

余米田の補題

alg-d

http://alg-d.com/math/kan_extension/

2024年1月2日

$P: C^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$ を関手とする。米田の補題 $\text{Hom}_{\widehat{C}}(y(a), P) \cong Pa$ は右 Kan 拡張を使って以下のように示すことができる。

右 Kan 拡張 $\text{id}_C^\dagger P$ を考える。明らかに $\text{id}_C^\dagger P \cong P$ である。

$$\begin{array}{ccc} C^{\text{op}} & & \\ \text{id}_C \uparrow & \searrow \text{id}_C^\dagger P & \\ C^{\text{op}} & \xrightarrow{P} & \mathbf{Set} \end{array}$$

一方、 \mathbf{Set} は完備だから $\text{id}_C^\dagger P$ は各点右 Kan 拡張で書けるので、 $a \in C$ 、 $x \in \mathbf{Set}$ に対して

$$\text{Hom}_{\mathbf{Set}}(x, \text{id}_C^\dagger P(a)) \cong \text{Hom}_{\widehat{C}}(\text{Hom}_{C^{\text{op}}}(a, -), \text{Hom}_{\mathbf{Set}}(x, P-))$$

が成り立つ。故に $x = 1$ とすれば

$$\begin{aligned} Pa &\cong \text{id}_C^\dagger P(a) \cong \text{Hom}_{\mathbf{Set}}(1, \text{id}_C^\dagger P(a)) \\ &\cong \text{Hom}_{\widehat{C}}(\text{Hom}_{C^{\text{op}}}(a, -), \text{Hom}_{\mathbf{Set}}(1, P-)) \\ &\cong \text{Hom}_{\widehat{C}}(\text{Hom}_{C^{\text{op}}}(a, -), P-) \\ &\cong \text{Hom}_{\widehat{C}}(y(a), P) \end{aligned}$$

である。故に米田の補題が示された。

ところで、エンドによる右 Kan 拡張の計算 $F^\dagger E = \int_{c \in C} \text{Hom}_D(-, Fc) \pitchfork Ec$ を使え

ば, **Set** においては $x \pitchfork z \cong \text{Hom}_{\mathbf{Set}}(x, z)$ だから

$$\begin{aligned} P &\cong \text{id}^\dagger P \\ &\cong \int_{c \in C^{\text{op}}} \text{Hom}_{\mathbf{Set}}(\text{Hom}_{C^{\text{op}}}(-, \text{id}(c)), Pc) \\ &\cong \int_{c \in C^{\text{op}}} \text{Hom}_{\mathbf{Set}}(\text{Hom}_C(c, -), Pc) \\ &\cong \text{Hom}_{\widehat{C}}(y(-), P) \end{aligned}$$

となり, 米田の補題が得られる (但し, エンドによる計算は米田の補題を使って示したので, これは米田の補題の別証明にはならない). ここで, 右 Kan 拡張の代わりに左 Kan 拡張を使えば, 次の余米田の補題が得られる.

定理 1 (余米田の補題). 関手 $P: C^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$ に対して $P \cong \int^{c \in C^{\text{op}}} y(c) \times Pc$ である.

証明. $F^\dagger E = \int^{c \in C} \text{Hom}_D(Fc, -) \odot Ea$ であり (「エンド」の PDF を参照), また **Set** における copower は $x \odot z \cong x \times z$ である. よって

$$\begin{aligned} P &\cong \text{id}^\dagger P \\ &\cong \int^{c \in C^{\text{op}}} \text{Hom}_{C^{\text{op}}}(\text{id}(c), -) \times Pc \\ &\cong \int^{c \in C^{\text{op}}} y(c) \times Pc. \end{aligned}$$

□

従って $Pa \cong \int^{c \in C^{\text{op}}} \text{Hom}_C(a, c) \times Pc$ となる.

余米田の補題は $y^\dagger y \cong \text{id}$ を使って

$$P \cong y^\dagger y(P) \cong \int^{c \in C} \text{Hom}_{\widehat{C}}(y(c), P) \times y(c) \cong \int^{c \in C^{\text{op}}} y(c) \times Pc$$

と示すこともできる.