エンド

alg-d
http://alg-d.com/math/kan_extension/

2024 年 1 月 15 日

C, D を圏，$F, G\colon C \to D$ を関手とする．自然変換 $\theta\colon F \Rightarrow G$ とは，次の図式を可換にする射の族 $\{\theta_a\colon Fa \to Ga\}_{a\in C}$ であった．

$$\begin{tikzcd} a \arrow[d, "f"] & Fa \arrow[r, "\theta_a"] \arrow[d, "Ff"'] & Ga \arrow[d, "Gf"] \\ b & Fb \arrow[r, "\theta_b"'] & Gb \end{tikzcd}$$

$1 = \{*\}$ を一元集合とすれば，射の族 $\theta = \{\theta_a\colon Fa \to Ga\}_{a\in C}$ を与えることと，写像の族 $\sigma = \{\sigma_a\colon 1 \to \mathrm{Hom}_D(Fa, Ga)\}_{a\in C}$ を与えることは同じことである．θ が自然変換であるための条件を σ に翻訳すれば，自然変換とは任意の $f\colon a \to b$ に対して図式

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{Hom}_D(Fa, Ga) \arrow[dr, "Gf\circ -"] & \\ 1 \arrow[ur, "\sigma_a"] \arrow[dr, "\sigma_b"'] & & \mathrm{Hom}_D(Fa, Gb) \\ & \mathrm{Hom}_D(Fb, Gb) \arrow[ur, "-\circ Ff"'] & \end{tikzcd}$$

を可換にする σ のことだと言える．

定義． C, D を圏，$T\colon C^{\mathrm{op}} \times C \to D$ を関手とする．$x \in D$ から T への wedge とは，D の射の族 $\sigma = \{\sigma_a\colon x \to T(a, a)\}_{a\in C}$ であって，C の任意の射 $f\colon a \to b$ に対して次の図

式が可換となるものである．

$$\begin{tikzcd}
 & T(a,a) \arrow[dr, "T(\mathrm{id}_a, f)"] & \\
x \arrow[ur, "\sigma_a"] \arrow[dr, "\sigma_b"'] & & T(a,b) \\
 & T(b,b) \arrow[ur, "T(f, \mathrm{id}_b)"'] &
\end{tikzcd}$$

σ が x から T への wedge であることを記号で $\sigma\colon x \overset{\cdot\cdot}{\to} T$ と書くことにする．

定義． C, D を圏，$T\colon C^{\mathrm{op}} \times C \to D$ を関手とする．T から $x \in D$ への cowedge とは，D の射の族 $\sigma = \{\sigma_a\colon T(a,a) \to x\}_{a \in C}$ であって，C の任意の射 $f\colon a \to b$ に対して次の図式が可換となるものである．

$$\begin{tikzcd}
 & T(a,a) \arrow[dr, "\sigma_a"] & \\
T(b,a) \arrow[ur, "T(f, \mathrm{id}_a)"] \arrow[dr, "T(\mathrm{id}_b, f)"'] & & x \\
 & T(b,b) \arrow[ur, "\sigma_b"'] &
\end{tikzcd}$$

σ が T から x への cowedge であることを記号で $T \overset{\cdot\cdot}{\to} x$ と書くことにする．

例 1． $1 \in \mathbf{Set}$ から $\mathrm{Hom}_D(F-, G\square)$ への wedge が自然変換 $F \Rightarrow G$ である． □

定義． C, D を圏，$T\colon C^{\mathrm{op}} \times C \to D$ を関手とする．T のエンドとは組 $\langle e, \lambda \rangle$ で以下を満たすものである．

(1) $e \in D$ は対象である．
(2) $\lambda\colon e \overset{\cdot\cdot}{\to} T$ は wedge である．
(3) $\sigma\colon x \overset{\cdot\cdot}{\to} T$ を wedge とするとき，射 $p\colon x \to e$ が一意に存在して，$a \in C$ に対して $\lambda_a \circ p = \sigma_a$ となる．

$$\begin{tikzcd}
 & & T(a,a) \arrow[dr, "T(\mathrm{id}_a, f)"] & \\
x \arrow[urr, bend left, "\sigma_a"] \arrow[r, dashed, "p"'] \arrow[drr, bend right, "\sigma_b"'] & e \arrow[ur, "\lambda_a"] \arrow[dr, "\lambda_b"'] & & T(a,b) \\
 & & T(b,b) \arrow[ur, "T(f, \mathrm{id}_b)"'] &
\end{tikzcd}$$

