Zorn の補題・極大原理と選択公理

alg-d
http://alg-d.com/math/ac/

2015 年 12 月 20 日

定義. R を集合 X 上の二項関係とする.

1. R が反射的 $\iff$ 任意の $x \in X$ に対して xRx
2. R が反対称的 $\iff$ xRy かつ yRx ならば $x = y$
3. R が推移的 $\iff$ xRy かつ yRz ならば xRz
4. R が connected $\iff$ xRy または $x = y$ または yRx
5. R が前順序関係 $\iff$ R が反射的かつ推移的
6. R が順序関係 $\iff$ R が反対称的な前順序関係
7. R が全順序関係 $\iff$ R が connected な順序関係
8. $x \in X$ が極大元 $\iff$ 任意の $y \in X$ に対して「xRy ならば yRx」
9. $x \in X$ が最小元 $\iff$ 任意の $y \in X \setminus \{x\}$ に対して xRy
10. $x \in X$ が $Y \subset X$ の上界 $\iff$ 任意の $y \in Y \setminus \{x\}$ に対して yRx
11. R が整列順序関係 $\iff$ R が順序関係で，任意の $Y (\neq \emptyset) \subset X$ に対して (Y, R) が最小元を持つ.
12. X が有限性を持つ $\iff$「$x \in X \iff$ 任意の有限部分集合 $y \subset x$ に対して $y \in X$」
13. $x \in X$ に対して $x^{\downarrow} := \{y \in X \mid yRx\}$
14. $Y \subset X$ が鎖 $\iff$ (Y, R) が全順序集合
15. $R^{-1} := \{\langle a, b\rangle \in X \times X \mid \langle b, a\rangle \in R\}$
16. $\overline{R} := \{\langle a, b\rangle \in X \times X \mid \langle a, b\rangle \notin R\}$
17. $I := \{\langle a, a\rangle \in X \times X \mid a \in X\}$

定義. $(X, \leq)$ を順序集合とする.

1. $Y \subset X$ が反鎖 $\iff$ 任意の $x, y \in Y$ に対して「$x \neq y$ ならば $x \not\leq y,\ y \not\leq x$」

2. $(X, \leq)$ が ramified $\Longleftrightarrow$ 任意の元 $x \in X$ に対し $(x^{\downarrow}, \leq)$ が鎖になる

定理 1. 次の命題は (ZF 上) 同値.

1. Zorn の補題.
2. 集合 X 上の推移的関係 R に対して極大鎖 $Y \subset X$ が存在する.
3. 順序集合 $(X, \subset)$ は極大鎖を持つ.
4. 順序集合 $(X, \subset)$ が「任意の鎖 $C \subset X$ に対してある $x \in X$ が存在して，任意の $y \in C$ に対して $y \subset x$」を満たすならば，X の極大元が存在する.
5. 順序集合 $(X, \subset)$ が「任意の鎖 $C \subset X$ に対して $\displaystyle\bigcup_{y \in C} y \in X$」を満たすならば X は極大元を持つ.
6. 有限性をもつ非空集合 X は ($\subset$ に関する) 極大元をもつ．(Tukey の補題)
7. 任意の前順序集合 $(X, \leq)$ は極大鎖を持つ.
8. 任意の順序集合 $(X, \leq)$ は極大鎖を持つ．(Hausdorff's Maximal chain Condition)
9. 任意の順序集合 $(X, \leq)$ の任意の鎖は，X のある極大鎖に含まれる.
10. 任意の前順序集合 $(X, \leq)$ は極大反鎖を持つ.
11. 任意の順序集合 $(X, \leq)$ は極大反鎖を持つ．(Kurepa's Maximal Antichain Condition)

証明. ($1 \Longrightarrow 2$) R を集合 X 上の推移的関係とする．$L := \{Y \subset X \mid (Y, R)$ は鎖 $\}$ として，$\subset$ で L に順序を入れる．この $(L, \subset)$ は Zorn の補題の仮定を満たす.

$\because$) $C \subset L$ を鎖として，$Z := \displaystyle\bigcup_{Y \in C} Y$ と置く．(Z, R) が全順序集合である事を示す.

(i) 反射律

任意の $x \in Z$ を取る．Z の定義よりある $Y \in C$ が存在して $x \in Y$ となる．よって (Y, R) が順序集合であることより xRx である.

(ii) 反対称律

$x, y \in Z$ に対し xRy かつ yRx であるとする．Z の定義と C が鎖であることから $x, y \in Y$ となる $Y \in C$ の存在が分かる．このとき (Y, R) が順序集合であることより $x = y$.

(iii) 推移律

R が推移的関係であることから明らか.

(iv) connected

$x, y \in Z$ を取る．Z の定義と C が鎖であることから $x, y \in Y$ となる $Y \in C$ の存在

が分かる．このとき (Y,R) の全順序性から xRy または yRx である．

以上より (Z,R) は全順序である．故に $Z \in L$．従って Z は C の上界である．

よって Zorn の補題より極大元 $Y \in L$ が存在するが，これが極大鎖である．

$(2 \Longrightarrow 3)$ $\subset$ は推移的だから，仮定 2 より $\subset$ によって全順序付けされる極大部分集合が存在するが，これは明らかに $(X,\subset)$ の極大鎖である．

$(3 \Longrightarrow 4)$ 仮定 3 より極大鎖 $Y \subset X$ が存在する．この Y に 4 の仮定を適用すると，ある $x \in X$ が存在して，任意の $y \in Y$ に対して $y \subset x$ とできる．この x が X の極大元である．

$(4 \Longrightarrow 5)$ 明らか．

$(5 \Longrightarrow 6)$ X が有限性を持つとする．順序集合 $(X,\subset)$ が 5 の仮定を満たすことを示せばよい．$C \subset X$ を鎖として $x := \bigcup_{y \in C} y$ と置く．$z \subset x$ を任意の有限部分集合とする．x の定義と z が有限集合であることから $z \subset y_1 \cup y_2 \cup \cdots \cup y_n$ となる $y_i \in C$ が存在する．$(C,\subset)$ が全順序であるから $y := \max\{y_1, y_2, \cdots, y_n\}$ が存在して $z \subset y$ となることが分かる．$y \in C \subset X$，即ち $y \in X$ だから X が有限性を持つ事より $z \in X$ である．

