

# Zorn の補題・極大原理と選択公理

alg-d

<http://alg-d.com/math/ac/>

2015 年 12 月 20 日

定義.  $R$  を集合  $X$  上の二項関係とする.

1.  $R$  が反射的  $\iff$  任意の  $x \in X$  に対して  $xRx$
2.  $R$  が反対称的  $\iff xRy$  かつ  $yRx$  ならば  $x = y$
3.  $R$  が推移的  $\iff xRy$  かつ  $yRz$  ならば  $xRz$
4.  $R$  が connected  $\iff xRy$  または  $x = y$  または  $yRx$
5.  $R$  が前順序関係  $\iff R$  が反射的かつ推移的
6.  $R$  が順序関係  $\iff R$  が反対称的な前順序関係
7.  $R$  が全順序関係  $\iff R$  が connected な順序関係
8.  $x \in X$  が極大元  $\iff$  任意の  $y \in X$  に対して「 $xRy$  ならば  $yRx$ 」
9.  $x \in X$  が最小元  $\iff$  任意の  $y \in X \setminus \{x\}$  に対して  $xRy$
10.  $x \in X$  が  $Y \subset X$  の上界  $\iff$  任意の  $y \in Y \setminus \{x\}$  に対して  $yRx$
11.  $R$  が整列順序関係  $\iff R$  が順序関係で, 任意の  $Y (\neq \emptyset) \subset X$  に対して  $(Y, R)$  が最小元を持つ.
12.  $X$  が有限性を持つ  $\iff$  「 $x \in X \iff$  任意の有限部分集合  $y \subset x$  に対して  $y \in X$ 」
13.  $x \in X$  に対して  $x^\downarrow := \{y \in X \mid yRx\}$
14.  $Y \subset X$  が鎖  $\iff (Y, R)$  が全順序集合
15.  $R^{-1} := \{\langle a, b \rangle \in X \times X \mid \langle b, a \rangle \in R\}$
16.  $\bar{R} := \{\langle a, b \rangle \in X \times X \mid \langle a, b \rangle \notin R\}$
17.  $I := \{\langle a, a \rangle \in X \times X \mid a \in X\}$

定義.  $(X, \leq)$  を順序集合とする.

1.  $Y \subset X$  が反鎖  $\iff$  任意の  $x, y \in Y$  に対して「 $x \neq y$  ならば  $x \not\leq y, y \not\leq x$ 」

2.  $(X, \leq)$  が ramified  $\iff$  任意の元  $x \in X$  に対し  $(x^\downarrow, \leq)$  が鎖になる

定理 1. 次の命題は (ZF 上) 同値.

1. Zorn の補題.
2. 集合  $X$  上の推移的關係  $R$  に対して極大鎖  $Y \subset X$  が存在する.
3. 順序集合  $(X, \subset)$  は極大鎖を持つ.
4. 順序集合  $(X, \subset)$  が「任意の鎖  $C \subset X$  に対してある  $x \in X$  が存在して, 任意の  $y \in C$  に対して  $y \subset x$ 」を満たすならば,  $X$  の極大元が存在する.
5. 順序集合  $(X, \subset)$  が「任意の鎖  $C \subset X$  に対して  $\bigcup_{y \in C} y \in X$ 」を満たすならば  $X$  は極大元を持つ.
6. 有限性をもつ非空集合  $X$  は  $(\subset)$  に関する) 極大元をもつ. (Tukey の補題)
7. 任意の前順序集合  $(X, \leq)$  は極大鎖を持つ.
8. 任意の順序集合  $(X, \leq)$  は極大鎖を持つ. (Hausdorff's Maximal chain Condition)
9. 任意の順序集合  $(X, \leq)$  の任意の鎖は,  $X$  のある極大鎖に含まれる.
10. 任意の前順序集合  $(X, \leq)$  は極大反鎖を持つ.
11. 任意の順序集合  $(X, \leq)$  は極大反鎖を持つ. (Kurepa's Maximal Antichain Condition)

証明. (1  $\implies$  2)  $R$  を集合  $X$  上の推移的關係とする.  $L := \{Y \subset X \mid (Y, R) \text{ は鎖}\}$  として,  $\subset$  で  $L$  に順序を入れる. この  $(L, \subset)$  は Zorn の補題の仮定を満たす.

$\therefore$ )  $C \subset L$  を鎖として,  $Z := \bigcup_{Y \in C} Y$  と置く.  $(Z, R)$  が全順序集合である事を示す.

(i) 反射律

任意の  $x \in Z$  を取る.  $Z$  の定義よりある  $Y \in C$  が存在して  $x \in Y$  となる. よって  $(Y, R)$  が順序集合であることより  $xRx$  である.

(ii) 反対称律

$x, y \in Z$  に対し  $xRy$  かつ  $yRx$  であるとする.  $Z$  の定義と  $C$  が鎖であることから  $x, y \in Y$  となる  $Y \in C$  の存在が分かる. このとき  $(Y, R)$  が順序集合であることより  $x = y$ .

(iii) 推移律

$R$  が推移的關係であることから明らか.

(iv) connected

$x, y \in Z$  を取る.  $Z$  の定義と  $C$  が鎖であることから  $x, y \in Y$  となる  $Y \in C$  の存在

が分かる. このとき  $(Y, R)$  の全順序性から  $xRy$  または  $yRx$  である.

以上より  $(Z, R)$  は全順序である. 故に  $Z \in L$ . 従って  $Z$  は  $C$  の上界である.

よって Zorn の補題より極大元  $Y \in L$  が存在するが, これが極大鎖である.

(2  $\implies$  3)  $C$  は推移的だから, 仮定 2 より  $C$  によって全順序付けされる極大部分集合が存在するが, これは明らかに  $(X, C)$  の極大鎖である.

(3  $\implies$  4) 仮定 3 より極大鎖  $Y \subset X$  が存在する. この  $Y$  に 4 の仮定を適用すると, ある  $x \in X$  が存在して, 任意の  $y \in Y$  に対して  $y \subset x$  とできる. この  $x$  が  $X$  の極大元である.

(4  $\implies$  5) 明らか.

(5  $\implies$  6)  $X$  が有限性を持つとする. 順序集合  $(X, C)$  が 5 の仮定を満たすことを示せばよい.  $C \subset X$  を鎖として  $x := \bigcup_{y \in C} y$  と置く.  $z \subset x$  を任意の有限部分集合とする.  $x$  の定義と  $z$  が有限集合であることから  $z \subset y_1 \cup y_2 \cup \dots \cup y_n$  となる  $y_i \in C$  が存在する.  $(C, C)$  が全順序であるから  $y := \max\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$  が存在して  $z \subset y$  となるのが分かる.  $y \in C \subset X$ , 即ち  $y \in X$  だから  $X$  が有限性を持つ事より  $z \in X$  である.

