選択公理と整列可能定理と Zorn の補題

alg-d
http://alg-d.com/math/ac/

2012 年 3 月 24 日

定理. 次の命題は (ZF 上) 同値.

1. 選択公理
2. 任意の集合 X は整列順序付け可能 (整列可能定理)
3. 順序集合 X が「任意の部分全順序集合は上界を持つ」を満たすならば，X の極大元が存在する．(Zorn の補題)

証明. ($1 \Longrightarrow 2$) X を集合とする．X が整列可能である事を示す．順序数 λ で，$|\lambda| \not\leq |X|$ となるものを取る．選択公理を $A := \mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\}$ に適用して，選択関数 $f : A \longrightarrow X$ を得る．$\infty \notin X$ となる元 ∞ を用意して，$f(\emptyset) := \infty$ と定義することで f を $f : \mathcal{P}(X) \longrightarrow X \cup \{\infty\}$ に拡張しておく．写像 $g : \lambda \longrightarrow X \cup \{\infty\}$ を

$$g(\alpha) := f\bigl(X \setminus \{g(\beta) \mid \beta < \alpha\}\bigr)$$

で定義する．$\alpha, \beta < \lambda$ に対して，$g(\alpha) = g(\beta) \neq \infty$ ならば，$\alpha = \beta$ である．

$\because$) $\beta < \alpha$ であるとする．$g(\alpha) \neq \infty$ だから選択関数 f の性質より

$$g(\alpha) = f(X \setminus \{g(\beta) \mid \beta < \alpha\}) \in X \setminus \{g(\beta) \mid \beta < \alpha\}$$

となる．即ち $g(\alpha) \notin \{g(\beta) \mid \beta < \alpha\}$ だから $g(\alpha) \neq g(\beta)$ である．

よって，もし $g(\alpha) = \infty$ となる $\alpha < \lambda$ が存在しなければ，$g : \lambda \longrightarrow X$ は単射となる．これは $|\lambda| \not\leq |X|$ に矛盾する．故に $g(\alpha) = \infty$ となる $\alpha < \lambda$ は存在する．そこで $\gamma := \min\{\alpha < \lambda \mid g(\alpha) = \infty\}$ と置く．このとき $g|_\gamma : \gamma \longrightarrow X$ は全単射である．

$\because$) $\infty = g(\gamma) = f(X \setminus \{g(\beta) \mid \beta < \gamma\})$ だから，$X \setminus \{g(\beta) \mid \beta < \gamma\} = \emptyset$，つまり

$g|_\gamma$ は全射でなければならない．単射性は先に示したことから明らか.

よってこれにより X を整列する事ができる.

($2 \Longrightarrow 3$) $(X, \leq)$ を順序集合として「任意の部分全順序集合は上界を持つ」を満たすとする．整列可能定理により，ある順序数 λ と全単射 $f : \lambda \longrightarrow X$ が存在する．$\alpha < \lambda$ に対して $g(\alpha) \in X$ を超限再帰により次の二条件を満たすように定める.

(a) $\beta < \alpha$ ならば $g(\beta) \leq g(\alpha)$

(b) $g(\alpha) \not< f(\alpha)$

(i) $\alpha = 0$ のとき.
$g(\alpha) := f(\alpha)$ とすれば明らかに (a)(b) を満たす.

(ii) $\alpha > 0$ のとき.
(a) により $\{g(\beta) \mid \beta < \alpha\} \subset X$ は部分全順序集合である．故に仮定により上界を持つ．そこでその上界全体のなす集合を A_α と置いて $\gamma_\alpha := \min f^{-1}(A_\alpha)$ と定める．そして

$$g(\alpha) := \begin{cases} f(\alpha) & (f(\gamma_\alpha) < f(\alpha) \text{ のとき}) \\ f(\gamma_\alpha) & (\text{そうでないとき}) \end{cases}$$

と定める．すると明らかに (a)(b) を満たす.

(i)(ii) により写像 $g : \lambda \longrightarrow X$ が定義された．(a) から $\{g(\alpha) \mid \alpha < \lambda\} \subset X$ は部分全順序集合である．故に上界 $x \in X$ が存在する．この $x \in X$ が極大元である.

$\because$) $y \in X$ が $x \leq y$ を満たすとする．$\beta := f^{-1}(y)$ と置く．x は $\{g(\alpha) \mid \alpha < \lambda\} \subset X$ の上界だから $g(\beta) \leq x \leq y = f(\beta)$ である．(b) により $g(\beta) \not< f(\beta)$ であるから $g(\beta) = f(\beta) = y$ でなければならない．故に $y = g(\beta) \leq x$ である．よって x は極大元である.

($3 \Longrightarrow 1$) $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ を非空集合の族とする.

$$A := \left\{ g : \Sigma \longrightarrow \bigcup_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda \,\middle|\, \Sigma \subset \Lambda,\ \text{任意の}\lambda \in \Sigma\text{に対して } g(\lambda) \in X_\lambda \right\}$$

として A に $\subset$ で順序を入れる．$B \subset A$ を部分全順序集合とするとき $\displaystyle\bigcup_{g \in B} g \in A$ は B の上界である．即ち A は Zorn の補題の仮定を満たす．故に極大元 $f \in A$ を持つ．もし $\mathrm{dom}(f) \neq \Lambda$ であれば f が極大であることに反するので $\mathrm{dom}(f) = \Lambda$ となる．故に f は選択関数である. $\square$

おまけ

(2 $\Longrightarrow$ 1) $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を非空集合の族とする．整列可能定理により $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ を整列し $f(\lambda) :=$ (X_λ の最小元) とすれば f が選択関数である．

参考文献

[1] H. Rubin and J. Rubin, Equivalents of the Axiom of Choice, II, North Holland, 1985.

[2] 田中 尚夫,『選択公理と数学【増訂版】』, 遊星社, 2005 年