従って再び X が有限性を持つ事から $x \in X$ である．

$(6 \Longrightarrow 7)$ $C := \{Y \subset X \mid Y$ は鎖 $\}$ は空ではない．明らかに C は有限性を持つので，Tukey の補題より極大元を持つ．

$(7 \Longrightarrow 8)$ は明らか．

$(8 \Longrightarrow 9)$ $C \subset X$ を鎖とする．

$$Y := \{y \in X \mid \text{任意の } x \in C \text{ に対して } x \leq y \text{ または } y \leq x\}$$

とする．明らかに $C \subset Y$ である．$(Y,\leq)$ は順序集合だから，仮定 8 より極大鎖 $D \subset Y$ を持つ．$C \subset D$ である．

$\because)$ $C \not\subset D$ と仮定する．$x \in C \setminus D$ が取れる．D の極大性より $D \cup \{x\} \subset Y$ は鎖ではない．故にある $y \in D \subset Y$ が存在して $x \not\leq y$ かつ $y \not\leq x$ となるが，それは Y の定義に矛盾する．

鎖 $\widetilde{C} \subset X$ が $D \subset \widetilde{C}$ を満たすとする．すると $C \subset D \subset \widetilde{C}$ だから Y の定義により $\widetilde{C} \subset Y$ である．即ち $\widetilde{C}$ は Y の鎖でもある．故に D の極大性により $\widetilde{C} = D$ である．即ち D は C を含む X の極大鎖である．

$(9 \Longrightarrow 8)$ 明らか．

$(8 \Longrightarrow 1)$ Zorn の補題と同値な整列可能定理を示す．その為に X を任意の集合とし

$A := \{f : \alpha \longrightarrow A \mid \alpha$ は順序数で f は単射 $\}$ と置く．$(A, \subset)$ は順序集合である．よって極大鎖 C を持つ．すると $g := \bigcup_{f \in C} f$ はある順序数から X への単射である．C の極大性から g は全射．故に X は整列可能である．

(6 $\Longrightarrow$ 10) $C := \{Y \subset X \mid Y$ は反鎖 $\}$ は空でない．明らかに C は有限性を持つので，Tukey の補題より極大元を持つ．

(10 $\Longrightarrow$ 11) 明らか.

(11 $\Longrightarrow$ 1) Zorn の補題と同値な整列可能定理を示す．その為に，整列可能定理と同値な「全順序集合は整列可能」を示す.

※ 整列可能定理についての定理 1 を参照.

$(X, \leq)$ を全順序集合とする．$A := \{(Y, y) \mid Y \subset X,\ y \in Y\}$ と置き，A の順序を

$$(Y, y) \leq (Z, z) \Longleftrightarrow Y = Z \text{ かつ } y \leq z$$

で定める．($y \leq z$ は X の順序である．) 仮定 11 より極大反鎖 $C \subset A$ が存在する．X は全順序だから，明らかに $C = \{(Y, f(Y)) \mid Y \in \mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\}\}$ と書ける．この f は $\mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\}$ の選択関数である．よって選択公理から整列可能定理を導くのと同様にして X が整列可能なことが分かる.

※ 整列可能定理と Zorn の補題の定理 1 を参照.

□

定義. X を集合とする．便宜上，次のように定める.

1. (X, R) が関係 $\Longleftrightarrow$ R は X 上の二項関係
2. (X, R) が推移 $\Longleftrightarrow$ R は X 上の推移的関係
3. (X, R) が反対称 $\Longleftrightarrow$ R は X 上の反対称的関係
4. (X, R) が連結 $\Longleftrightarrow$ R は X 上の connected な関係
5. (X, R) が順序 $\Longleftrightarrow$ (X, R) は順序集合
6. (X, R) が全 $\Longleftrightarrow$ (X, R) は全順序集合
7. (X, R) が整列 $\Longleftrightarrow$ (X, R) は整列順序集合
8. (X, R) が有向 $\Longleftrightarrow$ (X, R) は有向順序集合
9. (X, R) が分岐 $\Longleftrightarrow$ (X, R) は ramified な順序集合
10. (X, R) が森 $\Longleftrightarrow$ (X, R) は順序で，任意の $x \in X$ に対し $(x^{\downarrow}, R)$ が整列順序集合
11. (X, R) が木 $\Longleftrightarrow$ (X, R) が森で，最小元を持つ

12. (X,R) が推連 $\Longleftrightarrow$ (X,R) は推移かつ連結である
13. (X,R) が反連 $\Longleftrightarrow$ (X,R) は反対称かつ連結である

以上のように定めたとき，$\mathrm{MP}(P,Q)$ で命題

> X は任意の集合で，(X,R) は P であるとする．もし
> 任意の $Y \subset X$ に対して「(Y,R) が Q になるならば Y は X に上界を持つ」
> が成り立つならば，X は極大元を持つ．

を表す．例えば MP(順序, 全) は Zorn の補題である．

定理 2. Zorn の補題 $\Longleftrightarrow$ MP(推移, 整列)

証明. $\Longleftarrow$ は明らか．逆 $\Longrightarrow$ を示す．その為に定理 1 の 2 を用いる．

R を集合 X 上の推移的関係とし，任意の部分整列順序は上界を持つとする．部分集合 $Y \subset X$ に対して $Y^{\Downarrow} := \bigcup_{y \in Y} y^{\downarrow} = \{z \in X \mid$ ある $y \in Y$ が存在して $zRy\}$ と書くことにする．$\mathcal{W} := \{Y \subset X \mid (Y,R)$ は整列順序集合 $\}$ と置く．$\mathcal{W}$ 上の関係 $\leq$ を

$$Y \leq Z \Longleftrightarrow Y \subset Z \text{ かつ } Z \cap Y^{\Downarrow} \subset Y$$

と定める．$\leq$ は $\mathcal{W}$ の推移的関係である．

$\because$) $Y \leq Z$ かつ $Z \leq W$ であるとする．即ち $Y \subset Z \subset W$, $Z \cap Y^{\Downarrow} \subset Y$, $W \cap Z^{\Downarrow} \subset Z$ である．よって $Y \supset Z \cap Y^{\Downarrow} \supset (W \cap Z^{\Downarrow}) \cap Y^{\Downarrow} = W \cap Y^{\Downarrow}$ となるから $Y \leq W$ である．