従って再び  $X$  が有限性を持つ事から  $x \in X$  である.

(6  $\implies$  7)  $C := \{Y \subset X \mid Y \text{ は鎖}\}$  は空ではない. 明らかに  $C$  は有限性を持つので, Tukey の補題より極大元を持つ.

(7  $\implies$  8) は明らか.

(8  $\implies$  9)  $C \subset X$  を鎖とする.

$$Y := \{y \in X \mid \text{任意の } x \in C \text{ に対して } x \leq y \text{ または } y \leq x\}$$

とする. 明らかに  $C \subset Y$  である.  $(Y, \leq)$  は順序集合だから, 仮定 8 より極大鎖  $D \subset Y$  を持つ.  $C \subset D$  である.

$\therefore C \not\subset D$  と仮定する.  $x \in C \setminus D$  が取れる.  $D$  の極大性より  $D \cup \{x\} \subset Y$  は鎖ではない. 故にある  $y \in D \subset Y$  が存在して  $x \not\leq y$  かつ  $y \not\leq x$  となるが, それは  $Y$  の定義に矛盾する.

鎖  $\tilde{C} \subset X$  が  $D \subset \tilde{C}$  を満たすとする. すると  $C \subset D \subset \tilde{C}$  だから  $Y$  の定義により  $\tilde{C} \subset Y$  である. 即ち  $\tilde{C}$  は  $Y$  の鎖でもある. 故に  $D$  の極大性により  $\tilde{C} = D$  である. 即ち  $D$  は  $C$  を含む  $X$  の極大鎖である.

(9  $\implies$  8) 明らか.

(8  $\implies$  1) Zorn の補題と同値な整列可能定理を示す. その為に  $X$  を任意の集合とし

$A := \{f : \alpha \rightarrow A \mid \alpha \text{ は順序数で } f \text{ は単射}\}$  と置く.  $(A, \subset)$  は順序集合である. よって極大鎖  $C$  を持つ. すると  $g := \bigcup_{f \in C} f$  はある順序数から  $X$  への単射である.  $C$  の極大性から  $g$  は全射. 故に  $X$  は整列可能である.

(6  $\implies$  10)  $C := \{Y \subset X \mid Y \text{ は反鎖}\}$  は空でない. 明らかに  $C$  は有限性を持つので, Tukey の補題より極大元を持つ.

(10  $\implies$  11) 明らか.

(11  $\implies$  1) Zorn の補題と同値な整列可能定理を示す. その為に, 整列可能定理と同値な「全順序集合は整列可能」を示す.

※ 整列可能定理についての定理 1 を参照.

$(X, \leq)$  を全順序集合とする.  $A := \{(Y, y) \mid Y \subset X, y \in Y\}$  と置き,  $A$  の順序を

$$(Y, y) \leq (Z, z) \iff Y = Z \text{ かつ } y \leq z$$

で定める. ( $y \leq z$  は  $X$  の順序である.) 仮定 11 より極大反鎖  $C \subset A$  が存在する.  $X$  は全順序だから, 明らかに  $C = \{(Y, f(Y)) \mid Y \in \mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\}\}$  と書ける. この  $f$  は  $\mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\}$  の選択関数である. よって選択公理から整列可能定理を導くのと同様にして  $X$  が整列可能なことが分かる.

※ 整列可能定理と Zorn の補題の定理 1 を参照.

□

定義.  $X$  を集合とする. 便宜上, 次のように定める.

1.  $(X, R)$  が関係  $\iff R$  は  $X$  上の二項関係
2.  $(X, R)$  が推移  $\iff R$  は  $X$  上の推移的関係
3.  $(X, R)$  が反対称  $\iff R$  は  $X$  上の反対称的関係
4.  $(X, R)$  が連結  $\iff R$  は  $X$  上の connected な関係
5.  $(X, R)$  が順序  $\iff (X, R)$  は順序集合
6.  $(X, R)$  が全  $\iff (X, R)$  は全順序集合
7.  $(X, R)$  が整列  $\iff (X, R)$  は整列順序集合
8.  $(X, R)$  が有向  $\iff (X, R)$  は有向順序集合
9.  $(X, R)$  が分岐  $\iff (X, R)$  は ramified な順序集合
10.  $(X, R)$  が森  $\iff (X, R)$  は順序で, 任意の  $x \in X$  に対し  $(x^\downarrow, R)$  が整列順序集合
11.  $(X, R)$  が木  $\iff (X, R)$  が森で, 最小元を持つ

12.  $(X, R)$  が推連  $\iff (X, R)$  は推移かつ連結である  
 13.  $(X, R)$  が反連  $\iff (X, R)$  は反対称かつ連結である

以上のように定めたとき,  $MP(P, Q)$  で命題

$X$  は任意の集合で,  $(X, R)$  は  $P$  であるとする. もし  
 任意の  $Y \subset X$  に対して「 $(Y, R)$  が  $Q$  になるならば  $Y$  は  $X$  に上界を持つ」  
 が成り立つならば,  $X$  は極大元を持つ.

を表す. 例えば  $MP(\text{順序}, \text{全})$  は Zorn の補題である.

**定理 2.** Zorn の補題  $\iff MP(\text{推移}, \text{整列})$

**証明.**  $\Leftarrow$  は明らか. 逆  $\Rightarrow$  を示す. その為に定理 1 の 2 を用いる.

$R$  を集合  $X$  上の推移的關係とし, 任意の部分整列順序は上界を持つとする. 部分集合  $Y \subset X$  に対して  $Y^\downarrow := \bigcup_{y \in Y} y^\downarrow = \{z \in X \mid \text{ある } y \in Y \text{ が存在して } zRy\}$  と書くことにする.  $W := \{Y \subset X \mid (Y, R) \text{ は整列順序集合}\}$  と置く.  $W$  上の関係  $\leq$  を

$$Y \leq Z \iff Y \subset Z \text{ かつ } Z \cap Y^\downarrow \subset Y$$

と定める.  $\leq$  は  $W$  の推移的關係である.

$\therefore Y \leq Z$  かつ  $Z \leq W$  であるとする. 即ち  $Y \subset Z \subset W$ ,  $Z \cap Y^\downarrow \subset Y$ ,  $W \cap Z^\downarrow \subset Z$  である. よって  $Y \supset Z \cap Y^\downarrow \supset (W \cap Z^\downarrow) \cap Y^\downarrow = W \cap Y^\downarrow$  となるから  $Y \leq W$  である.