このとき e を $\displaystyle\int_{a \in C} T(a,a)$ で表す．

双対的にコエンド $\displaystyle\int^{a\in C} T(a,a)$ も定義される．

例 2. 関手 $F,G\colon C\to D$ に対して $\displaystyle\int_{a\in C}\mathrm{Hom}_D(Fa,Ga)\cong\mathrm{Hom}_{D^C}(F,G)$ である．(つまり，射 $Fa\to Ga$ を積み重ねると自然変換 $F\Rightarrow G$ になるということであり，まさしく積分であろう．)

証明. $\lambda_a\colon \mathrm{Hom}_{D^C}(F,G)\to\mathrm{Hom}_D(Fa,Ga)$ を $\lambda_a(\beta):=\beta_a$ で定めれば，λ は wedge である．

$\sigma\colon x\xrightarrow{\cdot\cdot}\mathrm{Hom}_D(F-,G\square)$ を任意に取る．$a\in C$ に対して $\sigma_a\colon x\to\mathrm{Hom}(Fa,Ga)$ だから，$u\in x$ に対して $\sigma_a(u)\in\mathrm{Hom}(Fa,Ga)$ である．これにより自然変換 $\sigma_-(u)\colon F\Rightarrow G$ が定まるから，写像 $p\colon x\to\mathrm{Hom}(F,G)$ が $p(u):=\sigma_-(u)$ により得られる．このとき $\lambda_a\circ p=\sigma_a$ である．明らかにこのような p は一意に定まるから，$\displaystyle\int_{a\in C}\mathrm{Hom}_D(Fa,Ga)\cong\mathrm{Hom}_{D^C}(F,G)$ が分かった． $\square$

次は 3 変数の関手 $T\colon C^{\mathrm{op}}\times C\times X\to D$ を考える．$x\in X$ を固定すれば 2 変数の関手 $T(-,\square,x)\colon C^{\mathrm{op}}\times C\to D$ が得られるから，エンド $\int_a T(a,a,x)$ を考えることができる．任意の $x\in X$ に対してこのエンド $\int_a T(a,a,x)$ が存在したとすれば，対応 $X\ni x\mapsto\int_a T(a,a,x)\in D$ を考えることができる．

命題 3. C,D,X を圏，$T\colon C^{\mathrm{op}}\times C\times X\to D$ を関手とする．任意の $x\in X$ に対してエンド $\langle\int_a T(a,a,x),\lambda^x\rangle$ が存在すると仮定する．C の射 $f\colon a\to b$ と $x\in X$ に対して $\beta^f_x:=T(\mathrm{id}_a,f,\mathrm{id}_x)\circ\lambda^x_a$ とおく．

$$\begin{tikzcd}
 & T(a,a,x) \arrow[dr, "T(\mathrm{id}_a,f,\mathrm{id}_x)"] & \\
\int_a T(a,a,x) \arrow[ur, "\lambda^x_a"] \arrow[rr, dashed, "\beta^f_x"] \arrow[dr, "\lambda^x_b"'] & & T(a,b,x) \\
 & T(b,b,x) \arrow[ur, "T(f,\mathrm{id}_b,\mathrm{id}_x)"'] &
\end{tikzcd}$$

このとき関手 $F\colon X\to D$ が一意に存在して，以下を満たす．

(1) $x\in X$ に対して $\displaystyle F(x)=\int_{a\in C}T(a,a,x)$.

(2) $f\colon a\to b$ に対して，$\beta^f_x\colon Fx\to T(a,b,x)$ が自然変換 $F\Rightarrow T(a,b,-)$ を定める．

証明. X の射 $k\colon x \to z$ を考える．まず $f\colon a \to b$ に対して

$$\begin{tikzcd}
\int_a T(a,a,x) \arrow[r, "\lambda_a^x"] \arrow[d, "\lambda_b^x"'] & T(a,a,x) \arrow[d, "T(\mathrm{id}_a, f, \mathrm{id}_x)"] \\
T(b,b,x) \arrow[r, "T(f, \mathrm{id}_b, \mathrm{id}_x)"'] & T(a,b,x)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\int_a T(a,a,z) \arrow[r, "\lambda_a^z"] \arrow[d, "\lambda_b^z"'] & T(a,a,z) \arrow[d, "T(\mathrm{id}_a, f, \mathrm{id}_z)"] \\
T(b,b,z) \arrow[r, "T(f, \mathrm{id}_b, \mathrm{id}_z)"'] & T(a,b,z)
\end{tikzcd}$$

