Urysohn の補題

alg-d
http://alg-d.com/math/ac/

2016 年 5 月 22 日

次の命題を Urysohn の補題という．

命題 1 (Urysohn の補題)**.** X を T_4 空間，$F, G \subset X$ を互いに素な閉集合とするとき，連続関数 $f\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ で $x \in F$ に対して $f(x) = 0$，$x \in G$ に対して $f(x) = 1$ となるものが存在する．

命題 2. X を T_4 空間，$F \subset X$ を閉集合，$U \subset X$ を開集合，$F \subset U$ とする．このときある開集合 V が存在して $F \subset V$, $\overline{V} \subset U$ となる．

証明. $U^c \subset X$ は閉集合で $F \cap U^c = \emptyset$ である．X が T_4 だから，ある開集合 $V, W \subset X$ が存在して $F \subset V$，$U^c \subset W$，$V \cap W = \emptyset$ となる．$V \cap W = \emptyset$ だから $V \subset W^c$ で，W^c は閉集合だから $\overline{V} \subset W^c$ である．$U^c \subset W$ だから $W^c \subset U$ なので $\overline{V} \subset U$ となる． □

$R := \left\{ \dfrac{m}{2^n} \,\middle|\, n \geq 0,\ 0 \leq m \leq 2^n \right\}$ とする．

補題 3. $(X, \mathcal{O})$ を位相空間，$F \subset X$ を閉集合とする．写像 $U\colon R \longrightarrow \mathcal{O}$ が「$r < s$ ならば $\overline{U(r)} \subset U(s)$」と $F \subset U(0)$ を満たすとする．このとき連続関数 $f\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ で $x \in F$ に対して $f(x) = 0$，$x \in U(1)^c$ に対して $f(x) = 1$ となるものが存在する．

証明. $a \in \mathbb{R}$ に対して $\displaystyle\bigcup_{a<r\in R} U(r)^c = \bigcup_{a<r\in R} (\overline{U(r)})^c$ である．

$\because$) R の点列 $a_0 > a_1 > \cdots > a$ を $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = a$ となるように取れる (R は整列可能なので選択公理は不要)．このとき任意の $a < r \in R$ に対してある $n \in \mathbb{N}$ が存在して $U(r) \supset U(a_n)$ であり，また任意の $n \in \mathbb{N}$ に対してある $a < r \in R$ が存在して

$U(a_n) \supset \overline{U(r)}$ である．故に

$$\bigcap_{a<r\in R} U(r) \supset \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U(a_n) \supset \bigcap_{a<r\in R} \overline{U(r)} \supset \bigcap_{a<r\in R} U(r)$$

となる．よって補集合を考えれば $\displaystyle\bigcup_{a<r\in R} U(r)^c = \bigcup_{a<r\in R} \big(\overline{U(r)}\big)^c$ である．

$f\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ を $f(x) := \inf\{r \in R \mid x \in U(r)\}$ で定める．明らかに $x \in F$ に対して $f(x) = 0$，$x \in U(1)^c$ に対して $f(x) = 1$ である．よって f が連続であることを示せばよい．$(a,b) \subset \mathbb{R}$ を開区間とする．このとき

$$\begin{aligned} f^{-1}(a,b) &= \{x \in X \mid a < f(x)\} \cap \{x \in X \mid f(x) < b\} \\ &= \{x \in X \mid \text{ある } r > a \text{ に対して } x \notin U(r)\} \\ &\qquad \cap \{x \in X \mid \text{ある } r < b \text{ に対して } x \in U(r)\} \\ &= \bigcup_{r>a} U(r)^c \cap \bigcup_{r<b} U(r) \\ &= \bigcup_{r>a} (\overline{U(r)})^c \cap \bigcup_{r<b} U(r) \end{aligned}$$