故に定理 1 の 2 により極大鎖  $\mathcal{V} \subset (W, \leq)$  が存在する.  $Z := \bigcup_{Y \in \mathcal{V}} Y$  とする. 明らかに  $(Z, R)$  は順序集合である. 任意の  $A (\neq \emptyset) \subset Z$  を取る.  $Z$  の定義からある  $Y \in \mathcal{V}$  が存在して  $Y \cap A \neq \emptyset$  である.  $Y \in \mathcal{V} \subset W$  だから,  $(Y, R)$  は整列順序. よって  $x := \min(Y \cap A)$  が存在する. この  $x$  は  $A$  の最小元でもある.

$\therefore y \in A, y \neq x$  とする.  
 (i)  $y \in Y$  のとき. 明らかに  $xRy$  である.  
 (ii)  $y \notin Y$  のとき. ある  $Y' \in \mathcal{V}$  について  $y \in Y'$  となるが,  $(\mathcal{V}, \leq)$  は鎖であるから  $Y \leq Y'$  でなければならない. 従って  $Y' \cap Y^\downarrow \subset Y$  であるから  $y \notin Y^\downarrow$  である. よって,  $x \in Y$  だから  $\neg yRx$  である.  $x, y \in Y'$  で  $(Y', R)$  が鎖であることから  $xRy$  でなければならない.  
 (i)(ii) より  $x$  は  $A$  の最小元である.

よって  $(Z, R)$  は整列順序集合である事が分かる. 故に  $Z \in \mathcal{W}$  である. この  $Z$  は  $(\mathcal{W}, \leq)$  の極大元である.

$\therefore$ )  $W \in \mathcal{W}$  が  $Z \leq W$  を満たすとする.  $Z$  の定義から, 任意の  $Y \in \mathcal{V}$  に対し  $Y \leq Z$ , よって  $Y \leq W$  である. 即ち  $\mathcal{V} \cup \{W\}$  は  $(\mathcal{W}, \leq)$  の鎖である.  $\mathcal{V}$  の極大性から  $\mathcal{V} = \mathcal{V} \cup \{W\}$  となる, 従って  $W \in \mathcal{V}$ , よって  $W \leq Z$  となる. 即ち  $Z$  は極大元である.

$(Z, R) \subset X$  は整列順序だったから, MP(推移, 整列) の仮定により  $Z$  の上界  $x \in X$  が存在する.

$y \in X$  が  $xRy$  を満たすとする. 勿論  $y$  は  $Z$  の上界である.  $yRz$  となる  $z \in Z$  が存在する.

$\therefore$ ) 「全ての  $z \in Z$  に対し  $\neg yRz$ 」と仮定する.  $(Z \cup \{y\}, R)$  は整列順序だから,  $Z \in \mathcal{W}$  の極大性から  $Z = Z \cup \{y\}$  である. 従って  $y \in Z$ , 故に  $\neg yRy$  である. 一方  $x$  が  $Z$  の上界であることから  $yRx$  であり, ゆえに  $xRy$  から  $yRy$  となり矛盾する.

このとき推移律から  $xRz$  である. すると  $x$  が  $Z$  の上界であることから  $z = x$  または  $zRx$  であるが, どちらにしても  $yRx$  である. 従って  $x$  が  $(X, R)$  の極大元であることが分かった. □

**定理 3.**  $P, Q$  が次のいずれかであるとき,  $MP(P, Q)$  は Zorn の補題と同値である.

$P =$  推移, 順序, 分岐, 森

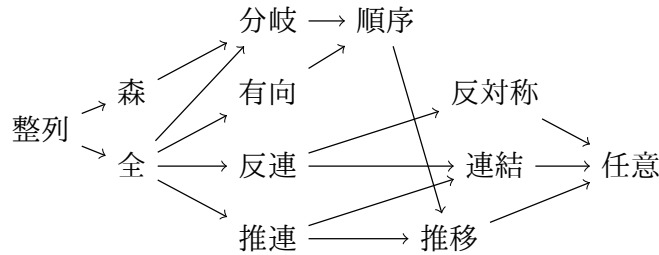
$Q =$  連結, 反連, 推連, 全, 有向, 整列

**証明.** まず, 定理 2 で示したように Zorn の補題  $\iff$  MP(推移, 整列) である. 次に,  $MP(\text{森}, \text{有向}) \implies MP(\text{森}, \text{連結})$  である.

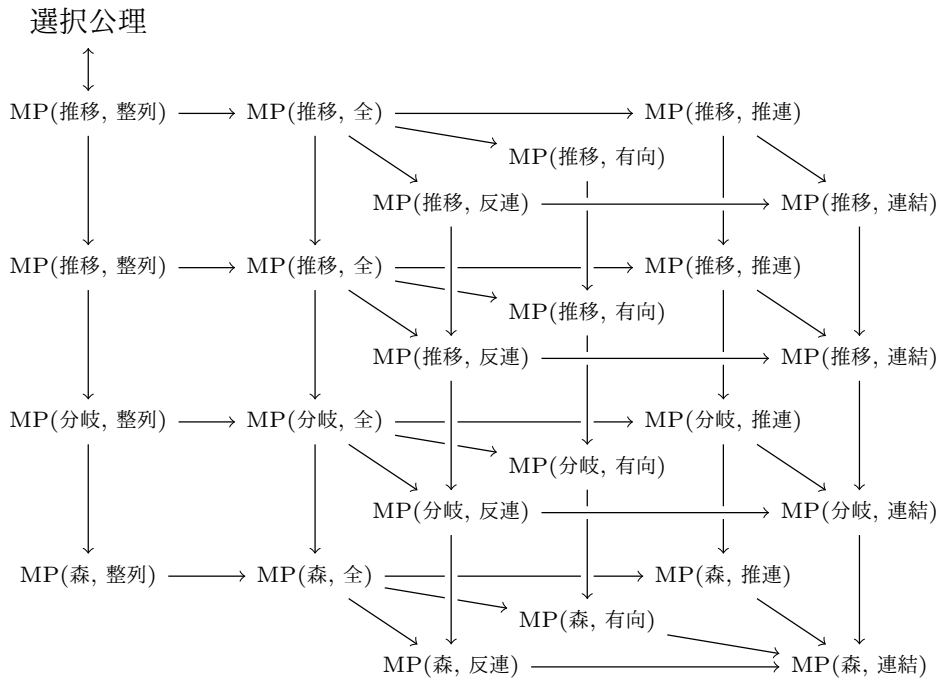
$\therefore$ )  $(X, \leq)$  を森とし,  $X$  の任意の部分連結集合が上界を持つとする.  $Y \subset X$  を部分有向集合とする.  $x, y \in Y$  とすると,  $Y$  は有向集合だからある  $z \in Y$  が存在して  $x \leq z, y \leq z$  である. よって  $x, y \in z^\downarrow \subset X$  であり, 今  $X$  は森だから  $z^\downarrow$  は整列順序集合. 故に  $x \leq y$  または  $y \leq x$  である. 即ち,  $Y$  は連結である. 従って上界を持つ. 故に仮定の  $MP(\text{森}, \text{有向})$  から  $X$  は極大元を持つ.