は可換である．また，k と T から D の射

$$T(\mathrm{id}_a, \mathrm{id}_a, k)\colon T(a,a,x) \to T(a,a,z)$$

等が得られるから，先の図式と組み合わせて次の実線による図式が得られる．

$$\begin{tikzcd}
 & \int_a T(a,a,z) \arrow[rr, "\lambda_a^z"] \arrow[dd] & & T(a,a,z) \arrow[dd, "T(\mathrm{id}_a, f, \mathrm{id}_z)"] \\
\int_a T(a,a,x) \arrow[ur, dashed, "Fk"] \arrow[rr] \arrow[dd, "\lambda_b^x"'] & & T(a,a,x) \arrow[ur] \arrow[dd] & \\
 & T(b,b,z) \arrow[rr] & & T(a,b,z) \\
T(b,b,x) \arrow[ur] \arrow[rr, "T(f, \mathrm{id}_b, \mathrm{id}_x)"'] & & T(a,b,x) \arrow[ur, "T(\mathrm{id}_a, \mathrm{id}_b, k)"'] &
\end{tikzcd}$$

これの実線部分は全て可換であるから，エンド $\int_a T(a,a,z)$ の普遍性により点線の射 $Fk\colon \int_a T(a,a,x) \to \int_a T(a,a,z)$ が得られる．このとき明らかに F は関手である．また明らかに $\beta^f\colon F \Rightarrow T(a,b,-)$ は自然変換である．エンドの普遍性から，このような F は明らかに一意である． □

4 変数の関手 $T\colon C^{\mathrm{op}} \times C \times X^{\mathrm{op}} \times X \to D$ を考える．C に関してエンドを取ることで関手 $\displaystyle\int_{a \in C} T(a,a,-,\square)\colon X^{\mathrm{op}} \times X \to D$ が得られるから，これのエンド

$$\int_{x \in X} \int_{a \in C} T(a,a,x,x)$$

を考えることができる．一方，同型 $C^{\mathrm{op}} \times C \times X^{\mathrm{op}} \times X \cong (C \times X)^{\mathrm{op}} \times (C \times X)$ により $T\colon (C \times X)^{\mathrm{op}} \times (C \times X) \to D$ とみなせば，エンド

$$\int_{\langle a,x \rangle \in C \times X} T(a,a,x,x)$$

も考えることができる．

定理 4 (Fubini の定理)**.** $T\colon C^{\mathrm{op}} \times C \times X^{\mathrm{op}} \times X \to D$ を関手として，任意の $x, z \in X$ に対してエンド $\displaystyle\int_{a\in C} T(a,a,x,z)$ が存在すると仮定する．このとき

$$\int_{\langle a,x\rangle \in C\times X} T(a,a,x,x) \cong \int_{x\in X}\int_{a\in C} T(a,a,x,x).$$

但しこの式は，片方が存在するならばもう片方も存在して同型となることを表す．

証明. 命題 3 で示したように，X の任意の射 $x \to z$ に対して次が可換である，

$$\begin{tikzcd}
\int_a T(a,a,x,x) \arrow[r] \arrow[d] & \int_a T(a,a,x,z) \arrow[d] \\
T(a,b,x,x) \arrow[r] & T(a,b,x,z)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\int_a T(a,a,z,z) \arrow[r] \arrow[d] & \int_a T(a,a,x,z) \arrow[d] \\
T(a,b,z,z) \arrow[r] & T(a,b,x,z)
\end{tikzcd}$$

また C の射 $a \to b$ に対して次が可換である．

$$\begin{tikzcd}
 & \int_a T(a,a,x,x) \arrow[dl] \arrow[d] \\
T(a,a,x,x) \arrow[r] & T(a,b,x,x)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & \int_a T(a,a,x,x) \arrow[dl] \arrow[d] \\
T(b,b,x,x) \arrow[r] & T(a,b,x,x)
\end{tikzcd}$$

これらを組み合わせて，次の可換図式を得る．

$$\begin{tikzcd}
 & & & T(b,b,z,z) \arrow[dd] \\
 & & \int_a T(a,a,z,z) \arrow[ur] \arrow[dr] \arrow[dd] & \\
 & & & T(a,b,z,z) \arrow[dd] \\
 & \int_a T(a,a,x,x) \arrow[r] \arrow[dl] \arrow[dr] & \int_a T(a,a,x,z) \arrow[dr] & \\
T(a,a,x,x) \arrow[r] & T(a,b,x,x) \arrow[r] & T(a,b,x,z) &
\end{tikzcd}$$

