Tychonoff の定理の別証明

alg-d
http://alg-d.com/math/ac/

2014 年 8 月 15 日

Tychonoff の定理の証明については Tychonoff の定理で与えているが，ここでは別証明を二つ紹介する．これらの証明を眺めることで，選択公理に関する事実がいくつか分かる為である．

定義. X を位相空間とする．

1. X の開集合全体のなす集合を $\mathcal{O}_X$ で表す．
2. X の閉集合全体のなす集合を $\mathcal{A}_X$ で表す．
3. X がコンパクト
   $\Longleftrightarrow$ 部分集合 $\mathcal{U} \subset \mathcal{O}_X$ が $X = \bigcup \mathcal{U}$ を満たすならば，ある非負整数 n とある $U_0, \cdots, U_n \in \mathcal{U}$ が存在して $X = U_0 \cup \cdots \cup U_n$.

   ※ 集合 $\mathcal{A}$ に対して $\bigcup \mathcal{A} := \displaystyle\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$, $\bigcap \mathcal{A} := \displaystyle\bigcap_{A \in \mathcal{A}} A$ である．

4. $\mathcal{B} \subset \mathcal{O}_X$ が基底
   $\Longleftrightarrow$ 任意の開集合 $U \in \mathcal{O}_X$ に対してある部分集合 $\mathcal{C} \subset \mathcal{B}$ が存在して $U = \bigcup \mathcal{C}$ と書ける．
5. $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}_X$ が有限交差性 (finite intersection property) を持つ
   $\Longleftrightarrow$ 任意の整数 $n \geq 0$ と任意の $F_0, \cdots, F_n \in \mathcal{F}$ に対して $F_0 \cap \cdots \cap F_n \neq \emptyset$.

コンパクトという条件を考えるときには，開集合は基底の元のみを考えればよい．即ち，次の補題が成り立つ．

補題 1. $\mathcal{B}$ を位相空間 X の基底とするとき，
X がコンパクト

$\Longleftrightarrow$ 部分集合 $\mathcal{U} \subset \mathcal{B}$ が $X = \bigcup \mathcal{U}$ を満たすならば，ある $n \geq 0$ とある $U_0, \cdots, U_n \in \mathcal{U}$ が存在して $X = U_0 \cup \cdots \cup U_n$.

証明. $\Longrightarrow$ は明らか．逆 $\Longleftarrow$ を示す．

$\mathcal{U} \subset \mathcal{O}_X$ が $X = \bigcup \mathcal{U}$ を満たすとする．$U \in \mathcal{U}$ に対して $\mathcal{B}_U := \{V \in \mathcal{B} \mid V \subset U\}$ と置けば，$\mathcal{B}$ が基底であることから $U = \bigcup \mathcal{B}_U$ が分かる．よって $\mathcal{V} := \bigcup_{U \in \mathcal{U}} \mathcal{B}_U \subset \mathcal{B}$ と置けば $X = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} \bigcup_{V \in \mathcal{B}_U} V = \bigcup_{V \in \mathcal{V}} V$ だから，仮定によりある $V_0, \cdots, V_n \in \mathcal{V}$ が存在して $X = V_0 \cup \cdots \cup V_n$ である．このとき各 $0 \leq i \leq n$ について $V_i \in \mathcal{B}_{U_i}$ となる $U_i \in \mathcal{U}$ を取れば $X = U_0 \cup \cdots \cup U_n$ である． □

1 Tychonoff の定理の別証明 1

定義. X を位相空間とする．

1. $\mathfrak{A} \subset \mathcal{O}_X$ が X 上 admissible
   $\Longleftrightarrow$ 任意の整数 $n \geq 0$ と任意の $U_0, \cdots, U_n \in \mathfrak{A}$ に対して $U_0 \cup \cdots \cup U_n \neq X$.
2. $X = \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ を直積位相空間とするとき，
$$\mathcal{B}(X) := \left\{ \prod_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \;\middle|\; U_\lambda \in \mathcal{O}_X,\ \text{有限個の}\lambda \in \Lambda\text{を除いて}\ U_\lambda = X_\lambda \right\}$$
   と置く．$\mathcal{B}(X)$ は X の基底である．
3. $X = \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ を直積位相空間とするとき，標準射影 $X \longrightarrow X_\lambda$ を π_{X_λ} で表す．π_{X_λ} は連続である．

補題 2. 位相空間 X に対して次の命題は同値.