$P \implies P', Q \implies Q'$  であれば  $MP(P', Q) \implies MP(P, Q), MP(P, Q) \implies MP(P, Q')$

である。また  $P \implies Q$  であることを  $P \longrightarrow Q$  と書いて図示すると次のようになる。



以上により次の図式が分かる。



よって後は  $MP(\text{森}, \text{連結}) \implies MP(\text{推移}, \text{整列})$  を示せばよい。

$(X, R)$  を推移とし、 $X$  の任意の部分整列順序が上界を持つとする。  $\mathcal{W} := \{Y \subset X \mid (R, \leq) \text{ は整列順序}\}$  と置く。  $\mathcal{W}$  の二項関係  $\leq$  を

$$Y \leq Z \iff Y = Z \text{ またはある } z \in Z \text{ が存在して } Y = z^\downarrow$$

と定める。すると  $(\mathcal{W}, \leq)$  は森である。連結部分集合  $\mathcal{V} \subset \mathcal{W}$  を取ると、明らかに  $\bigcup_{Y \in \mathcal{V}} Y$  が  $\mathcal{V}$  の上界である。故に  $MP(\text{森}, \text{連結})$  により  $\mathcal{W}$  は極大元  $Y \in \mathcal{W}$  を持つ。  $Y \subset X$  は部分整列順序だから、上界  $x \in X$  を持つ。この  $x$  が  $X$  の極大元である。故に  $MP(\text{推移}, \text{整列})$  が示された。  $\square$

定理 4. Zorn の補題  $\iff$  MP(有向, 整列)

証明.  $(\implies)$  MP(推移, 整列)  $\implies$  MP(有向, 整列) であるから明らか.

$(\impliedby)$  MP(有向, 整列)  $\implies$  MP(森, 整列) を示せばよい.

$(X, \leq)$  を森として,  $X$  の部分整列順序は上界を持つとする.

$X$  は整列可能でないと仮定する.  $\mathcal{W} := \{(Y, R) \mid Y \subset X, (Y, R) \text{ は整列順序}\}$  と置く.  $\mathcal{W}$  の順序  $\sqsubset$  を

$$(Y, R) \sqsubset (Z, S) \iff Y \subsetneq Z \text{ または } (Y = Z \text{ かつ } R = S)$$

で定める.  $(\mathcal{W}, \sqsubset)$  は有向集合である.

$\therefore (Y, R), (Z, S) \in \mathcal{W}$  とする.

(i)  $Y \neq Z$  のとき.

$V := Y \cup Z$  として,  $V$  上の整列順序  $T$  を

$$aTb \iff \begin{cases} a, b \in Y \text{ かつ } aRb \\ \text{または } a, b \in Z \setminus Y \text{ かつ } aSb \\ \text{または } a \in Y \text{ かつ } b \in Z \setminus Y \end{cases}$$

で定めれば  $(V, T) \in \mathcal{W}$ ,  $(Y, R) \sqsubset (V, T)$ ,  $(Z, S) \sqsubset (V, T)$  である.

(ii)  $Y = Z$  のとき.

$X$  は整列可能でないから,  $Y \subsetneq X$  である. そこで  $x \in X \setminus Y$  を一つ取り  $V := Y \cup \{x\}$  と置く.  $V$  上の整列順序  $T$  を

$$aTb \iff (a, b \in Y \text{ かつ } aRb) \text{ または } b = x$$

で定めれば  $(V, T) \in \mathcal{W}$ ,  $(Y, R) \sqsubset (V, T)$ ,  $(Z, S) \sqsubset (V, T)$  である.

$\mathcal{V} \subset (\mathcal{W}, \sqsubset)$  を部分整列順序とする.  $Z := \bigcup_{(Y, R) \in \mathcal{V}} Y$  と置く.  $z \in Z$  に対して  $(Y_z, R_z) := \sqsubset\text{-min}\{(Y, R) \in \mathcal{V} \mid z \in Y\}$  とする.  $Z$  の順序  $S$  を

$$zSw \iff ((Y_z, R_z) \sqsubset (Y_w, R_w) \text{ かつ } Y_z \neq Y_w) \text{ または } ((Y_z, R_z) = (Y_w, R_w) \text{ かつ } zR_w w)$$

で定めると,  $(Z, S)$  は整列順序である. 故に  $(Z, S) \in \mathcal{W}$  は  $\mathcal{V}$  の上界である. 故に仮定の MP(有向, 整列) により  $(\mathcal{W}, \sqsubset)$  は極大元  $(Y, R)$  を持つ. このとき明らかに  $Y = X$  であり,  $X$  が整列可能でないことに矛盾する.

従って  $X$  は整列可能である.  $(X, R)$  を整列順序とする.  $|\lambda| \leq |X|$  を満たす順序数  $\lambda$



を取る.  $X$  に含まれない元  $\infty \notin X$  を一つ取っておく.  $f: \lambda \rightarrow X \cup \{\infty\}$  を

$$f(\alpha) := \begin{cases} R\text{-}\min\{x \in X \setminus \{f(\beta) \mid \beta < \alpha\} \mid \text{任意の } \beta < \alpha \text{ に対して } f(\beta) \leq x\} \\ \quad (\text{このような最小元が存在するとき}) \\ \infty \quad (\text{最小元が存在しないとき}) \end{cases}$$

で定める.  $f$  の定義から,  $f(\alpha) = f(\beta) \neq \infty$  ならば  $\alpha = \beta$  である.  $\lambda$  の取り方から  $f$  は単射でないので,  $f(\alpha) = \infty$  となる  $\alpha < \lambda$  は存在する. そこで  $\gamma := \min\{\alpha < \lambda \mid f(\alpha) = \infty\}$  と置く.  $Y := \{f(\beta) \mid \beta < \gamma\}$  とすれば  $Y \subset (X, \leq)$  は部分整列順序である. 故に上界  $x \in X$  を持つ. このとき  $x$  が極大元である.  $\square$

**定理 5.** 次の命題は (ZF 上) 同値.

1. Zorn の補題.
2. 順序集合  $X$  が「 $X$  の部分整列順序は上界を持つ」を満たすならば,  $X$  の極大元が存在する.
3. 順序集合  $X$  が「 $X$  の部分整列順序は上限を持つ」を満たすならば,  $X$  の極大元が存在する.
4. 順序集合  $X$  が「 $X$  の鎖は上限を持つ」を満たすならば,  $X$  の極大元が存在する.
5. 順序集合  $(X, \subset)$  が「任意の部分整列順序  $Y \subset X$  に対して  $\bigcup_{y \in Y} y \in X$ 」を満たすならば  $X$  は極大元を持つ.

