}"] \arrow[r, phantom, "(\varphi)"] & \\
I \otimes w \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes\eta_w"'] & I \otimes GFw \arrow[r, "\eta_I\otimes\mathrm{id}"'] \arrow[ur, "\psi\otimes\mathrm{id}"] \arrow[ur, phantom, "(\psi')", shift right=3] & GFI \otimes GFw \arrow[r, "\varphi_{FI,Fw}"'] \arrow[u, "G\psi'\otimes G(\mathrm{id})"'] & G(FI \otimes Fw) \arrow[uu, "G(\psi'\otimes\mathrm{id})"']
\end{tikzcd}$$

(φ)，(λ) は φ, λ が自然変換であるから可換である．(G) は G が lax モノイダル関手だから可換である．(ψ') は ψ' の定義より可換である．以上によりこの図式は可換である．

最後に

$$\begin{tikzcd}
Fw \arrow[r, "\rho_{Fw}^{-1}"] \arrow[d, "F(\rho_w^{-1})"'] & Fw \otimes I \\
F(w \otimes I) \arrow[r, "\varphi'_{w,I}"'] & Fw \otimes FI \arrow[u, "\mathrm{id}\otimes\psi'"']
\end{tikzcd}$$

が可換であることを示すが，それは同様に

$$\begin{tikzcd}
w \arrow[r, "\eta_w"] \arrow[dd, "\rho_w^{-1}"'] & GFw \arrow[rr, "G(\rho_{Fw}^{-1})"] \arrow[dd, "\rho_{GFw}^{-1}"'] & & G(Fw \otimes I) \\
& & GFw \otimes GI \arrow[ur, "\varphi_{Fw,I}"] & \\
w \otimes I \arrow[r, "\eta_w\otimes\mathrm{id}"'] & GFw \otimes I \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes\eta_I"'] \arrow[ur, "\mathrm{id}\otimes\psi"] & GFw \otimes GFI \arrow[r, "\varphi_{Fw,FI}"'] \arrow[u, "G(\mathrm{id})\otimes G\psi'"'] & G(Fw \otimes FI) \arrow[uu, "G(\mathrm{id}\otimes\psi')"']
\end{tikzcd}$$

から分かる． □

定義． モノイダル圏がなす充満部分 2-category を $\mathbf{MonCat}_\ell \subset \mathbf{Icon}$ と書く．[*12]

定義． $\mathbf{MonCat}_\ell$ における 2-morphism をモノイダル自然変換 (monoidal natural transformation) という．

即ちモノイダル自然変換 $\theta\colon F \Rightarrow G\colon V \to W$ とは，自然変換 $\theta\colon F \Rightarrow G$ であって次の 2 条件を満たすものである．

[*12] **Icon** については「2-category」の PDF を参照.

(1) $u, v \in V$ に対して次の図式が可換である.

$$
\begin{tikzcd}
Fu \otimes Fv \arrow[r, "\theta_u \otimes \theta_v"] \arrow[d, "\varphi^F_{uv}"'] & Gu \otimes Gv \arrow[d, "\varphi^G_{uv}"] \\
F(u \otimes v) \arrow[r, "\theta_{u \otimes v}"'] & G(u \otimes v)
\end{tikzcd}
$$

(2) 次の図式が可換である.

$$
\begin{tikzcd}
I \arrow[r, "\psi^F"] \arrow[dr, "\psi^G"'] & F(I) \arrow[d, "\theta_I"] \\
& G(I)
\end{tikzcd}
$$

定義. $\mathbf{MonCat}_\ell$ における随伴をモノイダル随伴という.

即ちモノイダル随伴とは, (通常の) 随伴関手であって追加の条件 (各圏がモノイダル圏, 各関手が lax モノイダル関手, unit と counit がモノイダル自然変換) を満たすものである.

命題 153. $F \dashv G \colon V \to W$ がモノイダル随伴のとき F は strong モノイダル関手である.

証明. $\langle F, \varphi^F, \psi^F \rangle, \langle G, \varphi^G, \psi^G \rangle$ が lax モノイダル関手で, $F \dashv G$ がモノイダル随伴であるとする. 命題 152 で定義した φ', ψ' により $\langle F, \varphi', \psi' \rangle$ が oplax モノイダル関手になる. φ', ψ' が φ^F, ψ^F の逆を与えることを示せばよい.

まず φ については, 定義より次の 2 つの図式が可換であることを示せばよい.

$$
\begin{tikzcd}
F(GFw \otimes GFx) \arrow[r, "F\varphi^G_{FwFx}"] \arrow[dr, "F\varphi^{GF}_{wx}"'] & FG(Fw \otimes Fx) \arrow[r, "\varepsilon_{Fw \otimes Fx}"] \arrow[d, "FG\varphi^F_{wx}"] \arrow[dr, phantom, "(\varepsilon)"] & Fw \otimes Fx \arrow[d, "\varphi^F_{wx}"] \\
F(w \otimes x) \arrow[u, "F(\eta_w \otimes \eta_x)"] \arrow[r, "F\eta_{w \otimes x}"'] \arrow[rr, bend right, "\mathrm{id}"'] \arrow[ur, phantom, "(\eta)"] & FGF(w \otimes x) \arrow[r, "\varepsilon_{F(w \otimes x)}"'] \arrow[u, phantom, "(\varphi^{GF})"] \arrow[d, phantom, "(\text{随伴})"] & F(w \otimes x) \\
& {} &
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
F(w\otimes x) \arrow[r, "F(\eta_w\otimes\eta_x)"] \arrow[dr, phantom, "(\varphi)"] & F(GFw\otimes GFx) \arrow[r, "F\varphi^G_{FwFx}"] \arrow[dr, phantom, "(\varphi^{GF})"] & FG(Fw\otimes Fx) \arrow[d, "\varepsilon_{Fw\otimes Fx}"] \arrow[dl, phantom, "(\varepsilon)"] \\
Fw\otimes Fx \arrow[u, "\varphi^F_{wx}"] \arrow[r, "F\eta_w\otimes F\eta_x"'] \arrow[rr, bend right, "\mathrm{id}"'] \arrow[rr, phantom, bend right=20, "(\text{随伴})"] & FGFw\otimes FGFx \arrow[u, "\varphi^F_{GFw,GFx}"'] \arrow[ur, "\varphi^{FG}_{FwFx}"'] \arrow[r, "\varepsilon_{Fw}\otimes\varepsilon_{Fx}"'] & Fw\otimes Fx
\end{tikzcd}
$$

(η), (ε) は η, ε がモノイダル自然変換であるから可換である．(φ^{GF}) は lax 2-functor の合成の定義から可換である．(φ) は φ が自然変換であるから可換である．(随伴) は随伴の性質から可換である．以上によりこれらの図式は可換である．

次に ψ については，次の 2 つの図式が可換であることを示せばよい (がこの 2 つは同じ図式である).

$$
\begin{tikzcd}
I \arrow[d, "\psi^F"'] \arrow[rrd, "\mathrm{id}"] & & \\
F(I) \arrow[r, "F\psi^G"'] & FG(I) \arrow[r, "\varepsilon_I"'] & I
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
F(I) \arrow[d, "F\psi^G"'] \arrow[ddr, "\mathrm{id}"] & \\
FG(I) \arrow[d, "\varepsilon_I"'] & \\
I \arrow[r, "\psi^F"'] & F(I)
\end{tikzcd}
$$

これは ε がモノイダル自然変換であることから分かる． □

定理 154. V, W をモノイダル圏，$F \dashv G\colon V \to W$ をモノイダル随伴とする．このとき **CAT**-随伴 $F \dashv G\colon V\text{-}\mathbf{CAT} \to W\text{-}\mathbf{CAT}$ が成り立つ．

証明. $\mathcal{C}$ を V-豊穣圏，$\mathcal{D}$ を W-豊穣圏とする．まず圏同型

$$\Phi = \Phi_{\mathcal{C}\mathcal{D}}\colon W\text{-}\mathbf{CAT}(F\mathcal{C}, \mathcal{D}) \to V\text{-}\mathbf{CAT}(\mathcal{C}, G\mathcal{D})$$

が存在することを示す．

まず W-関手 $K\colon F\mathcal{C} \to \mathcal{D}$ に対して $\Phi(K)$ を

- $a \in \mathcal{C}$ に対して $\Phi(K)(a) := Ka$.
- $a, b \in \mathcal{C}$ に対して，$K_{ab}\colon F\mathcal{C}(a,b) \to \mathcal{D}(Ka, Kb)$ に随伴 $F \dashv G$ で対応する随伴射を $\Phi(K)_{ab}\colon \mathcal{C}(a,b) \to G\mathcal{D}(Ka, Kb)$ とする．

で定義する．$\Phi(K)$ は V-関手 $\mathcal{C} \to G\mathcal{D}$ である．

∵) まず $a, b, c \in \mathcal{C}$ に対して

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{C}(b,c) \otimes \mathcal{C}(a,b) \arrow[r, "m"] \arrow[d, "\Phi(K)_{bc} \otimes \Phi(K)_{ab}"'] & \mathcal{C}(a,c) \arrow[d, "\Phi(K)_{ac}"] \\
G\mathcal{D}(Kb,Kc) \otimes G\mathcal{D}(Ka,Kb) \arrow[r, "m"'] & G\mathcal{D}(Ka,Kc)
\end{tikzcd}
$$

が可換であることを示す．そのためには

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{C}(a,c) \arrow[r, "\Phi(K)_{ac}"] & G\mathcal{D}(Ka,Kc) \arrow[d, "\mathrm{id}"] \\
\mathcal{C}(b,c) \otimes \mathcal{C}(a,b) \arrow[u, "m"] \arrow[d, "\Phi(K)_{bc} \otimes \Phi(K)_{ab}"'] & G\mathcal{D}(Ka,Kc) \\
G\mathcal{D}(Kb,Kc) \otimes G\mathcal{D}(Ka,Kb) \arrow[r, "\varphi"'] & G(\mathcal{D}(Kb,Kc) \otimes \mathcal{D}(Ka,Kb)) \arrow[u, "Gm"']
\end{tikzcd}
$$

が可換であることを示せばよい．そのためには随伴 $F \dashv G$ により次の図式が可換であることを示せばよい．(スペースの都合上，$\mathcal{D}(Ka, Kb)$ を $\mathcal{D}_{KaKb}$ と表記した．)

$$
\begin{tikzcd}
F\mathcal{C}(a,c) \arrow[rr, "K_{ac}"] \arrow[drr, phantom, "(K)"] & & \mathcal{D}(Ka,Kc) \arrow[d, "\mathrm{id}"] \\
F(\mathcal{C}(b,c) \otimes \mathcal{C}(a,b)) \arrow[u, "Fm"] \arrow[r, "\varphi^{-1}"] \arrow[d, "F(\eta \otimes \eta)"'] \arrow[dr, phantom, "(\varphi)"] & F\mathcal{C}(b,c) \otimes F\mathcal{C}(a,b) \arrow[d, "F\eta \otimes F\eta"'] \arrow[dddr, bend left, "K_{bc} \otimes K_{ab}"] & \mathcal{D}(Ka,Kc) \\
F(GF\mathcal{C}(b,c) \otimes GF\mathcal{C}(a,b)) \arrow[r, "\varphi^{-1}"'] \arrow[dd, "F(GK_{bc} \otimes GK_{ab})"'] \arrow[ddr, phantom, "(\varphi)"] & FGF\mathcal{C}(b,c) \otimes FGF\mathcal{C}(a,b) \arrow[d, "FGK_{bc} \otimes FGK_{ab}"'] & (\text{随伴}) \\
 & FG\mathcal{D}_{KbKc} \otimes FG\mathcal{D}_{KaKb} \arrow[dr, "\varepsilon \otimes \varepsilon"'] \arrow[d, phantom, "(\varepsilon)"] & \\
F(G\mathcal{D}_{KbKc} \otimes G\mathcal{D}_{KaKb}) \arrow[ur, "\varphi^{-1}"] \arrow[r, "F\varphi"'] & FG(\mathcal{D}_{KbKc} \otimes \mathcal{D}_{KaKb}) \arrow[r, "\varepsilon"'] & \mathcal{D}_{KbKc} \otimes \mathcal{D}_{KaKb} \arrow[uuu, "m"']
\end{tikzcd}
$$

(K) は K が W-関手だから可換である．(φ) は φ が自然変換だから可換である．(随伴) は随伴 $F \dashv G$ により可換である．(ε) は ε がモノイダル自然変換だから可換である．以上によりこの図式は可換である．

後は

$$
\begin{tikzcd}
I \arrow[r, "j_a"] \arrow[dr, "j_{Ka}"'] & \mathcal{C}(a,a) \arrow[d, "\Phi(K)_{aa}"] \\
& G\mathcal{D}(Ka,Ka)
\end{tikzcd}
$$

が可換であることを示せばよい．随伴 $F \dashv G$ により次の図式が可換であることを示せばよい．(ここで各豊穣圏における j_a を区別するために $j_a^{\mathcal{C}}$ のように書いた．)

$$
\begin{tikzcd}
FI \arrow[rr, "F(j_a^{\mathcal{C}})"] \arrow[dr, "\psi^{-1}"] \arrow[dd, "F(j_{Ka}^{G\mathcal{D}})"'] & \arrow[d, phantom, "(F\mathcal{C})"] & F\mathcal{C}(a,a) \arrow[dd, "K_{aa}"] \\
\arrow[r, phantom, "(FG\mathcal{D})"] & I \arrow[ur, "j_a^{F\mathcal{C}}"'] \arrow[dl, "j_{Ka}^{FG\mathcal{D}}"] \arrow[dr, "j_{Ka}^{\mathcal{D}}"'] \arrow[d, phantom, "(\varepsilon)"] \arrow[r, phantom, "(K)"] & {} \\
FG\mathcal{D}(Ka,Ka) \arrow[rr, "\varepsilon_{\mathcal{D}(Ka,Ka)}"'] & {} & \mathcal{D}(Ka,Ka)
\end{tikzcd}
$$

$(F\mathcal{C})$ は $j_a^{F\mathcal{C}}$ の定義より可換である．$(FG\mathcal{D})$ は $j_a^{FG\mathcal{D}}$ の定義より可換である．(K) は K が W-関手であるから可換である．(ε) は ε がモノイダル自然変換であるから可換である．以上よりこの図式は可換である．

次に $\theta\colon K \Rightarrow L\colon F\mathcal{C} \to \mathcal{D}$ を W-自然変換とする．$a \in \mathcal{C}$ に対して $\theta_a\colon Ka \not\Rrightarrow La$ は $\mathcal{D}$ の射，即ち W の射 $\theta_a\colon I \to \mathcal{D}(Ka, La)$ である．そこで合成

$$
I \xrightarrow{\psi} G(I) \xrightarrow{G(\theta_a)} G\mathcal{D}(Ka, La)
$$

を $\Phi(\theta)_a$ とする．この $\Phi(\theta)$ は V-自然変換 $\Phi(K) \Rightarrow \Phi(L)\colon \mathcal{C} \to G\mathcal{D}$ である．

$\because$) $a, b \in \mathcal{C}$ に対して

$$
\begin{tikzcd}
& I \otimes \mathcal{C}(a,b) \arrow[r, "\Phi(\theta)_b \otimes F_{ab}"] & G\mathcal{D}(Fb,Gb) \otimes G\mathcal{D}(Fa,Fb) \arrow[dr, "m"] & \\
\mathcal{C}(a,b) \arrow[ur, "\lambda^{-1}"] \arrow[dr, "\rho^{-1}"'] & & & G\mathcal{D}(Fa,Gb) \\
& \mathcal{C}(a,b) \otimes I \arrow[r, "G_{ab} \otimes \Phi(\theta)_a"'] & G\mathcal{D}(Ga,Gb) \otimes G\mathcal{D}(Fa,Ga) \arrow[ur, "m"'] &
\end{tikzcd}
$$

が可換であることを示せばよい．そのためには定義より次の図式が可換であることを

示せばよい.

$$
\begin{tikzcd}
I \otimes \mathcal{C}(a,b) \arrow[r, "\psi\otimes\eta_{\mathcal{C}(a,b)}"] \arrow[dr, phantom, "(**)"] & GI \otimes GF\mathcal{C}(a,b) \arrow[r, "G(\theta_b)\otimes G(K_{ab})"] \arrow[d, "\varphi"] \arrow[dr, phantom, "(\varphi)"] & G\mathcal{D}(Kb,Lb) \otimes G\mathcal{D}(Ka,Kb) \arrow[d, "\varphi"] \\
 & G(I \otimes F\mathcal{C}(a,b)) \arrow[r, "G(\theta_b\otimes K_{ab})"'] & G(\mathcal{D}(Kb,Lb) \otimes \mathcal{D}(Ka,Kb)) \arrow[d, "Gm"] \\
\mathcal{C}(a,b) \arrow[uu, "\lambda^{-1}"] \arrow[dd, "\rho^{-1}"'] \arrow[r, "\eta_{\mathcal{C}(a,b)}"] \arrow[dr, phantom, "(*)"] & GF\mathcal{C}(a,b) \arrow[u, "G(\lambda^{-1})"'] \arrow[d, "G(\rho^{-1})"] \arrow[r, phantom, "(\theta)"] & G\mathcal{D}(Ka,Lb) \\
 & G(F\mathcal{C}(a,b) \otimes I) \arrow[r, "G(L_{ab}\otimes\theta_a)"] \arrow[dr, phantom, "(\varphi)"] & G(\mathcal{D}(La,Lb) \otimes \mathcal{D}(Ka,La)) \arrow[u, "Gm"'] \\
\mathcal{C}(a,b) \otimes I \arrow[r, "\eta_{\mathcal{C}(a,b)}\otimes\psi"'] & GF\mathcal{C}(a,b) \otimes GI \arrow[u, "\varphi"'] \arrow[r, "G(L_{ab})\otimes G(\theta_a)"'] & G\mathcal{D}(La,Lb) \otimes G\mathcal{D}(Ka,La) \arrow[u, "\varphi"']
\end{tikzcd}
$$

(φ) は φ が自然変換であるから可換である．(θ) は θ が V-自然変換であるから可換である．$(*)$，$(**)$ は次の図式により可換である．

$$
\begin{tikzcd}
I \otimes \mathcal{C}(a,b) \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes\eta_{\mathcal{C}(a,b)}"] & I \otimes GF\mathcal{C}(a,b) \arrow[r, "\psi\otimes\mathrm{id}"] & GI \otimes GF\mathcal{C}(a,b) \arrow[d, "\varphi"] \\
\mathcal{C}(a,b) \arrow[u, "\lambda^{-1}"] \arrow[r, "\eta_{\mathcal{C}(a,b)}"'] & GF\mathcal{C}(a,b) \arrow[u, "\lambda^{-1}"] \arrow[r, "G(\lambda^{-1})"'] & G(I \otimes F\mathcal{C}(a,b))
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{C}(a,b) \arrow[r, "\eta_{\mathcal{C}(a,b)}"] \arrow[d, "\rho^{-1}"'] & GF\mathcal{C}(a,b) \arrow[r, "G(\rho^{-1})"] \arrow[d, "\rho^{-1}"'] & G(F\mathcal{C}(a,b) \otimes I) \\
\mathcal{C}(a,b) \otimes I \arrow[r, "\eta_{\mathcal{C}(a,b)}\otimes\mathrm{id}"'] & GF\mathcal{C}(a,b) \otimes I \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes\psi"'] & GF\mathcal{C}(a,b) \otimes GI \arrow[u, "\varphi"']
\end{tikzcd}
$$

以上よりこの図式は可換である．

以上で定義された Φ は関手 $W\text{-}\mathbf{CAT}(F\mathcal{C},\mathcal{D}) \to V\text{-}\mathbf{CAT}(\mathcal{C},G\mathcal{D})$ である．

$\because$) まず $G\mathcal{D}$ の恒等射の定義から明らかに，$K\colon F\mathcal{C} \to \mathcal{D}$ に対して $\Phi(\mathrm{id}_K) = \mathrm{id}_{\Phi(K)}$ である．

$\theta\colon K \Rightarrow L$, $\sigma\colon L \Rightarrow H$ として $\Phi(\sigma * \theta) = \Phi(\sigma) * \Phi(\theta)$ を示す．そのためには $a \in \mathcal{C}$

に対して $\Phi(\sigma * \theta)_a = \Phi(\sigma)_a \circ \Phi(\theta)_a$ を示せばよい．まず定義より $\Phi(\sigma * \theta)_a$ は合成

$$I \xrightarrow{\psi} G(I) \xrightarrow{G(\sigma_a \circ \theta_a)} G\mathcal{D}(Ka, Ha)$$

であって，$\sigma_a \circ \theta_a$ は

$$I \xrightarrow{\lambda^{-1}} I \otimes I \xrightarrow{\sigma_a \otimes \theta_a} G\mathcal{D}(La, Ha) \otimes G\mathcal{D}(Ka, La) \xrightarrow{m} G\mathcal{D}(Ka, Ha)$$

である．一方 $\Phi(\sigma) * \Phi(\theta)$ は

$$I \xrightarrow{\lambda^{-1}} I \otimes I \xrightarrow{\Phi(\sigma)_a \otimes \Phi(\theta)_a} G\mathcal{D}(La, Ha) \otimes G\mathcal{D}(Ka, La) \xrightarrow{m} G\mathcal{D}(Ka, Ha)$$

即ち

$$\begin{aligned} I &\xrightarrow{\lambda^{-1}} I \otimes I \xrightarrow{\psi \otimes \psi} G(I) \otimes G(I) \xrightarrow{G(\sigma_a) \otimes G(\theta_a)} G\mathcal{D}(La, Ha) \otimes G\mathcal{D}(Ka, La) \\ &\xrightarrow{m} G\mathcal{D}(Ka, Ha) \end{aligned}$$

である．よって次の図式が可換であることを示せばよい．

$$\begin{tikzcd}
I \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\lambda^{-1}"'] \arrow[dr, phantom, "(\lambda)"] & GI \arrow[r, "G(\lambda^{-1})"] \arrow[d, "\lambda^{-1}"] \arrow[dr, phantom, "(G)"] & G(I \otimes I) \arrow[r, "G(\sigma_a \otimes \theta_a)"] \arrow[dr, phantom, "(\varphi)"] & G(\mathcal{D}(La, Ha) \otimes \mathcal{D}(Ka, La)) \arrow[dr, "Gm"] \arrow[dr, phantom, "(G\mathcal{D})"'] & \\
 & & & & F\mathcal{D}(Ka, Ha) \\
I \otimes I \arrow[r, "\mathrm{id} \otimes \psi"'] & I \otimes GI \arrow[r, "\psi \otimes \mathrm{id}"'] & GI \otimes GI \arrow[r, "G\sigma_a \otimes G\theta_a"'] \arrow[uu, "\varphi"] & G\mathcal{D}(La, Ha) \otimes G\mathcal{D}(Ka, La) \arrow[ur, "m"'] \arrow[uu, "\varphi"] &
\end{tikzcd}$$

(λ)，(φ) は λ, φ が自然変換であるから可換である．(G) は G が lax モノイダル関手だから可換である．$(G\mathcal{D})$ は $G\mathcal{D}$ の合成の定義より可換である．

Φ は忠実充満である．

$\because$) まず忠実であることを示す．$\theta, \sigma \colon K \Rightarrow L \colon F\mathcal{C} \to \mathcal{D}$ を W-関手として，$a \in \mathcal{C}$ に対して $\Phi(\theta)_a = \Phi(\sigma)_a$ が成り立つとする．即ち

$$\big(I \xrightarrow{\psi} G(I) \xrightarrow{G(\theta_a)} G\mathcal{D}(Ka, La)\big) = \big(I \xrightarrow{\psi} G(I) \xrightarrow{G(\sigma_a)} G\mathcal{D}(Ka, La)\big)$$

であるから，随伴 $F \dashv G$ により

$$\big(F(I) \xrightarrow{\psi'} I \xrightarrow{\theta_a} \mathcal{D}(Ka, La)\big) = \big(F(I) \xrightarrow{\psi'} I \xrightarrow{\sigma_a} \mathcal{D}(Ka, La)\big)$$

となり，今 ψ' は同型だから $\theta_a = \sigma_a$ が分かる．

次に充満を示すため，$K, L\colon F\mathcal{C} \to \mathcal{D}$ を W-関手，$\theta\colon \Phi(K) \Rightarrow \Phi(L)\colon \mathcal{C} \to G\mathcal{D}$ を V-自然変換とする．つまり $a \in \mathcal{C}$ に対して $\theta_a\colon I \to G\mathcal{D}(Ka, La)$ である．このとき θ_a に随伴 $F \dashv G$ で対応する射を $\widetilde{\theta}_a$ として，$\sigma_a := \big(I \xrightarrow{\psi} F(I) \xrightarrow{\widetilde{\theta}_a} \mathcal{D}(Ka, La)\big)$ とおく．これは W-自然変換 $\sigma\colon K \Rightarrow L$ を定める．

$\because$) $a, b \in \mathcal{C}$ に対して

$$\begin{tikzcd}
& I\otimes F\mathcal{C}(a,b) \arrow[r, "\sigma_b\otimes K_{ab}"] & \mathcal{D}(Kb,Lb)\otimes\mathcal{D}(Ka,Kb) \arrow[dr, "m"] & \\
F\mathcal{C}(a,b) \arrow[ur, "\lambda^{-1}"] \arrow[dr, "\rho^{-1}"'] & & & \mathcal{D}(Ka,Lb) \\
& F\mathcal{C}(a,b)\otimes I \arrow[r, "L_{ab}\otimes\sigma_a"'] & \mathcal{D}(La,Lb)\otimes\mathcal{D}(Ka,La) \arrow[ur, "m"'] &
\end{tikzcd}$$

が可換であることを示す．

$$\begin{tikzcd}
I\otimes F\mathcal{C}(a,b) \arrow[r, "\psi\otimes\mathrm{id}"] & FI\otimes F\mathcal{C}(a,b) \arrow[rr, "\widetilde{\theta}_b\otimes K_{ab}"] \arrow[dr, "F\theta_b\otimes F\Phi(K)_{ab}"] \arrow[dd, "\varphi"] & \arrow[d, phantom, "(*)"] & \mathcal{D}(Kb,Lb)\otimes\mathcal{D}(Ka,Kb) \arrow[ddd, "m"] \\
\arrow[r, phantom, "(F)"] & \arrow[r, phantom, "(\varphi)"] & FG\mathcal{D}(Kb,Lb)\otimes FG\mathcal{D}(Ka,Kb) \arrow[ur, "\varepsilon\otimes\varepsilon"] \arrow[d, "\varphi"] \arrow[r, phantom, "(**)"] & \\
& F(I\otimes\mathcal{C}(a,b)) \arrow[r, "F(\theta_b\otimes\Phi(K)_{ab})"'] & F(G\mathcal{D}(Kb,Lb)\otimes G\mathcal{D}(Ka,Kb)) \arrow[d, "Fm"] & \\
F\mathcal{C}(a,b) \arrow[uuu, "\lambda^{-1}"] \arrow[ur, "F\lambda^{-1}"] \arrow[dr, "F\rho^{-1}"'] \arrow[ddd, "\rho^{-1}"'] \arrow[rr, phantom, "(\theta)"] & & FG\mathcal{D}(Ka,Lb) \arrow[r, "\varepsilon"] & \mathcal{D}(Ka,Lb) \\
& F(\mathcal{C}(a,b)\otimes I) \arrow[r, "F(\Phi(L)_{ab}\otimes\theta_a)"] & F(G\mathcal{D}(La,Lb)\otimes G\mathcal{D}(Ka,La)) \arrow[u, "Fm"'] & \\
\arrow[r, phantom, "(F)"] & \arrow[r, phantom, "(\varphi)"] & FG\mathcal{D}(La,Lb)\otimes FG\mathcal{D}(Ka,La) \arrow[u, "\varphi"'] \arrow[dr, "\varepsilon\otimes\varepsilon"] \arrow[r, phantom, "(***)"] & \\
F\mathcal{C}(a,b)\otimes I \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes\psi"'] & F\mathcal{C}(a,b)\otimes FI \arrow[uu, "\varphi"'] \arrow[ur, "F\Phi(L)_{ab}\otimes F\theta_a"] \arrow[rr, "L_{ab}\otimes\widetilde{\theta}_a"'] & \arrow[u, phantom, "(*)"] & \mathcal{D}(La,Lb)\otimes\mathcal{D}(Ka,La) \arrow[uuu, "m"']
\end{tikzcd}$$

(F) は F が lax モノイダル関手であるから可換である．(θ) は θ が W-自然変換であるから可換である．(φ) は φ が自然変換であるから可換である．$(*)$ は

$\widetilde{\theta}, \Phi(K)$ の定義から可換である．$(**)$ は次の図式により可換である．

$$
\begin{tikzcd}
FG\mathcal{D}(Kb,Lb)\otimes FG\mathcal{D}(Ka,Kb) \arrow[r, "\varepsilon\otimes\varepsilon"] \arrow[d, "\varphi^F"'] \arrow[dr, "\varphi^{FG}"] \arrow[d, phantom, shift left=8ex, "(\varphi^{FG})"] & \mathcal{D}(Kb,Lb)\otimes\mathcal{D}(Ka,Kb) \arrow[dd, bend left=60, "m"] \arrow[d, phantom, shift right=10ex, "(+)"] \\
F(G\mathcal{D}(Kb,Lb)\otimes G\mathcal{D}(Ka,Kb)) \arrow[r, "F\varphi^G"'] \arrow[d, "Fm"'] \arrow[d, phantom, shift left=8ex, "(G\mathcal{D})"] & FG(\mathcal{D}(Kb,Lb)\otimes\mathcal{D}(Ka,Kb)) \arrow[u, "\varepsilon"] \arrow[dl, "FGm"] \arrow[d, phantom, "(\varepsilon)"] \\
FG\mathcal{D}(Ka,Lb) \arrow[r, "\varepsilon"'] & \mathcal{D}(Ka,Lb)
\end{tikzcd}
$$

但し，(φ^{FG}) は φ^{FG} の定義により可換である．$(G\mathcal{D})$ は $G\mathcal{D}$ の定義により可換である．(ε) は ε が自然変換であるから可換である．$(+)$ は ε がモノイダル自然変換であるから可換である．

$(***)$ も $(**)$ と同様に可換である．

このとき $\Phi(\sigma)_a$ は合成

$$I \xrightarrow{\psi} G(I) \xrightarrow{G(\sigma_a)} G\mathcal{D}(Ka, La)$$

だから，これの随伴射は

$$F(I) \xrightarrow{\psi^{-1}} I \xrightarrow{\sigma_a} \mathcal{D}(Ka, La)$$

である．ここで σ_a の定義より

$$
\begin{aligned}
&\big(F(I) \xrightarrow{\psi^{-1}} I \xrightarrow{\sigma_a} \mathcal{D}(Ka, La)\big) \\
&= \big(F(I) \xrightarrow{\psi^{-1}} I \xrightarrow{\psi} F(I) \xrightarrow{\widetilde{\theta}_a} \mathcal{D}(Ka, La)\big) \\
&= \widetilde{\theta}_a
\end{aligned}
$$

となるから，$\Phi(\sigma)_a = \theta_a$ となり $\Phi(\sigma) = \theta$ が分かる．

定義より明らかに Φ は対象について全単射であるから，Φ は圏同型を与えることが分かった．

あとは $\Phi_{\mathcal{C}\mathcal{D}}$ が $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ について自然であることを示せばよい．