1. X がコンパクト
2. $\mathfrak{A} \subset \mathcal{O}_X$ が X 上 admissible $\Longrightarrow \bigcup \mathfrak{A} \neq X$

証明. 対偶を考えればよい． □

補題 1 を踏まえれば，条件 2 では $\mathfrak{A} \subset \mathcal{B}$ としてよいことが分かる．

補題 3. X をコンパクト位相空間，Y を位相空間とし，$\mathfrak{A} \subset \mathcal{B}(X \times Y)$ は $X \times Y$ 上 admissible とする．$x \in X$ に対して $\mathfrak{A}_x := \{U \in \mathcal{A} \mid x \in \pi_X(U)\}$ と置く．このときある

点 $x\in X$ が存在して，$\pi_Y(\mathfrak{A}_x):=\{\pi_Y(U)\mid U\in\mathfrak{A}_x\}$ は Y 上 admissible となる．このような点 $x\in X$ 全体からなる集合を $C(\mathfrak{A})$ と書くと，$C(\mathfrak{A})\subset X$ は空でない閉集合である．

証明. $\mathfrak{A}\subset\mathcal{B}(X\times Y)$ を $X\times Y$ 上 admissible とする．

$$\mathfrak{B}:=\left\{V\in\mathcal{O}_X\ \middle|\ \begin{array}{l}\text{ある } U_0,\cdots,U_n\in\mathfrak{A} \text{ が存在して}\\ V=\pi_X(U_0)\cap\cdots\cap\pi_X(U_n) \text{ かつ } Y=\pi_Y(U_0)\cup\cdots\cup\pi_Y(U_n)\end{array}\right\}$$

と定めると，$\mathfrak{B}$ は X 上 admissible である．

∵) admissible でないと仮定すると，ある $V_0,\cdots,V_m\in\mathfrak{B}$ が存在して $X=V_0\cup\cdots\cup V_m$ と書ける．$\mathfrak{B}$ の定義から，ある $U_{i0},\ldots,U_{in_i}\in\mathfrak{A}$ が存在して

$$V_i=\pi_X(U_{i0})\cap\cdots\cap\pi_X(U_{in_i}),\ Y=\pi_Y(U_{i0})\cup\cdots\cup\pi_Y(U_{in_i})$$

と書ける．$\mathcal{B}(X\times Y)=\{U_0\times U_1\mid U_0\in\mathcal{O}_X,\ U_1\in\mathcal{O}_Y\}$ だったことに注意すると $V_i\times Y\subset U_{i0}\cup\cdots\cup U_{in_i}$ が分かる．よって

$$X\times Y=(V_0\times Y)\cup\cdots\cup(V_m\times Y)=U_{00}\cup\cdots\cup U_{mn_m}$$

となり $\mathfrak{A}$ が $X\times Y$ 上 admissible であることに矛盾．

故に X のコンパクト性から $X\neq\bigcup\mathfrak{B}$ である．$x\in X\setminus\bigcup\mathfrak{B}$ を任意に一つ取ると $\{\pi_Y(U)\mid U\in\mathfrak{A}_x\}$ は Y 上 admissible である．

∵) 任意の $\pi_Y(U_0),\cdots,\pi_Y(U_n)\quad(U_i\in\mathfrak{A}_x)$ を取る．$V:=\pi_X(U_0)\cap\cdots\cap\pi_X(U_n)$ と置く．$U_i\in\mathfrak{A}_x$ だから $x\in\pi_X(U_i)$，故に $x\in V$ である．一方 x の取り方により $V\notin\mathfrak{B}$ でなければならない．よって $Y\neq\pi_Y(U_0)\cup\cdots\cup\pi_Y(U_n)$ が分かる．