**証明.** 2 は MP(順序, 整列) だから, 定理 3 により  $1 \iff 2$  である. また  $2 \implies 3$ ,  $3 \implies 4$ ,  $3 \implies 5$  は明らか.

$4 \implies 1$  と  $5 \implies 1$  は定理 1 の条件 5 が成り立つことから分かる.  $\square$

MS( $P, Q$ ) で命題

$(X, R)$  が  $P$  のとき, 集合  $\{Y \subset X \mid (Y, R) \text{ は } Q \text{ である}\}$  は  $\subset$  に関する極大元を持つ

を表すとす.

**定理 6.** 次の  $(P, Q)$  に対して Zorn の補題  $\iff$  MS( $P, Q$ ) である.

- $P =$  関係, 推移,  $Q =$  反対称, 連結, 反連, 推連, 順序, 全, 有向, 分岐
- $P =$  反対称,  $Q =$  連結, 反連, 推連, 全, 有向, 分岐
- $P =$  連結,  $Q =$  反対称, 連結, 順序, 全, 有向, 分岐
- $P =$  順序,  $Q =$  連結, 反連, 推連, 全, 有向, 分岐

- $P =$  有向,  $Q =$  連結, 反連, 推連, 全, 分岐
- $P =$  分岐,  $Q =$  連結, 反連, 推連, 全, 有向
- $P =$  森,  $Q =$  連結, 反連, 推連, 全, 有向, 整列

証明. (1)  $P \implies P'$  ならば  $\text{MP}(P', Q) \implies \text{MP}(P, Q)$  である.

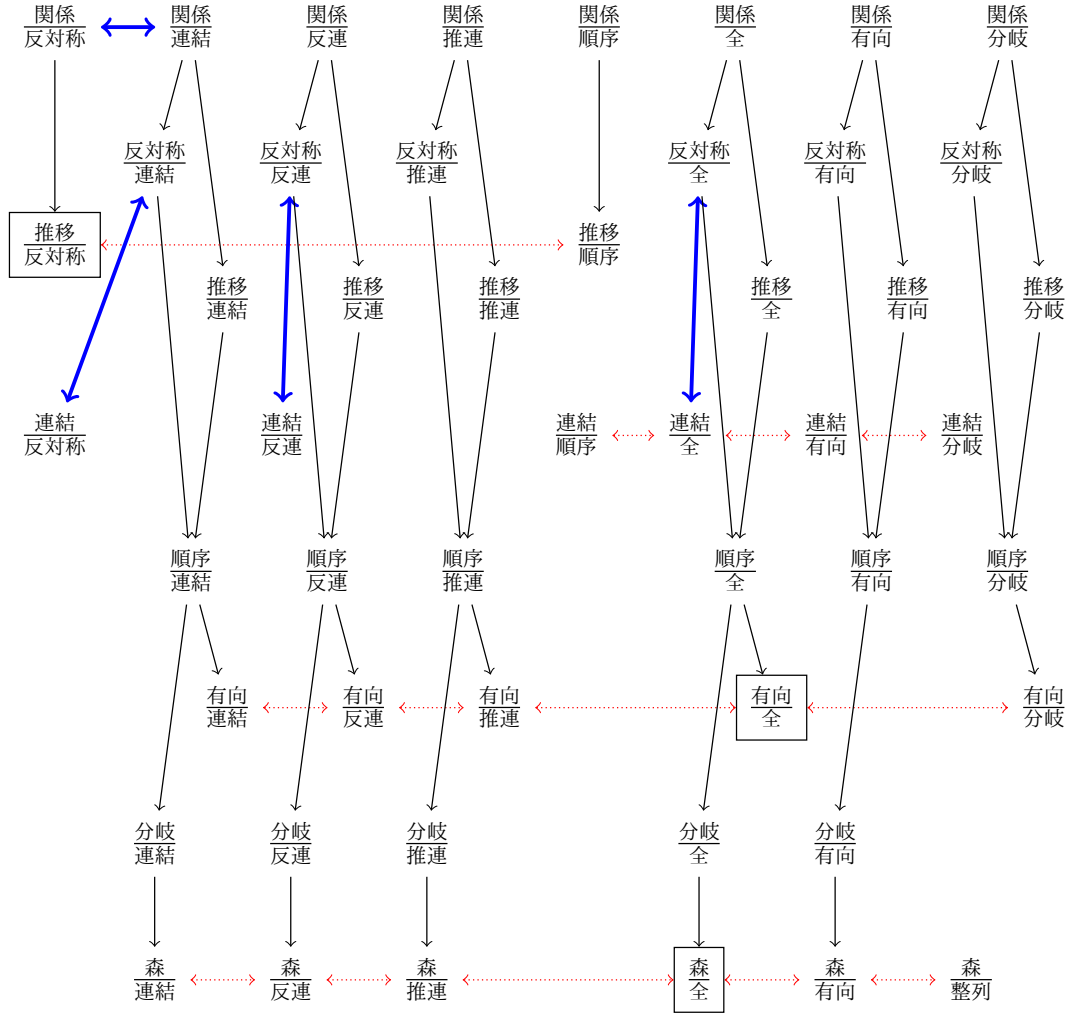
(2) 関係  $R \subset X \times X$  に対して「 $(X, R)$  が連結  $\iff (X, \bar{R})$  が反対称」「 $(X, R \cup I)$  が全  $\iff (X, \bar{R} \cup I)$  が全」が成り立つ. 故に  $\text{MP}(\text{反対称}, \text{連結}) \iff \text{MP}(\text{連結}, \text{反対称})$  と  $\text{MP}(\text{反対称}, \text{反連}) \iff \text{MP}(\text{連結}, \text{反連})$  と  $\text{MP}(\text{反対称}, \text{全}) \iff \text{MP}(\text{連結}, \text{全})$  と  $\text{MP}(\text{関係}, \text{反対称}) \iff \text{MP}(\text{関係}, \text{連結})$  が分かる.