故に定理 1 の 2 により極大鎖 $\mathcal{V} \subset (\mathcal{W}, \leq)$ が存在する．$Z := \bigcup_{Y \in \mathcal{V}} Y$ とする．明らかに (Z,R) は順序集合である．任意の $A (\neq \emptyset) \subset Z$ を取る．Z の定義からある $Y \in \mathcal{V}$ が存在して $Y \cap A \neq \emptyset$ である．$Y \in \mathcal{V} \subset \mathcal{W}$ だから, (Y,R) は整列順序．よって $x := \min(Y \cap A)$ が存在する．この x は A の最小元でもある．

$\because$) $y \in A$, $y \neq x$ とする．

(i) $y \in Y$ のとき．明らかに xRy である．

(ii) $y \notin Y$ のとき．ある $Y' \in \mathcal{V}$ について $y \in Y'$ となるが，$(\mathcal{V}, \leq)$ は鎖であるから $Y \leq Y'$ でなければならない．従って $Y' \cap Y^{\Downarrow} \subset Y$ であるから $y \notin Y^{\Downarrow}$ である．よって，$x \in Y$ だから $\neg yRx$ である．$x, y \in Y'$ で (Y', R) が鎖であることから xRy でなけらばならない．

(i)(ii) より x は A の最小元である．

よって (Z,R) は整列順序集合である事が分かる．故に $Z \in \mathcal{W}$ である．この Z は $(\mathcal{W},\le)$ の極大元である．

∵) $W \in \mathcal{W}$ が $Z \le W$ を満たすとする．Z の定義から，任意の $Y \in \mathcal{V}$ に対し $Y \le Z$，よって $Y \le W$ である．即ち $\mathcal{V} \cup \{W\}$ は $(\mathcal{W},\le)$ の鎖である．$\mathcal{V}$ の極大性から $\mathcal{V} = \mathcal{V} \cup \{W\}$ となる，従って $W \in \mathcal{V}$，よって $W \le Z$ となる．即ち Z は極大元である．

$(Z,R) \subset X$ は整列順序だったから，MP(推移, 整列) の仮定により Z の上界 $x \in X$ が存在する．

$y \in X$ が xRy を満たすとする．勿論 y は Z の上界である．yRz となる $z \in Z$ が存在する．

∵) 「全ての $z \in Z$ に対し $\neg yRz$」と仮定する．$(Z \cup \{y\}, R)$ は整列順序だから，$Z \in \mathcal{W}$ の極大性から $Z = Z \cup \{y\}$ である．従って $y \in Z$，故に $\neg yRy$ である．一方 x が Z の上界であることから yRx であり，ゆえに xRy から yRy となり矛盾する．

このとき推移律から xRz である．すると x が Z の上界であることから $z = x$ または zRx であるが，どちらにしても yRx である．従って x が (X,R) の極大元であることが分かった． □

定理 3. P,Q が次のいずれかであるとき，MP(P,Q) は Zorn の補題と同値である．

$$P = \text{推移}, \text{順序}, \text{分岐}, \text{森}$$
$$Q = \text{連結}, \text{反連}, \text{推連}, \text{全}, \text{有向}, \text{整列}$$

証明. まず，定理 2 で示したように Zorn の補題 $\Longleftrightarrow$ MP(推移, 整列) である．次に，MP(森, 有向) $\Longrightarrow$ MP(森, 連結) である．

∵) $(X,\le)$ を森とし，X の任意の部分連結集合が上界を持つとする．$Y \subset X$ を部分有向集合とする．$x,y \in Y$ とすると，Y は有向集合だからある $z \in Y$ が存在して $x \le z$, $y \le z$ である．よって $x,y \in z^{\downarrow} \subset X$ であり，今 X は森だから $z^{\downarrow}$ は整列順序集合．故に $x \le y$ または $y \le x$ である．即ち，Y は連結である．従って上界を持つ．故に仮定の MP(森, 有向) から X は極大元を持つ．

$P \Longrightarrow P'$, $Q \Longrightarrow Q'$ であれば MP$(P',Q) \Longrightarrow$ MP(P,Q)，MP$(P,Q) \Longrightarrow$ MP(P,Q')

である．また $P \Longrightarrow Q$ であることを $P \longrightarrow Q$ と書いて図示すると次のようになる．

$$
\begin{tikzcd}
 & & \text{分岐} \arrow[r] & \text{順序} \arrow[ddd] & & \\
\text{整列} \arrow[r] \arrow[dr] & \text{森} \arrow[ur] & \text{有向} \arrow[ur] & & \text{反対称} \arrow[dr] & \\
 & \text{全} \arrow[uur] \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & \text{反連} \arrow[urr] \arrow[rr] & & \text{連結} \arrow[r] & \text{任意} \\
 & & \text{推連} \arrow[urr] \arrow[r] & \text{推移} \arrow[urr] & &
\end{tikzcd}
$$

以上により次の図式が分かる．

$$
\begin{tikzcd}
\text{選択公理} \arrow[d, leftrightarrow] & & & & & \\
\mathrm{MP}(\text{推移}, \text{整列}) \arrow[r] \arrow[ddd] & \mathrm{MP}(\text{推移}, \text{全}) \arrow[rrr] \arrow[drr] \arrow[ddr] \arrow[ddd] & & & \mathrm{MP}(\text{推移}, \text{推連}) \arrow[ddr] \arrow[ddd] & \\
 & & & \mathrm{MP}(\text{推移}, \text{有向}) \arrow[ddd, dashed] & & \\
 & & \mathrm{MP}(\text{推移}, \text{反連}) \arrow[rrr] \arrow[ddd] & & & \mathrm{MP}(\text{推移}, \text{連結}) \arrow[ddd] \\
\mathrm{MP}(\text{推移}, \text{整列}) \arrow[r] \arrow[ddd] & \mathrm{MP}(\text{推移}, \text{全}) \arrow[rrr] \arrow[drr] \arrow[ddr] \arrow[ddd] & & & \mathrm{MP}(\text{推移}, \text{推連}) \arrow[ddr] \arrow[ddd] & \\
 & & & \mathrm{MP}(\text{推移}, \text{有向}) \arrow[ddd, dashed] & & \\
 & & \mathrm{MP}(\text{推移}, \text{反連}) \arrow[rrr] \arrow[ddd] & & & \mathrm{MP}(\text{推移}, \text{連結}) \arrow[ddd] \\
\mathrm{MP}(\text{分岐}, \text{整列}) \arrow[r] \arrow[ddd] & \mathrm{MP}(\text{分岐}, \text{全}) \arrow[rrr] \arrow[drr] \arrow[ddr] \arrow[ddd] & & & \mathrm{MP}(\text{分岐}, \text{推連}) \arrow[ddr] \arrow[ddd] & \\
 & & & \mathrm{MP}(\text{分岐}, \text{有向}) \arrow[ddd, dashed] & & \\
 & & \mathrm{MP}(\text{分岐}, \text{反連}) \arrow[rrr] \arrow[ddd] & & & \mathrm{MP}(\text{分岐}, \text{連結}) \arrow[ddd] \\
\mathrm{MP}(\text{森}, \text{整列}) \arrow[r] & \mathrm{MP}(\text{森}, \text{全}) \arrow[rrr] \arrow[drr] \arrow[ddr] & & & \mathrm{MP}(\text{森}, \text{推連}) \arrow[ddr] & \\
 & & & \mathrm{MP}(\text{森}, \text{有向}) \arrow[drr] & & \\
 & & \mathrm{MP}(\text{森}, \text{反連}) \arrow[rrr] & & & \mathrm{MP}(\text{森}, \text{連結})
\end{tikzcd}
$$