も開集合である．故に f は連続である． □

定理 4. 選択公理 $\Longrightarrow$ Urysohn の補題

証明. $(X,\mathcal{O})$ を T_4 空間，$F,G \subset X$ を互いに素な閉集合とする．X の閉集合全体を $\mathcal{A}$ とする．$S := \{\langle F,U\rangle \in \mathcal{A}\times\mathcal{O} \mid F \subset U\}$ とすると，$\langle F,U\rangle \in S$ に対して $\mathcal{O}_{\langle F,U\rangle} := \{V \in \mathcal{O} \mid F \subset V,\ \overline{V} \subset U\} \neq \emptyset$ である．故に $\{\mathcal{O}_{\langle F,U\rangle}\}_{\langle F,U\rangle\in S}$ の選択関数 $g\colon S \longrightarrow \mathcal{O}$ が存在する．

$U(0) := f(F,G^c)$，$U(1) := G^c$ として $U(\frac{m}{2^n}) := g\big(\langle\overline{U(\frac{m-1}{2^n})}, U(\frac{m+1}{2^n})\rangle\big)$ と定める．

このU は補題 3 の条件を満たす．故に Urysohn の補題が成り立つ． □

今の証明では選択公理を用いたが，これは次のようにすれば従属選択公理でよいことが分かる．

$$T := \{\langle U_1,\cdots,U_{2^n}\rangle \mid n\in\mathbb{N},\ U_i \in \mathcal{O}, 1 \le i \le 2^n-1 \text{ に対して } \overline{U}_i \subset U_{i+1}\}$$

として T 上の二項関係 R を

$$\langle U_1,\cdots,U_{2^n}\rangle R \langle V_1,\cdots,V_{2^m}\rangle \Longleftrightarrow m = n+1 \text{ かつ } U_i = V_{2i}$$

で定める．この R は明らかに「任意の $a \in T$ に対してある $b \in T$ が存在して aRb」を満たす．故に従属選択公理から $a_1 := \langle F, G^c \rangle$ として列 $a_1 R a_2 R \cdots$ が存在する．このとき $a_n = \langle U_{n,1}, \cdots, U_{n,2^n} \rangle$ と書ける．$U(\frac{m}{2^n}) := U_{n,m}$ とすればよい． □

更に容易に分かるように，従属選択公理は DMC でもよい．

定理 5. DMC $\Longrightarrow$ Urysohn の補題

証明. DMC により族 $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ を取る．以下のように書けると仮定してよい．

$$\begin{aligned} F_n &= \{x_n^{(1)}, \cdots, x_n^{(m_n)}\} \\ x_n^{(j)} &= \langle V_{n,1}^{(j)}, \cdots, V_{n,2^n}^{(j)} \rangle \\ m_1 &= 1 \\ V_{1,1}^{(1)} &\in \mathcal{O}_{F,G^c} \\ V_{1,2}^{(1)} &= G^c \end{aligned}$$

また任意の $n > 1$ と $1 \leq j \leq m_n$ に対して，ある $k = k_{n,j}$ が存在して $x_{n-1}^{(k)} R x_n^{(j)}$ とできる，と仮定してよい．このとき $U_{n,i} := \displaystyle\bigcap_{1 \leq j \leq m_n} V_{n,i}^{(j)}$ とすれば $a_n := \langle U_{n,1}, \cdots, U_{n,2^n} \rangle \in T$ である．

∵) $1 \leq i \leq 2^n - 1$ に対して $\overline{U_{n,i}} = \displaystyle\bigcap_{1 \leq j \leq m_n} \overline{V_{n,i}^{(j)}} \subset \bigcap_{1 \leq j \leq m_n} V_{n,i+1}^{(j)} = U_{n,i+1}$.

また

$$U_{n+1,2i} = \bigcap_{1 \leq j \leq m_{n+1}} V_{n+1,2i}^{(j)} = \bigcap_{1 \leq j \leq m_n} V_{n,i}^{(k_{n,j})} = \bigcap_{1 \leq j \leq m_n} V_{n,i}^{(j)} = U_{n,i}$$

となるから $a_n R a_{n+1}$ である．故に Urysohn の補題が従う． □

また，Urysohn の補題は ZF で証明できないことが知られている (Urysohn の補題を参照).

Urysohn の補題の応用として有名なのが Urysohn の距離化可能定理である．

命題 6 (Urysohn の距離化可能定理)**.** 第二可算 T_3 空間は距離化可能である．

証明. □