よって x に関する wedge $d \xrightarrow{\cdot\cdot} \int_a T(a,a,x,x)$ が与えられた時，$\langle a,x\rangle$ に関する wedge $d \xrightarrow{\cdot\cdot} T(a,a,x,x)$ が得られる．

逆に $\langle a,x\rangle$ に関する wedge $d \xrightarrow{\cdot\cdot} T(a,a,x,x)$ が与えられたとする．このとき $x \in X$ を固定すれば $a, b \in C$ に関する wedge $d \xrightarrow{\cdot\cdot} T(a,b,x,x)$ が得られる．従ってエンドの普遍

性により次の点線の射が得られる．

$$
\begin{tikzcd}
d \arrow[rrr] \arrow[dr, dashed] \arrow[ddd] \arrow[ddr, dashed] & & & T(b,b,z,z) \arrow[ddd] \\
& \int_a T(a,a,z,z) \arrow[ur] \arrow[dr] \arrow[dd] & & \\
& & T(a,b,z,z) \arrow[dd] & \\
& \int_a T(a,a,x,x) \arrow[r] \arrow[dl] \arrow[dr] & \int_a T(a,a,x,z) \arrow[dr] & \\
T(a,a,x,x) \arrow[rr] & & T(a,b,x,x) \arrow[rr] & & T(a,b,x,z)
\end{tikzcd}
$$

これにより x に関する wedge $d \xrightarrow{\cdots} \int_a T(a,a,x,x)$ が得られる．

以上の対応により

$$\int_{\langle a,x\rangle \in C\times X} T(a,a,x,x) \cong \int_{x\in X}\int_{a\in C} T(a,a,x,x).$$

が得られることが分かる． □

特に，各エンドが存在するという仮定の下で，積分の順序交換

$$\int_{x\in X}\int_{a\in C} T(a,a,x,x) \cong \int_{a\in C}\int_{x\in X} T(a,a,x,x)$$

が成り立つ．

エンドの定義から分かるように，エンドは以下のように極限で書くことが出来る．二つの直積

$$d := \prod_{a\in \mathrm{Ob}(C)} T(a,a), \quad d' := \prod_{f\in \mathrm{Mor}(C)} T(\mathrm{dom}(f),\mathrm{cod}(f))$$

を考え，

$$T(\mathrm{id}, f)\colon T(\mathrm{dom}(f),\mathrm{dom}(f)) \to T(\mathrm{dom}(f),\mathrm{cod}(f))$$

により得られる射を $s\colon d \to d'$,

$$T(f,\mathrm{id})\colon T(\mathrm{cod}(f),\mathrm{cod}(f)) \to T(\mathrm{dom}(f),\mathrm{cod}(f))$$

により得られる射を $t\colon d \to d'$ とする．このときエンド $\int_a T(a,a)$ は $s,t\colon d \to d'$ の equalizer である．故に

定理 5. C が小圏で，D が完備ならば，$T\colon C^{\mathrm{op}} \times C \to D$ のエンド $\int_a T(a,a) \in D$ が存在する． □

定理 6. 連続関手はエンドと交換する．即ち $F\colon D \to X$ を連続関手で $T\colon C^{\mathrm{op}} \times C \to D$ のエンド $\displaystyle\int_a T(a,a)$ が存在するとすれば $F\Big(\displaystyle\int_{a\in C} T(a,a)\Big) \cong \displaystyle\int_{a\in C} F(T(a,a))$． □

系 7. $\mathrm{Hom}_D\Big(d, \displaystyle\int_{c\in C} T(c,c)\Big) \cong \displaystyle\int_{c\in C} \mathrm{Hom}_D(d, T(c,c))$． □

D^{op} で考えれば $\mathrm{Hom}_D\Big(\displaystyle\int^{c\in C} T(c,c), d\Big) \cong \displaystyle\int_{c\in C^{\mathrm{op}}} \mathrm{Hom}_D(T(c,c), d)$ も分かる．