よって後は MP(森, 連結) $\Longrightarrow$ MP(推移, 整列) を示せばよい．

(X, R) を推移とし，X の任意の部分整列順序が上界を持つとする．$\mathcal{W} := \{Y \subset X \mid (R, \leq)$ は整列順序 $\}$ と置く．$\mathcal{W}$ の二項関係 $\leq$ を

$$Y \leq Z \Longleftrightarrow Y = Z \text{ またはある } z \in Z \text{ が存在して } Y = z^{\downarrow}$$

と定める．すると $(\mathcal{W}, \leq)$ は森である．連結部分集合 $\mathcal{V} \subset \mathcal{W}$ を取ると，明らかに $\displaystyle\bigcup_{Y \in \mathcal{V}} Y$ が $\mathcal{V}$ の上界である．故に MP(森, 連結) により $\mathcal{W}$ は極大元 $Y \in \mathcal{W}$ を持つ．$Y \subset X$ は部分整列順序だから，上界 $x \in X$ を持つ．この x が X の極大元である．故に MP(推移, 整列) が示された． $\square$

定理 4. Zorn の補題 $\iff$ MP(有向, 整列)

証明. ($\Longrightarrow$) MP(推移, 整列) $\Longrightarrow$ MP(有向, 整列) であるから明らか.

($\Longleftarrow$) MP(有向, 整列) $\Longrightarrow$ MP(森, 整列) を示せばよい.

$(X, \leq)$ を森として，X の部分整列順序は上界を持つとする.

X は整列可能でないと仮定する．$\mathcal{W} := \{(Y, R) \mid Y \subset X,\ (Y, R)$ は整列順序 $\}$ と置く．$\mathcal{W}$ の順序 $\sqsubset$ を

$$(Y, R) \sqsubset (Z, S) \iff Y \subsetneq Z \text{ または } (Y = Z \text{ かつ } R = S)$$

で定める．$(\mathcal{W}, \sqsubset)$ は有向集合である.

$\because$) $(Y, R), (Z, S) \in \mathcal{W}$ とする.

(i) $Y \neq Z$ のとき.

$V := Y \cup Z$ として，V 上の整列順序 T を

$$aTb \iff \begin{cases} a, b \in Y \text{ かつ } aRb \\ \text{または } a, b \in Z \setminus Y \text{ かつ } aSb \\ \text{または } a \in Y \text{ かつ } b \in Z \setminus Y \end{cases}$$

で定めれば $(V, T) \in \mathcal{W}$, $(Y, R) \sqsubset (V, T)$, $(Z, S) \sqsubset (V, T)$ である.

(ii) $Y = Z$ のとき.

X は整列可能でないから, $Y \subsetneq X$ である．そこで $x \in X \setminus Y$ を一つ取り $V := Y \cup \{x\}$ と置く．V 上の整列順序 T を

$$aTb \iff (a, b \in Y \text{ かつ } aRb) \text{ または } b = x$$

で定めれば $(V, T) \in \mathcal{W}$, $(Y, R) \sqsubset (V, T)$, $(Z, S) \sqsubset (V, T)$ である.

$\mathcal{V} \subset (\mathcal{W}, \sqsubset)$ を部分整列順序とする．$Z := \bigcup_{(Y,R) \in \mathcal{V}} Y$ と置く．$z \in Z$ に対して $(Y_z, R_z) := \sqsubset\text{-}\min\{(Y, R) \in \mathcal{V} \mid z \in Y\}$ とする．Z の順序 S を

$$zSw \iff ((Y_z, R_z) \sqsubset (Y_w, R_w) \text{ かつ } Y_z \neq Y_w) \text{ または } ((Y_z, R_z) = (Y_w, R_w) \text{ かつ } zR_z w)$$

で定めると，(Z, S) は整列順序である．故に $(Z, S) \in \mathcal{W}$ は $\mathcal{V}$ の上界である．故に仮定の MP(有向, 整列) により $(\mathcal{W}, \sqsubset)$ は極大元 (Y, R) を持つ．このとき明らかに $Y = X$ であり，X が整列可能でないことに矛盾する.

従って X は整列可能である．(X, R) を整列順序とする．$|\lambda| \not\leq |X|$ を満たす順序数 λ

を取る．X に含まれない元 $\infty \notin X$ を一つ取っておく．$f\colon \lambda \longrightarrow X \cup \{\infty\}$ を

$$f(\alpha) := \begin{cases} R\text{-}\min\bigl\{x \in X \setminus \{f(\beta) \mid \beta < \alpha\} \bigm| \text{任意の } \beta < \alpha \text{ に対して } f(\beta) \leq x\bigr\} \\ \qquad \text{(このような最小元が存在するとき)} \\ \infty \quad \text{(最小元が存在しないとき)} \end{cases}$$

で定める．f の定義から，$f(\alpha) = f(\beta) \neq \infty$ ならば $\alpha = \beta$ である．λ の取り方から f は単射でないので，$f(\alpha) = \infty$ となる $\alpha < \lambda$ は存在する．そこで $\gamma := \min\{\alpha < \lambda \mid f(\alpha) = \infty\}$ と置く．$Y := \{f(\beta) \mid \beta < \gamma\}$ とすれば $Y \subset (X, \leq)$ は部分整列順序である．故に上界 $x \in X$ を持つ．このとき x が極大元である． □

定理 5. 次の命題は (ZF 上) 同値.