まず $\mathcal{C}$ について自然であることを示す．そのために $\theta\colon S \Rightarrow T\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ を W-自然変換

とする．$\Phi_{\mathcal{C}\mathcal{D}} \bullet (- \bullet F\theta) = (- \bullet \theta) \bullet \Phi_{\mathcal{C}'\mathcal{D}}$ を示せばよい．

$$\begin{tikzcd}
W\text{-}\mathbf{CAT}(F\mathcal{C},\mathcal{D}) \arrow[r, "\Phi_{\mathcal{C}\mathcal{D}}"] & V\text{-}\mathbf{CAT}(\mathcal{C},G\mathcal{D}) \\
W\text{-}\mathbf{CAT}(F\mathcal{C}',\mathcal{D}) \arrow[r, "\Phi_{\mathcal{C}'\mathcal{D}}"'] \arrow[u, shift right=4, "-\bullet FS"] \arrow[u, shift left=4, "-\bullet FT"'] \arrow[u, phantom, "\overset{-\bullet F\theta}{\Longrightarrow}"] & V\text{-}\mathbf{CAT}(\mathcal{C}',G\mathcal{D}) \arrow[u, shift right=4, "-\bullet S"] \arrow[u, shift left=4, "-\bullet T"'] \arrow[u, phantom, "\overset{-\bullet \theta}{\Longrightarrow}"]
\end{tikzcd}$$

つまり W-関手 $K\colon F\mathcal{C}' \to \mathcal{D}$ に対して V-自然変換の等式 $\Phi(K \bullet F\theta) = \Phi(K) \bullet \theta$ を示せばよい．まず $a \in \mathcal{C}$ に対して $\Phi(K \bullet F\theta)_a$ は合成

$$I \xrightarrow{\psi} G(I) \xrightarrow{G((K\bullet F\theta)_a)} G\mathcal{D}(KSa, KTa)$$

であり，$(K \bullet F\theta)_a = K \circ (F\theta)_a$ は合成

$$I \xrightarrow{\psi} FI \xrightarrow{F(\theta_a)} F\mathcal{C}'(Sa, Ta) \xrightarrow{K} \mathcal{D}(KSa, KTa)$$

である．一方 $(\Phi(K) \bullet \theta)_a$ は合成

$$I \xrightarrow{\theta_a} \mathcal{C}'(Sa, Ta) \xrightarrow{\Phi(K)} G\mathcal{D}(KSa, KTa)$$

である．

$$\begin{tikzcd}
GI \arrow[r, "G\psi"] & GFI \arrow[r, "GF(\theta_a)"] & GF\mathcal{C}'(Sa,Ta) \arrow[d, "GK"] \\
I \arrow[u, "\psi"] \arrow[ur, "\eta_I"'] \arrow[r, "\theta_a"'] \arrow[u, phantom, shift left=6, "(*)"] & \mathcal{C}'(Sa,Ta) \arrow[ur, "\eta_{\mathcal{C}'(Sa,Ta)}"] \arrow[r, "\Phi(K)"'] \arrow[u, phantom, shift left=6, "(\eta)"] & G\mathcal{D}(KSa,KTa) \arrow[u, phantom, shift right=6, "(\Phi)"]
\end{tikzcd}$$

(η) は η が自然変換であるから可換である．(Φ) は $\Phi(K)$ の定義より可換である．$(*)$ は η がモノイダル自然変換だから可換である．

$\mathcal{D}$ についても同様に，V-自然変換 $\theta\colon S \Rightarrow T\colon \mathcal{D} \to \mathcal{D}'$ に対して $\Phi_{\mathcal{C}\mathcal{D}'} \bullet (\theta \bullet -) = (G\theta \bullet -) \bullet \Phi_{\mathcal{C}\mathcal{D}}$ を示せばよい．

$$\begin{tikzcd}
W\text{-}\mathbf{CAT}(F\mathcal{C},\mathcal{D}) \arrow[r, "\Phi_{\mathcal{C}\mathcal{D}}"] \arrow[d, shift right=4, "S\bullet -"'] \arrow[d, shift left=4, "T\bullet -"] \arrow[d, phantom, "\overset{\theta\bullet -}{\Longrightarrow}"] & V\text{-}\mathbf{CAT}(\mathcal{C},G\mathcal{D}) \arrow[d, shift right=4, "GS\bullet -"'] \arrow[d, shift left=4, "GT\bullet -"] \arrow[d, phantom, "\overset{G\theta\bullet -}{\Longrightarrow}"] \\
W\text{-}\mathbf{CAT}(F\mathcal{C},\mathcal{D}') \arrow[r, "\Phi_{\mathcal{C}\mathcal{D}'}"'] & V\text{-}\mathbf{CAT}(\mathcal{C},G\mathcal{D}')
\end{tikzcd}$$

つまり W-関手 $K\colon F\mathcal{C} \to \mathcal{D}$ に対して V-自然変換の等式 $\Phi(\theta \bullet K) = G\theta \bullet \Phi(K)$ を示せばよい．まず $a \in \mathcal{C}$ に対して $\Phi(\theta \bullet K)_a$ は合成

$$I \xrightarrow{\psi} GI \xrightarrow{G((\theta \bullet K)_a)} G\mathcal{D}(SKa, TKa)$$

であり，$(\theta \bullet K)_a = \theta_{Ka}$ である．一方 $(G\theta \bullet \Phi(K))_a = (G\theta)_{Ka}$ は合成

$$I \xrightarrow{\psi} GI \xrightarrow{G(\theta_{Ka})} G\mathcal{D}'(SKa, TKa)$$

である．よって $\Phi(\theta \bullet K)_a = (G\theta \bullet \Phi(K))_a$ である． □

定義. lax モノイダル関手 $F\colon V \to W$ が対称
$\iff$ 任意の $u, v \in V$ に対して次の図式が可換である．

$$\begin{tikzcd}
Fu \otimes Fv \arrow[r, "\varphi_{uv}"] \arrow[d, "\gamma_{FuFv}"'] & F(u \otimes v) \arrow[d, "F\gamma_{uv}"] \\
Fv \otimes Fu \arrow[r, "\varphi_{vu}"'] & F(v \otimes u)
\end{tikzcd}$$

命題 155. $F\colon V \to W$ が対称な lax モノイダル関手のとき $F(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}) = (F\mathcal{C})^{\mathrm{op}}$ である．(なので以下これを単に $F\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ と書く．)

証明. まず定義から明らかに $\mathrm{Ob}(F(\mathcal{C}^{\mathrm{op}})) = \mathrm{Ob}((F\mathcal{C})^{\mathrm{op}})$，$F(\mathcal{C}^{\mathrm{op}})(a,b) = (F\mathcal{C})^{\mathrm{op}}(a,b)$ である．また恒等射も一致する．故に合成が一致していることを示せばよい．

まず $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ の合成は

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}^{\mathrm{op}}(b,c) \otimes \mathcal{C}^{\mathrm{op}}(a,b) &= \mathcal{C}(c,b) \otimes \mathcal{C}(b,a) \\
&\xrightarrow{\gamma} \mathcal{C}(b,a) \otimes \mathcal{C}(c,b) \\
&\xrightarrow{m_{cba}} \mathcal{C}(c,a) = \mathcal{C}^{\mathrm{op}}(a,c)
\end{aligned}$$

であるから $F(\mathcal{C}^{\mathrm{op}})$ の合成は

$$\begin{aligned}
F(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}(b,c)) \otimes F(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}(a,b)) &= F(\mathcal{C}(c,b)) \otimes F(\mathcal{C}(b,a)) \\
&\xrightarrow{\varphi} F(\mathcal{C}(c,b) \otimes \mathcal{C}(b,a)) \\
&\xrightarrow{F\gamma} F(\mathcal{C}(b,a) \otimes \mathcal{C}(c,b)) \\
&\xrightarrow{Fm_{cba}} F(\mathcal{C}(c,a)) = F(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}(a,c))
\end{aligned}$$

である．一方 $(F\mathcal{C})^{\mathrm{op}}$ の合成は

$$
\begin{aligned}
(F\mathcal{C})^{\mathrm{op}}(b,c)\otimes(F\mathcal{C})^{\mathrm{op}}(a,b) &= F\mathcal{C}(c,b)\otimes F\mathcal{C}(b,a)\\
&\xrightarrow{\gamma} F\mathcal{C}(b,a)\otimes F\mathcal{C}(c,b)\\
&\xrightarrow{\varphi} F(\mathcal{C}(b,a)\otimes\mathcal{C}(c,b))\\
&\xrightarrow{Fm_{cba}} F(\mathcal{C}(c,a)) = (F\mathcal{C})^{\mathrm{op}}(a,c)
\end{aligned}
$$

となる．F が対称だから

$$
\begin{tikzcd}
F\mathcal{C}(c,b)\otimes F\mathcal{C}(b,a) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\gamma"'] & F(\mathcal{C}(c,b)\otimes\mathcal{C}(b,a)) \arrow[d, "F\gamma"] \\
F\mathcal{C}(b,a)\otimes F\mathcal{C}(c,b) \arrow[r, "\varphi"'] & F(\mathcal{C}(b,a)\otimes\mathcal{C}(c,b))
\end{tikzcd}
$$

が可換となり，よって $F(\mathcal{C}^{\mathrm{op}})$ と $(F\mathcal{C})^{\mathrm{op}}$ の合成は一致している． □

命題 156. $F\dashv G\colon V\to W$ がモノイダル随伴で G が対称のとき，F も対称である．

証明. 命題 153 より，$(\varphi^F)^{-1}\colon F(u\otimes v)\to Fu\otimes Fv$ は

$$
u\otimes v \xrightarrow{\eta_u\otimes\eta_v} GFu\otimes GFv \xrightarrow{\varphi^G} G(Fu\otimes Fv)
$$

の随伴射である．よって次の図式が可換であることを示せばよい．

$$
\begin{tikzcd}
u\otimes v \arrow[r, "\eta_u\otimes\eta_v"] \arrow[d, "\gamma"'] \arrow[dr, phantom, "(\gamma)"] & GFu\otimes GFv \arrow[r, "\varphi^G"] \arrow[d, "\gamma"] \arrow[dr, phantom, "(\varphi^G)"] & G(Fu\otimes Fv) \arrow[d, "G\gamma"] \\
v\otimes u \arrow[r, "\eta_v\otimes\eta_u"'] & GFv\otimes GFu \arrow[r, "\varphi^G"'] & G(Fv\otimes Fu)
\end{tikzcd}
$$

(γ) は γ の自然性から可換である．(φ^G) は G が対称だから可換である． □

例 157. モノイダル圏 V に対して，関手 $U := \mathrm{Hom}_V(I,-)\colon V\to\mathbf{Set}$ は lax モノイダル関手である (例 151)．$E\colon\mathbb{1}\to V$ を $E(*) := I$ で定まる関手とすれば $E^\dagger y\cong U$ だから，$\mathfrak{F} := y^\dagger E$ とすれば普遍随伴 $\mathfrak{F}\dashv U\colon\mathbf{Set}\to V$ を得る．

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{Set} \arrow[dr, bend left, "y^\dagger E"] \arrow[dr, phantom, "\perp"] & \\
\mathbb{1} \arrow[u, "y"] \arrow[r, "E"'] & V \arrow[ul, "E^\dagger y"]
\end{tikzcd}
$$

$a \in \mathbf{Set}$ に対して各点左 Kan 拡張により $\mathfrak{F}a \cong \mathrm{colim}(* \downarrow a \to \mathbb{1} \xrightarrow{E} V) \cong \coprod_{i \in a} I$ である．今 $u \in V$ に対して $- \otimes u$ と $u \otimes -$ は余極限と交換するので，$a, b \in \mathbf{Set}$ に対して

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}a \otimes \mathfrak{F}b &\cong \Big(\coprod_{i \in a} I\Big) \otimes \Big(\coprod_{j \in b} I\Big) \cong \coprod_{i \in a}\Big(I \otimes \Big(\coprod_{j \in b} I\Big)\Big) \\ &\cong \coprod_{i \in a}\coprod_{j \in b}(I \otimes I) \cong \coprod_{k \in a \times b}(I \otimes I) \\ &\cong \mathfrak{F}(a \times b)\end{aligned}$$

となる．この同型を φ_{ab} とする．また明らかに $\mathfrak{F}(1) \cong I$ だからこの同型を ψ とする．このとき $\langle \mathfrak{F}, \varphi, \psi \rangle$ は lax モノイダル関手である．この随伴 $\mathfrak{F} \dashv U \colon V \to \mathbf{Set}$ はモノイダル随伴である．従って $\mathbf{CAT}$-随伴 $\mathfrak{F} \dashv U \colon \mathbf{CAT} \to V\text{-}\mathbf{CAT}$ が得られる．

更に U は明らかに対称である．よって命題 156 より $\mathfrak{F}$ も対称である．特に命題 155 より $\mathfrak{F}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}) = (\mathfrak{F}\mathcal{C})^{\mathrm{op}}$ となる． □

7 余極限

V-豊穣圏においても極限，余極限を考えたい．しかし一般の V-豊穣圏の場合，対角関手 Δ が標準的に定義できないため，Δ の左随伴，右随伴として定義することはできない．そのためどのように定義すべきかを考える必要がある．

普通，どのような考えで定義するのかよく分からないが，ここでは「余極限による各点左 Kan 拡張ができる」ように定義することを考える．通常の圏では

$$\mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}(F-, d), \mathrm{Hom}(E-, u)) \cong \mathrm{Hom}(F \downarrow d \to C \to U, \Delta u)$$

だったから，$F^{\dagger}E$ が各点左 Kan 拡張であるとすると

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}(F^{\dagger}E(d), u) &\cong \mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}(F-, d), \mathrm{Hom}(E-, u)) \\ &\cong \mathrm{Hom}(F \downarrow d \to C \to U, \Delta u)\end{aligned}$$

より $F^{\dagger}E(d) \cong \mathrm{colim}(F \downarrow d \to C \to U)$ となる．

これを踏まえて weighted colimit というものを定義する．

7.1 定義

$T \colon \mathcal{J} \to \mathcal{C}$ を V-関手として，V-関手

$$\mathcal{J}^{\mathrm{op}} \otimes \mathcal{C} \xrightarrow{T \otimes \mathrm{id}} \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \otimes \mathcal{C} \xrightarrow{\mathcal{C}(-, \Box)} \mathcal{V}$$

に命題 101 を使って得られる V-関手を $\mathcal{C}(T-,\square)\colon \mathcal{C}\to\widehat{\mathcal{J}}$ と書くことにする．

定義. $\mathcal{C},\mathcal{J}$ を V-豊穣圏，$W\colon \mathcal{J}^{\mathrm{op}}\to\mathcal{V}$ と $T\colon \mathcal{J}\to\mathcal{C}$ を V-関手とする．V-関手

$$\mathcal{C}\xrightarrow{\mathcal{C}(T-,\square)}\widehat{\mathcal{J}}\xrightarrow{\widehat{\mathcal{J}}(W,-)}\mathcal{V}$$

が表現可能なとき，これを表現する対象を weighted colimit といい $\mathrm{colim}^W T$ と書く．また $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ での weighted colimit を weighted limit という．*13

定義. $\mathcal{J}$ が小 V-豊穣圏となる weighted colimit を small weighted colimit，weighted limit を small weighted limit という．

(以下，weighted colimit を単に余極限，weighted limit を単に極限という．) 言い換えると余極限とは $a\in\mathcal{C}$ について自然な同型 $\mathcal{C}(\mathrm{colim}^W T,a)\cong\widehat{\mathcal{J}}(W-,\mathcal{C}(T-,a))$ が存在する対象 $\mathrm{colim}^W T$ のことである．

極限については，記号を取り換えることで次のように言い換えることができる．$W\colon \mathcal{J}\to\mathcal{V}$ と $T\colon \mathcal{J}\to\mathcal{C}$ を V-関手とする．V-関手

$$\mathcal{C}^{\mathrm{op}}\xrightarrow{\mathcal{C}(\square,T-)}[\mathcal{J},\mathcal{V}]\xrightarrow{[\mathcal{J},\mathcal{V}](W,-)}\mathcal{V}$$

が表現可能なとき，これを表現する対象を weighted limit といい $\lim^W T$ と書く．よって極限の場合は $\mathcal{C}(a,\lim^W T)\cong[\mathcal{J},\mathcal{V}](W-,\mathcal{C}(a,T-))$ である．

例 158. $F\colon \mathcal{C}\to\mathcal{D}$，$E\colon \mathcal{C}\to\mathcal{M}$ を V-関手として各点左 Kan 拡張 $F^\dagger E$ が存在するならば，$m\in\mathcal{M}$ について自然に

$$\mathcal{M}(F^\dagger E(d),m)\cong\widehat{\mathcal{C}}(\mathcal{D}(F-,d),\mathcal{M}(E-,m))$$

だから $F^\dagger E(d)\cong\mathrm{colim}^{\mathcal{D}(F-,d)}E$ である．(逆に余極限があれば各点左 Kan 拡張が存在することは例 165 で述べる．) $\square$

例 159. $\mathcal{J}=\mathcal{I}$ の場合を考える．$c\in\mathcal{C}$，$x\in\mathcal{V}$ としたとき $T\colon \mathcal{I}\to\mathcal{C}$ と $W\colon \mathcal{I}^{\mathrm{op}}\to\mathcal{V}$ を $T(*):=c$，$W(*):=x$ により定める．このとき命題 100 を使えば $\widehat{\mathcal{I}}\cong\mathcal{V}$ であり，また $\widehat{\mathcal{I}}(W-,\mathcal{C}(T-,a))\cong[x,\mathcal{C}(c,a)]$ となる．故にこの場合の $\mathrm{colim}^W T$ とは $x\odot c$ のことである．同様にして power は極限である． $\square$

*13 [1] 等では weighted limit を $\{W,T\}$，weighted colimit を $W\star T$ で表している．

例 160. $T\colon \mathcal{J} \to \mathcal{C}$，$j \in \mathcal{J}$ とすると，米田の補題 (定理 103, 106) より $a \in \mathcal{C}$ について自然に

$$\mathcal{C}(a, Tj) \cong [\mathcal{J}, \mathcal{V}]\big(\mathcal{J}(j, -), \mathcal{C}(a, T-)\big), \quad \mathcal{C}(Tj, a) \cong \widehat{\mathcal{J}}\big(y(j), \mathcal{C}(T-, a)\big)$$

だから $\lim^{\mathcal{J}(j,-)} T \cong Tj$，$\operatorname{colim}^{y(j)} T \cong Tj$ である． □

例 161. $\mathcal{C} = \mathcal{V}$ で $\mathcal{J}$ が小 V-豊穣圏の場合，$x \in \mathcal{V}$ に対して

$$\begin{aligned} [x, [\mathcal{J}, \mathcal{V}](W, T)] &= \Big[x, \int_{j \in \mathcal{J}} [Wj, Tj]\Big] \\ &\cong \int_{j \in \mathcal{J}} \big[x, [Wj, Tj]\big] \quad (\text{命題 } 133) \\ &\cong \int_{j \in \mathcal{J}} \big[Wj, [x, Tj]\big] \\ &= [\mathcal{J}, \mathcal{V}](W-, [x, T-]) \end{aligned}$$

だから $\lim^W T$ は存在して $\lim^W T \cong [\mathcal{J}, \mathcal{V}](W, T)$ である．

また$W\colon \mathcal{J}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{V}$，$T\colon \mathcal{J} \to \mathcal{V}$ に対して $\operatorname{colim}^W T$ が存在するとき

$$\begin{aligned} [\operatorname{colim}^W T, x] &\cong \widehat{\mathcal{J}}(W-, \mathcal{V}(T-, x)) \\ &\cong \int_{j \in \mathcal{J}^{\mathrm{op}}} [Wj, [Tj, x]] \\ &\cong \int_{j \in \mathcal{J}} [Tj, [Wj, x]] \\ &\cong [\mathcal{J}, \mathcal{V}](T-, [W-, x]) \end{aligned}$$

だから $\operatorname{colim}^W T \cong \operatorname{colim}^T W$ である． □

命題 162. 充満部分 V-豊穣圏 $\mathcal{X} \subset \widehat{\mathcal{J}} \otimes [\mathcal{J}, \mathcal{C}]$ を

$$\mathrm{Ob}(\mathcal{X}) := \{\langle W, T\rangle \in \widehat{\mathcal{J}} \otimes [\mathcal{J}, \mathcal{C}] \mid \operatorname{colim}^W T \text{ が存在する } \}$$

により定める．このとき $\langle W, T\rangle \mapsto \operatorname{colim}^W T$ は V-関手 $\operatorname{colim}\colon \mathcal{X} \to \mathcal{C}$ を定める．

証明． $P(W, T, a) := \widehat{\mathcal{J}}(W-, \mathcal{C}(T-, a))$ と定義すると，これは V-関手 $P\colon \mathcal{X}^{\mathrm{op}} \otimes \mathcal{C} \to \mathcal{V}$ を定める．$\mathcal{X}$ の定義より，$\langle W, T\rangle \in \mathcal{X}$ に対して $P(W, T, -)$ は表現可能である．故に定理 114 (の証明) を使えば V-関手 $\operatorname{colim}\colon \mathcal{X} \to \mathcal{C}$ が得られる． □

従って $T \cong T'$ ならば $\operatorname{colim}^W T \cong \operatorname{colim}^W T'$ である．

定理 163. $W\colon \mathcal{J}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{V}$, $H\colon \mathcal{J} \to \widehat{\mathcal{K}}$, $T\colon \mathcal{K} \to \mathcal{C}$ を V-関手とする．$\operatorname{colim}^W H \in \widehat{\mathcal{K}}$ が存在して，更に各 $j \in \mathcal{J}$ に対して $\operatorname{colim}^{Hj} T \in \mathcal{C}$ が存在するとする．このとき

(1) $j \mapsto \operatorname{colim}^{Hj} T$ は V-関手 $\mathcal{J} \to \mathcal{C}$ を与える．(これを $\operatorname{colim}^{H-} T$ と書く．)

(2) 余極限による，a について自然な同型

$$\mathcal{C}(\operatorname{colim}^{Hj} T, a) \cong \widehat{\mathcal{K}}(Hj-, \mathcal{C}(T-, a))$$

は $j \in \mathcal{J}$ についても自然である．

(3) 同型 $\operatorname{colim}^W(\operatorname{colim}^{H-} T) \cong \operatorname{colim}^{\operatorname{colim}^W H} T$ が成り立つ (但しこの式は，どちらか一方が存在すればもう一方も存在して同型となることを意味する).

証明. (1) 命題 29, 162 から明らか.

(2) 定理 114 の証明より分かる.

(3) $a \in \mathcal{C}$ に対して自然に

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}(\operatorname{colim}^W(\operatorname{colim}^{H-} T), a) &\cong \widehat{\mathcal{J}}(W-, \mathcal{C}(\operatorname{colim}^{H-} T, a)) \\
&\cong \widehat{\mathcal{J}}(W-, \widehat{\mathcal{K}}((H-)\square, \mathcal{C}(T\square, a))) \\
&\cong \widehat{\mathcal{K}}((\operatorname{colim}^W H)\square, \mathcal{C}(T\square, a)) \\
&\cong \mathcal{C}(\operatorname{colim}^{\operatorname{colim}^W H} T, a)
\end{aligned}$$

である. □

※ 余極限 $\operatorname{colim}^W T$ を，変数を明示して $\operatorname{colim}_j^{Wj} Tj$ のように書くことにするとこの定理の同型は

$$\operatorname{colim}_j^{Wj}(\operatorname{colim}_k^{Hj(k)} Tk) \cong \operatorname{colim}_k^{\operatorname{colim}_j^{Wj} Hj(k)} Tk$$

となる.

※ 同様にして極限については

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}(\lim^W(\lim^{H-} T), a) &\cong \widehat{\mathcal{J}}(W-, \mathcal{C}(a, \lim^{H-} T)) \\
&\cong \widehat{\mathcal{J}}(W-, \widehat{\mathcal{K}}((H-)\square, \mathcal{C}(a, T\square))) \\
&\cong \widehat{\mathcal{K}}(\operatorname{colim}^W H, \mathcal{C}(a, T\square)) \\
&\cong \mathcal{C}(\lim^{\operatorname{colim}^W H} T, a)
\end{aligned}$$

より $\lim^W(\lim^{H-}T) \cong \lim^{\mathrm{colim}^W H}T$ となる．

例 164. $V = \mathbf{Set}$ の場合，通常の余極限は weighted colimit である．実際，C を圏として $T\colon J \to C$ を関手とする．$\Delta 1\colon J^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$ を定数関手とすれば $\mathrm{colim}^{\Delta 1}T$ は $a \in C$ について自然な同型

$$C(\mathrm{colim}^{\Delta 1}T, a) \cong \widehat{J}(\Delta 1, C(T-, a))$$

が成り立つ対象である．$\widehat{J}(\Delta 1, C(T-, a)) \cong C(T-, \Delta a)$ だから，$\mathrm{colim}^{\Delta 1}T$ は通常の余極限 $\mathrm{colim}\, T$ と一致することが分かる．

逆に，weighted colimit は通常の余極限で書くことができる．実際，$W\colon J^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$ を関手とすると W は表現可能関手の余極限で書けるので，$W \cong \mathrm{colim}_{i\in I}\, y(a_i)$ と書けば定理 163 より

$$\begin{aligned}\mathrm{colim}^W T &\cong \mathrm{colim}^{\mathrm{colim}_{i\in I}\, y(a_i)}T \\ &\cong \operatorname*{colim}_{i\in I}(\mathrm{colim}^{y(a_i)}T) \\ &\cong \operatorname*{colim}_{i\in I} Ta_i\end{aligned}$$

である． □

例 165. $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$，$E\colon \mathcal{C} \to \mathcal{M}$ を V-関手として，任意の対象 $d \in \mathcal{D}$ に対して余極限 $\mathrm{colim}^{\mathcal{D}(F-,d)}E$ が存在するとする．このとき定理 163 より $d \mapsto \mathrm{colim}^{\mathcal{D}(F-,d)}E$ は V-関手 $T\colon \mathcal{D} \to \mathcal{M}$ を定める．更に定理 163 より

$$\mathcal{M}(Td, m) = \mathcal{M}(\mathrm{colim}^{\mathcal{D}(F-,d)}E, m) \cong \widehat{\mathcal{C}}(\mathcal{D}(F-, d), \mathcal{M}(E-, m))$$

は $d \in \mathcal{D}$，$m \in \mathcal{M}$ について自然である．従って T は F に沿った E の各点左 Kan 拡張である． □

定義. V-豊穣圏 $\mathcal{C}$ が V-余完備
$\Longleftrightarrow$ 任意の小 V-豊穣圏 $\mathcal{J}$ と V-関手 $W\colon \mathcal{J}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{V}$，$T\colon \mathcal{J} \to \mathcal{C}$ に対して，余極限 $\mathrm{colim}^W T$ が存在する．

定理 166. V-豊穣圏 $\mathcal{M}$ が V-余完備
$\Longleftrightarrow$ $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ を V-豊穣圏，$F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$，$E\colon \mathcal{C} \to \mathcal{M}$ を V-関手とするとき，$\mathcal{C}$ が小ならば各点左 Kan 拡張 $F^\dagger E\colon \mathcal{D} \to \mathcal{M}$ が存在する．

証明. ($\Longrightarrow$) $\mathcal{C}$ が小だから，$d \in \mathcal{D}$ に対して $\mathrm{colim}^{\mathcal{D}(F-,d)}E$ が存在する．よって例 165 より $F^\dagger E$ は存在し，これは各点左 Kan 拡張である．

($\Longleftarrow$) $\mathcal{J}$ を小 $\mathcal{V}$-豊穣圏，$T\colon \mathcal{J} \to \mathcal{M}$，$W\colon \mathcal{J}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{V}$ を $\mathcal{V}$-関手とする．仮定により各点左 Kan 拡張 $y^{\dagger}T$ が存在する．このとき $m \in \mathcal{M}$ について自然に

$$\mathcal{M}(y^{\dagger}T(W), m) \cong \widehat{\mathcal{J}}(\widehat{\mathcal{J}}(y-, W), \mathcal{M}(T-, m)) \cong \widehat{\mathcal{J}}(W, \mathcal{M}(T-, m))$$

である．故に余極限 $\mathrm{colim}^{W} T$ は存在して $\mathrm{colim}^{W} T \cong y^{\dagger}T(W)$ である． $\square$

命題 167. $\mathcal{C}$ が小 $\mathcal{V}$-豊穣圏で $\mathcal{D}$ が $\mathcal{V}$-余完備であるとき，$\mathcal{V}$-関手 $T\colon \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \otimes \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ のコエンドは存在する．

証明． $W := \mathcal{C}^{\mathrm{op}}(-, \Box)\colon \mathcal{C} \otimes \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{V}$ とすると仮定より余極限 $\mathrm{colim}^{W} T$ は存在する．このとき $d \in \mathcal{D}$ について自然に

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}(\mathrm{colim}^{W} T, d) &\cong [\mathcal{C} \otimes \mathcal{C}^{\mathrm{op}}, \mathcal{V}](\mathcal{C}^{\mathrm{op}}(-, \Box), \mathcal{D}(T(-, \Box), d)) \\
&\cong \int_{\langle c, c' \rangle \in \mathcal{C} \otimes \mathcal{C}^{\mathrm{op}}} [\mathcal{C}^{\mathrm{op}}(c, c'), \mathcal{D}(T(c, c'), d)] \\
&= \int_{\langle c, c' \rangle \in \mathcal{C} \otimes \mathcal{C}^{\mathrm{op}}} [\mathcal{C}(c', c), \mathcal{D}(T(c, c'), d)] \\
&\cong \int_{c \in \mathcal{C}} \int_{c' \in \mathcal{C}^{\mathrm{op}}} [\mathcal{C}(c', c), \mathcal{D}(T(c, c'), d)] \\
&\cong \int_{c \in \mathcal{C}} \widehat{\mathcal{C}}(y(c), \mathcal{D}(T(c, -), d)) \\
&\cong \int_{c \in \mathcal{C}} \mathcal{D}(T(c, c), d)
\end{aligned}$$

だから $\displaystyle\int^{c \in \mathcal{C}} T(c, c) \cong \mathrm{colim}^{W} T$ である． $\square$

定理 168. $\mathcal{C}$ を小 $\mathcal{V}$-豊穣圏とする．$F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ に対して各点左 Kan 拡張 $F^{\dagger}y$ が存在して，$F^{\dagger}y(d) \cong \mathcal{D}(F-, d)$ である．

証明． 米田の補題 (定理 106) により，$d \in \mathcal{D}$，$P \in \widehat{\mathcal{C}}$ について自然に

$$\widehat{\mathcal{C}}(\mathcal{D}(F-, d), P) \cong \widehat{\mathcal{C}}(\mathcal{D}(F-, d), \widehat{\mathcal{C}}(y-, P))$$

である． $\square$

系 169. $y^{\dagger}y \cong \mathrm{id}$ である．

証明． $P \in \widehat{\mathcal{C}}$ について自然に $y^{\dagger}y(P) \cong \widehat{\mathcal{C}}(y-, P) \cong P$ である． $\square$

系 170. $W\colon \mathcal{J}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{V}$ に対して $\mathrm{colim}^{W} y \cong W$ である．