(3) 次の同値は明らかである.

- $\text{MP}(\text{推移}, \text{反対称}) \iff \text{MP}(\text{推移}, \text{順序})$
- $\text{MP}(\text{連結}, \text{順序}) \iff \text{MP}(\text{連結}, \text{全}) \iff \text{MP}(\text{連結}, \text{有向}) \iff \text{MP}(\text{連結}, \text{分岐})$
- $\text{MP}(\text{有向}, \text{連結}) \iff \text{MP}(\text{有向}, \text{反連}) \iff \text{MP}(\text{有向}, \text{推連}) \iff \text{MP}(\text{有向}, \text{全}) \iff \text{MP}(\text{有向}, \text{分岐})$
- $\text{MP}(\text{森}, \text{連結}) \iff \text{MP}(\text{森}, \text{反連}) \iff \text{MP}(\text{森}, \text{推連}) \iff \text{MP}(\text{森}, \text{全}) \iff \text{MP}(\text{森}, \text{有向}) \iff \text{MP}(\text{森}, \text{整列})$

以上の (1)(2)(3) を合わせると, 次の図式が得られる. ( $\rightarrow$  は (1),  $\leftrightarrow$  は (2),  $\iff$  は

(3) による. また  $MS(P, Q)$  を  $\frac{P}{Q}$  で表した. 四角い枠については後述. )



また,  $Q =$  反対称, 連結, 反連, 推連, 順序, 全, 有向, 分岐のとき, Zorn の補題  $\implies$   $MP(\text{関係}, Q)$  である. よって後は「図中で四角に囲まれた命題  $\implies$  Zorn の補題」, 即ち次の (i)(i)(iii) を示せばよい.

(i)  $MS(\text{有向}, \text{全}) \implies$  Zorn の補題

定理 1 の条件 8 「任意の順序集合は極大鎖を持つ」を示す.  $(X, \leq)$  を順序集合とする.  $\mathcal{C} := \{Y \subset X \mid (Y, \leq) \text{ は鎖}\}$  とすると  $(\mathcal{C}, \supset)$  は有向集合になる. よって仮定の  $MS(\text{有向}, \text{全})$  により極大な部分全順序  $\mathcal{M} \subset \mathcal{C}$  が存在する. このとき  $Z := \bigcup_{Y \in \mathcal{M}} Y$  と置けば明らかにこの  $Z \subset X$  が極大鎖である.

(ii)  $MS(\text{森}, \text{全}) \implies$  Zorn の補題

$MP(\text{順序}, \text{整列})$  を示す.  $(X, \leq)$  を順序集合として,  $X$  の部分整列順序は上界を持つとす

る.  $\mathcal{W} := \{Y \subset X \mid (Y, \leq) \text{ は整列順序}\}$  として,  $\mathcal{W}$  に順序  $\trianglelefteq$  を

$$Y \trianglelefteq Z \iff Y = Z \text{ またはある } z \in Z \text{ が存在して } Y = z^\downarrow$$

で定める. すると  $(\mathcal{W}, \trianglelefteq)$  は森になる. よって仮定の MS(森, 全) により極大な部分全順序  $\mathcal{V} \subset \mathcal{W}$  が存在する. このとき  $Z := \bigcup_{Y \in \mathcal{V}} Y$  と置けば明らかに  $Z \in \mathcal{W}$  だから,  $Z$  の上界  $x \in X$  が存在する. この  $x$  が極大元である.

(iii) MS(推移, 反対称)  $\implies$  Zorn の補題

選択集合の存在を示す. その為に  $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  を互いに素な非空集合の族とする.  $X := \bigcup_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$  に関係  $R$  を

$$xRy \iff \text{ある } \lambda \in \Lambda \text{ が存在して } x, y \in X_\lambda$$

と定める.  $R$  は勿論推移的であるから, 仮定の MS(推移, 反対称) により極大な  $Y$  を得る. この  $Y$  が  $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  の選択集合である.  $\square$

MS'(P, Q) で命題

$(X, R)$  が  $P$  であり,  $Y \subset X$  で  $(Y, R)$  が  $Q$  であるとする.

このとき集合  $\{Z \subset X \mid Y \subset Z, (Z, R) \text{ は } Q \text{ である}\}$  は  $\subset$  に関する極大元を持つ

を表すとする.

**定理 7.** 定理 6 で述べた組  $(P, Q)$  のうち, (森, 整列) を除いて Zorn の補題  $\iff$  MS'(P, Q) である.

**証明.** 定理 6 と同様にして Zorn の補題  $\implies$  MS'(P, Q) が分かる. 一方, 明らかに MS'(P, Q)  $\implies$  MS(P, Q) であるから MS'(P, Q)  $\implies$  Zorn の補題である.  $\square$

**定理 8.** Zorn の補題

$\iff$  順序集合  $X$  が「下の条件 (\*) を満たす任意の  $A \subset X$  が上界を持つ」を満たすならば,  $X$  は極大元を持つ.

(\*) 任意の元  $x, y \in A$  に対し  $\{x, y\} \subset A$  は  $A$  に上界を持つ.

**証明.** ( $\implies$ )  $X$  を順序集合とする. (\*) を満たす  $A \subset X$  が上界を持つとする.  $C \subset X$  を任意の鎖とすると鎖は (\*) を満たすから,  $C$  は上界を持つ. 従って Zorn の補題より  $X$  は極大元を持つ.

( $\Leftarrow$ ) 選択公理を示す.  $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  を非空集合の族とする.  $X := \{f: \Gamma \rightarrow \bigcup_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda \mid \Gamma \subset \Lambda, f(\lambda) \in X_\lambda\}$  と定める.  $X$  に  $\subset$  で順序を入れる.

$A \subset X$  が (\*) を満たすとする.  $g := \bigcup_{f \in A} f$  と置く.  $\lambda \in \text{dom}(g)$  を取る.  $\text{dom}(f_1), \text{dom}(f_2) \ni \lambda$  となる任意の  $f_1, f_2 \in A$  を取る. 条件 (\*) より,  $\{f_1, f_2\}$  は  $A$  に上界  $h$  を持つ. このとき  $h(\lambda) = f_1(\lambda) = f_2(\lambda)$  である. よって  $g(\lambda)$  は一意に定まる. 故に  $g$  は写像であり,  $g \in X$  となる. 明らかに  $g$  は  $A$  の上界である.