1. Zorn の補題.
2. 順序集合 X が「X の部分整列順序は上界を持つ」を満たすならば，X の極大元が存在する.
3. 順序集合 X が「X の部分整列順序は上限を持つ」を満たすならば，X の極大元が存在する.
4. 順序集合 X が「X の鎖は上限を持つ」を満たすならば，X の極大元が存在する.
5. 順序集合 $(X, \subset)$ が「任意の部分整列順序 $Y \subset X$ に対して $\displaystyle\bigcup_{y \in Y} y \in X$」を満たすならば X は極大元を持つ.

証明. 2 は MP(順序, 整列) だから，定理 3 により 1$\Longleftrightarrow$2 である．また 2$\Longrightarrow$3，3$\Longrightarrow$4，3$\Longrightarrow$5 は明らか.

4$\Longrightarrow$1 と 5$\Longrightarrow$1 は定理 1 の条件 5 が成り立つことから分かる． □

MS(P, Q) で命題

(X, R) が P のとき，集合 $\{Y \subset X \mid (Y, R)$ は Q である $\}$ は $\subset$ に関する極大元を持つ

を表すとする.

定理 6. 次の (P, Q) に対して Zorn の補題 $\Longleftrightarrow$ MS(P, Q) である.

- $P =$ 関係，推移，$Q =$ 反対称，連結，反連，推連，順序，全，有向，分岐
- $P =$ 反対称，$Q =$ 連結，反連，推連，全，有向，分岐
- $P =$ 連結，$Q =$ 反対称，連結，順序，全，有向，分岐
- $P =$ 順序，$Q =$ 連結，反連，推連，全，有向，分岐

- $P =$ 有向，$Q =$ 連結，反連，推連，全，分岐
- $P =$ 分岐，$Q =$ 連結，反連，推連，全，有向
- $P =$ 森，$Q =$ 連結，反連，推連，全，有向，整列

証明. (1) $P \Longrightarrow P'$ ならば $\mathrm{MP}(P', Q) \Longrightarrow \mathrm{MP}(P, Q)$ である．

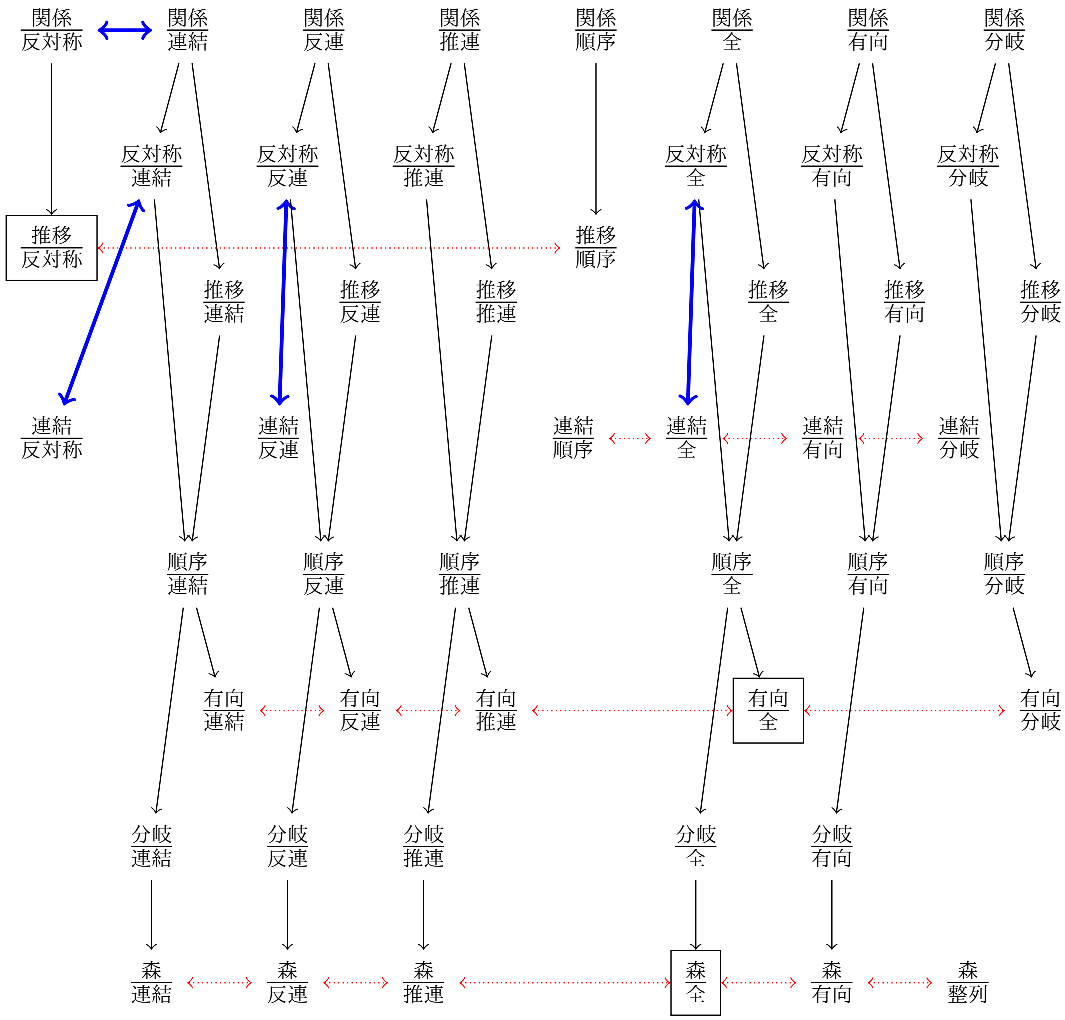
(2) 関係 $R \subset X \times X$ に対して「(X, R) が連結 $\Longleftrightarrow$ $(X, \bar{R})$ が反対称」「$(X, R \cup I)$ が全 $\Longleftrightarrow$ $(X, \bar{R} \cup I)$ が全」が成り立つ．故に MP(反対称, 連結) $\Longleftrightarrow$ MP(連結, 反対称) と MP(反対称, 反連) $\Longleftrightarrow$ MP(連結, 反連) と MP(反対称, 全) $\Longleftrightarrow$ MP(連結, 全) と MP(関係, 反対称) $\Longleftrightarrow$ MP(関係, 連結) が分かる．