証明．定理 166 の証明より $\mathrm{colim}^W y \cong y^\dagger y(W) \cong W$ である． □

命題 171. $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, $E\colon \mathcal{C} \to \mathcal{M}$, $T\colon \mathcal{D} \to \mathcal{M}$ を V-関手とする．このとき T が F に沿った E の各点左 Kan 拡張
$\iff$ $W\colon \mathcal{D}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{V}$ に対して同型 $\mathrm{colim}^W T \cong \mathrm{colim}^{WF} E$ が成り立つ (但しこの式は，どちらか一方が存在すればもう一方も存在して同型となることを意味する)．

証明．($\Longrightarrow$) 系 170 より $\mathrm{colim}^W y \cong W$ と書ける．即ち

$$WFc \cong (\mathrm{colim}_d^{Wd} y(d))(Fc) \cong \mathrm{colim}_d^{Wd} \mathcal{D}(Fc, d)$$

である．よって

$$\begin{aligned}
\mathrm{colim}^W T &= \mathrm{colim}_d^{Wd} Td \\
&\cong \mathrm{colim}_d^{Wd} (\mathrm{colim}_c^{\mathcal{D}(Fc,d)} Ec) && (\text{各点左 Kan 拡張}) \\
&\cong \mathrm{colim}_c^{\mathrm{colim}_d^{Wd} \mathcal{D}(Fc,d)} Ec && (\text{定理 } 163) \\
&\cong \mathrm{colim}_c^{WFc} Ec = \mathrm{colim}^{WF} E
\end{aligned}$$

となる．

($\Longleftarrow$) 例 160 より $\mathrm{colim}^{y(d)} T$ が存在する．よって仮定より $\mathrm{colim}^{\mathcal{D}(F-,d)} E$ も存在して

$$\mathrm{colim}^{\mathcal{D}(F-,d)} E \cong \mathrm{colim}^{y(d)} T \cong Td$$

となる．従って例 165 より T は F に沿った E の各点左 Kan 拡張である． □

命題 172. V-関手 $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ が V-忠実充満
$\iff$ $E\colon \mathcal{C} \to \mathcal{M}$ を V-関手とする．各点左 Kan 拡張 $F^\dagger E$ が存在するならば，その unit $\eta\colon E \Rightarrow (F^\dagger E) \circ F$ は V-自然同型である．

証明．まず証明の前準備として $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, $E\colon \mathcal{C} \to \mathcal{M}$ に対して各点左 Kan 拡張 $F^\dagger E$ が存在するとする．$c \in \mathcal{C}$ とすると，命題 77 より $F_{ac}\colon \mathcal{C}(a, c) \to \mathcal{D}(Fa, Fc)$ は $a \in \mathcal{C}$ について自然である．よってこれは V-自然変換 $F_{-c}\colon \mathcal{C}(-, c) \Rightarrow \mathcal{D}(F-, Fc)$ を与える．このとき合成

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}(F^\dagger E(Fc), m) &\cong \widehat{\mathcal{C}}(\mathcal{D}(F-, Fc), \mathcal{M}(E-, m)) && (\text{各点左 Kan 拡張の定義}) \\
&\xrightarrow{-\circ F_{-c}} \widehat{\mathcal{C}}(\mathcal{C}(-, c), \mathcal{M}(E-, m)) \\
&\cong \mathcal{M}(Ec, m) && (\text{米田の補題 (定理 } 103))
\end{aligned}$$

は $m \in \mathcal{M}$ について自然な V の射となる．命題 112 (の双対) を使うと，この V の射は $\mathcal{M}$ の射 $h_c\colon Ec \nrightarrow F^\dagger E(Fc)$ を使って $-\circ h_c$ と書ける．このとき $h_c = \eta_c$ である．

∵) 次の図式が可換であることを示せばよい．

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{M}(F^\dagger E(Fc), F^\dagger E(Fc)) \arrow[d, "\wr"] \arrow[ddd, bend right=60, "-\circ h_c"'] \arrow[ddd, phantom, shift right=40, "(h_c)"] & I \arrow[l, "j_{F^\dagger E(Fc)}"'] \arrow[d, phantom, "(141)"] \arrow[dddl, bend left=60, "\eta_c"] \\
\widehat{\mathcal{C}}(\mathcal{D}(F-, Fc), \mathcal{M}(E-, F^\dagger E(Fc))) \arrow[r, "\mathrm{ev}_c"] \arrow[d, "-\circ F_{-c}"] \arrow[dr, phantom, "(135)"] & {[\mathcal{D}(Fc, Fc), \mathcal{M}(Ec, F^\dagger E(Fc))]} \arrow[d, "{[F_{cc}, \mathrm{id}]}"] \arrow[dd, bend left=60, "{[j_{Fc}, \mathrm{id}]}"] \arrow[d, phantom, shift left=40, "(F)"] \\
\widehat{\mathcal{C}}(\mathcal{C}(-, c), \mathcal{M}(E-, F^\dagger E(Fc))) \arrow[r, "\mathrm{ev}_c"] \arrow[d, "\wr"] \arrow[dr, phantom, "(107)"] & {[\mathcal{C}(c, c), \mathcal{M}(Ec, F^\dagger E(Fc))]} \arrow[d, "{[j_c, \mathrm{id}]}"] \\
\mathcal{M}(Ec, F^\dagger E(Fc)) & {[I, \mathcal{M}(Ec, F^\dagger E(Fc))]} \arrow[l, "i^{-1}"]
\end{tikzcd}
$$

(h_c) は h_c の定義より可換である．(F) は F が V-関手だから可換である．(107), (135) は命題 107, 135 により可換である．(141) は (141) により可換である．以上によりこの図式は可換である．

($\Longrightarrow$) F が V-忠実充満だから F_{-c} は同型である．従って h_c も同型となるから η は V-自然同型である．

($\Longleftarrow$) 定理 168 より各点左 Kan 拡張 $F^\dagger y$ は存在する．仮定よりその unit η は V-自然同型である．故に上記の議論で $E := y$ とすれば $-\circ h_c$ が同型だから

$$-\circ F_{-c}\colon \widehat{\mathcal{C}}(\mathcal{D}(F-, Fc), \widehat{\mathcal{C}}(y-, P)) \to \widehat{\mathcal{C}}(\mathcal{C}(-, c), \widehat{\mathcal{C}}(y-, P))$$

も同型である．米田の補題による同型を $\varphi\colon \widehat{\mathcal{C}}(y-, P) \Rightarrow P$ とすると命題 46 より次の図式が可換である．

$$
\begin{tikzcd}
\widehat{\mathcal{C}}(\mathcal{D}(F-, Fc), \widehat{\mathcal{C}}(y-, P)) \arrow[r, "\sim", "-\circ F_{-c}"'] \arrow[d, "\varphi\circ-"', "\wr"] & \widehat{\mathcal{C}}(\mathcal{C}(-, c), \widehat{\mathcal{C}}(y-, P)) \arrow[d, "\wr"', "\varphi\circ-"] \\
\widehat{\mathcal{C}}(\mathcal{D}(F-, Fc), P) \arrow[r, "-\circ F_{-c}"'] & \widehat{\mathcal{C}}(\mathcal{C}(-, c), P)
\end{tikzcd}
$$

故に $-\circ F_{-c}\colon \widehat{\mathcal{C}}(\mathcal{D}(F-, Fc), P) \to \widehat{\mathcal{C}}(\mathcal{C}(-, c), P)$ も同型である．従って F_{ac} も同型であ

り F は V-忠実充満である． □

命題 173. $W\colon \mathcal{J}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{V}$ を V-関手として，任意の $T\colon \mathcal{J} \to \mathcal{C}$ に対して $\mathrm{colim}^W T$ が存在するとする．また任意の $j \in \mathcal{J}$ と $a \in \mathcal{C}$ に対して power $Wj \pitchfork a$ が存在するとする．このとき命題 162 により V-関手 $\mathrm{colim}^W\colon [\mathcal{J},\mathcal{C}] \to \mathcal{C}$ が得られるが，この colim^W は左随伴である．

証明. $a \in \mathcal{C}$，$j \in \mathcal{J}$ に対して $Ra(j) := Wj \pitchfork a$ とするとこれは V-関手 $R\colon \mathcal{C} \to [\mathcal{J},\mathcal{C}]$ を定める．このとき $a \in \mathcal{C}$，$T \in [\mathcal{J},\mathcal{C}]$ について自然に

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}(\mathrm{colim}^W T, a) &\cong \widehat{\mathcal{J}}(W-, \mathcal{C}(T-, a)) \\
&\cong \int_{j \in \mathcal{J}^{\mathrm{op}}} [Wj, \mathcal{C}(Tj, a)] \\
&\cong \int_{j \in \mathcal{J}} \mathcal{C}(Tj, Wj \pitchfork a) \\
&\cong [\mathcal{J},\mathcal{C}](T, Ra)
\end{aligned}$$

となるから $\mathrm{colim}^W \dashv R$ である． □

双対的に，$\mathcal{C}$ が copower を持つならば $\lim^W\colon [\mathcal{J},\mathcal{C}] \to \mathcal{C}$ は右随伴であり，それは $a \mapsto (W-) \odot a$ で与えられる．

7.2 余極限の交換

通常の圏論では余極限の交換は関手が余極限余錐を保つという形で定式化できた．豊穣圏においては余錐の代わりになるものとして cylinder というものを定義することができる．

定義. $W\colon \mathcal{J}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{V}$，$T\colon \mathcal{J} \to \mathcal{C}$ を V-関手とするとき，V-自然変換 $W \Rightarrow \mathcal{C}(T-, c)$ を T 上の cylinder という．

余極限 $\mathrm{colim}^W T$ が存在するとする．即ち $a \in \mathcal{C}$ について自然な同型

$$\mathcal{C}(\mathrm{colim}^W T, a) \cong \widehat{\mathcal{J}}(W-, \mathcal{C}(T-, a))$$

が成り立つ．この同型を使って合成

$$I \xrightarrow{j_{\mathrm{colim}^W T}} \mathcal{C}(\mathrm{colim}^W T, \mathrm{colim}^W T) \cong \widehat{\mathcal{J}}(W-, \mathcal{C}(T-, \mathrm{colim}^W T))$$

を考えれば V-自然変換 $W \Rightarrow \mathcal{C}(T-, \operatorname{colim}^W T)$, 即ち cylinder が得られる．この cylinder を $\operatorname{colim}^W T$ の unit という．同様に極限 $\lim^W T$ については合成

$$I \xrightarrow{j_{\lim^W T}} \mathcal{C}(\lim^W T, \lim^W T) \cong [\mathcal{J}, \mathcal{V}](W-, \mathcal{C}(\lim^W T, T-))$$

により得られる V-自然変換 $W \Rightarrow \mathcal{C}(\lim^W T, T-)$ を $\lim^W T$ の counit という．

$\theta\colon W \Rightarrow \mathcal{C}(T-, c)$ を cylinder とする．補題 102 より全単射

$$\begin{aligned}\operatorname{Hom}_{\operatorname{Fun}(\mathcal{C},\mathcal{V})}\bigl(\mathcal{C}(c,\square), \widehat{\mathcal{J}}(W-, \mathcal{C}(T-,\square))\bigr) &\cong \operatorname{Hom}_V\bigl(I, \widehat{\mathcal{J}}(W-, \mathcal{C}(T-,c))\bigr) \\ &\cong \operatorname{Hom}_{U\widehat{\mathcal{J}}}(W-, \mathcal{C}(T-,c)) \qquad (174)\end{aligned}$$

が成り立つ．これで θ に対応する V-自然変換を $\widetilde{\theta}\colon \mathcal{C}(c,\square) \Rightarrow \widehat{\mathcal{J}}(W-, \mathcal{C}(T-,\square))$ と表すことにする．この対応を使って次の定義をする．

定義. cylinder $\theta\colon W \Rightarrow \mathcal{C}(T-, c)$ が余極限を与える $\iff$ $\widetilde{\theta}$ が同型となる．

よって cylinder $\theta\colon W \Rightarrow \mathcal{C}(T-, c)$ が余極限を与えるとき $c \cong \operatorname{colim}^W T$ で，θ が unit である．

$\operatorname{colim}^W T$ が存在するとする．即ち V-自然同型

$$\varphi\colon \mathcal{C}(\operatorname{colim}^W T, \square) \Rightarrow \widehat{\mathcal{J}}(W-, \mathcal{C}(T-,\square))\colon \mathcal{C} \to \mathcal{V}$$

が存在する．これは V-**CAT** の図式で表せば

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[rr, "\mathcal{C}(\operatorname{colim}^W T,-)"] \arrow[dr, "\mathcal{C}(T-,\square)"'] & \arrow[d, phantom, "\wr\Downarrow\varphi"] & \mathcal{V} \\
& \widehat{\mathcal{J}} \arrow[ur, "\widehat{\mathcal{J}}(W,-)"'] &
\end{tikzcd}$$

である．これに $U\colon V$-**CAT** $\to$ **CAT** を適用して，更に関手 $\operatorname{Hom}_V(I,-)\colon V \to \mathbf{Set}$ を組み合わせれば **CAT** の図式

$$\begin{tikzcd}
U\mathcal{C} \arrow[rr, "U(\mathcal{C}(\operatorname{colim}^W T,-))"] \arrow[dr, "U(\mathcal{C}(T-,\square))"'] \arrow[rrrr, bend left, "\operatorname{Hom}_{U\mathcal{C}}(\operatorname{colim}^W T,-)"] & \arrow[d, phantom, "\wr\Downarrow U\varphi"] & V \arrow[u, phantom, "(64)"] \arrow[rr, "\operatorname{Hom}_V(I,-)"] & \arrow[d, phantom, "(64)"] & \mathbf{Set} \\
& U\widehat{\mathcal{J}} \arrow[ur, "U(\widehat{\mathcal{J}}(W,-))"'] \arrow[urrr, bend right, "\operatorname{Hom}_{U\widehat{\mathcal{J}}}(W,-)"'] & & &
\end{tikzcd}$$

が得られる．この図式の合成は，$a \in U\mathcal{C}$ について自然な全単射

$$\mathrm{Hom}_{U\mathcal{C}}(\mathrm{colim}^W T, a) \to \mathrm{Hom}_{U\widehat{\mathcal{J}}}(W-, \mathcal{C}(T-, a)) \tag{175}$$

を与える．全単射 (175) において $\mathrm{id} \in \mathrm{Hom}_{U\mathcal{C}}(\mathrm{colim}^W T, \mathrm{colim}^W T)$ に対応する cylinder

$$\mu\colon W \Rightarrow \mathcal{C}(T-, \mathrm{colim}^W T)$$

が $\mathrm{colim}^W T$ の unit である．$\theta\colon W \Rightarrow \mathcal{C}(T-, a)$ を cylinder として，θ に全単射 (175) で対応する $\mathcal{C}$ の射を $h\colon \mathrm{colim}^W T \nrightarrow a$ とすれば，(175) の自然性から

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{U\mathcal{C}}(\mathrm{colim}^W T, \mathrm{colim}^W T) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "h\circ-"'] & \mathrm{Hom}_{U\widehat{\mathcal{J}}}(W, \mathcal{C}(T-, \mathrm{colim}^W T)) \arrow[d, "\mathcal{C}(T-,h)*-"] \\
\mathrm{Hom}_{U\mathcal{C}}(\mathrm{colim}^W T, a) \arrow[r, "\sim"] & \mathrm{Hom}_{U\widehat{\mathcal{J}}}(W, \mathcal{C}(T-, a))
\end{tikzcd}$$

が可換である．従って $\mathrm{id}_{\mathrm{colim}^W T}$ の行き先を考えると $\theta = \mathcal{C}(T-, h) * \mu$ が得られる．

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{id}_{\mathrm{colim}^W T} \arrow[r, mapsto, "\sim"] \arrow[dd, mapsto, "h\circ-"'] & \mu \arrow[d, mapsto, "\mathcal{C}(T-,h)*-"] \\
 & \mathcal{C}(T-, h) * \mu \\
h \arrow[r, mapsto, "\sim"] & \theta
\end{tikzcd}$$

即ち $j \in \mathcal{J}$ に対して $\theta_j = (\mathcal{C}(T-, h))_j * \mu_j = (h \circ -) \circ \mu_j$ である．

$$\begin{tikzcd}
Wj \arrow[r, "\mu_j"] \arrow[dr, "\theta_j"'] & \mathcal{C}(Tj, \mathrm{colim}^W T) \arrow[d, dashed, "h\circ-"] & \mathrm{colim}^W T \arrow[d, dashed, "h"] \\
 & \mathcal{C}(Tj, a) & a
\end{tikzcd}$$

(175) が全単射だからこのような h は一意である．つまり余極限の unit μ は T 上の cylinder であって「普遍性」を満たす．(但し，逆に T 上の cylinder $W \Rightarrow \mathcal{C}(T-, c)$ が普遍性を満たすからといって余極限を与えるとは限らないことに注意する．)

補題 176. $\mu\colon W \Rightarrow \mathcal{C}(T-, c)$，$\theta\colon W \Rightarrow \mathcal{C}(T-, c')$ を cylinder として μ は余極限を与えるとする．更に μ の普遍性から得られる射 $h\colon c \nrightarrow c'$ が同型であるとする．

$$\begin{tikzcd}
Wj \arrow[r, "\mu_j"] \arrow[dr, "\theta_j"'] & \mathcal{C}(Tj, c) \arrow[d, dashed, "h\circ-"] & c \arrow[d, dashed, "h"] \\
 & \mathcal{C}(Tj, c') & c'
\end{tikzcd}$$

このとき θ も余極限を与える．

証明. まず上で示した通り $\theta = \mathcal{C}(T-,h) * \mu$ である．次に全単射 (174) は $a \in U\mathcal{C}$ について自然 (定理 106) だから

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathrm{Fun}(\mathcal{C},\mathcal{V})}\big(\mathcal{C}(c,\Box), \widehat{\mathcal{J}}(W-,\mathcal{C}(T-,\Box))\big) \arrow[d, "-*(-\circ h)"'] & \mathrm{Hom}_{U\widehat{\mathcal{J}}}(W-,\mathcal{C}(T-,c)) \arrow[l, "\sim"'] \arrow[d, "\mathcal{C}(T-,h)*-"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathrm{Fun}(\mathcal{C},\mathcal{V})}\big(\mathcal{C}(c',\Box), \widehat{\mathcal{J}}(W-,\mathcal{C}(T-,\Box))\big) & \mathrm{Hom}_{U\widehat{\mathcal{J}}}(W-,\mathcal{C}(T-,c')) \arrow[l, "\sim"']
\end{tikzcd}$$

は可換である．よって μ の行き先を考えると $\widetilde{\mu} * (- \circ h) = \widetilde{\theta}$ である．

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{\mu} \arrow[d, mapsto, "-*(-\circ h)"'] & \mu \arrow[l, mapsto, "\sim"'] \arrow[dd, mapsto, "\mathcal{C}(T-,h)*-"] \\
\widetilde{\mu} * (- \circ h) & \\
\widetilde{\theta} & \theta = \mathcal{C}(T-,h) * \mu \arrow[l, mapsto, "\sim"']
\end{tikzcd}$$

つまり $a \in \mathcal{C}$ に対して $\widetilde{\mu}_a \circ (- \circ h) = \widetilde{\theta}_a$ となり，$\widetilde{\theta}_a$ は同型である． $\Box$

補題 177. $\theta \colon W \Rightarrow \mathcal{C}(T-,c)$ を cylinder とする．このとき $a \in \mathcal{C}$，$j \in \mathcal{J}$ に対して次の図式は可換である．

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}(c,a) \otimes I \arrow[rr, "\rho"] \arrow[dd, "\mathcal{C}(Tj,-)\otimes\theta_j"'] & & \mathcal{C}(c,a) \arrow[d, "\widetilde{\theta}_a"] \\
& & \widehat{\mathcal{J}}(W-,\mathcal{C}(T-,a)) \arrow[d, "\mathrm{ev}_j"] \\
{[\mathcal{C}(Tj,c),\mathcal{C}(Tj,a)] \otimes [Wj,\mathcal{C}(Tj,c)]} \arrow[rr, "m"'] & & {[Wj,\mathcal{C}(Tj,a)]}
\end{tikzcd}$$

証明. $\widetilde{\theta}$ の定義より，$\theta_j \colon I \to [Wj,\mathcal{C}(Tj,c)]$ は

$$I \xrightarrow{j_c} \mathcal{C}(c,c) \xrightarrow{\widetilde{\theta}_c} \widehat{\mathcal{J}}(W-,\mathcal{C}(T-,c)) \xrightarrow{\mathrm{ev}_j} [Wj,\mathcal{C}(Tj,c)]$$

と一致する．よって次の図式が可換であることを示せばよい．

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{C}(c,a)\otimes I \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes j_c"'] \arrow[dr, phantom, "(\mathcal{C})"] & \mathcal{C}(c,a) \arrow[dd, "\widetilde{\theta}_a"] \\
\mathcal{C}(c,a)\otimes\mathcal{C}(c,c) \arrow[ur, "m"] \arrow[d, "\mathcal{C}(T,-)\otimes\widetilde{\theta}_c"'] \arrow[dr, phantom, "(*)"] & \\
\widehat{\mathcal{J}}(\mathcal{C}(T-,c),\mathcal{C}(T-,a))\otimes\widehat{\mathcal{J}}(W-,\mathcal{C}(T-,c)) \arrow[r, "m"] \arrow[d, "\mathrm{ev}_j\otimes\mathrm{ev}_j"'] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{ev}_j)"] & \widehat{\mathcal{J}}(W-,\mathcal{C}(T-,a)) \arrow[d, "\mathrm{ev}_j"] \\
{[\mathcal{C}(Tj,c),\mathcal{C}(Tj,a)]\otimes[Wj,\mathcal{C}(Tj,c)]} \arrow[r, "m"'] & {[Wj,\mathcal{C}(Tj,a)]}
\end{tikzcd}
$$

$(\mathcal{C})$ は豊穣圏の条件により可換である．(ev_j) は ev_j が V-関手だから可換である．$(*)$ は φ_a が $a\in\mathcal{C}$ について自然だから，次の図式 (の随伴) により可換性が分かる．

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{C}(c,a) \arrow[r, "{\mathcal{C}(c,-)}"] & {[\mathcal{C}(c,c),\mathcal{C}(c,a)]} \arrow[d, "{[\mathrm{id},\widetilde{\theta}_a]}"] \\
\mathcal{C}(c,a) \arrow[u, "\mathrm{id}"] \arrow[d, "{\mathcal{C}(T,-)}"'] & {[\mathcal{C}(c,c),\widehat{\mathcal{J}}(W-,\mathcal{C}(T-,a))]} \\
\widehat{\mathcal{J}}(\mathcal{C}(T-,c),\mathcal{C}(T-,a)) \arrow[r, "{\widehat{\mathcal{J}}(W,-)}"'] & {[\widehat{\mathcal{J}}(W-,\mathcal{C}(T-,c)),\widehat{\mathcal{J}}(W-,\mathcal{C}(T-,a))]} \arrow[u, "{[\widetilde{\theta}_c,\mathrm{id}]}"']
\end{tikzcd}
$$

□

$\theta\colon W\Rightarrow\mathcal{C}(T-,c)$ を cylinder として $F\colon\mathcal{C}\to\mathcal{D}$ を V-関手とする．このとき命題 58, 60, 77 より合成

$$Wj\xrightarrow{\theta_j}\mathcal{C}(Tj,c)\xrightarrow{F_{Tj,c}}\mathcal{D}(FTj,Fc)$$

は $j\in\mathcal{J}$ について自然である．よってこれは cylinder $W\Rightarrow\mathcal{D}(FT-,Fc)$ を与える．(つまり V-関手は $\mathcal{C}$ の cylinder を $\mathcal{D}$ の cylinder に写す．) この cylinder を $F*\theta$ で表すことにする．

命題 178. $\theta\colon W\Rightarrow\mathcal{C}(T-,c)$ を cylinder，$F\colon\mathcal{C}\to\mathcal{D}$ を V-関手とする．このとき $a\in C$

に対して次の図式は可換である．

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}(c,a) \arrow[r, "\widetilde{\theta}_a"] \arrow[d, "F_{ca}"'] & \widehat{\mathcal{J}}(W-, \mathcal{C}(T-,a)) \arrow[d, "(F_{T-,a})\circ -"] \\
\mathcal{D}(Fc,Fa) \arrow[r, "\widetilde{F*\theta}_{Fa}"'] & \widehat{\mathcal{J}}(W-, \mathcal{D}(FT-,Fa))
\end{tikzcd}$$

証明．米田の補題 (補題 102) より，$a=c$ のときの $\mathrm{id}_c\colon c \nrightarrow c$ の行き先が一致していればよい．

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}(c,c) \arrow[r, "\widetilde{\theta}_c"] \arrow[d, "F"'] & \widehat{\mathcal{J}}(W-, \mathcal{C}(T-,c)) \arrow[d, "(F_{T-,c})\circ -"] \\
\mathcal{D}(Fc,Fc) \arrow[r, "\widetilde{F*\theta}_{Fc}"'] & \widehat{\mathcal{J}}(W-, \mathcal{D}(FT-,Fc))
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathrm{id}_c \arrow[r, mapsto, "\widetilde{\theta}_c"] \arrow[d, mapsto, "F"'] & \theta \arrow[d, mapsto, "(F_{T-,c})\circ -"] \\
\mathrm{id}_{Fc} \arrow[r, mapsto, "\widetilde{F*\theta}_{Fc}"'] & F*\theta
\end{tikzcd}$$

しかしそれは $F*\theta$ の定義から明らか． □

定義． 余極限 $\mathrm{colim}^W T$ が存在するとして，その unit を $\mu\colon W \Rightarrow \mathcal{C}(T-, \mathrm{colim}^W T)$ とする．このとき V-関手 $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ が $\mathrm{colim}^W T$ と交換する
$\iff$ cylinder $F*\mu\colon W \Rightarrow \mathcal{D}(FT-, F(\mathrm{colim}^W T))$ が余極限 $\mathrm{colim}^W FT$ を与える．

定義． V-関手 $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ が余連続 $\iff$ F が任意の小余極限と交換する[*14]．

命題 179. $F, G\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ を V-関手として V-自然同型 $\theta\colon F \Rightarrow G$ が存在するとする．このとき F が $\mathrm{colim}^W T$ と交換するならば G も $\mathrm{colim}^W T$ と交換する．

証明．V-自然同型 $\theta'\colon \mathcal{D}(GT-, Gc) \Rightarrow \mathcal{D}(FT-, Gc)$ を，$j \in \mathcal{J}$ について自然な射

$$-\circ \theta_{Tj}\colon \mathcal{D}(GTj, Gc) \Rightarrow \mathcal{D}(FTj, Gc)$$

で定めておく．$\mu\colon W \Rightarrow \mathcal{C}(T-, c)$ を $\mathrm{colim}^W T$ の unit とする．F が $\mathrm{colim}^W T$ と交換するので $F*\mu$ は余極限を与える．そこで cylinder $\nu\colon W \Rightarrow \mathcal{D}(FT-, Gc)$ を

$$Wj \xrightarrow{\mu_j} \mathcal{C}(Tj, c) \xrightarrow{G} \mathcal{D}(GTj, Gc) \xrightarrow{\theta'_j} \mathcal{D}(FTj, Gc)$$

[*14] これは「小余極限 $\mathrm{colim}^W T$ が存在するならば，F は $\mathrm{colim}^W T$ と交換する」という意味である．

で定義すると，$F * \mu$ の普遍性から次の点線の射 h が得られる．

$$\begin{tikzcd} Wj \arrow[r, "\mu_j"] \arrow[d, "\mu_j"'] & \mathcal{C}(Tj,c) \arrow[r, "F"] & \mathcal{C}(FTj,Fc) \arrow[d, dashed, "h\circ-"] & Fc \arrow[d, dashed, "h"] \\ \mathcal{C}(Tj,c) \arrow[r, "G"'] & \mathcal{C}(GTj,Gc) \arrow[r, "\theta'_j"'] & \mathcal{C}(FTj,Gc) & Gc \end{tikzcd}$$

この h は同型である．

$\because$) 次の図式は可換である．

$$\begin{tikzcd} Wj \arrow[r, "\mu_j"] \arrow[d, "\mu_j"'] & \mathcal{C}(Tj,c) \arrow[r, "F"] \arrow[d, "G"] & \mathcal{C}(FTj,Fc) \arrow[d, "\theta_c\circ-"] \\ \mathcal{C}(Tj,c) \arrow[r, "G"'] & \mathcal{C}(GTj,Gc) \arrow[r, "-\circ\theta_{Tj}"'] & \mathcal{C}(FTj,Gc) \end{tikzcd}$$

よって普遍性から $h = \theta_c$ であり，θ_c は同型である．

故に補題 176 から ν は余極限を与える．定理 106 の F についての自然性を全単射 (174) に適用して可換図式

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_{\mathrm{Fun}(\mathcal{D},\mathcal{V})}\big(\mathcal{D}(Gc,\square), \widehat{\mathcal{J}}(W-,\mathcal{D}(FT-,\square))\big) \arrow[d, "(\theta'\circ-)*-"'] & \mathrm{Hom}_{U\widehat{\mathcal{J}}}(W-,\mathcal{D}(GT-,Gc)) \arrow[l, "\sim"'] \arrow[d, "\theta'*-"] \\ \mathrm{Hom}_{\mathrm{Fun}(\mathcal{D},\mathcal{V})}\big(\mathcal{D}(Gc,\square), \widehat{\mathcal{J}}(W-,\mathcal{D}(GT-,\square))\big) & \mathrm{Hom}_{U\widehat{\mathcal{J}}}(W-,\mathcal{D}(FT-,Gc)) \arrow[l, "\sim"'] \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} \widetilde{G*\mu} \arrow[d, mapsto, "(\theta'\circ-)*-"'] & G*\mu \arrow[l, mapsto, "\sim"'] \arrow[d, mapsto, "(-\circ\theta')*-"] \\ \widetilde{\nu} & \nu \arrow[l, mapsto, "\sim"'] \end{tikzcd}$$

を得る．$G * \mu$ の行き先を考えれば $(\theta' \circ -) * \widetilde{G * \mu} = \widetilde{\nu}$ が分かる．

$$\begin{tikzcd} \mathcal{D}(Gc,\square) \arrow[r, "\widetilde{G*\mu}"] \arrow[dr, "\sim", "\widetilde{\nu}"'] & \widehat{\mathcal{J}}(W-,\mathcal{D}(FT-,\square)) \arrow[d, "\wr"', "\theta'\circ-"] \\ & \widehat{\mathcal{J}}(W-,\mathcal{D}(GT-,\square)) \end{tikzcd}$$

よって $G * \mu$ も余極限を与える． $\square$

定理 180. $c \in \mathcal{C}$ に対して $\mathcal{C}(-,c)\colon \mathcal{C} \to \mathcal{V}^{\mathrm{op}}$ は任意の余極限と交換する．

証明. $W\colon \mathcal{J}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{V}$, $T\colon \mathcal{J} \to \mathcal{C}$ として余極限 $\mathrm{colim}^W T$ が存在するとする．その unit を μ とすると $a \in \mathcal{C}$ について自然な同型

$$\widetilde{\mu}_a\colon \mathcal{C}(\mathrm{colim}^W T, a) \to \widehat{\mathcal{J}}(W-, \mathcal{C}(T-, a))$$

が得られる．例 161 より極限 $\lim^W(\mathcal{C}(T-, c))$ は存在して

$$\lim^W(\mathcal{C}(T-, c)) \cong \widehat{\mathcal{J}}(W-, \mathcal{C}(T-, c))$$

