圏の構成例

alg-d
https://alg-d.com/math/kan_extension/

2025 年 1 月 12 日

例えば群の場合では，群 G, H が与えられたときに新しい群 $G \times H$ を構成することができた．ここでは圏が与えられたときに，新しい圏を構成する方法をいくつか紹介する．

定義. 圏 C, D の直積 $C \times D$ を以下のように定義する．

- 対象は「C の対象と D の対象の組」である．即ち $\mathrm{Ob}(C \times D) := \mathrm{Ob}(C) \times \mathrm{Ob}(D)$ となる．
- $\langle c, d \rangle$ から $\langle c', d' \rangle$ への射は成分ごとの射の組 $\langle f \colon c \to c', g \colon d \to d' \rangle$ である．つまり $\mathrm{Hom}_{C \times D}(\langle c, d \rangle, \langle c', d' \rangle) := \mathrm{Hom}_C(c, c') \times \mathrm{Hom}_D(d, d')$ となる．
- 射の合成は成分ごとに行う．即ち $\langle g, g' \rangle \circ \langle f, f' \rangle := \langle g \circ f, g' \circ f' \rangle$ となる．
- $\langle c, d \rangle$ の恒等射は $\mathrm{id}_{\langle c, d \rangle} := \langle \mathrm{id}_c, \mathrm{id}_d \rangle$ である．

この $C \times D$ が圏の定義を満たすことは殆ど明らかであろう．

例 1. 集合 X, Y を離散圏と見なして圏の直積 $X \times Y$ を考えると，X, Y の射は id しかないから，$X \times Y$ の射も id のみになる．従って $X \times Y$ も離散圏である．$\mathrm{Ob}(X \times Y) = \mathrm{Ob}(X) \times \mathrm{Ob}(Y)$ だったから，圏の直積 $X \times Y$ は直積集合 $X \times Y$ を離散圏とみなしたものである． □

例 2. モノイド M, N を圏とみなして圏の直積 $M \times N$ を考えると

$$\mathrm{Ob}(M \times N) = \mathrm{Ob}(M) \times \mathrm{Ob}(N) = \{*\} \times \{*\} = \{\langle *, * \rangle\}$$

だから $M \times N$ もモノイドとなる．圏の直積の定義から

$$\mathrm{Hom}_{M \times N}(\langle *, * \rangle, \langle *, * \rangle) = \mathrm{Hom}_M(*, *) \times \mathrm{Hom}_N(*, *) = M \times N$$

となるので，圏の直積 $M \times N$ はモノイドとしての直積 $M \times N$ を圏とみなしたものであ

る．特に，群 G, H の圏としての直積は，直積群 $G \times H$ を圏とみなしたものである． $\square$

例 3. 圏 $\mathbb{2} = \{0 \xrightarrow{f} 1\}$ を考える．直積 $\mathbb{2} \times \mathbb{2}$ は 4 個の対象 $\langle 0,0\rangle, \langle 0,1\rangle, \langle 1,0\rangle, \langle 1,1\rangle$ を持つ．$\mathbb{2}$ の射の数は 3 個だから，$\mathbb{2} \times \mathbb{2}$ の射は 9 個である．対象が 4 個だから，9 個の射のうち 4 個は恒等射である．残りの 5 個の射を図示すると次のようになる．

$$\begin{tikzcd}
\langle 0,0\rangle \arrow[r, "\langle \mathrm{id}_0, f\rangle"] \arrow[d, "\langle f, \mathrm{id}_0\rangle"'] \arrow[dr, "\langle f, f\rangle"] & \langle 0,1\rangle \arrow[d, "\langle f, \mathrm{id}_1\rangle"] \\
\langle 1,0\rangle \arrow[r, "\langle \mathrm{id}_1, f\rangle"'] & \langle 1,1\rangle
\end{tikzcd}$$

$\square$

集合などの直積では標準的な射影が与えられるが，圏の直積でも同様に「射影」を与える関手を定義することができる．圏 C, D に対して関手 $P\colon C \times D \to C$ を次のように定義する．

- 対象 $\langle c, d\rangle \in C \times D$ に対して $P(\langle c, d\rangle) := c$ とする．
- 射 $\langle f, g\rangle\colon \langle c, d\rangle \to \langle c', d'\rangle$ に対して $P(\langle f, g\rangle) := f$ とする．

P が関手となることは明らかであろう．これが C への射影である．D への射影も同様に定義できる．

定義. 圏 C, D の直和 $C \amalg D$ を以下のように定義する．

- $\mathrm{Ob}(C \amalg D) := \mathrm{Ob}(C) \sqcup \mathrm{Ob}(D)$ (非交和) である．
- a から b への射は以下のように定める．

$$\mathrm{Hom}_{C \amalg D}(a, b) := \begin{cases} \mathrm{Hom}_C(a, b) & (a, b \in C \text{ のとき}) \\ \mathrm{Hom}_D(a, b) & (a, b \in D \text{ のとき}) \\ \emptyset & (\text{それ以外のとき}) \end{cases}$$

- 射の合成は C, D の合成で行う．
- 恒等射は C, D の恒等射である．

例 4. 集合 X, Y を離散圏と見なして圏の直和 $X \amalg Y$ を考えると，これは X と Y の非交和 $X \sqcup Y$ を離散圏とみなしたものである． $\square$

次にスライス圏という構成方法を紹介する．

定義. C を圏，$x \in C$ を対象とする．スライス圏 (slice category もしくは over category) C/x を以下のように定義する．

- 対象は C の射 $f\colon a \to x$ である．
- $f\colon a \to x$ から $g\colon b \to x$ への射は，$g \circ h = f$ となるような射 $h\colon a \to b$ である．

$$\begin{tikzcd} a \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "f"'] & & b \arrow[dl, "g"] \\ & x & \end{tikzcd}$$