エンドは極限で書けたが，逆に極限はエンドで書くことが出来る．$F\colon J \to C$ を関手としたとき，$F(j,k) := F(k)$ とすることで F を $F\colon J^{\mathrm{op}} \times J \to C$ とみなすことができる．(即ち，射影 $P_2\colon J^{\mathrm{op}} \times J \to J$ との合成 $F \circ P_2$ を考えるのである．) このとき自然変換 $\theta\colon \Delta a \Rightarrow F$ は可換図式

$$\begin{tikzcd}
 & F(j) \arrow[dr, "F(\mathrm{id},f)=Ff"] & \\
a \arrow[ur, "\theta_j"] \arrow[dr, "\theta_k"'] & & F(k) \\
 & F(k) \arrow[ur, "F(f,\mathrm{id})=\mathrm{id}"'] &
\end{tikzcd}$$

を与える．よって $\displaystyle\int_{j\in J} F(j) = \lim F$ である．

定義. C を圏として，$a \in C$ と $x \in \mathbf{Set}$ を取る．

(1) x から $\mathrm{Hom}_C(a,-)$ への普遍射を $x \to \mathrm{Hom}_C(a,c)$ とするとき，c を copower object (もしくは tensor object) といい $x \odot a$ で表す．
(2) x から $\mathrm{Hom}_C(-,a)$ への普遍射を $x \to \mathrm{Hom}_C(c,a)$ とするとき，c を power object (もしくは cotensor object) といい $x \pitchfork a$ で表す．

普遍射の性質により

$$\mathrm{Hom}_C(x \odot a, b) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(x, \mathrm{Hom}_C(a,b))$$
$$\mathrm{Hom}_C(b, x \pitchfork a) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(x, \mathrm{Hom}_C(b,a))$$

である．また各対象 $a \in C$，$x \in \mathbf{Set}$ に対して $x \odot a$，$x \pitchfork a$ が存在すれば，これらは関

手 $\odot\colon \mathbf{Set} \times C \to C$，$\pitchfork\colon \mathbf{Set}^{\mathrm{op}} \times C \to C$ を定め，随伴

$$\begin{aligned} -\odot a &\dashv \mathrm{Hom}_C(a,-)\colon \mathbf{Set} \to C \\ -\pitchfork a &\dashv \mathrm{Hom}_C(-,a)\colon \mathbf{Set} \to C^{\mathrm{op}} \end{aligned}$$

が成り立つ (「随伴関手」の PDF を参照．).

例 8. $C = \mathbf{Set}$ の場合

$$-\times a \dashv \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(a,-)\colon \mathbf{Set} \to \mathbf{Set}$$

となるから $x \odot a \cong x \times a$ である．また

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(-,a) \dashv \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(-,a)\colon \mathbf{Set} \to \mathbf{Set}^{\mathrm{op}}$$

だから (「Kan 拡張」の PDF を参照) $x \pitchfork a \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(x,a) = a^x$ である． □

定理 9. C, D, U を圏，$F\colon C \to D$，$E\colon C \to U$ を関手として，各 $c, c' \in C$，$d \in D$ に対して copower $\mathrm{Hom}_D(Fc,d) \odot Ec'$ が存在するとする．更に各 $d \in D$ に対してコエンド $\displaystyle\int^{c\in C} \mathrm{Hom}_D(Fc,d) \odot Ec$ が存在するとする．このとき F に沿った E の各点左 Kan 拡張が存在する．

証明. $\displaystyle Td := \int^{c\in C} \mathrm{Hom}_D(Fc,d) \odot Ec$ とすると，命題 3 よりこれは関手 $T\colon D \to U$ を定める．このとき $d \in D$，$u \in U$ について自然に

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_U(Td,u) &= \mathrm{Hom}_U\Big(\int^{c\in C} \mathrm{Hom}_D(Fc,d) \odot Ec, u\Big) \\ &\cong \int_{c\in C^{\mathrm{op}}} \mathrm{Hom}_U(\mathrm{Hom}_D(Fc,d) \odot Ec, u) \\ &\cong \int_{c\in C^{\mathrm{op}}} \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(\mathrm{Hom}_D(Fc,d), \mathrm{Hom}_U(Ec,u)) \\ &\cong \mathrm{Hom}_{\widehat{C}}(\mathrm{Hom}_D(F-,d), \mathrm{Hom}_U(E-,u)) \end{aligned}$$

である．よって T は F に沿った E の各点左 Kan 拡張である． □

双対的に $\displaystyle F^{\ddagger}E \cong \int_{c\in C} \mathrm{Hom}_D(-,Fc) \pitchfork Ec$ である．