である．即ち $x \in \mathcal{V}$ について自然な同型

$$\xi_x\colon [x, \widehat{\mathcal{J}}(W-, \mathcal{C}(T-, c))] \to \widehat{\mathcal{J}}(W-, [x, \mathcal{C}(T-, c)])$$

が存在する．ξ_x と $\widetilde{\mu}_c$ を組み合わせれば $[x, \mathcal{C}(\mathrm{colim}^W T, c)] \cong \widehat{\mathcal{J}}(W-, [x, \mathcal{C}(T-, c)])$ となるから

$$\lim^W(\mathcal{C}(T-, c)) \cong \mathcal{C}(\mathrm{colim}^W T, c)$$

が分かる．これの counit を $\nu\colon W \Rightarrow [\mathcal{C}(\mathrm{colim}^W T, c), \mathcal{C}(T-, c)]$ とする．$\mathcal{C}(-, c) * \mu = \nu$ を示せばよい．まず $j \in \mathcal{J}$ に対して ν_j は次の図式の左回りの合成で与えられる．

$$\begin{tikzcd}
I \arrow[d, "j_{\mathcal{C}(\mathrm{colim}^W T, c)}"'] & \\
{[\mathcal{C}(\mathrm{colim}^W T, c), \mathcal{C}(\mathrm{colim}^W T, c)]} \arrow[d, "{[\mathrm{id}, \widetilde{\mu}_c]}"'] & \\
{[\mathcal{C}(\mathrm{colim}^W T, c), \widehat{\mathcal{J}}(W-, \mathcal{C}(T-, c))]} \arrow[r, "{[\mathrm{id}, \mathrm{ev}_j]}"] \arrow[d, "\xi_{\mathcal{C}(\mathrm{colim}^W T, c)}"'] \arrow[dr, phantom, "(161)"] & {[\mathcal{C}(\mathrm{colim}^W T, c), [Wj, \mathcal{C}(Tj, c)]]} \arrow[d, "\text{随伴による同型}"] \\
\widehat{\mathcal{J}}(W-, [\mathcal{C}(\mathrm{colim}^W T, c), \mathcal{C}(T-, c)]) \arrow[r, "\mathrm{ev}_j"'] & {[Wj, [\mathcal{C}(\mathrm{colim}^W T, c), \mathcal{C}(Tj, c)]]}
\end{tikzcd}$$

ここで例 161 より (161) は可換だから $\nu_j\colon Wj \to [\mathcal{C}(\mathrm{colim}^W T, c), \mathcal{C}(Tj, c)]$ は合成

$$\mathcal{C}(\mathrm{colim}^W T, c) \xrightarrow{\widetilde{\mu}_c} \widehat{\mathcal{J}}(W-, \mathcal{C}(T-, c)) \xrightarrow{\mathrm{ev}_j} [Wj, \mathcal{C}(Tj, c)]$$

に対応する射であることが分かる．補題 177 より，これは

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}(\mathrm{colim}^W T, c) &\xrightarrow{\rho^{-1}} \mathcal{C}(\mathrm{colim}^W T, c) \otimes I \\
&\xrightarrow{\mathcal{C}(Tj, -) \otimes \mu_j} [\mathcal{C}(Tj, \mathrm{colim}^W T), \mathcal{C}(Tj, c)] \otimes [Wj, \mathcal{C}(Tj, \mathrm{colim}^W T)] \\
&\xrightarrow{m} [Wj, \mathcal{C}(Tj, c)]
\end{aligned}$$

と一致する．故に随伴 $-\otimes Wj \dashv [Wj,-]$ を考えれば，次の図式の一番外側が可換であることが分かる．(但し $s := \mathrm{colim}^W T$ と書いた．)

$$\begin{tikzcd}
(\mathcal{C}(s,c)\otimes I)\otimes Wj \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "(\mathcal{C}(Tj,-)\otimes\mu_j)\otimes\mathrm{id}"'] \arrow[rr, bend left, "\rho\otimes\mathrm{id}"] \arrow[r, phantom, bend left=40, "(V)"] & \mathcal{C}(s,c)\otimes(I\otimes Wj) \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes\lambda"] \arrow[ddl, "\mathcal{C}(Tj,-)\otimes(\mu_j\otimes\mathrm{id})"] \arrow[dl, phantom, "(\alpha)"] & \mathcal{C}(s,c)\otimes Wj \arrow[dddll, "\mathcal{C}(Tj,-)\otimes\mu_j"'] \arrow[ddd, "\nu_j\text{の随伴射}"] \arrow[ddl, phantom, "(*)"] \\
([\mathcal{C}(Tj,s),\mathcal{C}(Tj,c)]\otimes[Wj,\mathcal{C}(Tj,s)])\otimes Wj \arrow[d, "\alpha"] & & \\
[\mathcal{C}(Tj,s),\mathcal{C}(Tj,c)]\otimes([Wj,\mathcal{C}(Tj,s)]\otimes Wj) \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes\mathrm{ev}"] & & \\
[\mathcal{C}(Tj,s),\mathcal{C}(Tj,c)]\otimes\mathcal{C}(Tj,s) \arrow[rr, "\mathrm{ev}"'] & (**) & \mathcal{C}(Tj,c)
\end{tikzcd}$$

(V) はモノイダル圏の定義より可換である．(α) は α が自然変換だから可換である．$(*)$ は $\mathcal{V}$ の射と V の射の対応のさせ方により可換である．以上により $(**)$ も可換である．$(**)$ を整理すると次の図式を得る．

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}(\mathrm{colim}^W T,c)\otimes Wj \arrow[r, "\mathrm{id}"] \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes\mu_j"'] \arrow[dr, phantom, "(\star)"] & \mathcal{C}(\mathrm{colim}^W T,c)\otimes Wj \arrow[dd, "\nu_j\text{の随伴射}"] \\
\mathcal{C}(\mathrm{colim}^W T,c)\otimes\mathcal{C}(Tj,\mathrm{colim}^W T) \arrow[dr, "m"] \arrow[d, "\mathcal{C}(Tj,-)\otimes\mathrm{id}"'] \arrow[dr, phantom, shift right=3, "(\mathcal{C}(Tj,-))"'] & \\
{[\mathcal{C}(Tj,\mathrm{colim}^W T),\mathcal{C}(Tj,c)]}\otimes\mathcal{C}(Tj,\mathrm{colim}^W T) \arrow[r, "\mathrm{ev}"'] & \mathcal{C}(Tj,c)
\end{tikzcd}$$

$(\mathcal{C}(Tj,-))$ は $\mathcal{C}(Tj,-)$ の定義より可換である．故に $(\star)$ も可換となる．従って $(\star)$ に随伴を適用すれば可換図式

$$\begin{tikzcd}
Wj \arrow[r, "\mathrm{id}"] \arrow[d, "\mu_j"'] & Wj \arrow[d, "\nu_j"] \\
\mathcal{C}(Tj,\mathrm{colim}^W T) \arrow[r, "\mathcal{C}(-,c)"'] & {[\mathcal{C}(\mathrm{colim}^W T,c),\mathcal{C}(Tj,c)]}
\end{tikzcd}$$

を得る． □

定理 181. 左随伴は任意の余極限と交換する．

証明. $F \dashv G\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ を $\mathcal{V}$-随伴として, その unit を η とする. $W\colon \mathcal{J}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{V}$, $T\colon \mathcal{J} \to \mathcal{C}$ を $\mathcal{V}$-関手として余極限 $\mathrm{colim}^W T$ が存在するとして, その unit を μ とする. このとき $d \in \mathcal{D}$ について自然に

$$
\begin{aligned}
\mathcal{D}(F(\mathrm{colim}^W T), d) &\cong \mathcal{C}(\mathrm{colim}^W T, Gd) \\
&\cong \widehat{\mathcal{J}}(W-, \mathcal{C}(T-, Gd)) \\
&\cong \widehat{\mathcal{J}}(W-, \mathcal{D}(FT-, d)).
\end{aligned}
$$

だから $\mathrm{colim}^W FT$ も存在して $F(\mathrm{colim}^W T) \cong \mathrm{colim}^W FT$ である. そこで $\mathrm{colim}^W FT$ の unit を ν とする. $j \in \mathcal{J}$ に対して

$$
\begin{tikzcd}
Wj \arrow[d, "\mu_j"'] \arrow[dr, "\nu_j"] & \\
\mathcal{C}(Tj, \mathrm{colim}^W T) \arrow[r, "F"'] & \mathcal{D}(FTj, F(\mathrm{colim}^W T))
\end{tikzcd}
$$

が可換であることを示せばよい. $\sigma\colon \mathcal{C}(-, G\Box) \Rightarrow \mathcal{D}(F-, \Box)$ を $F \dashv G$ が与える $\mathcal{V}$-自然同型とする. このとき次の図式を考える.

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{C}(a,b) \arrow[r, "\eta_b \circ -"] \arrow[d, "F_{ab}"'] \arrow[dr, phantom, "(52)"] & \mathcal{C}(a, GFb) \arrow[r, "\sigma_{a,Fb}"] \arrow[d, "F_{a,GFb}"'] \arrow[dr, phantom, "(117)"] & \mathcal{D}(Fa, Fb) \\
\mathcal{C}(Fa, Fb) \arrow[r, "F\eta_b \circ -"'] \arrow[urr, bend right=60, "\mathrm{id}"', "(随伴)"] & \mathcal{D}(Fa, FGFb) \arrow[ur, "\varepsilon_{Fb} \circ -"'] &
\end{tikzcd}
\tag{182}
$$

(52) は命題 52 から可換である. (117) は命題 117 の証明により可換である. (随伴) は $F \dashv G$ より可換である. 以上により (182) は可換である.

次に次の図式を考える (ここで $s := \mathrm{colim}^W T$ と置いた).

$$
\begin{tikzcd}
I \arrow[d, "j_s"'] & & \\
\mathcal{C}(s,s) \arrow[r, "\widetilde{\mu}_s"] \arrow[d, "\eta_s \circ -"'] \arrow[dr, phantom, "(\widetilde{\mu})"] & \widehat{\mathcal{J}}(W-, \mathcal{C}(T-, s)) \arrow[d, "(y(\eta_s) \bullet T) \circ -"'] \arrow[dr, "(F_{T-,s}) \circ -"] \arrow[dr, phantom, "(182)"'] & \\
\mathcal{C}(s, GFs) \arrow[r, "\widetilde{\mu}_{GFs}"'] & \widehat{\mathcal{J}}(W-, \mathcal{C}(T-, GFs)) \arrow[r, "\sigma \circ -"'] & \widehat{\mathcal{J}}(W-, \mathcal{D}(FT-, Fs))
\end{tikzcd}
$$

$(\widetilde{\mu})$ は $\widetilde{\mu}$ が $\mathcal{V}$-自然変換だから可換である. (182) は上で示した通り可換である. 従ってこの図式は可換である. 定義より, この図式の左回りの合成は ν となる. 従って可換性から $F * \mu = \nu$ が分かる. $\Box$

定理 183. $\mathcal{C},\mathcal{D},\mathcal{J}$ を V-豊穣圏，$W\colon \mathcal{J}^{\mathrm{op}}\to\mathcal{V}$，$T\colon\mathcal{J}\to[\mathcal{C},\mathcal{D}]$ を V-関手として，$c\in\mathcal{C}$ に対して $T_c:=\mathrm{ev}_c\circ T=\mathrm{ev}(T-,c)\colon\mathcal{J}\to\mathcal{D}$ と定める．任意の $c\in\mathcal{C}$ に対して $\mathrm{colim}^W T_c$ が存在するならば，$\mathrm{colim}^W T\in[\mathcal{C},\mathcal{D}]$ も存在して $(\mathrm{colim}^W T)(c)\cong\mathrm{colim}^W T_c$ となる．即ち，関手圏の余極限は各点ごとに計算できる．

証明. $P(c,d):=\widehat{\mathcal{J}}(W-,\mathcal{D}(T_c-,d))$ と定めると P は V-関手 $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}\otimes\mathcal{D}\to\mathcal{V}$ であり，仮定より $\mathcal{D}(\mathrm{colim}^W T_c,d)\cong P(c,d)$ である．即ち $c\in\mathcal{C}$ に対して $P(c,-)$ は表現可能である．従って定理 114 の証明より，$Fc:=\mathrm{colim}^W T_c$ と定めると V-関手 $F\colon\mathcal{C}\to\mathcal{D}$ が得られて，更に $c\in\mathcal{C}$，$d\in\mathcal{D}$ について自然な同型

$$\varphi_{cd}\colon\mathcal{D}(Fc,d)\to\widehat{\mathcal{J}}(W-,\mathcal{D}(T_c-,d))$$

が存在する．このとき $G\in[\mathcal{C},\mathcal{D}]$ について自然に

$$\begin{aligned}
[\mathcal{C},\mathcal{D}](F,G)&=\int_{c\in\mathcal{C}}\mathcal{D}(Fc,Gc)\\
&\cong\int_{c\in\mathcal{C}}\widehat{\mathcal{J}}(W-,\mathcal{D}(T_c(-),Gc)) && (\varphi\text{ から得られる同型})\\
&=\int_{c\in\mathcal{C}}\int_{j\in\mathcal{J}^{\mathrm{op}}}[Wj,\mathcal{D}(Tj(c),Gc)]\\
&\cong\int_{j\in\mathcal{J}^{\mathrm{op}}}\int_{c\in\mathcal{C}}[Wj,\mathcal{D}(Tj(c),Gc)] && (\text{補題 137})\\
&\cong\int_{j\in\mathcal{J}^{\mathrm{op}}}\Big[Wj,\int_{c\in\mathcal{C}}\mathcal{D}(Tj(c),Gc)\Big] && (\text{命題 133})\\
&=\int_{j\in\mathcal{J}^{\mathrm{op}}}\big[Wj,[\mathcal{C},\mathcal{D}](Tj,G)\big]\\
&=\widehat{\mathcal{J}}(W-,[\mathcal{C},\mathcal{D}](T-,G))
\end{aligned}$$

だから F が余極限 $\mathrm{colim}^W T$ を与える． □

系 184. $\mathcal{C}$ が小 V-豊穣圏で $\mathcal{D}$ が V-余完備ならば $[\mathcal{C},\mathcal{D}]$ も V-余完備である． □

系 185. $\mathcal{C}$ が小 V-豊穣圏で $\mathcal{D}$ が V-余完備ならば，各 $c\in\mathcal{C}$ に対して $\mathrm{ev}_c\colon[\mathcal{C},\mathcal{D}]\to\mathcal{D}$ は余連続である．

証明. $W\colon\mathcal{J}^{\mathrm{op}}\to\mathcal{V}$，$T\colon\mathcal{J}\to[\mathcal{C},\mathcal{D}]$ を V-関手とする．定理 183 の証明の通り，$Fc:=\mathrm{colim}^W T_c$ と定義すれば V-関手 $F\colon\mathcal{C}\to\mathcal{D}$ となり F が余極限 $\mathrm{colim}^W T$ を与える．F と $\mathrm{colim}^W T_c$ の unit をそれぞれ μ,ν^c として $\mathrm{ev}_c*\mu=\nu^c$ を示せばよい．そこで次の図式を

考える．

$$
\begin{tikzcd}
I \arrow[d, "j_F"] \arrow[rrdd, "j_{Fc}"] \arrow[rrdddd, bend left, "\nu^c"] \arrow[ddddddd, bend right, "\mu"'] & & \\
{[\mathcal{C},\mathcal{D}](F,F)} \arrow[d, equal] \arrow[d, phantom, "(\mu)"'] \arrow[r, phantom, "(j_F)"] & {} \arrow[r, phantom, "(\nu^c)"] & {} \\
\displaystyle\int_c \mathcal{D}(Fc,Fc) \arrow[rr, "\mathrm{ev}_c"] \arrow[d, "\wr"'] \arrow[rrd, phantom, "(*)"] & & \mathcal{D}(Fc,Fc) \arrow[d, "\wr"] \\
\displaystyle\int_c \widehat{\mathcal{J}}(W-,\mathcal{D}(T_c(-),Fc)) \arrow[rr, "\mathrm{ev}_c"] \arrow[d, equal] \arrow[rrd, phantom, "(**)"] & & \widehat{\mathcal{J}}(W-,\mathcal{D}(T_c(-),Fc)) \arrow[d, equal] \\
\displaystyle\int_c\int_j [Wj,\mathcal{D}(Tj(c),Fc)] \arrow[rr, "\mathrm{ev}_c"] \arrow[d, "\wr"'] \arrow[rrd, phantom, "(137)"] & & \displaystyle\int_j [Wj,\mathcal{D}(Tj(c),Fc)] \arrow[d, "\mathrm{ev}_j"] \\
\displaystyle\int_j\int_c [Wj,\mathcal{D}(Tj(c),Fc)] \arrow[r, "\mathrm{ev}_j"] \arrow[d, "\wr"'] \arrow[rd, phantom, "(*)"] & \displaystyle\int_c [Wj,\mathcal{D}(Tj(c),Fc)] \arrow[r, "\mathrm{ev}_c"] \arrow[d, "\wr"'] \arrow[r, phantom, "(133)"', shift right=4] & {[Wj,\mathcal{D}(Tj(c),Fc)]} \\
\displaystyle\int_j \left[Wj,\int_c \mathcal{D}(Tj(c),Fc)\right] \arrow[r, "\mathrm{ev}_j"] \arrow[d, equal] \arrow[rd, phantom, "(**)"] & \left[Wj,\displaystyle\int_c \mathcal{D}(Tj(c),Fc)\right] \arrow[ru, "{[\mathrm{id},\mathrm{ev}_c]}"'] \arrow[d, equal] \arrow[rd, phantom, "(**)"] & {} \\
\widehat{\mathcal{J}}(W-,[\mathcal{C},\mathcal{D}](T-,F)) \arrow[r, "\mathrm{ev}_j"'] & {[Wj,\mathcal{D}(Tj(c),Fc)]} \arrow[ruu, "{[\mathrm{id},\mathrm{ev}_c]}"'] & {}
\end{tikzcd}
$$

(μ)，(ν^c) は unit の定義より可換である．(j_F) は j_F の定義より可換である．$(*)$ は同型の定め方より可換である．$(**)$ は明らかに可換である．(133) は命題 133 より可換である．(137) は補題 137 の証明により可換である．以上によりこの図式は可換であるから $\mathrm{ev}_c \circ \mu_j = \nu^c_j$ となる． □

定理 183 の状況で，T に命題 101 を使って

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{V}\text{-}\mathbf{CAT}}(\mathcal{C}\otimes\mathcal{J},\mathcal{D}) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{V}\text{-}\mathbf{CAT}}(\mathcal{J}\otimes\mathcal{C},\mathcal{D}) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{V}\text{-}\mathbf{CAT}}(\mathcal{J},[\mathcal{C},\mathcal{D}])$$

により対応する $\mathcal{V}$-関手を $\widetilde{T}\colon \mathcal{C}\otimes\mathcal{J}\to\mathcal{D}$ とする．$X\colon \mathcal{C}^{\mathrm{op}}\to\mathcal{V}$ を $\mathcal{V}$-関手として $\mathcal{V}$-関手 $X\otimes W\colon \mathcal{C}^{\mathrm{op}}\otimes\mathcal{J}^{\mathrm{op}}\to\mathcal{V}$ を $\langle c,j\rangle\mapsto Xc\otimes Wj$ で定める．定理 183 より $\mathrm{colim}^W T\colon \mathcal{C}\to\mathcal{D}$

が存在する．このとき $d \in \mathcal{D}$ について自然に

$$
\begin{aligned}
\mathcal{D}(\mathrm{colim}^{X\otimes W}\widetilde{T}, d) &\cong \widehat{\mathcal{C}\otimes\mathcal{J}}(X-\otimes W\square, \mathcal{D}(\widetilde{T}(-,\square), d)) \\
&\cong \int_{c\in\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}\int_{j\in\mathcal{J}^{\mathrm{op}}}[Xc\otimes Wj, \mathcal{D}(\widetilde{T}(c,j), d)] \\
&\cong \int_{c\in\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}\int_{j\in\mathcal{J}^{\mathrm{op}}}[Xc, [Wj, \mathcal{D}(\widetilde{T}(c,j), d)]] \\
&\cong \int_{c\in\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}\Big[Xc, \int_{j\in\mathcal{J}^{\mathrm{op}}}[Wj, \mathcal{D}(T_c(j), d)]\Big] \\
&\cong \int_{c\in\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}[Xc, \widehat{\mathcal{J}}(W-, \mathcal{D}(T_c-, d))] \\
&\cong \int_{c\in\mathcal{C}^{\mathrm{op}}}[Xc, \mathcal{D}((\mathrm{colim}^W T)(c), d)] \\
&\cong \widehat{\mathcal{C}}(X-, \mathcal{D}((\mathrm{colim}^W T)-, d)) \\
&\cong \mathcal{D}(\mathrm{colim}^X(\mathrm{colim}^W T), d)
\end{aligned}
$$

であるから $\mathrm{colim}^{X\otimes W}\widetilde{T} \cong \mathrm{colim}^X(\mathrm{colim}^W T)$ である (但しこの式は，どちらか一方が存在すればもう一方も存在して同型となることを意味する)．

定理 186. 米田埋込 $y\colon \mathcal{C} \to \widehat{\mathcal{C}}$ は極限と交換する．

証明. $W\colon \mathcal{J} \to \mathcal{V}$，$T\colon \mathcal{J} \to \mathcal{C}$ として極限 $\lim^W T \in \mathcal{C}$ が存在するとする．その counit を $\mu\colon W \Rightarrow \mathcal{C}(\lim^W T, T-)$ としたとき $y * \mu$ が極限を与えることを示せばよい．そのためには系 185 の証明 (の双対) より，$c \in \mathcal{C}$ に対して $\mathrm{ev}_c * (y * \mu)$ が極限 $\lim^W T_c$ を与えることを示せばよい．

$$
\begin{tikzcd}
W \arrow[r, "\mu"] & \mathcal{C}(\lim^W T, T-) \arrow[r, "y"] \arrow[dr, "\mathcal{C}(c,-)"'] & \widehat{\mathcal{C}}(y(\lim^W T), y(T-)) \arrow[d, "\mathrm{ev}_c"] \\
 & & {[\mathcal{C}(c, \lim^W T), \mathcal{C}(c, T-)]}
\end{tikzcd}
$$

$\mathrm{ev}_c \circ y = \mathcal{C}(c,-)$ だから $\mathrm{ev}_c * (y * \mu) = \mathcal{C}(c,-) * \mu$ である．これは定理 180 (の双対) から極限を与える． $\square$

命題 187. $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ を V-関手として，$\mathcal{C}$ が copower を持つとき

F が右随伴を持つ $\Longleftrightarrow$ UF が右随伴を持ち，F が copower と交換する．

証明．($\Longrightarrow$) $F \dashv G\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ とする．このとき $U\colon V\text{-}\mathbf{CAT} \to \mathbf{CAT}$ が strict 2-functor だから $UF \dashv UG\colon \mathcal{D} \to U\mathcal{C}$ である．また定理 181 より F は copower と交換する．

($\Longleftarrow$) $UF \dashv G\colon U\mathcal{C} \to U\mathcal{D}$ とする．この随伴の counit を ε とすると $\varepsilon_d\colon FGd \nrightarrow d$ は $\mathcal{D}$ の射である．そこで V の射 $\varphi^d_c\colon \mathcal{C}(c, Gd) \to \mathcal{D}(Fc, d)$ を合成

$$\mathcal{C}(c, Gd) \xrightarrow{F_{c,Gd}} \mathcal{D}(Fc, FGd) \xrightarrow{\varepsilon_d \circ -} \mathcal{D}(Fc, d)$$

で定義するとこれは命題 77, 補題 92 より $c \in \mathcal{C}$ について自然である．系 120 より φ^d_c が同型であることを示せばよい．そのためには $x \in V$ に対して写像

$$\varphi^d_c \circ -\colon\ \mathrm{Hom}_V(x, \mathcal{C}(c, Gd)) \to \mathrm{Hom}_V(x, \mathcal{D}(Fc, d))$$

が全単射であることを示せばよい．まず例 159 の方法で copower を余極限とみなすと，copower $x \odot c$ の unit は V の射 $x \to \mathcal{C}(c, x \odot c)$ である．これを μ と書くと，対応する cylinder は $\widetilde{\mu}\colon \mathcal{C}(x \odot c, -) \Rightarrow [x, \mathcal{C}(c, -)]$ である．ここで次の図式を考える．

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}(x \odot c, Gd) \arrow[r, "\widetilde{\mu}_{Gd}"] \arrow[d, "F_{x \odot c, Gd}"'] \arrow[dr, phantom, "(178)"] & {[x, \mathcal{C}(c, Gd)]} \arrow[d, "{[\mathrm{id}, F_{c,Gd}]}"] \arrow[dd, bend left=60, "{[\mathrm{id}, \varphi^d_c]}"] \\
\mathcal{D}(F(x \odot c), FGd) \arrow[r, "\widetilde{F * \mu}_{FGd}"'] \arrow[d, "\varepsilon_d \circ -"'] \arrow[dr, phantom, "(*)"] & {[x, \mathcal{D}(Fc, FGd)]} \arrow[d, "{[\mathrm{id}, \varepsilon_d \circ -]}"] \\
\mathcal{D}(F(x \odot c), d) \arrow[r, "\widetilde{F * \mu}_{d}"'] & {[x, \mathcal{D}(Fc, d)]}
\end{tikzcd}$$

(178) は命題 178 より可換である．$(*)$ は $\widetilde{F * \mu}_d$ が $d \in \mathcal{D}$ について自然だから可換である．また F が copower と交換するから，横向きの射は全て同型である．この可換図式に関手 $\mathrm{Hom}_V(I, -)$ を適用して例 64 を使うと，次の可換図式を得る．

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{U\mathcal{C}}(x \odot c, Gd) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "U(F)"] \arrow[dd, bend right=60, "随伴", "\wr"'] & \mathrm{Hom}_V(x, \mathcal{C}(c, Gd)) \arrow[d, "F_{c,Gd} \circ -"] \arrow[dd, bend left=60, "\varphi^d_c \circ -"] \\
\mathrm{Hom}_{U\mathcal{D}}(F(x \odot c), FGd) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\varepsilon_d \circ -"] & \mathrm{Hom}_V(x, \mathcal{D}(Fc, FGd)) \arrow[d, "(\varepsilon_d \circ -) \circ -"] \\
\mathrm{Hom}_{U\mathcal{D}}(F(x \odot c), d) \arrow[r, "\sim"] & \mathrm{Hom}_V(x, \mathcal{D}(Fc, d))
\end{tikzcd}$$

よって $\varphi^d_c \circ -$ は全単射である． $\square$

各点左 Kan 拡張の unit と余極限の unit の関係は次のようになる．

定理 188. $F\colon \mathcal{C}\to\mathcal{D}$, $E\colon \mathcal{C}\to\mathcal{M}$ を V-関手として各点左 Kan 拡張 $\langle F^\dagger E, \eta\rangle$ が存在するとする．

$$\begin{tikzcd} \mathcal{D} \arrow[drr, "F^\dagger E"] & & \\ \mathcal{C} \arrow[u, "F"] \arrow[rr, "E"'] \arrow[r, phantom, "\eta\Uparrow"] & & \mathcal{M} \end{tikzcd}$$

例 158 より，任意の $d\in\mathcal{D}$ に対して $\operatorname{colim}^{\mathcal{D}(F-,d)}E \cong F^\dagger E(d)$ であるから，その unit を $\mu^d\colon \mathcal{D}(F-,d)\Rightarrow \mathcal{M}(E-, F^\dagger E(d))$ とする．このとき $c\in\mathcal{C}$ に対して

$$\eta_c = \left(I \xrightarrow{j} \mathcal{D}(Fc,Fc) \xrightarrow{\mu_c^{Fc}} \mathcal{M}(Ec, F^\dagger E(Fc))\right)$$
$$\mu_c^d = \left(\mathcal{D}(Fc,d) \xrightarrow{F^\dagger E} \mathcal{M}(F^\dagger E(Fc), F^\dagger E(d)) \xrightarrow{-\circ\eta_c} \mathcal{M}(Ec, F^\dagger E(d))\right)$$

である．

証明. まず (141) より η_c は

$$\begin{aligned} &I \xrightarrow{j_{F^\dagger E(Fc)}} \mathcal{M}(F^\dagger E(Fc), F^\dagger E(Fc)) \xrightarrow{(\widetilde{\mu^{Fc}})_{F^\dagger E(Fc)}} \widehat{\mathcal{C}}(\mathcal{D}(F-,Fc), \mathcal{M}(E-, F^\dagger E(Fc))) \\ &\xrightarrow{\mathrm{ev}_c} [\mathcal{D}(Fc,Fc), \mathcal{M}(Ec, F^\dagger E(Fc))] \xrightarrow{[j_{Fc},\mathrm{id}]} [I, \mathcal{M}(Ec, F^\dagger E(Fc))] \\ &\xrightarrow{i^{-1}} \mathcal{M}(Ec, F^\dagger E(Fc)) \end{aligned}$$

で与えられる．故に $\eta_c = \left(I \xrightarrow{j} \mathcal{D}(Fc,Fc) \xrightarrow{\mu_c^{Fc}} \mathcal{M}(Ec, F^\dagger E(Fc))\right)$ である．そこで次の

図式を考える．

$$
\begin{tikzcd}
 & & \mathcal{D}(Fc,d) \arrow[ddddd, bend left, "\mu_c^d"] \\
\mathcal{D}(Fc,d) \arrow[urr, bend left, "\mathrm{id}"] \arrow[r, "\mathcal{D}(Fc,-)"] \arrow[d, "F^\dagger E"'] \arrow[dr, phantom, "(\mu_c^d)"] & {[\mathcal{D}(Fc,Fc),\mathcal{D}(Fc,d)]} \arrow[u, phantom, "(51)"] \arrow[r, "{[j_{Fc},\mathrm{id}]}"] \arrow[dd, "{[\mathrm{id},\mu_c^d]}"] \arrow[dr, phantom, "({[-,\square]})"] & {[I,\mathcal{D}(Fc,d)]} \arrow[u, "i^{-1}"'] \arrow[ddd, "{[\mathrm{id},\mu_c^d]}"] \\
\mathcal{M}(F^\dagger E(Fc),F^\dagger E(d)) \arrow[dd, "\mathcal{M}(Ec,-)"] \arrow[dddrr, bend right, "-\circ\eta_c"'] & & \\
 & {[\mathcal{D}(Fc,Fc),\mathcal{M}(Ec,F^\dagger E(d))]} \arrow[dr, "{[j_{Fc},\mathrm{id}]}"] \arrow[d, phantom, "(*)"] & \\
{[\mathcal{M}(Ec,F^\dagger E(Fc)),\mathcal{M}(Ec,F^\dagger E(d))]} \arrow[ur, "{[\mu_c^{Fc},\mathrm{id}]}"'] \arrow[rr, "{[\eta_c,\mathrm{id}]}"'] \arrow[d, phantom, "(51)"] & & {[I,\mathcal{M}(Ec,F^\dagger E(d))]} \arrow[uu, phantom, "(i)"'] \arrow[d, "i^{-1}"] \\
 & & \mathcal{M}(Ec,F^\dagger E(d))
\end{tikzcd}
$$