よって仮定より  $X$  は極大元を持つが, それが選択関数である. □

### 定理 9. Zorn の補題

$\iff$  任意の集合  $X$  は次の条件を満たす極大部分集合  $Y \subset X$  を持つ.

任意の元  $a, b \in Y$  に対して  $a \in b$  または  $a = b$  または  $b \in a$

証明. ( $\implies$ ) Tukey の補題 (定理 1 の 6) により明らか.

( $\Leftarrow$ ) 整列可能定理を示す.  $X$  を任意の集合として  $\mathcal{W} := \{(Y, R) \mid Y \subset X, R \subset Y \times Y, (Y, R) \text{ は整列順序}\}$  と定める.  $\mathcal{W}$  に順序関係  $\leq$  を次のように定義する.

$$(Y, R) < (Z, S) \iff \text{ある } z \in Z \text{ が存在して } (Y, R) = (z^\perp, S).$$

すると  $(\mathcal{W}, \leq)$  は木である.  $\mathcal{W}$  上の写像  $f$  を

$$f(Y, R) := \{\{R\}\} \cup \{f(W, T) \mid (W, T) \in \mathcal{W}, (W, T) < (Y, R)\}$$

で定める.

$$(i) f(Y, R) = f(Z, S) \iff (Y, R) = (Z, S)$$

$\therefore$   $\Leftarrow$  は明らか.  $\implies$  を示す.  $f(Y, R) = f(Z, S)$  かつ  $(Y, R) \neq (Z, S)$  であるとすると  $R \neq S$  であるから  $\{R\} \neq \{S\}$  となる. よって,  $f(Y, R) \subset f(Z, S)$  だから  $\{R\} \in \{f(W, T) \mid (W, T) \in \mathcal{W}, (W, T) < (Z, S)\}$  でなければならない. 故にある  $(W, T) < (Z, S)$  が存在して  $R = f(W, T)$  となる. よって  $\{T\} \in f(W, T) = R \subset Y \times Y$  となり矛盾する.

$$(ii) f(Y, R) \in f(Z, S) \iff (Y, R) < (Z, S)$$

$\therefore$   $\Leftarrow$  は  $f$  の定義から明らか.  $f(Y, R) \in f(Z, S)$  とする. すると  $f$  の定義より  $f(Y, R) = \{S\}$  か  $f(Y, R) \in \{f(W, T) \mid (W, T) \in \mathcal{W}, (W, T) < (Z, S)\}$  のどちらかである. しかし  $f(Y, R) = \{S\}$  はありえない. 故にある  $(W, T) < (Z, S)$  が存在

して  $f(Y, R) = f(W, T)$  と書ける. すると (i) により  $(Y, R) = (W, T)$  となるから,  $(Y, R) < (Z, S)$  である.

集合  $f(W)$  に仮定を適用して,  $Q \subset f(W)$  を得る.  $\mathcal{V} := f^{-1}(Q)$  と定める. (i)(ii) により,  $\mathcal{V} \subset \mathcal{W}$  は「任意の  $(Y, R), (Z, S) \in \mathcal{V}$  に対し  $(Y, R) < (Z, S)$  または  $(Y, R) = (Z, S)$  または  $(Z, S) < (Y, R)$ 」を満たす極大部分集合である.  $W := \bigcup_{(Y,R) \in \mathcal{V}} Y, T := \bigcup_{(Y,R) \in \mathcal{V}} R$  とすれば, 明らかに  $(W, T) \in \mathcal{W}$  である.

$X \neq W$  と仮定する.  $x \in X \setminus W$  を取る.  $\tilde{T} := T \cup (W \times \{x\}) \cup \{(x, x)\}$  と置くと  $(W \cup \{x\}, \tilde{T}) \in \mathcal{W}$  である.  $\tilde{\mathcal{V}} := \mathcal{V} \cup \{(W \cup \{x\}, \tilde{T})\}$  を考えると, これは「任意の  $(Y, R), (Z, S) \in \tilde{\mathcal{V}}$  に対し  $(Y, R) < (Z, S)$  または  $(Y, R) = (Z, S)$  または  $(Z, S) < (Y, R)$ 」を満たす. 明らかに  $\mathcal{V} \subsetneq \tilde{\mathcal{V}}$  だから  $\mathcal{V}$  の極大性に矛盾する. よって  $X = W$  であり,  $T$  は  $X$  を整列する.  $\square$

**定理 10.** 集合  $X$  と整数  $n \geq 2$  に対して,  $\text{UN}(X, n)$  で次の命題を表すとする.

任意の  $R \subset X^n$  に対して  $\{Y \subset X \mid Y^n \subset R\}$  は ( $\subset$  に関する) 極大元をもつ.

$n \geq 2$  を整数とするとき, 次の命題は (ZF 上) 同値.

1. Zorn の補題
- 2(n). 任意の  $X$  に対して  $\text{UN}(X, n)$
3. ある  $n \geq 2$  が存在して任意の  $X$  に対し  $\text{UN}(X, n)$
4. 任意の  $X$  に対してある  $n \geq 2$  が存在して  $\text{UN}(X, n)$

**証明.**  $1 \implies 2(n)$  と  $2(n) \implies 3$  と  $3 \implies 4$  は明らか.

( $4 \implies 2(2)$ )  $R \subset X \times X$  を二項関係とする. 仮定 4 により, ある  $n \geq 2$  が存在して  $\text{UN}(X, n)$  が成り立つ. そこで  $R \times X^{n-2}$  に  $\text{UN}(X, n)$  を適用して極大な  $Y$  を得る. この  $Y$  は明らかに  $\{Y \subset X \mid Y^2 \subset R\}$  の極大元である.

( $2(2) \implies 1$ )  $2(2) \implies \text{MS}(\text{関係}, \text{連結})$  を示せばよい.  $R \subset X \times X$  を二項関係とする.  $R \cup R^{-1} \cup I$  に  $2(2)$  を適用して  $\{Y \subset X \mid Y^2 \subset R \cup R^{-1} \cup I\}$  の極大元  $Y$  を得る. 明らかに, この  $Y$  が  $\{Y \subset X \mid (Y, R) \text{ は連結}\}$  の極大元である.  $\square$

**定義.** 集合  $X$  上の二項関係を次のように定義する.

1.  $xDy \iff x \cap y = \emptyset$
2.  $xKy \iff x \subset y$  または  $y \subset x$

3.  $xJy \iff x \not\subset y$  かつ  $y \not\subset x$  かつ  $x \cap y \neq \emptyset$

$R \subset X$  を関係とする. 部分集合  $Y \subset X$  が「任意の異なる二元  $x, y \in Y$  に対し  $xRy$ 」を満たすとき,  $Y$  は property  $R$  を持つということにする.