(3) 次の同値は明らかである．

- MP(推移, 反対称) $\Longleftrightarrow$ MP(推移, 順序)
- MP(連結, 順序) $\Longleftrightarrow$ MP(連結, 全) $\Longleftrightarrow$ MP(連結, 有向) $\Longleftrightarrow$ MP(連結, 分岐)
- MP(有向, 連結) $\Longleftrightarrow$ MP(有向, 反連) $\Longleftrightarrow$ MP(有向, 推連) $\Longleftrightarrow$ MP(有向, 全) $\Longleftrightarrow$ MP(有向, 分岐)
- MP(森, 連結) $\Longleftrightarrow$ MP(森, 反連) $\Longleftrightarrow$ MP(森, 推連) $\Longleftrightarrow$ MP(森, 全) $\Longleftrightarrow$ MP(森, 有向) $\Longleftrightarrow$ MP(森, 整列)

以上の (1)(2)(3) を合わせると，次の図式が得られる．($\rightarrow$ は (1)，$\leftrightarrow$ は (2)，$\leftrightarrow$ は

(3) による．また MS(P,Q) を $\frac{P}{Q}$ で表した．四角い枠については後述．)



また，$Q =$ 反対称，連結，反連，推連，順序，全，有向，分岐のとき，Zorn の補題 $\Longrightarrow$ MP(関係, Q) である．よって後は「図中で四角に囲まれた命題 $\Longrightarrow$ Zorn の補題」，即ち次の (i)(i)(iii) を示せばよい．

(i) MS(有向, 全) $\Longrightarrow$ Zorn の補題

定理 1 の条件 8「任意の順序集合は極大鎖を持つ」を示す．$(X,\leq)$ を順序集合とする．$\mathcal{C} := \{Y \subset X \mid (Y,\leq)$ は鎖 $\}$ とすると $(\mathcal{C},\supset)$ は有向集合になる．よって仮定の MS(有向, 全) により極大な部分全順序 $\mathcal{M} \subset \mathcal{C}$ が存在する．このとき $Z := \displaystyle\bigcup_{Y\in\mathcal{M}} Y$ と置けば明らかにこの $Z \subset X$ が極大鎖である．

(ii) MS(森, 全) $\Longrightarrow$ Zorn の補題

MP(順序, 整列) を示す．$(X,\leq)$ を順序集合として，X の部分整列順序は上界を持つとす

る．$\mathcal{W} := \{Y \subset X \mid (Y, \leq)$ は整列順序 $\}$ として，$\mathcal{W}$ に順序 $\trianglelefteq$ を

$$Y \trianglelefteq Z \iff Y = Z \text{ またはある } z \in Z \text{ が存在して } Y = z^{\downarrow}$$

で定める．すると $(\mathcal{W}, \trianglelefteq)$ は森になる．よって仮定の MS(森, 全) により極大な部分全順序 $\mathcal{V} \subset \mathcal{W}$ が存在する．このとき $Z := \bigcup_{Y \in \mathcal{V}} Y$ と置けば明らかに $Z \in \mathcal{W}$ だから，Z の上界 $x \in X$ が存在する．この x が極大元である．

(iii) MS(推移, 反対称) $\Longrightarrow$ Zorn の補題

選択集合の存在を示す．その為に $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ を互いに素な非空集合の族とする．$X := \bigcup_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ に関係 R を

$$xRy \iff \text{ある}\lambda \in \Lambda\text{が存在して } x, y \in X_\lambda$$

と定める．R は勿論推移的であるから，仮定の MS(推移, 反対称) により極大な Y を得る．この Y が $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ の選択集合である． □

$\mathrm{MS}'(P, Q)$ で命題

(X, R) が P であり，$Y \subset X$ で (Y, R) が Q であるとする．
このとき集合 $\{Z \subset X \mid Y \subset Z,\ (Z, R)$ は Q である $\}$ は $\subset$ に関する極大元を持つ

を表すとする．

定理 7. 定理 6 で述べた組 (P, Q) のうち，(森, 整列) を除いて Zorn の補題 $\iff \mathrm{MS}'(P, Q)$ である．

証明. 定理 6 と同様にして Zorn の補題 $\Longrightarrow \mathrm{MS}'(P, Q)$ が分かる．一方，明らかに $\mathrm{MS}'(P, Q) \Longrightarrow \mathrm{MS}(P, Q)$ であるから $\mathrm{MS}'(P, Q) \Longrightarrow$ Zorn の補題である． □

定理 8. Zorn の補題
$\iff$ 順序集合 X が「下の条件 $(*)$ を満たす任意の $A \subset X$ が上界を持つ」を満たすならば，X は極大元を持つ．

$$(*) \quad \text{任意の元 } x, y \in A \text{ に対し } \{x, y\} \subset A \text{ は } A \text{ に上界を持つ．}$$

証明. $(\Longrightarrow)$ X を順序集合とする．$(*)$ を満たす $A \subset X$ が上界を持つとする．$C \subset X$ を任意の鎖とすると鎖は $(*)$ を満たすから，C は上界を持つ．従って Zorn の補題より X は極大元を持つ．

($\Longleftarrow$) 選択公理を示す．$\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を非空集合の族とする．$X := \{f\colon \Gamma \longrightarrow \bigcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \mid \Gamma \subset \Lambda,\ f(\lambda) \in X_\lambda\}$ と定める．X に $\subset$ で順序を入れる．

$A \subset X$ が $(*)$ を満たすとする．$g := \displaystyle\bigcup_{f\in A} f$ と置く．$\lambda \in \mathrm{dom}(g)$ を取る．$\mathrm{dom}(f_1), \mathrm{dom}(f_2) \ni \lambda$ となる任意の $f_1, f_2 \in A$ を取る．条件 $(*)$ より，$\{f_1, f_2\}$ は A に上界 h を持つ．このとき $h(\lambda) = f_1(\lambda) = f_2(\lambda)$ である．よって $g(\lambda)$ は一意に定まる．故に g は写像であり，$g \in X$ となる．明らかに g は A の上界である．

よって仮定より X は極大元を持つが，それが選択関数である． □

定理 9． Zorn の補題
$\Longleftrightarrow$ 任意の集合 X は次の条件を満たす極大部分集合 $Y \subset X$ を持つ．

$$\text{任意の元 } a, b \in Y \text{ に対して } a \in b \text{ または } a = b \text{ または } b \in a$$