(μ_c^d) は μ_c^d が d について自然だから可換である．$([-,\square])$ は $[-,\square]$ が関手だから可換である．(i) は i の自然性により可換である．(51) は命題 51 より可換である．$(*)$ は上で述べたことにより可換である．以上によりこの図式は可換であり，従って μ_c^d が

$$\mathcal{D}(Fc,d) \xrightarrow{F^\dagger E} \mathcal{M}(F^\dagger E(Fc), F^\dagger E(d)) \xrightarrow{-\circ\eta_c} \mathcal{M}(Ec, F^\dagger E(d))$$

と一致することが分かる． $\square$

定理 189. $\mathcal{C}$ を小 V-豊穣圏，$\mathcal{D},\mathcal{M},\mathcal{N}$ を V-豊穣圏とする．$F\colon \mathcal{C}\to\mathcal{D}$，$E\colon \mathcal{C}\to\mathcal{M}$，$K\colon \mathcal{M}\to\mathcal{N}$ を V-関手として各点左 Kan 拡張 $F^\dagger E$ が存在するとする．K が余連続ならば K は左 Kan 拡張 $F^\dagger E$ と交換する．

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{D} \arrow[dr, "F^\dagger E"'] \arrow[drr, "F^\dagger(KE)"] & & \\
\mathcal{C} \arrow[u, "F"] \arrow[ur, phantom, "\Uparrow"] \arrow[r, "E"'] & \mathcal{M} \arrow[r, "K"'] & \mathcal{N}
\end{tikzcd}
$$

証明．$F^\dagger E$ を各点左 Kan 拡張とすると，例 158 より $F^\dagger E(d) \cong \mathrm{colim}^{\mathcal{D}(F-,d)} E$ である．$F^\dagger E$ の unit を η として，また $F^\dagger E(d)$ の (余極限としての) unit を μ^d とする．定理 188 より $\eta_c = \left(I \xrightarrow{j_{Fc}} \mathcal{D}(Fc,Fc) \xrightarrow{\mu_c^{Fc}} \mathcal{M}(Ec, F^\dagger E(Fc))\right)$ となる．

次に K が余連続だから K は余極限 $F^\dagger E(d)$ と交換する．従って cylinder $K * \mu^d$ が余極限を与える．定義より，これは

$$\mathcal{D}(Fc,d) \xrightarrow{\mu_c^d} \mathcal{M}(Ec, F^\dagger E(d)) \xrightarrow{K} \mathcal{N}(KEc, K(F^\dagger E(d)))$$

で与えられる cylinder である．よって $Td := K(F^\dagger E(d)) \cong \operatorname{colim}^{\mathcal{D}(F-,d)} KE$ と定義すれば，例 165 より T は F に沿った KE の各点左 Kan 拡張である．この T の unit を ξ とすると，再び定理 188 により ξ_c は

$$I \xrightarrow{j_{Fc}} \mathcal{D}(Fc,Fc) \xrightarrow{\mu_c^{Fc}} \mathcal{M}(Ec, F^\dagger E(Fc)) \xrightarrow{K} \mathcal{N}(KEc, K(F^\dagger E(Fc)))$$

だから $\xi_c = K(\eta_c)$ である．故に $\xi = K \bullet \eta$ となり，K は $\langle F^\dagger E, \eta\rangle$ と交換する． □

7.3 conical colimit

$\mathcal{C}$ を V-豊穣圏，J を圏，$S\colon J \to U\mathcal{C}$ を関手として (通常の圏の) 余極限 $\operatorname{colim} S$ を考える．即ち $a \in U\mathcal{C}$ について自然に $\operatorname{Hom}_{U\mathcal{C}}(\operatorname{colim} S, a) \cong \operatorname{Hom}_{U\mathcal{C}^J}(S, \Delta a)$ となるような対象 $\operatorname{colim} S \in U\mathcal{C}$ のことである．ところで，U は左随伴 $\mathfrak{F}\colon \mathbf{CAT} \to V\text{-}\mathbf{CAT}$ を持っていた (例 157)．そこで S の随伴射を $\widetilde{S}\colon \mathfrak{F}J \to \mathcal{C}$ として，また $\Delta I\colon J^{\mathrm{op}} \to U(\mathcal{V})$ の随伴射を $\widetilde{\Delta I}\colon \mathfrak{F}J^{\mathrm{op}} \to \mathcal{V}$ とすれば余極限 $\operatorname{colim}^{\widetilde{\Delta I}} \widetilde{S} \in \mathcal{C}$ を考えることができる．この形の余極限を conical colimit と呼ぶ．(conical limit も同様に定義する．)

命題 190. $\operatorname{colim}^{\widetilde{\Delta I}} \widetilde{S}$ が存在するとき $\operatorname{colim} S \in U(\mathcal{C})$ も存在して $\operatorname{colim} S \cong \operatorname{colim}^{\widetilde{\Delta I}} \widetilde{S}$ である．

証明. $x \in \mathcal{V}$ とする．V-関手 $[x, \mathcal{C}(\widetilde{S}-, a)]$ は合成

$$\mathfrak{F}J \xrightarrow{\widetilde{S}} \mathcal{C} \xrightarrow{\mathcal{C}(-,a)} \mathcal{V} \xrightarrow{[x,-]} \mathcal{V}$$

で与えられるから，これの ($\mathfrak{F} \dashv U$ についての) 随伴射は (例 64 も使うと)

$$J \xrightarrow{S} U\mathcal{C} \xrightarrow{U(\mathcal{C}(-,a))} V \xrightarrow{[x,-]} V$$

である．$\mathcal{C}_0(-,a) := U(\mathcal{C}(-,a))$ と書くと，圏同型 $V\text{-}\mathbf{CAT}(\mathfrak{F}J, \mathcal{C}) \cong \mathbf{CAT}(J, U\mathcal{C})$ により全単射

$$\operatorname{Hom}_{V\text{-}\mathbf{CAT}(\mathfrak{F}J,\mathcal{C})}(\widetilde{\Delta I}, [x, \mathcal{C}(\widetilde{S}-, a)]) \cong \operatorname{Hom}_{\mathbf{CAT}(J,U\mathcal{C})}(\Delta I, [x, \mathcal{C}_0(S-, a)]) \tag{191}$$

が得られる．そこで $\theta_j\colon x \to [\widetilde{\Delta I}(j), \mathcal{C}(\widetilde{S}(j), a)]$ を V の射とすると

$$
\begin{aligned}
&\theta_j \text{ が } j \in \mathfrak{F}J^{\mathrm{op}} \text{について自然} \\
&\iff \text{対応する射 } x \otimes \widetilde{\Delta I}(j) \to \mathcal{C}(\widetilde{S}(j), a) \text{ が } j \in \mathfrak{F}J^{\mathrm{op}} \text{について自然 (補題 76)} \\
&\iff \text{対応する射 } \widetilde{\Delta I}(j) \to [x, \mathcal{C}(\widetilde{S}(j), a)] \text{ が } j \in \mathfrak{F}J^{\mathrm{op}} \text{について自然 (補題 80)} \\
&\iff \text{対応する射 } I = \Delta I(j) \to [x, \mathcal{C}_0(S(j), a)] \text{ が } j \in J^{\mathrm{op}} \text{について自然 (対応 191)} \\
&\iff \text{対応する射 } x \cong I \otimes x \to \mathcal{C}_0(S(j), a) \text{ が } j \in J^{\mathrm{op}} \text{について自然}
\end{aligned} \tag{192}
$$

である．従ってこの対応で

$$\mathrm{ev}_j\colon \widehat{\mathfrak{F}J}(\widetilde{\Delta I}-, \mathcal{C}(\widetilde{S}-, a)) \to [\widetilde{\Delta I}(j), \mathcal{C}(\widetilde{S}(j), a)]$$

に対応する射を $\pi_j\colon \widehat{\mathfrak{F}J}(\widetilde{\Delta I}-, \mathcal{C}(\widetilde{S}-, a)) \to \mathcal{C}_0(S(j), a)$ とすると $\langle \widehat{\mathfrak{F}J}(\widetilde{\Delta I}-, \mathcal{C}(\widetilde{S}-, a)), \pi \rangle$ が極限 $\lim \mathcal{C}_0(S-, a)$ を与えることが分かる．

ここで $\mathrm{colim}^{\widetilde{\Delta I}} \widetilde{S}$ が存在するとすると

$$\mathcal{C}(\mathrm{colim}^{\widetilde{\Delta I}} \widetilde{S}, a) \cong \widehat{\mathfrak{F}J}(\widetilde{\Delta I}-, \mathcal{C}(\widetilde{S}-, a)) \cong \lim \mathcal{C}_0(S-, a)$$

である．この同型に $\mathrm{Hom}_V(I, -)$ を適用すると，$a \in U\mathcal{C}$ について自然に

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_V(I, \text{左辺}) &= \mathrm{Hom}_{U\mathcal{C}}(\mathrm{colim}^{\widetilde{\Delta I}} \widetilde{S}, a) \\
\mathrm{Hom}_V(I, \text{右辺}) &= \mathrm{Hom}_V(I, \lim \mathcal{C}_0(S-, a)) \\
&\cong \lim \mathrm{Hom}_V(I, \mathcal{C}_0(S-, a)) \\
&\cong \lim \mathrm{Hom}_{U\mathcal{C}}(S-, a) \qquad \text{(例 64)}
\end{aligned}
$$

となるから $\mathrm{colim}\, S$ も存在して $\mathrm{colim}\, S \cong \mathrm{colim}^{\widetilde{\Delta I}} \widetilde{S}$ である． □

系 193. V-豊穣圏 $\mathcal{C}$ が V-余完備ならば $U\mathcal{C}$ は余完備である． □

逆に，一般には $\mathrm{colim}\, S$ が存在するからと言って $\mathrm{colim}^{\widetilde{\Delta I}} \widetilde{S}$ が存在するとは限らない．

命題 194. $\mathcal{C}$ が power を持つとする．このとき $\mathrm{colim}\, S$ が存在すれば $\mathrm{colim}^{\widetilde{\Delta I}} \widetilde{S}$ も存在して $\mathrm{colim}^{\widetilde{\Delta I}} \widetilde{S} \cong \mathrm{colim}\, S$ である．

証明. $\mathrm{colim}\, S$ が存在するとすれば，任意の $a \in \mathcal{C}$，$x \in \mathcal{V}$ に対して

$$\mathrm{Hom}_{U\mathcal{C}}(\mathrm{colim}\, S, x \pitchfork a) \cong \lim \mathrm{Hom}_{U\mathcal{C}}(S-, x \pitchfork a)$$

が成り立つ．従って power の定義より

$$\mathrm{Hom}_V(x, \mathcal{C}(\mathrm{colim}\, S, a)) \cong \lim \mathrm{Hom}_V(x, \mathcal{C}_0(S-, a))$$

となる．即ち，$\lim \mathcal{C}_0(S-,a)$ が存在して $\lim \mathcal{C}_0(S-,a) \cong \mathcal{C}(\operatorname{colim} S, a)$ である．故に命題 190 の証明での議論により

$$\widehat{\mathfrak{F}J}(\widetilde{\Delta I}-, \mathcal{C}(\widetilde{S}-,a)) \cong \lim \mathcal{C}_0(S-,a) \cong \mathcal{C}(\operatorname{colim} S, a)$$

が分かる．故に $\operatorname{colim}^{\widetilde{\Delta I}} \widetilde{S} \cong \operatorname{colim} S$ である． □

命題 195. $\operatorname{colim} S$ が存在して，任意の $a \in \mathcal{C}$ に対して $\mathcal{C}_0(-,a)\colon U\mathcal{C} \to V^{\mathrm{op}}$ が $\operatorname{colim} S$ と交換するとする．このとき $\operatorname{colim}^{\widetilde{\Delta I}} \widetilde{S}$ も存在して $\operatorname{colim}^{\widetilde{\Delta I}} \widetilde{S} \cong \operatorname{colim} S$ である．

証明. 仮定より，任意の $a \in \mathcal{C}$ に対して $\mathcal{C}_0(\operatorname{colim} S, a) \cong \lim \mathcal{C}_0(S-,a)$ である．従って

$$\mathcal{C}(\operatorname{colim} S, a) \cong \lim \mathcal{C}_0(S-,a) \cong \widehat{\mathfrak{F}J}(\widetilde{\Delta I}-, \mathcal{C}(\widetilde{S}-,a))$$

となるから $\operatorname{colim}^{\widetilde{\Delta I}} \widetilde{S} \cong \operatorname{colim} S$ である． □

定理 196. V-豊穣圏 $\mathcal{C}$ が V-余完備 $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{C}$ が copower と小 conical colimit を持つ．

証明. ($\Longrightarrow$) 明らか．

($\Longleftarrow$) $\mathcal{J}$ を小 V-豊穣圏として $T\colon \mathcal{J} \to \mathcal{C}$ と $W\colon \mathcal{J}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{V}$ を V-関手とする．$\mathcal{C}$ が copower を持つから，関手 $S\colon \mathrm{Ob}(\mathcal{J}) \to U\mathcal{C}$ を $Sj := Wj \odot Tj$ により定義できる．今 $\mathcal{C}$ が小 conical colimit を持つから $\operatorname{colim}^{\widetilde{\Delta I}} \widetilde{S}$ が存在する．この小 conical colimit を $\coprod_{j \in \mathrm{Ob}(\mathcal{J})} Wj \odot Tj$ で表す．同様にして小 conical colimit $\coprod_{i,j \in \mathrm{Ob}(\mathcal{J})} \mathcal{J}(i,j) \odot (Wi \odot Tj)$ も存在する．第 4.1 節と同様にして $\mathcal{C}$ の射

$$\tau, \xi\colon \coprod_{i,j \in \mathrm{Ob}(\mathcal{J})} \mathcal{J}(i,j) \odot (Wi \odot Tj) \to \coprod_{j \in \mathrm{Ob}(\mathcal{J})} Wj \odot Tj$$

を得る．$\mathcal{C}$ が小 conical colimit を持つから，$U\mathcal{C}$ において τ, ξ の coequalizer

$$\coprod_{i,j \in \mathrm{Ob}(\mathcal{J})} \mathcal{J}(i,j) \odot (Wi \odot Tj) \overset{\tau}{\underset{\xi}{\rightrightarrows}} \coprod_{j \in \mathrm{Ob}(\mathcal{J})} Wj \odot Tj \xrightarrow{\ f\ } c$$

が存在する．これに $\mathcal{C}(-,a)$ を適用して得られる V の図式

$$\mathcal{C}(c,a) \longrightarrow \prod_{j \in \mathrm{Ob}(\mathcal{J})} \mathcal{C}(Wj \odot Tj, a) \rightrightarrows \prod_{i,j \in \mathrm{Ob}(\mathcal{J})} [\mathcal{J}(i,j), \mathcal{C}(Wj \odot Tj, a)]$$

は equalizer である．これを第 4.1 節と比較すれば $\mathcal{C}(c,a) \cong \displaystyle\int_{j\in\mathcal{J}^{\mathrm{op}}} \mathcal{C}(Wj \odot Tj, a)$ が分かる．(故に一般のコエンドの定義より $c \cong \displaystyle\int^{j\in\mathcal{J}^{\mathrm{op}}} Wj \odot Tj$ である．) このとき

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}(c,a) &\cong \int_{j\in\mathcal{J}^{\mathrm{op}}} \mathcal{C}(Wj \odot Tj, a) \\
&\cong \int_{j\in\mathcal{J}^{\mathrm{op}}} [Wj, \mathcal{C}(Tj,a)] \\
&\cong \widehat{\mathcal{J}}(W-, \mathcal{C}(T-,a))
\end{aligned}$$

となるから $c \cong \mathrm{colim}^W T$ である． □

例 197. $\mathcal{V}$ は power と copower を持つ (例 125)．また圏 V は余完備である．故に命題 194 より $\mathcal{V}$ は任意の小 conical colimit を持つ．従って定理 196 より $\mathcal{V}$ は V-余完備である．よって系 184 より，$\mathcal{C}$ が小 V-豊穣圏ならば $\widehat{\mathcal{C}}$ も V-余完備である．また例 161 より $\mathcal{V}$ は V-完備である．故に系 184 (の双対) より，$\mathcal{C}$ が小 V-豊穣圏ならば $\widehat{\mathcal{C}}$ も V-完備である． □

命題 198. $\mathrm{colim}^{\widetilde{\Delta I}} \widetilde{S}$ が存在するとして，更に $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ が $\mathrm{colim}^{\widetilde{\Delta I}} \widetilde{S}$ と交換するとする．命題 190 より $\mathrm{colim}\, S$ が存在するが，このとき関手 $U(F)\colon U\mathcal{C} \to U\mathcal{D}$ は $\mathrm{colim}\, S$ と交換する．

証明. $c := \mathrm{colim}^{\widetilde{\Delta I}} \widetilde{S}$ が存在するとして，その unit を $\mu\colon \widetilde{\Delta I} \Rightarrow \mathcal{C}(\widetilde{S}-, c)$ とする．命題 190 より c は S の余極限になるからその余極限余錐を η とすると，命題 190 の証明より

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{U\mathcal{C}}(c,a) \arrow[r, "\mathrm{Hom}_V(I,\widetilde{\mu}_a)"] \arrow[dr, "-\circ\eta_j"'] & \mathrm{Hom}_{U(\widehat{\mathfrak{F}J})}(\widetilde{\Delta I}-, \mathcal{C}(\widetilde{S}-,a)) \arrow[d, "\mathrm{Hom}_V(I,\pi_j)"] \\
& \mathrm{Hom}_{U\mathcal{C}}(Sj,a)
\end{tikzcd}$$

が可換と分かる．故に $\mathrm{id}_c \in \mathrm{Hom}_{U\mathcal{C}}(c,c)$ の行き先を考えれば $\pi_j \circ \mu = \eta_j$ である．

$$\begin{tikzcd}
I \arrow[r, "\mu"] \arrow[dr, "\eta_j"'] & \widehat{\mathfrak{F}J}(\widetilde{\Delta I}-, \mathcal{C}(\widetilde{S}-,c)) \arrow[d, "\pi_j"] \\
& \mathcal{C}(Sj,c)
\end{tikzcd} \tag{199}$$

次に $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ が $\mathrm{colim}^{\widetilde{\Delta I}} \widetilde{S}$ と交換するから $\mathrm{colim}^{\widetilde{\Delta I}} F\widetilde{S}$ が存在し，unit は $F * \mu$ である．$\mathfrak{F}J \xrightarrow{\widetilde{S}} \mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{D}$ の随伴射は $J \xrightarrow{S} U\mathcal{C} \xrightarrow{UF} U\mathcal{D}$ なので命題 190 より $\mathrm{colim}(UF \circ S)$

も存在する．その余極限余錐を η' とする．命題 190 の証明と同様にして

$$\pi'_j\colon \widehat{\mathfrak{F}J}(\widetilde{\Delta I}-, \mathcal{C}(F\widetilde{S}-, a)) \to \mathcal{C}_0(UF \circ S(j), a)$$

を定めると (199) と同様にして次の可換図式を得る．

$$\begin{tikzcd}
I \arrow[r, "F*\mu"] \arrow[dr, "\eta'_j"'] & \widehat{\mathfrak{F}J}(\widetilde{\Delta I}-, \mathcal{D}(F\widetilde{S}-, Fc)) \arrow[d, "\pi'_j"] \\
& \mathcal{C}(UF \circ S(j), Fc)
\end{tikzcd} \tag{200}$$

これらを組み合わせて次の図式を得る．

$$\begin{tikzcd}
I \arrow[r, "\mu"] \arrow[dr, "\eta_j"'] \arrow[rr, bend left=40, "F*\mu"] \arrow[rr, phantom, bend left=20, "(F*\mu)"] \arrow[dr, phantom, near end, "(199)"] \arrow[drr, bend right=60, "\eta'_j"'] \arrow[drr, phantom, bend right=35, "(*)"] & \widehat{\mathfrak{F}J}(\widetilde{\Delta I}-, \mathcal{C}(\widetilde{S}-, c)) \arrow[r, "(F_{\widetilde{S}-,c})\circ-"] \arrow[d, "\pi_j"] \arrow[dr, phantom, "(**)"] & \widehat{\mathfrak{F}J}(\widetilde{\Delta I}-, \mathcal{D}(F\widetilde{S}-, Fc)) \arrow[d, "\pi'_j"] \\
& \mathcal{C}_0(Sj, c) \arrow[r, "F_{Sj,c}"'] & \mathcal{D}_0(FSj, Fc)
\end{tikzcd}$$

$U(F)$ が余連続であることを示すには，$(*)$ が可換であることを示せばよい．$(F*\mu)$ は $F*\mu$ の定義から可換である．(199) は既に示した通り可換である．またこの図式の一番外側は (200) により可換である．従って $(**)$ が可換であることを示せばよい．そのために π_j を定義するときに使った対応 (192) を考えると (但し $u := \widehat{\mathfrak{F}J}(\widetilde{\Delta I}-, \mathcal{C}(\widetilde{S}-, c))$, $v := \widehat{\mathfrak{F}J}(\widetilde{\Delta I}-, \mathcal{D}(F\widetilde{S}-, Fc))$ と書いた)

$$\begin{tikzcd}
\widehat{\mathfrak{F}J}(\widetilde{\Delta I}-, \mathcal{C}(\widetilde{S}-, c)) \arrow[r, "(F_{\widetilde{S}-,c})\circ-"] \arrow[d, "\pi_j"'] \arrow[dr, phantom, "(**)"] & \widehat{\mathfrak{F}J}(\widetilde{\Delta I}-, \mathcal{D}(F\widetilde{S}-, Fc)) \arrow[d, "\pi'_j"] \\
\mathcal{C}_0(Sj, c) \arrow[r, "F_{Sj,c}"'] & \mathcal{D}_0(UF \circ S(j), Fc)
\end{tikzcd} \quad \text{が可換}$$

$$\iff \quad \begin{tikzcd}
\Delta I(j) \arrow[rr, "\mathrm{id}"] \arrow[d] & & \Delta I(j) \arrow[d] \\
{[u, \mathcal{C}_0(Sj, c)]} \arrow[r, "{[\mathrm{id}, F_{Sj,c}]}"'] & {[u, \mathcal{D}_0(UF \circ S(j), Fc)]} & {[v, \mathcal{D}_0(UF \circ S(j), Fc)]} \arrow[l, "{[(F_{\widetilde{S}-,c})\circ-, \mathrm{id}]}"]
\end{tikzcd} \quad \text{が可換}$$

$$\iff \quad \begin{tikzcd}[column sep=small] \widetilde{\Delta I}(j) \arrow[rr, "\mathrm{id}"] \arrow[d] & & \widetilde{\Delta I}(j) \arrow[d] \\ {[u, \mathcal{C}(\widetilde{S}j, c)]} \arrow[r, "{[\mathrm{id}, F_{\widetilde{S}j,c}]}"'] & {[u\mathcal{D}(F\widetilde{S}j, Fc)]} & {[v, \mathcal{D}(F\widetilde{S}j, Fc)]} \arrow[l, "{[(F_{\widetilde{S}-,c})\circ -, \mathrm{id}]}"] \end{tikzcd} \quad \text{が可換}$$

※ $[\mathrm{id}, F_{S-,c}]$ は次の合成で得られる自然変換である．

$$\begin{tikzcd} J^{\mathrm{op}} \arrow[r, "S"] & U\mathcal{C}^{\mathrm{op}} \arrow[rr, "{\mathcal{C}_0(-,c)}"] \arrow[dr, "UF"'] & \arrow[d, phantom, "\Downarrow F_{-c}"] & V \arrow[r, "{[u,-]}"] & V \\ & & U\mathcal{D}^{\mathrm{op}} \arrow[ur, "{\mathcal{D}_0(-,Fc)}"'] & & \end{tikzcd}$$

故にこれに対応する V-自然変換は $[\mathrm{id}, F_{\widetilde{S}-,c}]$ となる．

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{F}J^{\mathrm{op}} \arrow[r, "\widetilde{S}"] & \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \arrow[rr, "{\mathcal{C}(-,c)}"] \arrow[dr, "F"'] & \arrow[d, phantom, "\Downarrow F_{-c}"] & \mathcal{V} \arrow[r, "{[u,-]}"] & \mathcal{V} \\ & & \mathcal{D}^{\mathrm{op}} \arrow[ur, "{\mathcal{D}(-,Fc)}"'] & & \end{tikzcd}$$

$$\iff \quad \begin{tikzcd} u \otimes \widetilde{\Delta I}(j) \arrow[r, "((F_{\widetilde{S}-,c})\circ -)\otimes \mathrm{id}"] \arrow[d] & v \otimes \widetilde{\Delta I}(j) \arrow[d] \\ \mathcal{C}(\widetilde{S}j, c) \arrow[r, "F_{\widetilde{S}j,c}"'] & \mathcal{D}(F\widetilde{S}j, Fc) \end{tikzcd} \quad \text{が可換}$$

$$\iff \quad \begin{tikzcd} \widehat{\mathfrak{F}J}(\widetilde{\Delta I}-, \mathcal{C}(\widetilde{S}-, c)) \arrow[r, "(F_{\widetilde{S}-,c})\circ -"] \arrow[d, "\mathrm{ev}_j"] \arrow[dr, phantom, "(\star)"] & \widehat{\mathfrak{F}J}(\widetilde{\Delta I}-, \mathcal{D}(F\widetilde{S}-, Fc)) \arrow[d, "\mathrm{ev}_j"] \\ {[\widetilde{\Delta I}(j), \mathcal{C}(\widetilde{S}j, c)]} \arrow[r, "{[\mathrm{id}, F_{\widetilde{S}j,c}]}"'] & {[\widetilde{\Delta I}(j), \mathcal{D}(F\widetilde{S}j, Fc)]} \end{tikzcd} \quad \text{が可換}$$

となるから $(\star)$ が可換であることを示せばよいが，これは命題 135 から分かる． □

命題 201. $S\colon J \to U\mathcal{C}$，$F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ として $\mathrm{colim}^{\widetilde{\Delta I}}\widetilde{S}$，$\mathrm{colim}^{\widetilde{\Delta I}}F\widetilde{S}$ が存在するとする．更に $UF\colon U\mathcal{C} \to U\mathcal{D}$ が $\mathrm{colim}\, S$ と交換するとする．このとき F は $\mathrm{colim}^{\widetilde{\Delta I}}\widetilde{S}$ と交換する．

証明. $\mathrm{colim}^{\widetilde{\Delta I}}\widetilde{S}$，$\mathrm{colim}^{\widetilde{\Delta I}}F\widetilde{S}$ が存在するから命題 190 より $\mathrm{colim}\, S$ と $\mathrm{colim}(UF \circ S)$ も存在する．$\mathrm{colim}^{\widetilde{\Delta I}}\widetilde{S}$，$\mathrm{colim}^{\widetilde{\Delta I}}F\widetilde{S}$ の unit を μ, μ' として，$\mathrm{colim}\, S$ と $\mathrm{colim}(UF \circ S)$ の

余極限余錐を η, η' とする．命題 198 と同様にして次の図式を得る．

$$
\begin{tikzcd}
I \arrow[r, "\mu"] \arrow[dr, "\eta_j"'] \arrow[rr, bend left=40, "\mu'"] \arrow[drr, bend right=50, "\eta'_j"'] & \widehat{\mathfrak{F}J}(\widetilde{\Delta I}-, \mathcal{C}(\widetilde{S}-, c)) \arrow[r, "(F_{\widetilde{S}-,c})\circ-"] \arrow[d, "\pi_j"] \arrow[r, phantom, bend left=60, "(F*\mu)"] & \widehat{\mathfrak{F}J}(\widetilde{\Delta I}-, \mathcal{D}(F\widetilde{S}-, Fc)) \arrow[d, "\pi'_j"] \\
& \mathcal{C}_0(Sj, c) \arrow[r, "F_{Sj,c}"'] \arrow[ur, phantom, "(**)"] \arrow[ul, phantom, "(199)"] \arrow[l, phantom, "(*)"] & \mathcal{D}_0(FSj, Fc)
\end{tikzcd}
$$

(199) と (∗∗) は命題 198 で証明した通り可換である．(∗) は UF が $\operatorname{colim} S$ と交換するから可換である．一番外側は (199) と同様にして可換である．以上の可換性が任意の $j \in \mathcal{J}$ について成り立つから，$(F * \mu)$ も可換である．即ち $F * \mu = \mu'$ であり F は $\operatorname{colim}^{\widetilde{\Delta I}} \widetilde{S}$ と交換する． □

命題 202. J を圏として，任意の $S \colon J \to U\mathcal{C}$ に対して conical colimit $\operatorname{colim}^{\widetilde{\Delta I}} \widetilde{S}$ が存在するとする．命題 162 により V-関手 $\operatorname{colim}^{\widetilde{\Delta I}} \colon [\mathfrak{F}J, \mathcal{C}] \to \mathcal{C}$ が得られる．これの underlying functor は $U([\mathfrak{F}J, \mathcal{C}]) \cong (U\mathcal{C})^J \xrightarrow{\operatorname{colim}} U\mathcal{C}$ である．

証明. まず $\mathfrak{F} \dashv U$ により

$$U([\mathfrak{F}J, \mathcal{C}]) \cong V\text{-}\mathbf{CAT}(\mathfrak{F}J, \mathcal{C}) \cong \mathbf{CAT}(J, U\mathcal{C})$$

である．次に $\widetilde{S}, \widetilde{T} \in [\mathfrak{F}J, \mathcal{C}]$ に対して

$$
\begin{aligned}
K(\widetilde{S}, \widetilde{T}) &:= \widehat{\mathcal{J}}(\widetilde{\Delta I}-, \mathcal{C}(\widetilde{S}-, \operatorname{colim}^{\widetilde{\Delta I}} \widetilde{T})) \\
\eta_{\widetilde{S}} &:= \left(I \xrightarrow{j} \mathcal{C}(\operatorname{colim}^{\widetilde{\Delta I}} \widetilde{S}, \operatorname{colim}^{\widetilde{\Delta I}} \widetilde{S}) \cong \widehat{\mathcal{J}}(\widetilde{\Delta I}-, \mathcal{C}(\widetilde{S}-, \operatorname{colim}^{\widetilde{\Delta I}} \widetilde{S}))\right)
\end{aligned}
$$

と定めると，定理 114 の証明により V-関手 $\operatorname{colim}^{\widetilde{\Delta I}}$ は

$$
\begin{aligned}
[\mathfrak{F}J, \mathcal{C}](\widetilde{S}, \widetilde{T}) &\xrightarrow{K(-, \widetilde{T})_{\widetilde{S}\widetilde{T}}} [\widehat{\mathcal{J}}(\widetilde{\Delta I}-, \mathcal{C}(\widetilde{T}-, \operatorname{colim}^{\widetilde{\Delta I}} \widetilde{T})), \widehat{\mathcal{J}}(\widetilde{\Delta I}-, \mathcal{C}(\widetilde{S}-, \operatorname{colim}^{\widetilde{\Delta I}} \widetilde{T}))] \\
&\xrightarrow{[\eta_{\widetilde{T}}, \mathrm{id}]} [I, \widehat{\mathcal{J}}(\widetilde{\Delta I}-, \mathcal{C}(\widetilde{S}-, \operatorname{colim}^{\widetilde{\Delta I}} \widetilde{T}))] \\
&\xrightarrow{i^{-1}} \widehat{\mathcal{J}}(\widetilde{\Delta I}-, \mathcal{C}(\widetilde{S}-, \operatorname{colim}^{\widetilde{\Delta I}} \widetilde{T})) \\
&\cong \mathcal{C}(\operatorname{colim}^{\widetilde{\Delta I}} \widetilde{S}, \operatorname{colim}^{\widetilde{\Delta I}} \widetilde{T})
\end{aligned}
$$