- 射の合成は C の合成で行う．
- 恒等射は C の恒等射である．

スライス圏と同じような方法でコスライス圏を得ることができる．

定義. C を圏，$x \in C$ を対象とする．コスライス圏 (coslice category もしくは under category) x/C を以下のように定義する．

- 対象は C の射 $f\colon x \to a$ である．
- $f\colon x \to a$ から $g\colon x \to b$ への射は，$h \circ f = g$ となるような射 $h\colon a \to b$ である．

$$\begin{tikzcd} & x \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "g"] & \\ a \arrow[rr, "h"'] & & b \end{tikzcd}$$

- 射の合成は C の合成で行う．
- 恒等射は C の恒等射である．

例 5. $1 \in \mathbf{Set}$ を 1 元集合として $\mathbf{Set}/1$ を考える．集合 X に対して写像 $f\colon X \to 1$ はただ 1 つしかない．よって $\mathrm{Ob}(\mathbf{Set}/1) = \mathrm{Ob}(\mathbf{Set})$ と見なしてよい．$X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Set}) = \mathrm{Ob}(\mathbf{Set}/1)$ を取ると，任意の $h\colon X \to Y$ に対して次の図式は可換である．

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "h"] \arrow[dr] & & Y \arrow[dl] \\ & 1 & \end{tikzcd}$$

よって任意の $h\colon X \to Y$ が $\mathbf{Set}/1$ の射となる．以上により $\mathbf{Set}/1 = \mathbf{Set}$ と見なせる (つまり正確に言えば圏同型 $\mathbf{Set}/1 \cong \mathbf{Set}$ となる) ことが分かる．

> ※ これはより正確に言えば，圏の同型 $\mathbf{Set}/1 \cong \mathbf{Set}$ が成り立っているということである．つまり関手 $F\colon \mathbf{Set}/1 \to \mathbf{Set}$ を
>
> - $\mathbf{Set}/1$ の対象 f に対して $F(f) := \mathrm{dom}(f) \in \mathbf{Set}$ とする．
> - $\mathbf{Set}/1$ の射 h に対して $F(h) := h$ とする．
>
> と定めれば，この F が同型 $\mathbf{Set}/1 \cong \mathbf{Set}$ を与えることが容易に分かる．

同様にして $\emptyset/\mathbf{Set} \cong \mathbf{Set}$ も分かる． □

例 6. 単位的可換環を対象，環準同型を射とする圏を $\mathbf{CRing}$ と書く．このとき $k \in \mathbf{CRing}$ に対して，コスライス圏 $k/\mathbf{CRing}$ は k-代数の圏である． □

例 7. $1 \in \mathbf{Top}$ を 1 点空間としたとき $1/\mathbf{Top} \cong \mathbf{Top}_*$ である[*1]． □

最後に部分圏というものを導入する．

定義. C, D を圏とする．C が D の部分圏 (subcategory) であるとは，$\mathrm{Ob}(C) \subset \mathrm{Ob}(D)$, $\mathrm{Mor}(C) \subset \mathrm{Mor}(D)$ であって，C におけるドメイン，コドメイン，合成，恒等射が D におけるそれと一致していることをいう．記号では $C \subset D$ と書く．

定義. 部分圏 $C \subset D$ が充満部分圏 (full subcategory) であるとは，任意の $a, b \in C$ に対して $\mathrm{Hom}_C(a,b) = \mathrm{Hom}_D(a,b)$ となることをいう．

例 8. 写像の合成を射の合成とすることで，以下のような圏 $\mathbf{Inj}, \mathbf{FinSet}, \mathbf{FinInj}$ を定めることができる．

- 集合を対象，単射を射とする圏を $\mathbf{Inj}$ とする．
- 有限集合を対象，写像を射とする圏を $\mathbf{FinSet}$ とする．
- 有限集合を対象，単射を射とする圏を $\mathbf{FinInj}$ とする．

このように定義したとき $\mathbf{FinInj} \subset \mathbf{Inj} \subset \mathbf{Set}$ と $\mathbf{FinInj} \subset \mathbf{FinSet} \subset \mathbf{Set}$ は部分圏である．更に $\mathbf{FinInj} \subset \mathbf{Inj}$ と $\mathbf{FinSet} \subset \mathbf{Set}$ は充満部分圏になっている． □

例 9. アーベル群を対象，群準同型を射とする圏を $\mathbf{Ab}$ と書く．アーベル群は群だから部

[*1] $\mathbf{Top}_*$ は基点付き位相空間の圏である．定義は「圏論とは何か」の PDF を参照．

分圏 $\mathbf{Ab} \subset \mathbf{Grp}$ となる．これは充満部分圏である． $\square$

例 10. 集合を離散圏とみなした時，部分圏とは部分集合のことである．またこの場合，部分圏は常に充満部分圏となる． $\square$

例 11. G を群，$H \subsetneq G$ を真の部分群として G, H を圏とみなせば $H \subset G$ は部分圏であるが充満部分圏ではない．また逆に $C \subset G$ を部分圏で $C \neq \mathbb{0}$ とすると，C はモノイドではあるが群であるとは限らない． $\square$

例 12. 圏 C に対して集まり $X \subset \mathrm{Ob}(C)$ が与えられたとき，部分圏 $D \subset C$ を

- $\mathrm{Ob}(D) := X$ とする．
- $a, b \in X$ に対して $\mathrm{Hom}_D(a, b) := \mathrm{Hom}_C(a, b)$ とする．

により定義することができる．これは明らかに充満部分圏である． $\square$