証明． ($\Longrightarrow$) Tukey の補題 (定理 1 の 6) により明らか．

($\Longleftarrow$) 整列可能定理を示す．X を任意の集合として $\mathcal{W} := \{(Y, R) \mid Y \subset X,\ R \subset Y \times Y,\ (Y, R)$ は整列順序 $\}$ と定める．$\mathcal{W}$ に順序関係 $\leqq$ を次のように定義する．

$$(Y, R) < (Z, S) \Longleftrightarrow \text{ある } z \in Z \text{ が存在して } (Y, R) = (z^{\downarrow}, S).$$

すると $(\mathcal{W}, \leq)$ は木である．$\mathcal{W}$ 上の写像 f を

$$f(Y, R) := \big\{\{R\}\big\} \cup \big\{f(W, T) \,\big|\, (W, T) \in \mathcal{W},\ (W, T) < (Y, R)\big\}$$

で定める．

(i) $f(Y, R) = f(Z, S) \Longleftrightarrow (Y, R) = (Z, S)$

$\because$) $\Longleftarrow$ は明らか．$\Longrightarrow$ を示す．$f(R) = f(S)$ かつ $(Y, R) \neq (Z, S)$ であるとする．すると $R \neq S$ であるから $\{R\} \neq \{S\}$ となる．よって，$f(R) \subset f(S)$ だから $\{R\} \in \{f(W, T) \mid (W, T) \in \mathcal{W},\ (W, T) < (Z, S)\}$ でなければならない．故にある $(W, T) < (Z, S)$ が存在して $R = f(W, T)$ となる．よって $\{T\} \in f(W, T) = R \subset Y \times Y$ となり矛盾する．

(ii) $f(Y, R) \in f(Z, S) \Longleftrightarrow (Y, R) < (Z, S)$

$\because$) $\Longleftarrow$ は f の定義から明らか．$f(Y, R) \in f(Z, S)$ とする．すると f の定義より $f(Y, R) = \{S\}$ か $f(Y, R) \in \{f(W, T) \mid (W, T) \in \mathcal{W},\ (W, T) < (Z, S)\}$ のどちらかである．しかし $f(Y, R) = \{S\}$ はありえない．故にある $(W, T) < (Z, S)$ が存在

して $f(Y,R)=f(W,T)$ と書ける．すると (i) により $(Y,R)=(W,T)$ となるから，$(Y,R)<(Z,S)$ である．

集合 $f(\mathcal{W})$ に仮定を適用して，$Q\subset f(\mathcal{W})$ を得る．$\mathcal{V}:=f^{-1}(Q)$ と定める．(i)(ii) により，$\mathcal{V}\subset\mathcal{W}$ は「任意の $(Y,R),(Z,S)\in\mathcal{V}$ に対し $(Y,R)<(Z,S)$ または $(Y,R)=(Z,S)$ または $(Z,S)<(Y,R)$」を満たす極大部分集合である．$W:=\bigcup_{(Y,R)\in\mathcal{V}}Y$, $T:=\bigcup_{(Y,R)\in\mathcal{V}}R$ とすれば，明らかに $(W,T)\in\mathcal{W}$ である．

$X\neq W$ と仮定する．$x\in X\setminus W$ を取る．$\widetilde{T}:=T\cup(W\times\{x\})\cup\{\langle x,x\rangle\}$ と置くと $(W\cup\{x\},\widetilde{T})\in\mathcal{W}$ である．$\widetilde{\mathcal{V}}:=\mathcal{V}\cup\{(W\cup\{x\},\widetilde{T})\}$ を考えると，これは「任意の $(Y,R),(Z,S)\in\widetilde{\mathcal{V}}$ に対し $(Y,R)<(Z,S)$ または $(Y,R)=(Z,S)$ または $(Z,S)<(Y,R)$」を満たす．明らかに $\mathcal{V}\subsetneq\widetilde{\mathcal{V}}$ だから $\mathcal{V}$ の極大性に矛盾する．よって $X=W$ であり，T は X を整列する． □

定理 10. 集合 X と整数 $n\geq 2$ に対して，$\mathrm{UN}(X,n)$ で次の命題を表すとする．

$$\text{任意の } R\subset X^n \text{に対して } \{Y\subset X\mid Y^n\subset R\} \text{ は } (\subset \text{ に関する}) \text{ 極大元をもつ．}$$

$n\geq 2$ を整数とするとき，次の命題は (ZF 上) 同値.

1. Zorn の補題

2(n). 任意の X に対して $\mathrm{UN}(X,n)$

3. ある $n\geq 2$ が存在して任意の X に対し $\mathrm{UN}(X,n)$
4. 任意の X に対してある $n\geq 2$ が存在して $\mathrm{UN}(X,n)$

証明. 1$\Longrightarrow$2(n) と 2(n)$\Longrightarrow$3 と 3$\Longrightarrow$4 は明らか.

(4$\Longrightarrow$2(2)) $R\subset X\times X$ を二項関係とする．仮定 4 により，ある $n\geq 2$ が存在して $\mathrm{UN}(X,n)$ が成り立つ．そこで $R\times X^{n-2}$ に $\mathrm{UN}(X,n)$ を適用して極大な Y を得る．この Y は明らかに $\{Y\subset X\mid Y^2\subset R\}$ の極大元である．

(2(2)$\Longrightarrow$1) 2(2) $\Longrightarrow$ MS(関係, 連結) を示せばよい．$R\subset X\times X$ を二項関係とする．$R\cup R^{-1}\cup I$ に 2(2) を適用して $\{Y\subset X\mid Y^2\subset R\cup R^{-1}\cup I\}$ の極大元 Y を得る．明らかに，この Y が $\{Y\subset X\mid (Y,R)$ は連結 $\}$ の極大元である． □

定義. 集合 X 上の二項関係を次のように定義する．

1. $xDy\iff x\cap y=\emptyset$
2. $xKy\iff x\subset y$ または $y\subset x$

3. $xJy \iff x \not\subset y$ かつ $y \not\subset x$ かつ $x \cap y \neq \emptyset$

$R \subset X$ を関係とする．部分集合 $Y \subset X$ が「任意の異なる二元 $x, y \in Y$ に対し xRy」を満たすとき，Y は property R を持つということにする．

定理 11. 関係 R に対し $\mathrm{N}(R)$ で次の命題を表すとする．

$$\text{任意の } X \text{ に対し } \{Y \subset X \mid Y \text{ は property } R \text{ を持つ}\} \text{ は極大元をもつ}$$