で与えられる．従って $\theta\colon \widetilde{S} \Rightarrow \widetilde{T}$ に対して $\operatorname{colim}^{\widetilde{\Delta I}}\theta$ は，次の図式を可換にするような射である．

$$
\begin{tikzcd}
I \arrow[r, "j"] \arrow[dr, "\operatorname{colim}^{\widetilde{\Delta I}}\theta"'] & \mathcal{C}(\operatorname{colim}^{\widetilde{\Delta I}}\widetilde{T}, \operatorname{colim}^{\widetilde{\Delta I}}\widetilde{T}) \arrow[r, "\sim"] & \widehat{\mathcal{J}}(\widetilde{\Delta I}-, \mathcal{C}(\widetilde{T}-, \operatorname{colim}^{\widetilde{\Delta I}}\widetilde{T})) \arrow[d, "\mathcal{C}(\theta, \operatorname{colim}^{\widetilde{\Delta I}}\widetilde{T})\circ-"'] \\
& \mathcal{C}(\operatorname{colim}^{\widetilde{\Delta I}}\widetilde{S}, \operatorname{colim}^{\widetilde{\Delta I}}\widetilde{T}) \arrow[r, "\sim"] & \widehat{\mathcal{J}}(\widetilde{\Delta I}-, \mathcal{C}(\widetilde{S}-, \operatorname{colim}^{\widetilde{\Delta I}}\widetilde{T}))
\end{tikzcd}
\tag{203}
$$

次に $\operatorname{colim} S$，$\operatorname{colim} T$ の余極限余錐を μ^S, μ^T とする．このとき次の図式を考える．

$$
\begin{tikzcd}
I \arrow[r, "j"] \arrow[dr, "\operatorname{colim}^{\widetilde{\Delta I}}\theta"'] \arrow[ddr, hook, "j"'] \arrow[rrr, bend left, "\mu^T_j"] \arrow[ddrrr, bend right, "\mu^S_j"'] & \mathcal{C}(\operatorname{colim}^{\widetilde{\Delta I}}\widetilde{T}, \operatorname{colim}^{\widetilde{\Delta I}}\widetilde{T}) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, phantom, "(203)"] & \widehat{\mathcal{J}}(\widetilde{\Delta I}-, \mathcal{C}(\widetilde{T}-, \operatorname{colim}^{\widetilde{\Delta I}}\widetilde{T})) \arrow[r, "\pi_j"] \arrow[d, "\mathcal{C}(\theta, \operatorname{colim}^{\widetilde{\Delta I}}\widetilde{T})\circ-"'] \arrow[u, phantom, "(198)"] & \mathcal{C}_0(Tj, \operatorname{colim}^{\widetilde{\Delta I}}\widetilde{T}) \arrow[d, "-\circ\theta_j"'] \arrow[l, phantom, "(*)"'] \\
(44) & \mathcal{C}(\operatorname{colim}^{\widetilde{\Delta I}}\widetilde{S}, \operatorname{colim}^{\widetilde{\Delta I}}\widetilde{T}) \arrow[r, "\sim"] & \widehat{\mathcal{J}}(\widetilde{\Delta I}-, \mathcal{C}(\widetilde{S}-, \operatorname{colim}^{\widetilde{\Delta I}}\widetilde{T})) \arrow[r, "\pi_j"'] & \mathcal{C}_0(Sj, \operatorname{colim}^{\widetilde{\Delta I}}\widetilde{T}) \\
& \mathcal{C}(\operatorname{colim}^{\widetilde{\Delta I}}\widetilde{S}, \operatorname{colim}^{\widetilde{\Delta I}}\widetilde{S}) \arrow[r, "\sim"] \arrow[u, "\operatorname{colim}^{\widetilde{\Delta I}}\theta\circ-"] \arrow[ur, phantom, "(*)"] & \widehat{\mathcal{J}}(\widetilde{\Delta I}-, \mathcal{C}(\widetilde{S}-, \operatorname{colim}^{\widetilde{\Delta I}}\widetilde{S})) \arrow[r, "\pi_j"'] \arrow[u, "\operatorname{colim}^{\widetilde{\Delta I}}\theta\circ-"'] \arrow[ur, phantom, "(*)"] \arrow[d, phantom, "(198)"] & \mathcal{C}_0(Sj, \operatorname{colim}^{\widetilde{\Delta I}}\widetilde{S}) \arrow[u, "\operatorname{colim}^{\widetilde{\Delta I}}\theta\circ-"'] \\
& & &
\end{tikzcd}
$$

(203) は上で示した通り可換である．(44) は命題 44 より可換である．(198) は命題 198 の証明より可換である．$(*)$ は自然性から可換である．従ってこの図式は可換であり，両回りの合成を考えれば

$$
\begin{tikzcd}
Sj \arrow[r, "\mu^S_j"] \arrow[d, "\theta_j"'] & \operatorname{colim}^{\widetilde{\Delta I}}\widetilde{S} \arrow[d, "\operatorname{colim}^{\widetilde{\Delta I}}\theta"] \\
Tj \arrow[r, "\mu^T_j"'] & \operatorname{colim}^{\widetilde{\Delta I}}\widetilde{T}
\end{tikzcd}
$$

が可換となる．従って $\operatorname{colim} S$ の普遍性から $\operatorname{colim}^{\widetilde{\Delta I}}\theta = \operatorname{colim}\theta$ である． $\square$

7.4　有限余極限

定義. $\mathcal{C}$ におけるフィルター余極限とは，J がフィルター圏のときの conical colimit のことをいう．更に J が小さいとき，小フィルター余極限という．

定義. V-関手 $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ が finitary
$\iff \mathcal{C}$ は小フィルター余極限を持ち，F は小フィルター余極限と交換する．

定義. $a \in \mathcal{C}$ がコンパクト (もしくは finitely presentable)
$\iff \mathcal{C}(a,-)\colon \mathcal{C} \to \mathcal{V}$ が finitary.

命題 204. $F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ と $G\colon \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ が finitary のとき GF も finitary である． □

命題 205. $I \in \mathcal{V}$ はコンパクトである．

証明. 命題 91 により V-自然同型 $\mathrm{id}_{\mathcal{V}} \cong [I,-]$ が成り立つ．よって命題 179 から V-関手 $[I,-]\colon \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ は余極限と交換する． □

命題 206. $a \in \mathcal{C}$ と $x \in \mathcal{V}$ がコンパクトのとき $x \odot a \in \mathcal{C}$ もコンパクトである．

証明. $\mathcal{C}(x \odot a,-) \cong [x, \mathcal{C}(a,-)]$ だから命題 204 より明らか． □

定義. V-関手 $W\colon \mathcal{J}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{V}$ が有限とは，以下の条件を満たすことをいう．

(1) $\mathrm{Ob}(\mathcal{J})$ が有限である．
(2) $j \in \mathcal{J}$ に対して $Wj \in \mathcal{V}$ はコンパクトである．
(3) $j, j' \in \mathcal{J}$ に対して $\mathcal{J}(j,j') \in \mathcal{V}$ はコンパクトである．

定義. $\mathcal{C}$ の有限余極限とは，W が有限のときの余極限 $\mathrm{colim}^W T$ のことをいう．

例 207. 例 159 の方法で copower object $x \odot a$ を余極限 $\mathrm{colim}^W T$ とみなす．このとき明らかに

$$W \text{ が有限} \iff x \text{ がコンパクト}$$

である．つまり x がコンパクトであれば $x \odot a$ は有限余極限である．(このような copower object を有限 copower object という)． □

例 208. J を圏，$S\colon J \to U\mathcal{C}$ を関手として conical colimit $\mathrm{colim}^{\widetilde{\Delta I}} \widetilde{S}$ を考える．J が有

限ならば $\widetilde{\Delta I}\colon \mathfrak{F}J^{\mathrm{op}} \to \mathcal{V}$ は有限である.

> ∵) まず $\mathrm{Ob}(\mathfrak{F}J) = \mathrm{Ob}(J)$ は有限である.
> 次に $j \in \mathfrak{F}J$ に対して $\widetilde{\Delta I}(j) = I$ は命題 205 からコンパクトである.
> 最後に $j, j' \in \mathfrak{F}J$ に対して $\mathfrak{F}J(j, j') = \coprod_{i \in J(j,j')} I$ はコンパクトである.

よって $\operatorname{colim}^{\widetilde{\Delta I}} \widetilde{S}$ は有限余極限である.(J が有限のときの conical colimit を有限 conical colimit という). □

定義. $\mathcal{C}$ が有限 V-余完備 $\iff$ 任意の有限余極限が存在する.

例 **209.** $V = \mathbf{Set}$ の場合を考える.この場合

$$x \in \mathbf{Set} \text{ がコンパクト} \iff x \text{ が有限集合}$$

である (故にこの場合の有限極限とは通常の圏の意味での有限極限である).

証明. ($\Longrightarrow$) $x \in \mathbf{Set}$ をコンパクトとする.順序集合 $J := \{a \subset x \mid a \text{ は有限集合}\}$ を圏とみなすと,これはフィルター圏である.$S\colon J \to \mathbf{Set}$ を包含関手とすれば $\operatorname{colim} S \cong x$ となる.よって

$$\mathbf{Set}(x, x) \cong \mathbf{Set}(x, \operatorname{colim} S) \cong \operatorname{colim} \mathbf{Set}(x, S)$$

である.$\mathbf{Set}$ における余極限の構成より

$$\operatorname{colim} \mathbf{Set}(x, S) \cong \Big(\coprod_{a \in J} \mathbf{Set}(x, Sa)\Big)/\sim$$

となるから,$\mathrm{id}_x \in \mathbf{Set}(x, x)$ に対応する元 $f \in \mathbf{Set}(x, Sa)$ が存在する.このとき余極限の構成より

$$\begin{tikzcd} & Sa \arrow[dr, "\subset"] & \\ x \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "\mathrm{id}_x"'] & & x \end{tikzcd}$$

は可換である.故に x は有限集合である.

($\Longleftarrow$) x を有限集合とすると $x \cong \coprod_{i \in x} 1$ と書ける.このとき

$$\mathbf{Set}(x, -) \cong \mathbf{Set}\Big(\coprod_{i \in x} 1, -\Big) \cong \prod_{i \in x} \mathbf{Set}(1, -)$$

である．よって $\operatorname{colim}_j Sj$ を $\mathbf{Set}$ におけるフィルター余極限とすると，$\mathbf{Set}$ においてはフィルター余極限と有限極限は交換するから

$$\mathbf{Set}(x, \operatorname*{colim}_j Sj) \cong \prod_{i \in x} \mathbf{Set}(1, \operatorname*{colim}_j Sj) \cong \operatorname*{colim}_j \prod_{i \in x} \mathbf{Set}(1, Sj) \cong \operatorname*{colim}_j \mathbf{Set}(x, Sj)$$

となり x は finitary である． □

命題 210. $\mathcal{C}$ が有限 conical colimit と有限 copower を持つとき，$\mathcal{C}$ は有限 V-余完備である．

証明. $W\colon \mathcal{J}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{V}$ を有限とする．定理 196 の証明によれば，余極限 $\operatorname{colim}^W T$ は

$$\coprod_{i,j \in \mathrm{Ob}(\mathcal{J})} \mathcal{J}(i,j) \odot (Wi \odot Tj) \overset{\tau}{\underset{\xi}{\rightrightarrows}} \coprod_{j \in \mathrm{Ob}(\mathcal{J})} Wj \odot Tj$$

の coequalizer で与えられる．命題 206 よりこれは有限 conical colimit と有限 copower で書かれているから $\operatorname{colim}^W T$ は存在する． □

命題 211. V-豊穣圏 $\mathcal{C}$ が有限 V-余完備ならば $U\mathcal{C}$ は有限余完備である．

証明. J が有限な圏，$S\colon J \to U\mathcal{C}$ を関手とする．関手 $\widetilde{\Delta I}\colon \mathfrak{F}J^{\mathrm{op}} \to \mathcal{V}$ は有限である．よって $\operatorname{colim}^{\widetilde{\Delta I}} \widetilde{S}$ は存在するから命題 190 から $\operatorname{colim} S$ も存在する． □

命題 212. $\mathcal{C}$ を有限 V-余完備とする．V-関手 $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ が有限余極限と交換するとき関手 $U(F)\colon U(\mathcal{C}) \to U(\mathcal{D})$ も有限余極限と交換する．

証明. 命題 198 の証明から明らか． □

定義. $\mathcal{C}$ を V-豊穣圏とする．

(1) $c \in \mathcal{C}$ が small projective $\iff$ $\mathcal{C}(c,-)\colon \mathcal{C} \to \mathcal{V}$ が余連続である．
(2) V-関手 F が conservative $\iff$ $U(F)$ が conservative である．
(3) V-関手 F が strongly generating $\iff$ $F^\dagger y$ が conservative である．
(4) 集合 $X \subset \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ が strong generator $\iff$ strongly generating な F により $X = F(\mathrm{Ob}(\mathcal{B}))$ と書ける．

補題 213. $W\colon \mathcal{J}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{V}$，$T\colon \mathcal{J} \to \mathcal{C}$，$F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ を V-関手として F は conservative であるとする．余極限 $\operatorname{colim}^W T$ が存在し，更に F と交換するとする．$\theta\colon W \Rightarrow \mathcal{C}(T-, c)$

を cylinder として $F*\theta\colon W \Rightarrow \mathcal{D}(FT-, Fc)$ が余極限 $\mathrm{colim}^W(FT)$ を与えるとする．このとき θ は余極限を与える (従って $c \cong \mathrm{colim}^W T$ である)．

証明. $\mathrm{colim}^W T$ の unit を $\mu\colon W \Rightarrow \mathcal{C}(T-, \mathrm{colim}^W T)$ とする．μ の普遍性から次の h が得られる．

$$\begin{tikzcd} Wj \arrow[r, "\mu_j"] \arrow[dr, "\theta_j"'] & \mathcal{C}(Tj, \mathrm{colim}^W T) \arrow[d, dashed, "h\circ-"] \\ & \mathcal{C}(Tj, c) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathrm{colim}^W T \arrow[d, dashed, "h", "\exists!"'] \\ c \end{tikzcd} \tag{214}$$

次に F が $\mathrm{colim}^W T$ と交換するから，$F*\mu$ の普遍性により次の k が得られる．

$$\begin{tikzcd} Wj \arrow[r, "(F*\mu)_j"] \arrow[dr, "(F*\theta)_j"'] & \mathcal{C}(FTj, F(\mathrm{colim}^W T)) \arrow[d, dashed, "k\circ-"] \\ & \mathcal{C}(FTj, Fc) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} F(\mathrm{colim}^W T) \arrow[d, dashed, "k", "\exists!"'] \\ Fc \end{tikzcd}$$

$F*\theta$ も余極限を与えるからこの k は同型である．一方で次の図式は可換である．

$$\begin{tikzcd} Wj \arrow[r, "\mu_j"] \arrow[dr, bend right, "\theta_j"'] & \mathcal{C}(Tj, \mathrm{colim}^W T) \arrow[r, "F"] \arrow[d, "h\circ-"] \arrow[l, phantom, "(214)" near end, shift right=4] & \mathcal{C}(FTj, F(\mathrm{colim}^W T)) \arrow[d, "Fh\circ-"] \\ & \mathcal{C}(Tj, c) \arrow[r, "F"'] \arrow[ur, phantom, "(77)"] & \mathcal{C}(FTj, Fc) \end{tikzcd}$$

従って $F*\mu$ の普遍性から $k = Fh$ となる．よって F が conservative だから h も同型であり，故に補題 176 より θ も余極限を与える． □

$\mathcal{C}$ を小 V-豊穣圏として $F\colon \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{V}$ を V-関手とする．関手 F_0 を合成

$$U\mathcal{C}^{\mathrm{op}} \xrightarrow{U(F)} V \xrightarrow{\mathrm{Hom}_V(I,-)} \mathbf{Set}$$

で定める．$y\colon \mathcal{C} \to \widehat{\mathcal{C}}$ を $\mathcal{C}$ の米田埋込，$z\colon U\mathcal{C} \to \widehat{U\mathcal{C}}$ を圏 $U\mathcal{C}$ の米田埋込とする．例 197 より $\widehat{\mathcal{C}}$ は V-余完備である．従って系 193 により $U\widehat{\mathcal{C}}$ は余完備である．よって (関手としての) 各点左 Kan 拡張 $z^{\dagger}Uy$ が存在する．このとき

$$z^{\dagger}Uy(F_0) \cong \mathrm{colim}(z\downarrow F_0 \xrightarrow{P_0} U\mathcal{C} \xrightarrow{Uy} U\widehat{\mathcal{C}})$$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{1} \arrow[r, "F_0"] & \widehat{U\mathcal{C}} \arrow[dr, "z^{\dagger}Uy"] & \\ z\downarrow F_0 \arrow[u, "P_1"] \arrow[r, "P_0"'] \arrow[ur, phantom, "\Nwarrow"] & U\mathcal{C} \arrow[u, "z"] \arrow[r, "Uy"'] \arrow[ur, phantom, "\Uparrow"] & U\widehat{\mathcal{C}} \end{tikzcd}$$

である．ここで対象 $\langle a,\theta\rangle \in z\downarrow F_0$ を考える (θ は自然変換 $\theta\colon z(a) \Rightarrow F_0$ である)．(圏の) 米田の補題と補題 102 により全単射

$$\mathrm{Hom}_{\widehat{U\mathcal{C}}}(z(a), F_0) \cong F_0(a) = \mathrm{Hom}_V(I, Fa) \cong \mathrm{Hom}_{U\widehat{\mathcal{C}}}(y(a), F)$$

が得られるから，この対応で θ に対応する V-自然変換を $\sigma_{\langle a,\theta\rangle}\colon y(a) \Rightarrow F$ と書く．補題 102 の証明によれば，$s \in \mathcal{C}$ に対して $(\sigma_{\langle a,\theta\rangle})_s$ は合成

$$\mathcal{C}(s,a) \xrightarrow{F} [Fa, Fs] \xrightarrow{[\theta_a(\mathrm{id}_a),\mathrm{id}]} [I, Fs] \xrightarrow{i^{-1}} Fs \tag{215}$$

で与えられる．このとき σ は自然変換

$$\begin{tikzcd} \mathbb{1} \arrow[drr, bend left, "F"] & \arrow[d, phantom, "\Uparrow\sigma"] & \\ z\downarrow F_0 \arrow[u, "P_1"] \arrow[r, "P_0"'] & U\mathcal{C} \arrow[r, "Uy"'] & U\widehat{\mathcal{C}} \end{tikzcd}$$

を定める．

∵) $z\downarrow F_0$ の射 $f\colon \langle a,\theta\rangle \to \langle b,\xi\rangle$ に対して

$$\begin{tikzcd} y(a) \arrow[r, "\sigma_{\langle a,\theta\rangle}"] \arrow[d, "y(f)"'] & F \arrow[d, "\mathrm{id}"] \\ y(b) \arrow[r, "\sigma_{\langle b,\xi\rangle}"'] & F \end{tikzcd}$$

が可換であることを示せばよい．そのためには $s \in \mathcal{C}$ に対して

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}(s,a) \arrow[r, "F"] \arrow[d, "f\circ-"'] \arrow[dr, phantom, "(52)"] & {[Fa, Fs]} \arrow[r, "{[\theta_a(\mathrm{id}_a),\mathrm{id}]}"] \arrow[d, "{[Ff,\mathrm{id}]}"] \arrow[dr, phantom, "(**)"] & {[I, Fs]} \arrow[r, "i^{-1}"] \arrow[d, "\mathrm{id}"] \arrow[dr, phantom, "(*)"] & Fs \arrow[d, "\mathrm{id}"] \\ \mathcal{C}(s,b) \arrow[r, "F"'] & {[Fb, Fs]} \arrow[r, "{[\xi_b(\mathrm{id}_b),\mathrm{id}]}"'] & {[I, Fs]} \arrow[r, "i^{-1}"'] & Fs \end{tikzcd}$$

が可換であることを示せばよい．まず $(*)$ は明らかに可換である．(52) は命題 52 から可換である．最後に $(**)$ について示す．まず f が $z\downarrow F_0$ の射だからこれは $U\mathcal{C}$ の

射 $f\colon a \to b$ であって

$$\begin{tikzcd}
z(a) \arrow[r, "\theta"] \arrow[d, "z(f)"'] & F_0 \arrow[d, "\mathrm{id}"] \\
z(b) \arrow[r, "\xi"'] & F_0
\end{tikzcd}$$

を可換にする．故に次の図式の上の四角は可換である．

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{U\mathcal{C}}(a,a) \arrow[r, "\theta_a"] \arrow[d, "f\circ-"'] & F_0(a) \arrow[d, "\mathrm{id}"] \\
\mathrm{Hom}_{U\mathcal{C}}(a,b) \arrow[r, "\xi_a"'] & F_0(a) \\
\mathrm{Hom}_{U\mathcal{C}}(b,b) \arrow[r, "\xi_b"'] \arrow[u, "-\circ f"] & F_0(b) \arrow[u, "F_0 f"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathrm{id}_a \arrow[r, mapsto, "\theta_a"] \arrow[d, mapsto, "f\circ-"'] & \theta_a(\mathrm{id}_a) \arrow[d, mapsto, "\mathrm{id}"] \\
f \arrow[r, mapsto, "\xi_a"'] & \xi_a(f) \\
\mathrm{id}_b \arrow[r, mapsto, "\xi_b"'] \arrow[u, mapsto, "-\circ f"] & \xi_b(\mathrm{id}_b) \arrow[u, mapsto, "F_0 f"']
\end{tikzcd}$$

一方で下の四角は ξ が自然変換だから可換である．故に $\mathrm{id}_a, \mathrm{id}_b$ の行き先を考えれば $\theta_a(\mathrm{id}_a) = F_0 f(\xi_b(\mathrm{id}_b))$ が分かる．よって $(**)$ は可換である．

よって左 Kan 拡張の普遍性から次の自然変換 τ が得られる．

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{1} \arrow[r, "F_0"] \arrow[drr, bend left, "F"] & \widehat{U\mathcal{C}} \arrow[dr, "z^\dagger Uy"] \arrow[r, phantom, "\Uparrow\tau"] & \\
z\downarrow F_0 \arrow[u, "P_1"] \arrow[r, "P_0"'] \arrow[ur, phantom, "\Nwarrow"] & U\mathcal{C} \arrow[u, "z"'] \arrow[r, "Uy"'] \arrow[ur, phantom, "\Uparrow"] & U\widehat{\mathcal{C}}
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
\mathbb{1} \arrow[drr, bend left, "F"] \arrow[dr, phantom, "\Uparrow\sigma"] & & \\
z\downarrow F_0 \arrow[u, "P_1"] \arrow[r, "P_0"'] & U\mathcal{C} \arrow[r, "Uy"'] & U\widehat{\mathcal{C}}
\end{tikzcd}$$

ここで V に対して次の条件を考える．

$$\text{充満部分圏 } X \subset V \text{ が存在して以下の条件を満たす．} \tag{216}$$

(1) 任意の $x \in X$ は (V の対象として) コンパクトである[*15].

(2) 包含関手 $E\colon X \to V$ が strongly generating.

例えば $V = \mathbf{Set}, \mathbf{Ab}, \mathbf{CAT}$ の場合はこの条件が成り立つ．

命題 217. 条件 (216) が成り立つとする．$x \in \mathcal{V}$ がコンパクトのとき，$a \in \mathcal{C}$ に対して copower $x \odot a \in \mathcal{C}$ が存在して，F と交換するとする．また F_0 は平坦関手であるとする．このとき τ は同型である．(従って $\mathrm{colim}(z\downarrow F_0 \xrightarrow{P_0} U\mathcal{C} \xrightarrow{Uy} U\widehat{\mathcal{C}}) \cong F$ である．)

[*15] つまり $\mathrm{Hom}_V(x, -)\colon V \to \mathbf{Set}$ が小フィルター余極限と交換するということ．

証明．$\langle F,\sigma\rangle$ が左 Kan 拡張，即ち余極限であることを示せばよい．つまり $\langle a,\theta\rangle\in z\downarrow F_0$ に対する射 $\sigma_{\langle a,\theta\rangle}\colon y(a)\Rightarrow F$ が $\operatorname{colim}(z\downarrow F_0\xrightarrow{P_0}U\mathcal{C}\xrightarrow{Uy}U\widehat{\mathcal{C}})$ の余極限余錐を与えることを示せばよい．$\widehat{\mathcal{C}}$ の余極限は各点ごとに考えればよい (定理 183) から，$s\in\mathcal{C}$ に対して $(\sigma_{\langle a,\theta\rangle})_s\colon\mathcal{C}(s,a)\to Fs$ が $\operatorname{colim}(z\downarrow F_0\xrightarrow{P_0}U\mathcal{C}\xrightarrow{U(\mathcal{C}(s,-))}V)$ の余極限余錐を与えることを示せばよい．そのためには

$$\mathrm{Hom}_V(E-,(\sigma_{\langle a,\theta\rangle})_s)\colon\ \mathrm{Hom}_V(E-,\mathcal{C}(s,a))\Rightarrow\mathrm{Hom}_V(E-,Fs)$$

が $\operatorname{colim}(z\downarrow F_0\xrightarrow{P_0}U\mathcal{C}\xrightarrow{U(\mathcal{C}(s,-))}V\xrightarrow{\mathrm{Hom}_V(E-,\square)}\widehat{X})$ の余極限余錐を与えることを示せばよい．

$\because$) 条件 (216) より $E^\dagger y\cong\mathrm{Hom}_V(E-,\square)\colon V\to\widehat{X}$ は coservative で，かつ小フィルター余極限と交換する．今仮定より F_0 が平坦だから $z\downarrow F_0$ は小フィルター圏である．故に ($V=\mathbf{Set}$ の場合の) 補題 213 を適用すればよい．

圏 $\widehat{X}$ の余極限は各点ごとに考えればよいから，$u\in X$ に対して

$$(\sigma_{\langle a,\theta\rangle})_s\circ-\colon\ \mathrm{Hom}_V(Eu,\mathcal{C}(s,a))\to\mathrm{Hom}_V(Eu,Fs)\tag{218}$$

が $\operatorname{colim}(z\downarrow F_0\xrightarrow{P_0}U\mathcal{C}\xrightarrow{U(\mathcal{C}(s,-))}V\xrightarrow{\mathrm{Hom}_V(Eu,-)}\mathbf{Set})$ の余極限余錐を与えることを示せばよい．ここで次の図式を考える．

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_V(Eu,\mathcal{C}(s,a)) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "F\circ-"'] \arrow[dr, phantom, "(178)"] \arrow[ddd, bend right=90, "(\sigma_{\langle a,\theta\rangle})_s\circ-"'] & \mathrm{Hom}_{U\mathcal{C}}(Eu\odot s,a) \arrow[d, "F"] \arrow[ddd, bend left=90, "\theta_{Eu\odot s}"] \\
\mathrm{Hom}_V(Eu,[Fa,Fs]) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "{[\theta_a(\mathrm{id}_a),\mathrm{id}]\circ-}"'] \arrow[dr, phantom, "(\pitchfork)"] & \mathrm{Hom}_V(Fa,F(Eu\odot s)) \arrow[d, "-\circ\theta_a(\mathrm{id}_a)"] \\
\mathrm{Hom}_V(Eu,[I,Fs]) \arrow[r, "\sim"] & \mathrm{Hom}_V(I,F(Eu\odot s)) \arrow[d, equal] \arrow[d, phantom, "(\theta)", shift left=12ex] \\
\mathrm{Hom}_V(Eu,Fs) \arrow[u, "i\circ-", "\wr"'] \arrow[u, phantom, "(215)"', shift right=12ex] & F_0(Eu\odot s)
\end{tikzcd}$$

(215) は $(\sigma_{\langle a,\theta\rangle})_s$ が合成 (215) と一致しているから可換である．(178) は命題 178 より可換である．($\pitchfork$) は power による全単射

$$\mathrm{Hom}_V(Eu,[x,Fs])\cong\mathrm{Hom}_V(x,Eu\pitchfork Fs)$$

が x について自然だから可換である (ここで F が $Eu\odot s$ と交換することに注意する)．(θ) の可換性を示すため $f\in\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Eu\odot s,a)$ を取る．$\theta_{Eu\odot s}(f)=Ff\circ(\theta_a(\mathrm{id}_a))$ を示

せばよい．これは $\theta\colon z(a) \Rightarrow F_0$ が自然変換だから

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{U\mathcal{C}}(a,a) \arrow[r, "\theta_a"] \arrow[d, "-\circ f"'] & F_0(a) = \mathrm{Hom}_{V}(I, Fa) \arrow[d, "F_0(f) = (Ff\circ -)"] \\
\mathrm{Hom}_{U\mathcal{C}}(Eu\odot s, a) \arrow[r, "\theta_{Eu\odot s}"'] & F_0(Eu\odot s) = \mathrm{Hom}_{V}(I, Eu\odot s)
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{id}_a \arrow[r, mapsto, "\theta_a"] \arrow[dd, mapsto, "-\circ f"'] & \theta_a(\mathrm{id}_a) \arrow[d, mapsto, "Ff\circ -"] \\
 & Ff\circ(\theta_a(\mathrm{id}_a)) \\
f \arrow[r, mapsto, "\theta_{Eu\odot s}"'] & \theta_{Eu\odot s}(f)
\end{tikzcd}
$$

が可換となることから分かる．以上によりこの図式は可換であり，よって (218) が余極限余錐であることを示すには

$$
\theta_{Eu\odot s}\colon \mathrm{Hom}_{U\mathcal{C}}(Eu\odot s, a) \to F_0(Eu\odot s)
$$

が $\mathrm{colim}(z\!\downarrow\! F_0 \xrightarrow{P_0} U\mathcal{C} \xrightarrow{\mathrm{Hom}_{U\mathcal{C}}(Eu\odot s,-)} \mathbf{Set})$ の余極限余錐であることを示せばよい．ところがこれは

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{1} \arrow[r, "F_0"] & \widehat{U\mathcal{C}} \arrow[drr, "\mathrm{id}\,(\cong z^\dagger z)"] & & \\
z\!\downarrow\! F_0 \arrow[u, "P_1"] \arrow[r, "P_0"'] \arrow[ur, phantom, "\Nwarrow"] & U\mathcal{C} \arrow[u, "z"] \arrow[rr, "z"'] \arrow[urr, phantom, "\Uparrow \mathrm{id}"] \arrow[rrr, bend right, "\mathrm{Hom}_{U\mathcal{C}}(Eu\odot s,-)"'] & & \widehat{U\mathcal{C}} \arrow[r, "\mathrm{ev}_{Eu\odot s}"] \arrow[d, phantom, "\|"] & \mathbf{Set}
\end{tikzcd}
$$

が左 Kan 拡張を与えることから分かる． □

定理 219. 条件 (216) が成り立つとする．$\mathcal{C}$ が有限 V-余完備な小 V-豊穣圏のとき
$F\colon \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{V}$ が有限極限と交換する
$\Longleftarrow$ ある小フィルター圏 J と関手 $S\colon J \to U\mathcal{C}$ が存在して $\mathrm{colim}^{\widetilde{\Delta I}}(y\circ \widetilde{S}) \cong F$ となる．

証明． $(\Longrightarrow)$ 命題 212 (の双対) より $U(F)$ は有限極限と交換する．よって F_0 も有限極限と交換する．$\mathcal{C}$ が有限 V-余完備だから $U\mathcal{C}$ は有限余完備であり，故に $U\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ は有限完備である．従って $F_0\colon U\mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$ は平坦関手だから $z\!\downarrow\! F_0$ は小フィルター圏である．また $\mathcal{C}$ が有限 V-余完備で F が有限極限と交換するから命題 217 の条件は満たされている．

故に $\mathrm{colim}(z\downarrow F_0 \xrightarrow{P_0} U\mathcal{C} \xrightarrow{Uy} U\widehat{\mathcal{C}}) \cong F$ である．$\widehat{\mathcal{C}}$ は power を持つから命題 194 より $\mathrm{colim}^{\widetilde{\Delta I}}(y\circ\widetilde{P_0}) \cong F$ が分かる．

($\Longleftarrow$) J を小フィルター圏，$S\colon J\to U\mathcal{C}$ を関手として $\mathrm{colim}^{\widetilde{\Delta I}}(y\circ\widetilde{S}) \cong F$ とする．合成 $\mathfrak{F}J \xrightarrow{\widetilde{S}} \mathcal{C} \xrightarrow{y} \widehat{\mathcal{C}} = [\mathcal{C}^{\mathrm{op}},\mathcal{V}]$ の ($\mathcal{C}^{\mathrm{op}}\otimes - \dashv [\mathcal{C}^{\mathrm{op}},-]$ による) 随伴射は

$$\mathcal{C}^{\mathrm{op}}\otimes\mathfrak{F}J \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes\widetilde{S}} \mathcal{C}^{\mathrm{op}}\otimes\mathcal{C} \xrightarrow{\mathcal{C}(-,\square)} \mathcal{V}$$

である．これを K として，更に K の $-\otimes\mathfrak{F}J \dashv [\mathfrak{F}J,-]$ による随伴射を $\widetilde{K}$ とする．このとき $\widetilde{K} = [\widetilde{S},1]\circ z$ である (ここで $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ の米田埋込を z と書いた).