**定理 11.** 関係  $R$  に対し  $N(R)$  で次の命題を表すとする.

任意の  $X$  に対し  $\{Y \subset X \mid Y \text{ は property } R \text{ を持つ}\}$  は極大元をもつ

このとき

$$\text{Zorn の補題} \iff N(D) \iff N(\bar{D}) \iff N(K) \iff N(J) \iff N(\bar{J})$$

**証明.** (Zorn の補題  $\implies N(J)$ ) Tukey の補題より明らか.

( $N(J) \implies N(\bar{D})$ ) 任意の集合  $X$  をとる.  $u$  を「任意の  $x, y \in X$  に対し  $\langle x, u \rangle \notin y$ 」を満たすように取り,  $x \in X$  に対し  $f(x) := x \cup \{\langle x, u \rangle\}$  と定める. 仮定  $N(J)$  を  $f(X)$  に適用すると, property  $J$  を持つ極大部分集合  $S \subset f(X)$  の存在が分かる.  $Y := f^{-1}(S)$  と定める.

$x, y \in X, x \neq y$  とする. 定義から  $f(x) \bar{K} f(y)$ . 故に  $f(x) J f(y) \iff f(x) \bar{D} f(y)$  が成り立つ. 一方,  $f(x) \cap f(y) = x \cap y$  だから  $f(x) \bar{D} f(y) \iff x \bar{D} y$  となる. 即ち  $f(x) J f(y) \iff x \bar{D} y$  であり, 従って  $Y \subset X$  は property  $\bar{D}$  を持ち極大である.

( $N(\bar{D}) \implies N(D)$ ) 任意の集合  $X$  をとる.  $x \in X$  に対し  $f(x) := \{\{x\}\} \cup \{\{x, z\} \mid z \in X, x D z\}$  と置く.

$x, y \in X, x \neq y$  とする. 定義から  $f(x) \bar{D} f(y) \iff x D y$  である. よって仮定  $N(\bar{D})$  を  $f(X)$  に適用すれば,  $N(D)$  の成立が分かる.

( $N(D) \implies \text{Zorn の補題}$ ) 選択公理を示す.  $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  を互いに素な非空集合の族とする.  $X := \{\{\langle 0, x \rangle, \langle 1, \lambda \rangle\} \mid \lambda \in \Lambda, x \in X_\lambda\}$  とする. 仮定  $N(D)$  を  $X$  に適用して, property  $D$  を持つ極大部分集合  $Y \subset X$  を得る.  $\{\langle 0, x \rangle, \langle 1, \lambda \rangle\} D \{\langle 0, y \rangle, \langle 1, \mu \rangle\} \iff \lambda \neq \mu$  だから, 各  $\lambda \in \Lambda$  に対し  $\{\langle 0, x_\lambda \rangle, \langle 1, \lambda \rangle\} \in Y$  となるような  $x_\lambda \in X_\lambda$  が唯一つ存在する. よって  $\{x_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$  が選択集合である.

(Zorn の補題  $\implies N(\bar{J})$ ) Tukey の補題より明らか.

( $N(\bar{J}) \implies N(K)$ ) 任意の集合  $X$  をとる.  $\bigcup_{x \in X} x$  に含まれない元  $u$  を取り,  $x \in X$  に対し  $f(x) := x \cup \{u\}$  と置く. すると任意の  $x, y \in X, x \neq y$  に対し  $f(x) \bar{D} f(y)$  となるから,  $f(x) \bar{J} f(y) \iff f(x) K f(y) \iff x K y$  が分かる. 故に仮定  $N(\bar{J})$  を  $f(X)$  に適用すれば,  $N(K)$  の成立が分かる.

( $N(K) \implies \text{Zorn の補題}$ ) 明らかに  $N(K) \iff$  「定理 1 の 3」である. □

定理 12. Zorn の補題  $\iff N(\bar{K})$

証明.  $X$  を集合とすると、 $Y \subset X$  が property  $\bar{K}$  を持つのは、 $Y$  が順序集合  $(X, \subset)$  の反鎖となるときである。

( $\implies$ ) 定理 1 の条件 11 より明らか。

( $\impliedby$ ) 定理 1 の条件 11 を示す.  $(X, \leq)$  を順序集合とすると  $A := \{x^\downarrow \mid x \in X\}$  とすれば順序同型  $(X, \leq) \cong (A, \subset)$  が成り立つ. よって仮定から  $\{B \subset A \mid B \text{ は property } \bar{K} \text{ を持つ}\}$  の極大元  $B$  を取れば、それに対応する  $Y \subset X$  が極大反鎖である.  $\square$

定理 13. Zorn の補題  $\iff$  順序集合  $(X, \leq)$  が「任意の鎖は上界を持つ」を満たすとき、ある  $t \in X$  が存在して  $\bar{t} := \{x \in X \mid t < x\}$  は最小元を持たない。

証明. ( $\implies$ ) Zorn の補題により極大元  $t \in X$  が存在する. このとき  $\bar{t} = \emptyset$  は最小元を持たない。

( $\impliedby$ ) Zorn の補題が成り立たないと仮定する. 即ち極大元を持たない順序集合  $(X, \leq)$  で「任意の鎖は上界を持つ」を満たすものが存在する.  $X \times \mathbb{N}$  上の順序を辞書式順序で定める.  $X \times \mathbb{N}$  は「任意の鎖は上界を持つ」を満たす。

( $\therefore$ )  $C \subset X \times \mathbb{N}$  を鎖とする.  $\pi: X \times \mathbb{N} \rightarrow X$  を標準射影とすると  $\pi(C) \subset X$  は鎖である. 故に上界  $u_0 \in X$  を持つ.  $X$  は極大元を持たないから  $u > u_0$  となる  $u \in X$  が存在する. このとき  $\langle u, 0 \rangle \in X \times \mathbb{N}$  は  $C$  の上界である。

一方、任意の  $\langle x, m \rangle \in X \times \mathbb{N}$  に対して  $\overline{\langle x, m \rangle}$  は最小元  $\langle x, m+1 \rangle$  を持つから仮定に矛盾する.  $\square$

## 参考文献

- [1] H. Rubin and J. Rubin, *Equivalents of the axiom of choice II*, North Holland, 1985.
- [2] Horst Herrlich, *Axiom of Choice*, Springer, 2006
- [3] 松坂 和夫, 『集合・位相入門』, 岩波書店, 1968 年