このとき

$$\text{Zorn の補題} \iff \mathrm{N}(D) \iff \mathrm{N}(\bar{D}) \iff \mathrm{N}(K) \iff \mathrm{N}(J) \iff \mathrm{N}(\bar{J})$$

証明. (Zorn の補題 $\Longrightarrow \mathrm{N}(J)$) Tukey の補題より明らか．

($\mathrm{N}(J) \Longrightarrow \mathrm{N}(\bar{D})$) 任意の集合 X をとる．u を「任意の $x, y \in X$ に対し $\langle x, u\rangle \notin y$」を満たすように取り，$x \in X$ に対し $f(x) := x \cup \{\langle x, u\rangle\}$ と定める．仮定 $\mathrm{N}(J)$ を $f(X)$ に適用すると，property J を持つ極大部分集合 $S \subset f(X)$ の存在が分かる．$Y := f^{-1}(S)$ と定める．

$x, y \in X,\ x \neq y$ とする．定義から $f(x)\bar{K}f(y)$．故に $f(x)Jf(y) \iff f(x)\bar{D}f(y)$ が成り立つ．一方，$f(x) \cap f(y) = x \cap y$ だから $f(x)\bar{D}f(y) \iff x\bar{D}y$ となる．即ち $f(x)Jf(y) \iff x\bar{D}y$ であり，従って $Y \subset X$ は property $\bar{D}$ を持ち極大である．

($\mathrm{N}(\bar{D}) \Longrightarrow \mathrm{N}(D)$) 任意の集合 X をとる．$x \in X$ に対し $f(x) := \big\{\{x\}\big\} \cup \big\{\{x, z\} \bigm| z \in X,\ xDz\big\}$ と置く．

$x, y \in X,\ x \neq y$ とする．定義から $f(x)\bar{D}f(y) \iff xDy$ である．よって仮定 $\mathrm{N}(\bar{D})$ を $f(X)$ に適用すれば，$\mathrm{N}(D)$ の成立が分かる．

($\mathrm{N}(D) \Longrightarrow$ Zorn の補題) 選択公理を示す．$\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を互いに素な非空集合の族とする．$X := \big\{\{\langle 0, x\rangle, \langle 1, \lambda\rangle\} \bigm| \lambda \in \Lambda,\ x \in X_\lambda\big\}$ とする．仮定 $\mathrm{N}(D)$ を X に適用して，property D を持つ極大部分集合 $Y \subset X$ を得る．$\{\langle 0, x\rangle, \langle 1, \lambda\rangle\}D\{\langle 0, y\rangle, \langle 1, \mu\rangle\} \iff \lambda \neq \mu$ だから，各 $\lambda \in \Lambda$ に対し $\{\langle 0, x_\lambda\rangle, \langle 1, \lambda\rangle\} \in Y$ となるような $x_\lambda \in X_\lambda$ が唯一つ存在する．よって $\{x_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ が選択集合である．

(Zorn の補題 $\Longrightarrow \mathrm{N}(\bar{J})$) Tukey の補題より明らか．

($\mathrm{N}(\bar{J}) \Longrightarrow \mathrm{N}(K)$) 任意の集合 X をとる．$\displaystyle\bigcup_{x\in X} x$ に含まれない元 u を取り，$x \in X$ に対し $f(x) := x \cup \{u\}$ と置く．すると任意の $x, y \in X,\ x \neq y$ に対し $f(x)\bar{D}f(y)$ となるから，$f(x)\bar{J}f(y) \iff f(x)Kf(y) \iff xKy$ が分かる．故に仮定 $\mathrm{N}(\bar{J})$ を $f(X)$ に適用すれば，$\mathrm{N}(K)$ の成立が分かる．

($\mathrm{N}(K) \Longrightarrow$ Zorn の補題) 明らかに $\mathrm{N}(K) \iff$「定理 1 の 3」である． □

定理 12. Zorn の補題 $\Longleftrightarrow$ $\mathrm{N}(\bar{K})$

証明. X を集合とするとき，$Y \subset X$ が property $\bar{K}$ を持つのは，Y が順序集合 $(X, \subset)$ の反鎖となるときである．

($\Longrightarrow$) 定理 1 の条件 11 より明らか．

($\Longleftarrow$) 定理 1 の条件 11 を示す．$(X, \leq)$ を順序集合とするとき $A := \{x^{\downarrow} \mid x \in X\}$ とすれば順序同型 $(X, \leq) \cong (A, \subset)$ が成り立つ．よって仮定から $\{B \subset A \mid B$ は property $\bar{K}$ を持つ $\}$ の極大元 B を取れば，それに対応する $Y \subset X$ が極大反鎖である． □

定理 13. Zorn の補題 $\Longleftrightarrow$ 順序集合 $(X, \leq)$ が「任意の鎖は上界を持つ」を満たすとき，ある $t \in X$ が存在して $\overline{t} := \{x \in X \mid t < x\}$ は最小元を持たない．

証明. ($\Longrightarrow$) Zorn の補題により極大元 $t \in X$ が存在する．このとき $\overline{t} = \emptyset$ は最小元を持たない．

($\Longleftarrow$) Zorn の補題が成り立たないと仮定する．即ち極大元を持たない順序集合 $(X, \leq)$ で「任意の鎖は上界を持つ」を満たすものが存在する．$X \times \mathbb{N}$ 上の順序を辞書式順序で定める．$X \times \mathbb{N}$ は「任意の鎖は上界を持つ」を満たす．

$\because$) $C \subset X \times \mathbb{N}$ を鎖とする．$\pi \colon X \times \mathbb{N} \longrightarrow X$ を標準射影とすると $\pi(C) \subset X$ は鎖である．故に上界 $u_0 \in X$ を持つ．X は極大元を持たないから $u > u_0$ となる $u \in X$ が存在する．このとき $\langle u, 0 \rangle \in X \times \mathbb{N}$ は C の上界である．

一方，任意の $\langle x, m \rangle \in X \times \mathbb{N}$ に対して $\overline{\langle x, m \rangle}$ は最小元 $\langle x, m+1 \rangle$ を持つから仮定に矛盾する． □

参考文献

[1] H. Rubin and J. Rubin, Equivalents of the axiom of choice II, North Holland, 1985.

[2] Horst Herrlich, Axiom of Choice，Springer, 2006

[3] 松坂 和夫，『集合・位相入門』，岩波書店，1968 年