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}^{\mathrm{op}}\otimes\mathfrak{F}J \arrow[r, "K"] \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes\widetilde{S}"'] \arrow[dr, phantom, "="] & \mathcal{V} \\
\mathcal{C}^{\mathrm{op}}\otimes\mathcal{C} \arrow[r, "\mathcal{C}(-,\square)"'] & \mathcal{V} \arrow[u, "\mathrm{id}"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathcal{C}^{\mathrm{op}} \arrow[r, "\widetilde{K}"] \arrow[d, "\mathrm{id}"'] \arrow[dr, phantom, "="] & {[\mathfrak{F}J,\mathcal{V}]} \\
\mathcal{C}^{\mathrm{op}} \arrow[r, "z"'] & {[\mathcal{C},\mathcal{V}]} \arrow[u, "{[\widetilde{S},1]}"']
\end{tikzcd}$$

このとき $\mathrm{colim}^{\widetilde{\Delta I}}(\widetilde{K}-) \cong F$ である．

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}^{\mathrm{op}} \arrow[rr, bend left, "F"] \arrow[r, "\widetilde{K}"] \arrow[d, "\mathrm{id}"'] \arrow[dr, phantom, "="] & {[\mathfrak{F}J,\mathcal{V}]} \arrow[r, "\mathrm{colim}^{\widetilde{\Delta I}}"] \arrow[u, phantom, "\cong"] & \mathcal{V} \\
\mathcal{C}^{\mathrm{op}} \arrow[r, "z"'] & {[\mathcal{C},\mathcal{V}]} \arrow[u, "{[\widetilde{S},1]}"'] &
\end{tikzcd}$$

定理 186 より z は極限と交換する．$S^{\dagger}\dashv[\widetilde{S},1]$ (定理 144) だから，定理 181 (の双対) より $[\widetilde{S},1]$ は極限と交換する．$\mathrm{colim}^{\widetilde{\Delta I}}$ も有限極限と交換する．

> ∵) J がフィルター圏だから $\mathrm{colim}\colon V^J\to V$ は有限極限と交換する．命題 201, 202 より $\mathrm{colim}^{\widetilde{\Delta I}}$ も有限極限と交換する．

故に命題 179 (の双対) より $F\cong\mathrm{colim}^{\widetilde{\Delta I}}\circ[\widetilde{S},1]\circ z$ も有限極限と交換する． □

8 普遍随伴

定理 220. $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{M}$ を V-関手として各点左 Kan 拡張 $y^\dagger F$ が存在すれば，V-随伴 $y^\dagger F \dashv F^\dagger y$ が成り立つ．

$$\begin{tikzcd}
\widehat{\mathcal{C}} \arrow[dr, shift left=1.5, "y^\dagger F"] \arrow[dr, phantom, "\perp"] & \\
\mathcal{C} \arrow[u, "y"] \arrow[r, "F"'] & \mathcal{M} \arrow[ul, shift left=1.5, "F^\dagger y"]
\end{tikzcd}$$

証明. $P \in \widehat{\mathcal{C}}$ と $m \in \mathcal{M}$ について自然に

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}(y^\dagger F(P), m) &\cong \widehat{\mathcal{C}}(\widehat{\mathcal{C}}(y-, P), \mathcal{M}(F-, m)) \\
&\cong \widehat{\mathcal{C}}(P, \mathcal{M}(F-, m)) && \text{(米田の補題)} \\
&\cong \widehat{\mathcal{C}}(P, F^\dagger y(m)) && \text{(定理 168)}
\end{aligned}$$

だから $y^\dagger F \dashv F^\dagger y$ である． □

定理 221. $F\colon \widehat{\mathcal{C}} \to \mathcal{M}$ が余連続のとき，ある $E\colon \mathcal{C} \to \mathcal{M}$ が存在して $F \cong y^\dagger E$ となる．

証明. 系 169 より $y^\dagger y \cong \mathrm{id}$ であるが，これは各点左 Kan 拡張である．F が余連続だから定理 189 より，F は $y^\dagger y$ と交換する．よって $E := F \circ y$ とすれば $F^\dagger E$ は存在して $F^\dagger E \cong F$ となる．

$$\begin{tikzcd}
\widehat{\mathcal{C}} \arrow[dr, "\mathrm{id}"] \arrow[drr, "F"] & & \\
\mathcal{C} \arrow[u, "y"] \arrow[r, "y"'] \arrow[ur, phantom, "\Uparrow"] & \widehat{\mathcal{C}} \arrow[r, "F"'] & \mathcal{M}
\end{tikzcd}$$

□

系 222. 余連続な $F\colon \widehat{\mathcal{C}} \to \mathcal{M}$ は右随伴を持つ．

証明. F が余連続だから定理 221 により $F \cong y^\dagger E$ と書ける．定理 189 の証明によれば，この $y^\dagger E$ は各点左 Kan 拡張である．よって定理 220 より $F \dashv E^\dagger y$ となる． □

系 223. 任意の V-随伴 $F \dashv G\colon \widehat{\mathcal{C}} \to \mathcal{M}$ に対して，ある V-関手 $E\colon \mathcal{C} \to \mathcal{M}$ が存在して $F \cong y^\dagger E$，$G \cong E^\dagger y$ となる．

証明. 定理 181 より左随伴は余連続だから，定理 221 を使って $F \cong y^\dagger E$ と書ける．このとき右随伴の一意性と定理 220 から $G \cong E^\dagger y$ である． $\square$

定理 224. V-豊穣圏 $\mathcal{C}$ が，小 V-豊穣圏 $\mathcal{A}$ により $\mathcal{C} \simeq \widehat{\mathcal{A}}$ と書ける
$\iff$ $\mathcal{C}$ が V-余完備で，small projective な対象からなる集合 $A \subset \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ が存在して，A が strong generator となる．

証明. ($\Longrightarrow$) $\mathcal{C} = \widehat{\mathcal{A}}$ としてよい．$\widehat{\mathcal{A}}$ は V-余完備である．米田埋込 $y\colon \mathcal{A} \to \widehat{\mathcal{A}}$ により $\mathcal{A} \subset \widehat{\mathcal{A}}$ と見なす．$y(a) \in \widehat{\mathcal{A}}$ は small projective である．

$\because$) 定理 106 より $\widehat{\mathcal{A}}(y(a), -) \cong \mathrm{ev}_a$ である．系 185 より ev_a は余連続だったから，$y(a)$ は small projective である．

また $y^\dagger y \cong \mathrm{id}_{\mathcal{A}}$ は conservative だから，$y\colon \mathcal{A} \to \widehat{\mathcal{A}}$ は strongly generating である．故に $\mathrm{Ob}(\mathcal{A}) \subset \mathrm{Ob}(\widehat{\mathcal{A}})$ は strong generator である．

($\Longleftarrow$) 仮定の A を取り，$\mathcal{C}$ の充満部分 V-豊穣圏 $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}$ とみなす．$F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{C}$ を包含関手とすれば，定理 220 により V-随伴 $y^\dagger F \dashv F^\dagger y$ が得られる．

$$\begin{tikzcd}
\widehat{\mathcal{A}} \arrow[dr, shift left, "y^\dagger F"] \arrow[dr, phantom, "\perp"] & \\
\mathcal{A} \arrow[u, "y"] \arrow[r, "F"'] & \mathcal{C} \arrow[ul, shift left, "F^\dagger y"]
\end{tikzcd}$$

この随伴が V-同値を与えることを示せばよい．

まず $a \in A$ が small projective だから，$F^\dagger y$ は余連続である．よって定理 189 より

$$F^\dagger y \circ y^\dagger F \cong y^\dagger(F^\dagger y \circ F) \cong y^\dagger y \cong \mathrm{id}_{\widehat{\mathcal{A}}} \tag{225}$$

である．

次に A が strong generator だから $F^\dagger y$ は conservative である．対象 $c \in \mathcal{C}$ に対して定理 166 の証明より $y^\dagger F \circ F^\dagger y(c) = y^\dagger F(F^\dagger y(c)) \cong \mathrm{colim}^{F^\dagger y(c)} F$ となる．よって (225) より

$$F^\dagger y(\mathrm{colim}^{F^\dagger y(c)} F) \cong F^\dagger y \circ y^\dagger F \circ F^\dagger y(c) \cong \mathrm{id} \circ F^\dagger y(c) = F^\dagger y(c)$$

である．故に補題 213 より $\mathrm{colim}^{F^\dagger y(c)} F \cong c$ となり $y^\dagger F \circ F^\dagger y \cong \mathrm{id}_{\mathcal{C}}$ が分かる．

以上により $\mathcal{C} \simeq \widehat{\mathcal{A}}$ である． $\square$

例 **226.** 順序集合 X が集合 A により $X \cong \mathcal{P}(A)$ と書ける
$\iff X$ が余完備で，アトミック

証明. ($\Longrightarrow$) 明らか.

($\Longleftarrow$) 順序集合 X を $\mathbf{2}$-豊穣圏とみなす．アトム $a \in X$ は small projective である．$A := \{x \in X \mid x$ はアトム $\}$ と置き，$F \colon A \to X$ を包含関手とする．

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{P}(A) \arrow[dr, shift left, "y^\dagger F"] \arrow[dr, phantom, "\perp"] & \\
A \arrow[u, "y"] \arrow[r, "F"'] & X \arrow[ul, shift left, "F^\dagger y"]
\end{tikzcd}$$

$x \in X$ に対して $F^\dagger y(x) \cong X(F-, x) = \{a \in A \mid a \leq x\}$ である．よって $F^\dagger y$ は conservative である．X がアトミックだから A は strong generator である．故に定理 224 により $X \cong \mathcal{P}(A)$ と書ける． $\square$

例 **227.** $\langle X, d\rangle$ を距離空間，$Y \subset X$ を部分空間とする．$f \colon Y \to \mathbb{R}$ を $f \geq 0$ となる Lipschitz 連続関数とし，L を f の Lipschitz 定数とする．(即ち $|f(y_0) - f(y_1)| \leq Ld(y_0, y_1)$ である．) このとき Lipschitz 連続関数 $g \colon X \to \mathbb{R}$ で $g|_Y = f$ となるものが存在する．

証明. X, Y の距離を $d' := Ld$ に変えた距離空間を X', Y' とする．このとき $f \colon Y' \to \mathbb{R}$ は Lipschitz 定数が 1 となる Lipschitz 連続関数である．よって f を $\overline{\mathbb{R}}_+$-関手 $Y' \to \overline{\mathbb{R}}_+$ とみなすことができる．$i \colon Y' \to X'$ を包含関手として各点左 Kan 拡張 $i^\dagger f \colon X' \to \overline{\mathbb{R}}_+$ を考えればこれは Lipschitz 連続関数 $X \to \mathbb{R}$ を与える．

$$\begin{tikzcd}
X' \arrow[dr, "i^\dagger f"] & \\
Y' \arrow[u, "i"] \arrow[r, "f"'] \arrow[ur, phantom, "\eta\Uparrow"] & \overline{\mathbb{R}}_+
\end{tikzcd}$$

i は $\overline{\mathbb{R}}_+$-忠実充満だから命題 172 より η は同型である．従って $y \in Y$ に対して $i^\dagger f(y) =$

$f(y)$ となる．ちなみに定理 145 を使えば

$$\begin{aligned}
i^\dagger f(x) &= \int^{y \in Y'} X'(i(y), x) \odot f(y) \\
&= \int^{y \in Y'} (Ld(y, x) + f(y)) \\
&= \inf_{y \in Y} (Ld(y, x) + f(y))
\end{aligned}$$

である． □

例 228 (Eilenberg-Watts の定理)**.** R, S を単位的環として $F \dashv G \colon \widehat{R} \to \widehat{S}$ を **Ab**-随伴とすると，ある左 R 右 S 加群 P が存在して $F \cong - \otimes_R P$，$G \cong \widehat{S}(P, -)$ と書ける．

証明. 定理 223 によりある $P \colon R \to \widehat{S}$ が存在して $F \cong y^\dagger P$，$G \cong P^\dagger y$ となる．

$$\begin{tikzcd}
\widehat{R} \arrow[dr, shift left=1.5ex, "F"] \arrow[dr, phantom, "\perp"] & \\
R \arrow[u, "y"] \arrow[r, "P"'] & \widehat{S} \arrow[ul, shift left=1.5ex, "G"]
\end{tikzcd}$$

このとき P は左 R 右 S 加群であり，$M \in \widehat{R}$，$N \in \widehat{S}$ に対して

$$\begin{aligned}
& y^\dagger P(M) \cong \int^{* \in R} \widehat{R}(y(*), M) \odot P(*) \cong \int^{* \in R} M(*) \odot P(*) \cong M \otimes_R P \\
& P^\dagger y(N) \cong \widehat{S}(P-, N)
\end{aligned}$$

となる． □

定義. (通常の) 圏の射 $r \colon a \to b$ が retraction $\iff$ ある $i \colon b \to a$ が存在して $r \circ i = \mathrm{id}_b$

補題 229. $\varepsilon \colon F \Rightarrow G$ が自然変換で，a に対して $\varepsilon_a \colon Fa \to Ga$ が同型射であるとする．このとき $r \colon a \to b$ が retraction ならば $\varepsilon_b \colon Fb \to Gb$ も同型射である．

証明. $\varepsilon\colon F \Rightarrow G$ が自然変換で，$r \circ i = \mathrm{id}_b$ だから次が可換である．

$$
\begin{tikzcd}
 & Fa \arrow[dl, equal] \arrow[dd, "Fr"'] \arrow[rr, shift right, "\varepsilon_a"'] & & Ga \arrow[ll, shift right, "\varepsilon_a^{-1}"'] \arrow[dl, equal] \arrow[dd, "Gr"] \\
Fa \arrow[rr, shift right, "\varepsilon_a"'] & & Ga \arrow[ll, shift right, "\varepsilon_a^{-1}"'] & \\
 & Fb \arrow[rr, "\varepsilon_b"'] & & Gb \\
Fb \arrow[uu, "Fi"] \arrow[ur, "\mathrm{id}"'] \arrow[rr, "\varepsilon_b"'] & & Gb \arrow[uu, "Gi"'] \arrow[ur, "\mathrm{id}"'] &
\end{tikzcd}
$$

よって $f := Fr \circ \varepsilon_a^{-1} \circ Gi\colon Gb \to Fb$ と置けば $f \circ \varepsilon_b = \mathrm{id}_b$，$\varepsilon_b \circ f = \mathrm{id}_b$ である． □

補題 230. $P \in \widehat{R}$ が small projective $\iff$ P が有限生成射影右 R 加群

証明. ($\Longrightarrow$) P の有限生成部分右 R 加群全体を X とすれば $P = \operatorname*{colim}_{N \in X} N$ と書ける．このとき P が small projective だから $\widehat{R}(P, P) = \widehat{R}(P, \operatorname*{colim}_{N \in X} N) = \operatorname*{colim}_{N \in X} \widehat{R}(P, N)$ である．$\mathrm{id}_P \in \widehat{R}(P, P)$ が存在するから，これに対応する $x \in \widehat{R}(P, N)$ がある $N \in X$ に存在する．このとき $P = N$ となるから P は有限生成である．また $\widehat{R}(P, -)$ が余連続だから特に全射を保存し，よって P は射影加群である．

($\Longleftarrow$) P を有限生成射影右 R 加群とすれば，P はある R^n の直和因子となる．即ちある M が存在して $R^n = P \oplus M$ と書ける．$\pi\colon R^n \to P$ を射影，$i\colon P \to R^n$ を包含とすれば $\pi \circ i = \mathrm{id}_P$ である．即ち $\pi\colon R^n \to P$ は retraction である．

余極限の普遍性により，自然変換

$$\varepsilon\colon \operatorname*{colim}_N \mathrm{Hom}(-, N) \Rightarrow \mathrm{Hom}(-, \operatorname*{colim}_N N)$$

が存在する．ε_{R^n} が同型だから，retraction $\pi\colon R^n \to P$ により ε_P も同型である．よって P は small projective である． □

定義. 単位的環 R, S が森田同値 $\iff$ $\mathbf{Ab}$-同値 $\widehat{R} \simeq \widehat{S}$ が成り立つ

定理 231. 単位的環 R, S が森田同値
$\iff$ 有限生成射影右 S 加群 P が存在して，P が generator かつ環同型 $R \cong \mathrm{Hom}_S(P, P)$ が成り立つ．

証明. ($\Longrightarrow$) $F\colon \widehat{R} \to \widehat{S}$，$G\colon \widehat{S} \to \widehat{R}$，$GF \cong \mathrm{id}_{\widehat{R}}$，$FG \cong \mathrm{id}_{\widehat{S}}$ を $\mathbf{Ab}$-同値とする．$F \dashv G$

としてよい．このとき $P := F \circ y$ と置けば $F \cong y^{\dagger}P \cong - \otimes_R P, G \cong P^{\dagger}y \cong \mathrm{Hom}_S(P, -)$ である．よって $R \cong GF(R) \cong G(R \otimes_R P) \cong G(P) \cong \mathrm{Hom}_S(P, P)$ である．また $R \in \widehat{R}$ が small projective だから $P = F(R) \in \widehat{S}$ も small projective である．故に前補題から P は有限生成射影右 R 加群である．また $R \in \widehat{R}$ は generator だから $P = F(R)$ も generator である．

($\Longleftarrow$) P が有限生成射影右 S 加群だから，P は small projective である．V-関手 $\widehat{S}(P, -) \colon \widehat{S} \to \mathbf{Ab}$ は conservative である．

$\because$) $\widehat{S}$ の射 $f \colon M \to N$ が同型 $\widehat{S}(P, f) \colon \widehat{S}(P, M) \cong \widehat{S}(P, N)$ を与えるとする．$\widehat{S}(P, -)$ は連続だから $\widehat{S}(P, \ker f) \cong \ker \widehat{S}(P, f) = 0$ である．今 P が generator だから $\ker f = 0$ が分かる．また P が small projective だから余連続でもある．従って $\widehat{S}(P, \operatorname{coker} f) \cong \operatorname{coker} \widehat{S}(P, f) = 0$ となり，P が generator だから $\operatorname{coker} f = 0$ である．以上より f は同型である．

従って P は strong generator である．よって，定理 224 の証明から $\widehat{R} \cong \widehat{S}$ となることが分かる． $\square$

例 232. 単位的環 R に対して $M_n(R)$ を R の元を成分とする n 次行列全体がなす単位的環とする．R^n は有限生成射影右 R 加群である．また R^n は generator で，$M_n(R) \cong \mathrm{Hom}(R^n, R^n)$ である．従って R と $M_n(R)$ は森田同値である． $\square$

9 稠密

定義. V-関手 $F \colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ が稠密
$\Longleftrightarrow$ $\langle \mathrm{id}_{\mathcal{D}}, \mathrm{id}_F \rangle$ が F に沿った F の各点左 Kan 拡張となる．

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{D} \arrow[dr, "\mathrm{id}_{\mathcal{D}}"] & \\
\mathcal{C} \arrow[u, "F"] \arrow[r, "F"'] \arrow[ur, phantom, "\mathrm{id}_F \Uparrow"] & \mathcal{D}
\end{tikzcd}
$$

定義. 充満部分 V-豊穣圏 $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}$ が稠密 $\Longleftrightarrow$ 包含 V-関手 $\mathcal{C} \to \mathcal{D}$ が稠密である．

定理 233. V-関手 $F \colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ について以下の条件は同値.

(1) F が稠密である．

(2) ある V-自然同型 $\eta\colon F \Rightarrow F$ が存在して $\langle \mathrm{id}_{\mathcal{D}}, \eta \rangle$ が F に沿った F の各点左 Kan 拡張となる.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{D} \arrow[dr, "\mathrm{id}_{\mathcal{D}}"] & \\
\mathcal{C} \arrow[u, "F"] \arrow[r, "F"'] \arrow[ur, phantom, "\eta\Uparrow"] & \mathcal{D}
\end{tikzcd}$$

(3) $G, H\colon \mathcal{D} \to \mathcal{M}$ が余連続のとき $[F,1]_{GH}\colon [\mathcal{D},\mathcal{M}](G,H) \to [\mathcal{C},\mathcal{M}](GF,HF)$ が同型である.

(4) $F^{\dagger}y\colon \mathcal{D} \to \widehat{\mathcal{C}}$ が V-忠実充満である.

(5) cylinder $\mathrm{id}\colon \mathcal{D}(F-,d) \Rightarrow \mathcal{D}(F-,d)$ が余極限 $\mathrm{colim}^{\mathcal{D}(F-,d)}F$ を与える.

証明. ($1 \Longrightarrow 2$) 明らか.

($2 \Longrightarrow 3$) V-自然同型 $\eta\colon F \Rightarrow F$ が存在して

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{D} \arrow[dr, "\mathrm{id}_{\mathcal{D}}"] & \\
\mathcal{C} \arrow[u, "F"] \arrow[r, "F"'] \arrow[ur, phantom, "\eta\Uparrow"] & \mathcal{D}
\end{tikzcd}$$

が各点左 Kan 拡張であるとする. $G\colon \mathcal{D} \to \mathcal{M}$ を余連続な V-関手とすれば G が $F^{\dagger}F$ と交換するから

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{D} \arrow[dr, "G"] & \\
\mathcal{C} \arrow[u, "F"] \arrow[r, "GF"'] \arrow[ur, phantom, "\Uparrow G\bullet\eta"] & \mathcal{M}
\end{tikzcd}$$

も各点左 Kan 拡張である. よって定理 142 より, $H \in [\mathcal{D},\mathcal{M}]$ について自然な同型

$$[\mathcal{D},\mathcal{M}](G,H) \cong [\mathcal{C},\mathcal{M}](GF,HF)$$

が成り立つ. 命題 140 によれば, この同型は

$$[\mathcal{D},\mathcal{M}](G,H) \xrightarrow{[F,1]_{GH}} [\mathcal{C},\mathcal{M}](GF,HF) \xrightarrow{-\circ(G\bullet\eta)} [\mathcal{C},\mathcal{M}](GF,HF)$$

で与えられる. η が同型だから $-\circ(G\bullet\eta)$ も同型である. 故に $[F,1]_{GH}$ も同型となる.

($3 \Longrightarrow 4$) 定理 168 より $F^{\dagger}y$ は合成 $\mathcal{D} \xrightarrow{y} \widehat{\mathcal{D}} \xrightarrow{[F,1]} \widehat{\mathcal{C}}$ と同型である. よって y が V-忠実充満であること (系 110) と, 定理 180 と仮定 (3) から $F^{\dagger}y$ が V-忠実充満と分かる.

$(4 \Longrightarrow 5)$ 仮定 (4) より $d, d' \in \mathcal{D}$ に対して $(F^\dagger y)_{dd'} \colon \mathcal{D}(d, d') \to \widehat{\mathcal{C}}(F^\dagger y(d), F^\dagger y(d'))$ は同型である．定理 168 より $d \in D$ について自然な同型 $\varphi_d \colon F^\dagger y(d) \Rightarrow \mathcal{D}(F-, d)$ が得られる．命題 77 より合成

$$\begin{aligned}\mathcal{D}(d, d') &\xrightarrow{(F^\dagger y)_{dd'}} \widehat{\mathcal{C}}(F^\dagger y(d), F^\dagger y(d')) \xrightarrow{-\circ\varphi_{d'}} \widehat{\mathcal{C}}(\mathcal{D}(F-, d), F^\dagger y(d')) \\ &\xrightarrow{\varphi_d^{-1}\circ -} \widehat{\mathcal{C}}(\mathcal{D}(F-, d), \mathcal{D}(F-, d'))\end{aligned}$$

で得られる同型は d' について自然である．故に V-自然同型

$$\mathcal{D}(d, \square) \cong \widehat{\mathcal{C}}(\mathcal{D}(F-, d), \mathcal{D}(F-, \square))$$

が得られる．これに対応する cylinder を $\theta \colon \mathcal{D}(F-, d) \Rightarrow \mathcal{D}(F-, d)$ とすれば，θ は余極限 $\mathrm{colim}^{\mathcal{D}(F-,d)} F$ を与える．従って $\theta = \mathrm{id}$ を示せばよい．定義より θ は次の図式の右回りの合成で与えられる．

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{D}(d, d) \arrow[d, "(F^\dagger y)_{dd}"] \\
I \arrow[ur, bend left, "j_d"] \arrow[ur, phantom, "(F^\dagger y)", near end, shift right=3ex] \arrow[r, "j_{F^\dagger y(d)}"] \arrow[dr, bend right, "\varphi_d"'] \arrow[dr, phantom, "(44)", shift left=3ex] \arrow[ddr, bend right=60, "j_{\mathcal{D}(F-,d)}"'] \arrow[ddr, phantom, "(44)"] & \widehat{\mathcal{C}}(F^\dagger y(d), F^\dagger y(d)) \arrow[d, "-\circ\varphi_d"] \\
 & \widehat{\mathcal{C}}(\mathcal{D}(F-, d), F^\dagger y(d)) \arrow[d, "\varphi_d^{-1}\circ -"] \\
 & \widehat{\mathcal{C}}(\mathcal{D}(F-, d), \mathcal{D}(F-, d))
\end{tikzcd}$$

ここで $(F^\dagger y)$ は $F^\dagger y$ が V-関手だから可換である．(44) は命題 44 より可換である．よってこの図式は可換であり $\theta = \mathrm{id}$ が分かる．

$(5 \Longrightarrow 1)$ 仮定 (5) より $a \in \mathcal{D}$ について自然な同型

$$\mathcal{D}(d, a) \cong \widehat{\mathcal{C}}(\mathcal{D}(F-, d), \mathcal{D}(F-, a))$$

が得られる．命題 108 より，この同型は $d \in \mathcal{D}$ について自然である．従って $\mathrm{id}_{\mathcal{D}}$ は F に沿った F の各点左 Kan 拡張となる．その unit を η とすれば，定理 188 より

$$\eta_c = \left(I \xrightarrow{j} \mathcal{D}(Fc, Fc) \xrightarrow{\mathrm{id}} \mathcal{D}(Fc, Fc)\right)$$

である．故に $\eta = \mathrm{id}_F$ である． $\square$

系 234. 米田埋込 $y\colon \mathcal{C} \to \widehat{\mathcal{C}}$ は稠密である.

証明. 系 169 と定理 233 より明らか. □

命題 235. V-自然同型

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{D} \arrow[dr, "T"] & \\
\mathcal{C} \arrow[u, "F"] \arrow[r, "E"'] \arrow[ur, phantom, "\eta\Uparrow\wr"] & \mathcal{M}
\end{tikzcd}$$

が各点左 Kan 拡張を与えるとき

$$T \text{ が稠密} \iff E \text{ が稠密}.$$

証明. 次の図式を考える.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{M} \arrow[ddr, "\mathrm{id}_{\mathcal{M}}"] & \\
\mathcal{D} \arrow[u, "T"] \arrow[dr, "T"] & \\
\mathcal{C} \arrow[u, "F"] \arrow[r, "E"'] \arrow[ur, phantom, "\eta\Uparrow"] & \mathcal{M}
\end{tikzcd}$$

このとき

$$\begin{aligned}
&\langle \mathrm{id}_{\mathcal{M}}, \mathrm{id}_T \rangle \text{ が } T \text{ に沿った } T \text{ の各点左 Kan 拡張}\\
\iff &\langle \mathrm{id}_{\mathcal{M}}, \eta \rangle \text{ が } TF \text{ に沿った } E \text{ の各点左 Kan 拡張}\\
\iff &\langle \mathrm{id}_{\mathcal{M}}, \mathrm{id}_E \rangle \text{ が } E \text{ に沿った } E \text{ の各点左 Kan 拡張}
\end{aligned}$$

となる. □

命題 236. $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ を V-豊穣圏, $F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, $G\colon \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ を V-関手として GF が稠密, G が V-忠実充満とする. このとき F と G も稠密である.

証明. まず F が稠密であることを示す．次の図式を考える．

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[ddr, "(GF)^\dagger y \cong G^\dagger(F^\dagger y)"] & \\
\mathcal{B} \arrow[u, "G"] \arrow[dr, "F^\dagger y"'] & \\
\mathcal{A} \arrow[u, "F"] \arrow[r, "y"'] & \widehat{\mathcal{A}}
\end{tikzcd}$$

G が V-忠実充満だから $((GF)^\dagger y)\circ G \cong F^\dagger y$ である．G と $(GF)^\dagger y$ が V-忠実充満だから $F^\dagger y$ も V-忠実充満となり，よって F は稠密である．

次に G について示す．合成

$$\mathcal{C}(Gb,c) \xrightarrow{(GF)^\dagger y} \widehat{\mathcal{A}}(\mathcal{C}(GF-,Gb),\mathcal{C}(GF-,c)) \xrightarrow{-\circ G} \widehat{\mathcal{A}}(\mathcal{B}(F-,b),\mathcal{C}(GF-,c))$$

は同型である．従って G は F に沿った GF の各点左 Kan 拡張である．その unit を η とすると，(141) より η_a は次の可換図式の右回りの合成と一致する．

$$\begin{tikzcd}
I \arrow[r, "j_{GFa}"] \arrow[dr, "j"'] \arrow[ddr, "G"'] \arrow[dddr, "G_{FaFa}"'] \arrow[ddddr, "G(j_{Fa})"'] \arrow[dddddr, "j_{GFa}"'] & \mathcal{C}(GFa,GFa) \arrow[d, "(GF)^\dagger y"] \\
& \widehat{\mathcal{A}}(\mathcal{C}(GF-,GFa),\mathcal{C}(GF-,GFa)) \arrow[d, "-\circ G"] \\
& \widehat{\mathcal{A}}(\mathcal{B}(F-,Fa),\mathcal{C}(GF-,GFa)) \arrow[d, "\mathrm{ev}_a"] \\
& {[\mathcal{B}(Fa,Fa),\mathcal{C}(GFa,GFa)]} \arrow[d, "{[j_{Fa},\mathrm{id}]}"] \\
& {[I,\mathcal{C}(GFa,GFa)]} \arrow[d, "i^{-1}"] \\
& \mathcal{C}(GFa,GFa)
\end{tikzcd}$$

よって $\eta_a = j_{GFa}$ は同型である．よって命題 235 より G も稠密である． □

定義. $F\colon \mathcal{C}\to\mathcal{D}$ を V-忠実充満として $T\colon \mathcal{J}\to\mathcal{D}$ を V-関手とする．
cylinder $\theta\colon W\Rightarrow \mathcal{D}(T-,d)$ が F-cylinder
$\iff$ cylinder $(F^\dagger y)*\theta\colon W\Rightarrow \widehat{\mathcal{C}}(F^\dagger y(T-),F^\dagger y(d))$ が余極限を与える．

命題 237. $\theta\colon W \Rightarrow \mathcal{D}(T-, d)$ が F-cylinder
$\Longleftrightarrow$ 任意の $c \in \mathcal{C}$ に対して $\mathcal{D}(Fc, -) * \theta$ が $\operatorname{colim}^W(\mathcal{D}(Fc, T-))$ を与える．

証明. 定理 183 より明らか． □

命題 238. $\mathrm{id}\colon \mathcal{D}(F-, d) \Rightarrow \mathcal{D}(F-, d)$ は F-cylinder である．

証明. $\theta_c := (F^\dagger y)_{Fc,d}\colon \mathcal{D}(Fc, d) \to \widehat{\mathcal{C}}(F^\dagger y(Fc), F^\dagger y(d))$ によって得られる cylinder

$$\theta\colon \mathcal{D}(F-, d) \Rightarrow \widehat{\mathcal{C}}(F^\dagger y(F-), F^\dagger y(d))$$

が余極限を与えることを示せばよい．そこで各点左 Kan 拡張 $F^\dagger y$ の unit を η とする．定理 188 によれば $\operatorname{colim}^{\mathcal{D}(F-,d)} y \cong F^\dagger y(d)$ の unit μ は

$$\mu_c = \left(\mathcal{D}(Fc, d) \xrightarrow{\theta_c} \widehat{\mathcal{C}}(F^\dagger y(Fc), F^\dagger y(d)) \xrightarrow{-\circ\eta_c} \widehat{\mathcal{C}}(y(c), F^\dagger y(d))\right)$$

で与えられる．今 F が V-忠実充満だから，命題 172 より η_c は同型である．全単射 (174) が T について自然だから次の可換図式が得られる．

$$\begin{tikzcd}
& \operatorname{Hom}\big(\mathcal{D}(F-, d), \widehat{\mathcal{C}}(F^\dagger y(F-), F^\dagger y(d))\big) \arrow[dl, "\sim"'] \arrow[dd, "(-\circ\eta_-)*-"] \\
\operatorname{Hom}\big(\widehat{\mathcal{C}}(F^\dagger y(d), \square), \widehat{\mathcal{J}}(\mathcal{D}(F-, d), \widehat{\mathcal{C}}(F^\dagger y(F-), \square))\big) \arrow[dd, "((-\circ\eta_-)\circ-)*-"'] & \\
& \operatorname{Hom}\big(\mathcal{D}(F-, d), \widehat{\mathcal{C}}(y(-), F^\dagger y(d))\big) \arrow[dl, "\sim"] \\
\operatorname{Hom}\big(\widehat{\mathcal{C}}(F^\dagger y(d), \square), \widehat{\mathcal{J}}(\mathcal{D}(F-, d), \widehat{\mathcal{C}}(y(-), \square))\big) &
\end{tikzcd}$$

故に θ の行き先を考えれば $((- \circ \eta_-) \circ -) * \widetilde{\theta} = \widetilde{\mu}$ が分かる．

$$\begin{tikzcd}
& \theta \arrow[dl, mapsto, "\sim"'] \arrow[dd, mapsto, "(-\circ\eta_-)*-"] \\
\widetilde{\theta} \arrow[d, mapsto, "((-\circ\eta_-)\circ-)*-"'] & \\
((- \circ \eta_-) \circ -) * \widetilde{\theta} \arrow[d, equal] & \mu \arrow[dl, mapsto, "\sim"] \\
\widetilde{\mu} &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\widehat{\mathcal{C}}(F^\dagger y(d), \square) \arrow[r, "\widetilde{\theta}"] \arrow[dr, "\sim", "\widetilde{\mu}"'] & \widehat{\mathcal{J}}(\mathcal{D}(F-, d), \widehat{\mathcal{C}}(F^\dagger y(F-), \square)) \arrow[d, "\wr"', "(-\circ\eta_-)\circ-"] \\
& \widehat{\mathcal{J}}(\mathcal{D}(F-, d), \widehat{\mathcal{C}}(y(-), \square))
\end{tikzcd}$$

よって $\widetilde{\theta}$ は同型であり，θ は余極限を与える． $\square$

定義. $\mathcal{C}$ を V-豊穣圏とする．$\Phi = \{\langle W_i, T_i\rangle\}_{i\in J}$ が $\mathcal{C}$ の小余極限族とは以下の条件を満たすことをいう．

(1) $i \in J$ に対して $W_i \colon \mathcal{J}_i^{\mathrm{op}} \to \mathcal{V}$，$T_i \colon \mathcal{J}_i \to \mathcal{C}$ は V-関手であり $\mathcal{J}_i$ は小 V-豊穣圏である．

(2) $i \in J$ に対して余極限 $\mathrm{colim}^{W_i} T_i \in \mathcal{C}$ が存在する．

定義. $\Phi = \{\langle W_i, T_i\rangle\}_{i\in J}$ を $\mathcal{C}$ の小余極限族として $F \colon \mathcal{A} \to \mathcal{C}$ を V-忠実充満とする．$\mathcal{A}$ の Φ-閉包とは，次の条件を満たす最小の充満部分 V-豊穣圏 $\bar{\mathcal{A}} \subset \mathcal{C}$ のことをいう．

(1) $a \in \mathcal{A}$ に対して $Fa \in \bar{\mathcal{A}}$ である．

(2) $a \in \bar{\mathcal{A}}$，$c \in \mathcal{C}$ で $a \cong c$ ならば $c \in \bar{\mathcal{A}}$ である．

(3) $i \in J$ とする．任意の $j \in \mathcal{J}_i$ に対して $T_i(j) \in \bar{\mathcal{A}}$ ならば $\mathrm{colim}^{W_i} T_i \in \bar{\mathcal{A}}$ である．

補題 239. $F \colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ を V-忠実充満とする．$\theta \colon W \Rightarrow \mathcal{C}(T-, c)$ が cylinder で $F * \theta$ が余極限 $\mathrm{colim}^W FT$ を与えるならば, θ が余極限 $\mathrm{colim}^W T$ を与える．(従って F は $\mathrm{colim}^W T$ と交換する．)

証明. cylinder $\theta, F * \theta$ に対応する V-自然変換を

$$\widetilde{\theta} \colon \mathcal{C}(c, \square) \Rightarrow \widehat{\mathcal{J}}(W-, \mathcal{C}(T-, \square))$$
$$\widetilde{F * \theta} \colon \mathcal{D}(Fc, \square) \Rightarrow \widehat{\mathcal{J}}(W-, \mathcal{D}(FT-, \square))$$

とする．命題 178 より $a \in \mathcal{C}$ に対して次の図式は可換である．

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}(c,a) \arrow[r, "\widetilde{\theta}_a"] \arrow[d, "F"'] & \widehat{\mathcal{J}}(W-, \mathcal{C}(T-, a)) \arrow[d, "F\circ -"] \\
\mathcal{D}(Fc, Fa) \arrow[r, "\widetilde{F*\theta}_{Fa}"'] & \widehat{\mathcal{J}}(W-, \mathcal{D}(FT-, Fa))
\end{tikzcd}$$

今 F が V-忠実充満で，$F * \theta$ が余極限を与えるから $\widetilde{\theta}_a$ が同型であることが分かる． $\square$

定理 240. V-忠実充満な V-関手 $F \colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ について以下の条件は同値.

(1) F が稠密である．

(2) 任意の F-cylinder $\theta \colon W \Rightarrow \mathcal{D}(T-, d)$ は，$F^\dagger y$ と交換する余極限の unit になる．

(3) $\mathrm{id}\colon \mathcal{D}(F-,d) \Rightarrow \mathcal{D}(F-,d)$ は $\mathrm{colim}^{\mathcal{D}(F-,d)}F$ を与え，更にこれは $F^{\dagger}y$ と交換する．

(4) 任意の $d \in \mathcal{D}$ に対して，ある $\mathcal{V}$-関手 $W\colon \mathcal{J}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{V}$，$T\colon \mathcal{J} \to \mathcal{C}$ が存在して $\mathrm{colim}^{W}FT \cong d$ となり，更に $\mathrm{colim}^{W}FT$ は $F^{\dagger}y$ と交換する．

(5) 小余極限族 $\Phi = \{\langle W_i, T_i\rangle\}_{i\in J}$ が存在して，$\mathcal{D}$ が $\mathcal{C}$ の Φ-閉包となり，更に各 $i \in J$ に対して $\mathrm{colim}^{W_i}T_i$ の unit は F-cylinder となる．

証明．$(1 \Longrightarrow 2)$ $\theta\colon W \Rightarrow \mathcal{D}(T-,c)$ を F-cylinder とする．即ち cylinder $(F^{\dagger}y) * \theta$ が余極限 $\mathrm{colim}^{W}(F^{\dagger}y \circ T)$ を与えるとする．F が稠密だから定理 233 より $F^{\dagger}y$ は $\mathcal{V}$-忠実充満である．よって補題 239 より θ は余極限 $\mathrm{colim}^{W}T$ の unit となり，これは $F^{\dagger}y$ と交換する．

$(2 \Longrightarrow 3)$ 命題 238 より $\mathrm{id}\colon \mathcal{D}(F-,d) \Rightarrow \mathcal{D}(F-,d)$ は F-cylinder であるから明らか．

$(3 \Longrightarrow 4)$ $d \in \mathcal{D}$ に対して $\mathcal{V}$-関手を $W := \mathcal{D}(F-,d)$，$T := \mathrm{id}_{\mathcal{C}}$ と取れば，仮定 (3) より $\mathrm{colim}^{W}FT \cong d$ でありこれは $F^{\dagger}y$ と交換する．

$(4 \Longrightarrow 5)$ $d \in \mathcal{D}$ に対して，仮定 (4) において存在する $\mathcal{V}$-関手を W_d, T_d と書く．このとき小余極限族を $\Phi := \{\langle W_d, T_d\rangle\}_{d\in\mathcal{D}}$ と定義すればこれが (5) の条件を満たす．

$(5 \Longrightarrow 1)$ 仮定 (5) の Φ を取る．充満部分 $\mathcal{V}$-豊穣圏 $\mathcal{A} \subset \mathcal{D}$ を

$$\mathrm{Ob}(\mathcal{A}) := \{d \in \mathcal{D} \mid \mathrm{id}\colon \mathcal{D}(F-,d) \Rightarrow \mathcal{D}(F-,d) \text{ は } \mathrm{colim}^{\mathcal{D}(F-,d)}F \text{ を与える }\}$$

で定める．定理 233 より $\mathcal{A} = \mathcal{D}$ を示せばよい．そのためには $\mathcal{A}$ が Φ-閉包の定義の 3 条件を満たすことを示せば，Φ-閉包 $\mathcal{D}$ の最小性から $\mathcal{A} = \mathcal{D}$ が分かる．

まず $c \in \mathcal{C}$ に対して $Fc \in \mathcal{A}$ である．

$\because$) F が $\mathcal{V}$-忠実充満だから命題 168, 172 より $y(c) \cong F^{\dagger}y(Fc) \cong \mathcal{D}(F-,Fc)$ である．これと米田の補題を組み合わせて，$d \in \mathcal{D}$ について自然な同型

$$\widetilde{\mu}_d\colon \mathcal{D}(Fc,d) \cong \widehat{\mathcal{J}}(y(c), \mathcal{D}(F-,d)) \cong \widehat{\mathcal{J}}(\mathcal{D}(F-,Fc), \mathcal{D}(F-,d))$$

を得る．よって cylinder $\mu\colon \mathcal{D}(F-,Fc) \Rightarrow \mathcal{D}(F-,Fc)$ は余極限を与える．

$\mu = \mathrm{id}$ であることを示せば $Fc \in \mathcal{A}$ が分かる．そこで次の可換図式を考える．

$$\begin{tikzcd}
I \arrow[r, "j"] \arrow[dr, "\nu"'] \arrow[ddr, "\mu"'] & \mathcal{D}(Fc, Fc) \arrow[d, "\wr"] & {[I, \mathcal{D}(Fc, Fc)]} \arrow[l, "i^{-1}"'] \\
 & \widehat{\mathcal{J}}(y(c), \mathcal{D}(F-, Fc)) \arrow[r, "\mathrm{ev}_c"] & {[\mathcal{C}(c,c), \mathcal{D}(Fc, Fc)]} \arrow[u, "{[j,\mathrm{id}]}"'] \\
 & \widehat{\mathcal{J}}(\mathcal{D}(F-, Fc), \mathcal{D}(F-, Fc)) \arrow[u, "\wr"'] \arrow[r, "\mathrm{ev}_c"] & {[\mathcal{D}(Fc, Fc), \mathcal{D}(Fc, Fc)]} \arrow[u, "{[F,\mathrm{id}]}"']
\end{tikzcd}$$

$\mu = \mathrm{id}$ を示すためには $\nu = F$ を示せばよい．そのためには米田の補題より $\nu_c \circ j_c = j_{Fc}$ を示せばよいが，それは明らか．

次に $a \in \mathcal{A}$，$d \in \mathcal{D}$，$a \cong d$ ならば明らかに $d \in \mathcal{A}$ である．

最後に $i \in J$ として，任意の $j \in \mathcal{J}_i$ に対して $T_i(j) \in \mathcal{A}$ とする．このとき $\mathcal{A}$ の定義より $\mathrm{id}\colon \mathcal{D}(F-, T_i(j)) \Rightarrow \mathcal{D}(F-, T_i(j))$ は $\mathrm{colim}^{\mathcal{D}(F-, T_i(j))} F$ を与える．また $\mathrm{colim}^{W_i} T_i$ は $F^\dagger y$ と交換するから $\mathrm{colim}^{W_i}(F^\dagger y \circ T_i) \cong F^\dagger y(\mathrm{colim}^{W_i} T_i))$ である．故に

$$\begin{aligned}
\mathrm{colim}^{W_i} T_i &\cong \mathrm{colim}^{W_i}(\mathrm{colim}^{\mathcal{D}(F-, T_i)} F) \cong \mathrm{colim}^{\mathrm{colim}^{W_i} \mathcal{D}(F-, T_i)} F \\
&\cong \mathrm{colim}^{F^\dagger y(\mathrm{colim}^{W_i} T_i)} F
\end{aligned}$$

だから $\mathrm{colim}^{W_i} T_i \in \mathcal{A}$ である． □

命題 241． $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ を V-豊穣圏で $\mathcal{A} \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{C}$ が充満部分 V-豊穣圏であるとし，$\mathcal{B} \subset \mathcal{C}$ は稠密とする．$U(\mathcal{B})$ において，任意の $b \in \mathcal{B}$ がある $a \in \mathcal{A}$ のレトラクトになるならば，$\mathcal{A} \subset \mathcal{C}$ は稠密である．

証明． $F\colon \mathcal{B} \to \mathcal{C}$，$G\colon \mathcal{A} \to \mathcal{C}$ を包含 V-関手とする．$b \in \mathcal{B}$ とする．仮定より，ある a と $\mathcal{B}$ の射 $i\colon b \nrightarrow a$，$r\colon a \nrightarrow b$ が存在して $r \circ i = \mathrm{id}_b$ となる．このとき $U(\mathcal{C})$ の図式

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, shift left, "i \circ r"] \arrow[r, shift right, "\mathrm{id}_a"'] & a \arrow[r, "r"] & b
\end{tikzcd}$$

は絶対 coequalizer であり，特に任意の $c \in \mathcal{C}$ に対する $\mathcal{C}_0(-, c)$ と交換する．よって $U(\mathcal{C})$ の図式 S を

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, shift left, "i \circ r"] \arrow[r, shift right, "\mathrm{id}_a"'] & a
\end{tikzcd}$$

で定めれば命題 195 より $\mathrm{colim}^{\widetilde{\Delta I}} \widetilde{S} \cong \mathrm{colim}\, S \cong b$ である．更にこの $\mathrm{colim}^{\widetilde{\Delta I}} \widetilde{S}$ は任意の $a' \in \mathcal{A}$ に対する $\mathcal{C}(Ga', -)$ と交換する．即ち $\mathrm{colim}^{\widetilde{\Delta I}} \widetilde{S}$ の unit β は G-cylinder である．

一方 F が稠密だから $c \in \mathcal{C}$ に対して $\operatorname{colim}^{F^\dagger y(c)} F \cong c$ であり，これは $a' \in \mathcal{A}$ に対する $\mathcal{C}(Ga', -)$ と交換する．故に $\operatorname{colim}^{F^\dagger y(c)} F$ の unit γ も G-cylinder である．従って，このような β と γ から得られる $\langle W, S \rangle$ をすべて集めたものを Φ とすれば $\mathcal{C}$ は $\mathcal{A}$ の Φ-閉包である．よって定理 240 より $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}$ は稠密である． □

10 V が良い条件を満たす場合

この節では V に対する以下の条件を考える．

(1) 関手 $\mathrm{Hom}_V(I, -) \colon V \to \mathbf{Set}$ は忠実である．
(2) 関手 $\mathrm{Hom}_V(I, -) \colon V \to \mathbf{Set}$ は conservative である．
(3) 関手 $\mathrm{Hom}_V(I, -) \colon V \to \mathbf{Set}$ は conservative であり，かつ任意の対象 $x \in V$ に対してある関手 $S_x \colon J_x \to V$ が存在して次を満たす．
   - J_x は小圏で，任意の $j \in J_x$ に対して $S_x(j) = I$ である．
   - $\operatorname{colim} S_x = x$ である．

例えば $V = \mathbf{Set}, \mathbf{Ab}, R\text{-}\mathbf{Mod}$ などはこの条件 (3) を満たすが，$\mathbf{Cat}$ はどれも満たさない．この条件があると，V-豊穣圏 $\mathcal{C}$ を考えるときに $\mathcal{C}$ の射のみを考えればよい場面が出てくる．

定義. 圏 C の対象 $a \in C$ が generator
$\iff$ $f, g \colon b \to c$ とする．任意の $h \colon a \to b$ に対して $f \circ h = g \circ h$ ならば $f = g$ である．

命題 242. 条件 (1) $\iff$ $I \in V$ が generator.

証明. 定義より明らか. □

命題 243. 条件 (2) $\iff$ $I \in V$ が定める関手 $I \colon \mathbb{1} \to V$ が strongly generating.

証明. $I^\dagger y \cong \mathrm{Hom}_V(I, -)$ となるから，strongly generating の定義より明らか. □

補題 244. $F \colon C \to D$ を (通常の) 関手として C は equalizer を持ち F は equalizer と交換するとする．このとき F が conservative ならば F は忠実である．

証明. $f, g \colon a \to b$ が C の射で $Ff = Fg$ とする．C が equalizer を持つから f, g の

equalizer

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "e"] & a \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & b \end{tikzcd}$$

が存在する．F がこれと交換するから

$$\begin{tikzcd} Fx \arrow[r, "Fe"] & Fa \arrow[r, shift left, "Ff"] \arrow[r, shift right, "Fg"'] & Fb \end{tikzcd}$$

も equalizer である．一方 $Ff = Fg$ より，この equalizer は id_{Fa} だから，次の同型射 h が存在する．

$$\begin{tikzcd} & Fx \arrow[r, "Fe"] & Fa \arrow[r, shift left, "Ff"] \arrow[r, shift right, "Fg"'] & Fb \\ Fa \arrow[ur, dashed, "h"] \arrow[urr, "\mathrm{id}"'] & & & \end{tikzcd}$$

故に $Fe = h^{-1}$ も同型となるから，F が conservative であることより e も同型である．従って $f = g$ となる． $\square$

命題 245. 条件 (2) $\Longrightarrow$ 条件 (1).

証明. 補題 244 より明らか． $\square$

命題 246. 条件 (1) を仮定する．$F, G\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ を V-関手，$\theta = \{\theta_a\colon Fa \xrightarrow{\scriptscriptstyle V} Ga\}_{a \in \mathcal{C}}$ を $\mathcal{D}$ の射の族とする．このとき

$$\theta \text{ が } V\text{-自然変換となる} \iff \text{任意の } \mathcal{C} \text{ の射 } f\colon a \xrightarrow{\scriptscriptstyle V} b \text{ に対して } \theta_b \circ Ff = Gf \circ \theta_a.$$

$$\begin{tikzcd} Fa \arrow[r, "\theta_a", "V" marking] \arrow[d, "Ff"', "V" marking] & Ga \arrow[d, "Gf", "V" marking] \\ Fb \arrow[r, "\theta_b"', "V" marking] & Gb \end{tikzcd}$$

(従ってこの場合 V-自然変換 $F \Rightarrow G$ は自然変換 $U(F) \Rightarrow U(G)$ と同一視できる．)

証明. $\mathcal{C}$ の射 $f\colon a \nrightarrow b$ に対して次の図式を考える.

$$
\begin{tikzcd}
 & I \otimes I \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes f"] & I \otimes \mathcal{C}(a,b) \arrow[r, "\theta_b \otimes F_{ab}"] & \mathcal{D}(Fb,Gb) \otimes \mathcal{D}(Fa,Fb) \arrow[dr, "m"] & \\
I \arrow[ur, "\lambda^{-1}"] \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\rho^{-1}"'] \arrow[rrrr, bend left=60, "\theta_b \circ Ff"] \arrow[rrrr, bend right=60, "Gf \circ \theta_a"'] & \arrow[u, phantom, "(\lambda)"] \arrow[d, phantom, "(\rho)"] & \mathcal{C}(a,b) \arrow[u, "\lambda^{-1}"] \arrow[d, "\rho^{-1}"'] \arrow[r, phantom, "(\theta)"] & \arrow[u, phantom, "(*)"', shift left=8] \arrow[d, phantom, "(*)", shift right=8] & \mathcal{D}(Fa,Gb) \\
 & I \otimes I \arrow[r, "f\otimes \mathrm{id}"'] & \mathcal{C}(a,b) \otimes I \arrow[r, "G_{ab} \otimes \theta_a"'] & \mathcal{D}(Ga,Gb) \otimes \mathcal{D}(Fa,Ga) \arrow[ur, "m"'] &
\end{tikzcd}
$$

(λ), (ρ) は λ, ρ の自然性により可換である. $(*)$ は $\mathcal{D}$ の射の合成の定義より可換である.

($\Longrightarrow$) θ が V-自然変換であるとすると定義より (θ) が可換である. よって図式全体が可換であり, $\theta_b \circ Ff = Gf \circ \theta_a$ が分かる.

($\Longleftarrow$) 任意の $\mathcal{C}$ の射 $f\colon a \nrightarrow b$ に対して $\theta_b \circ Ff = Gf \circ \theta_a$ とすると, 上記の図式と I が generator であることから (θ) の可換性が分かる. □

命題 247. 条件 (2) を仮定する. $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ を V-関手とするとき

$$F \text{ が } V\text{-忠実充満} \Longleftrightarrow U(F) \text{ が忠実充満.}$$

証明. 明らか. □

命題 248. 条件 (2) を仮定する. $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ を V-関手とするとき

$$F \text{ が右随伴を持つ} \Longleftrightarrow U(F) \text{ が右随伴を持つ.}$$

証明. ($\Longrightarrow$) $U\colon V\text{-}\mathbf{CAT} \to \mathbf{CAT}$ が strict 2-functor だから明らか.

($\Longleftarrow$) $U(F)$ の右随伴を $G_0\colon U\mathcal{D} \to U\mathcal{C}$ とする. 即ち $c \in U\mathcal{C}$, $d \in U\mathcal{D}$ について自然な全単射 $\varphi_{cd}\colon \mathrm{Hom}_{U\mathcal{C}}(c, G_0(d)) \to \mathrm{Hom}_{U\mathcal{D}}(UF(c), d)$ が存在する. ε を $U(F) \dashv G_0$ の counit とする. $d \in U\mathcal{D}$ に対して $\varepsilon_d\colon UF(G_0(d)) \to d$ (即ち $\mathcal{D}$ の射 $FG_0(d) \nrightarrow d$) であり, φ_{cd} は合成

$$\mathrm{Hom}_{U\mathcal{C}}(c, G_0(d)) \xrightarrow{U(F)} \mathrm{Hom}_{U\mathcal{D}}(UF(c), UF(G_0(d))) \xrightarrow{\varepsilon_d \circ -} \mathrm{Hom}_{U\mathcal{D}}(UF(c), d)$$

と一致する. そこで V の射 θ_c を合成

$$\mathcal{C}(c, G_0(d)) \xrightarrow{F_{c,G_0(d)}} \mathcal{D}(Fc, FG_0(d)) \xrightarrow{\varepsilon_d \circ -} \mathcal{D}(Fc, d)$$

で定めると $\mathrm{Hom}_V(I,\theta_c)=\varphi_{cd}$ となる．よって条件 (2) より θ_c は同型である．また θ_c は命題 77 と補題 92 より $c\in\mathcal{C}$ について自然である．従って $d\in\mathcal{D}$ に対して $\mathcal{D}(F-,d)$ は表現可能である．故に系 120 より，ある V-関手 $G\colon\mathcal{D}\to\mathcal{C}$ が存在して $F\dashv G$ となることが分かる． □

命題 249. 条件 (2) を仮定する．$\mathcal{C}$ を V-豊穣圏，J を圏，$S\colon J\to U(\mathcal{C})$ を関手として余極限 $\operatorname{colim}S$ が存在するとする．このとき $\operatorname{colim}^{\widetilde{\Delta I}}\widetilde{S}$ も存在して $\operatorname{colim}^{\widetilde{\Delta I}}\widetilde{S}\cong\operatorname{colim}S$ となる．

証明. $\operatorname{colim}S$ が存在するとすれば，任意の $a\in\mathcal{C}$ に対して

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_V(I,\mathcal{C}_0(\operatorname{colim}S,a))&\cong\mathrm{Hom}_{U\mathcal{C}}(\operatorname{colim}S,a)\\&\cong\lim\mathrm{Hom}_{U\mathcal{C}}(S-,a)\\&\cong\lim\mathrm{Hom}_V(I,\mathcal{C}_0(S-,a))\end{aligned}$$

となる．$\mathrm{Hom}_V(I,-)$ が conservative だから，$\lim\mathcal{C}_0(S-,a)$ が存在して $\lim\mathcal{C}_0(S-,a)\cong\mathcal{C}(\operatorname{colim}S,a)$ である．故に命題 190 の証明での議論により $\widehat{FJ}(\widetilde{\Delta I}-,\mathcal{C}(\widetilde{S}-,a))$ も存在して

$$\widehat{FJ}(\widetilde{\Delta I}-,\mathcal{C}(\widetilde{S}-,a))\cong\lim\mathcal{C}_0(S-,a)\cong\mathcal{C}(\operatorname{colim}S,a)$$

が分かる．故に $\operatorname{colim}^{\widetilde{\Delta I}}\widetilde{S}\cong\operatorname{colim}S$ である． □

命題 250. 条件 (3) を仮定する．このとき V-豊穣圏 $\mathcal{C}$ について，$U\mathcal{C}$ が余完備ならば $\mathcal{C}$ は copower を持つ．

証明. $c\in\mathcal{C}$，$x\in\mathcal{V}$ とする．条件 (3) の S_x を取る．$j\in J_x$ に対して

$$\mathrm{Hom}_V(S_x(j),\mathcal{C}(c,a))=\mathrm{Hom}_V(I,\mathcal{C}(c,a))=\mathrm{Hom}_{U\mathcal{C}}(c,a)$$

であり，これは $a\in U\mathcal{C}$ について自然である．よって定理 114 より，関手 $S'\colon J_x\to U\mathcal{C}$ が存在して

$$\mathrm{Hom}_V(S_x-,\mathcal{C}(c,a))\cong\mathrm{Hom}_{U\mathcal{C}}(S'-,a)$$

となる．このとき $a \in \mathcal{C}$ について自然に

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_V(I, [x, \mathcal{C}(c, a)]) &= \mathrm{Hom}_V(x, \mathcal{C}(c, a)) \\ &\cong \mathrm{Hom}_V(\operatorname{colim} S_x, \mathcal{C}(c, a)) \\ &\cong \lim \mathrm{Hom}_V(S_x -, \mathcal{C}(c, a)) \\ &\cong \lim \mathrm{Hom}_{U\mathcal{C}}(S' -, a) \\ &\cong \mathrm{Hom}_{U\mathcal{C}}(\operatorname{colim} S', a) \\ &= \mathrm{Hom}_V(I, \mathcal{C}(\operatorname{colim} S', a))\end{aligned}$$

となる．今 $\mathrm{Hom}_V(I, -)$ が conservative だから $[x, \mathcal{C}(c, a)] \cong \mathcal{C}(\operatorname{colim} S', a)$ となり $\mathcal{C}$ は copower を持つ． □

定理 251. 条件 (3) を仮定する．V-豊穣圏 $\mathcal{C}$ について，$U\mathcal{C}$ が余完備ならば $\mathcal{C}$ は V-余完備である．

証明. 命題 249 より $\mathcal{C}$ は conical colimit を持つ．また命題 250 より $\mathcal{C}$ は copower を持つ．よって定理 196 より $\mathcal{C}$ は V-余完備である． □

命題 252. 条件 (3) を仮定する．更に，コンパクトな $x \in \mathcal{V}$ に対して，条件 (3) の J_x は有限であるとする．このとき V-豊穣圏 $\mathcal{C}$ について，$U\mathcal{C}$ が有限余完備ならば $\mathcal{C}$ は有限 V-余完備である．

証明. 命題 249 より $\mathcal{C}$ は有限 conical colimit を持つ．また命題 250 の証明を追えば $\mathcal{C}$ は有限 copower を持つことが分かる．よって命題 210 より $\mathcal{C}$ は V-余完備である． □

参考文献

[1] G.M. Kelly, Basic Concepts of Enriched Category Theory, Cambridge University Press, Lecture Notes in Mathematics 64 (1982), `http://tac.mta.ca/tac/reprints/articles/10/tr10abs.html`

[2] G.M. Kelly, Structures defined by finite limits in the enriched context, I, Cahiers de Topologie et Géométrie Différentielle Catégoriques, Tome 23 (1982) no. 1, 3–42, `http://www.numdam.org/item/?id=CTGDC_1982__23_1_3_0`

[3] F. W. Lawvere, Metric spaces, generalized logic and closed categories, Rendiconti del Seminario Matematico e Fisico di Milano, 43 (1973), 135–166, `http://www.tac.mta.ca/tac/reprints/articles/1/tr1abs.html`