$x\in X$ は任意だったから $X\setminus\bigcup\mathfrak{B}\subset C(\mathfrak{A})$ である．$X\setminus\bigcup\mathfrak{B}\subsetneq C(\mathfrak{A})$ と仮定する．$x\in C(\mathfrak{A})\setminus(X\setminus\bigcup\mathfrak{B})=C(\mathfrak{A})\cap\bigcup\mathfrak{B}$ が存在する．$x\in V$ となる $V\in\mathfrak{B}$ を取る．$\mathfrak{B}$ の定義から，ある $U_0,\cdots,U_n\in\mathfrak{A}$ が存在して

$$V=\pi_X(U_0)\cap\cdots\cap\pi_X(U_n),\ Y=\pi_Y(U_0)\cup\cdots\cup\pi_Y(U_n)$$

と書ける．すると明らかに $U_0,\cdots,U_n\in\mathfrak{A}_x$ であるから，$\{\pi_Y(U)\mid U\in\mathfrak{A}_x\}$ が Y 上 admissible であることに矛盾する．故に $C(\mathfrak{A})=X\setminus\bigcup\mathfrak{B}\subset X$ で，これは空でない閉集合である． □

定理 1. $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ をコンパクト位相空間の族とする．Λ は整列可能で，$\displaystyle\bigcup_{\lambda\in\Lambda}(\mathcal{A}_{X_\lambda}\setminus\{\emptyset\})$

は選択関数 f を持つとする．このとき直積位相空間 $\displaystyle\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ もコンパクトである．

証明． $\mathfrak{A} \subset \mathcal{B}(\prod X_\lambda)$ を $\prod X_\lambda$ 上 admissible とする．補題 2 の条件 2 から $\prod X_\lambda \neq \bigcup \mathfrak{A}$ を示せばよい．その為に元 $y \in (\prod X_\lambda) \setminus \bigcup \mathfrak{A}$ の存在を示す．存在が仮定されている選択関数 f を一つ取っておく．

仮定により Λ は整列可能だから，Λ は順序数であるとしてよい．$|\Lambda| = |\Lambda+1|$ だから，Λ は後続型順序数としてよい．そこで順序数 ν を使って $\Lambda = \nu+1$ と書く．同様にして，ν も後続型順序数としてよい．$\alpha \le \nu$ に対して $Y_\alpha := \displaystyle\prod_{\alpha\le\beta\le\nu} X_\beta$ と置く．$Y_\alpha = X_\alpha \times Y_{\alpha+1}$ である．$\alpha < \nu$ に関する超限帰納法により，次を満たす $x_\alpha \in X_\alpha$ が取れることを示す．

$\alpha \le \nu$に対して $\mathfrak{A}_\alpha := \{U \in \mathfrak{A} \mid$ 任意の$\beta < \alpha$に対して $x_\beta \in \pi_{X_\beta}(U)\}$ と定義する．
このとき$\alpha < \nu$に対して$\pi_{Y_{\alpha+1}}(\mathfrak{A}_{\alpha+1})$ は $Y_{\alpha+1}$上 admissible

(i) $\alpha = 0$ のとき．
$\mathfrak{A}_0 = \mathfrak{A}$ と $Y_0 = X_0 \times Y_1$ に補題 3 を適用して空でない閉集合 $C_0 := C(\mathfrak{A}) \subset X_0$ を得る．$x_0 := f(C_0)$ とすれば

$$\mathfrak{A}_1 = \{U \in \mathfrak{A} \mid \text{任意の}\beta < 1 \text{ に対して } x_\beta \in \pi_{X_\beta}(U)\} = \{U \in \mathfrak{A} \mid x_0 \in \pi_{X_0}(U)\}$$

だから，C_0 の取り方により $\pi_{Y_1}(\mathfrak{A}_1)$ は Y_1 上 admissible である．

(ii) $\alpha = \beta+1$ のとき．
$\beta < \alpha$ だから，帰納法の仮定により $\pi_{Y_{\beta+1}}(\mathfrak{A}_{\beta+1})$ は $Y_{\beta+1}$ 上 admissible である．今 $\beta+1 = \alpha$ だから，$\pi_{Y_\alpha}(\mathfrak{A}_\alpha)$ は Y_α 上 admissible となる．$\pi_{Y_\alpha}(\mathfrak{A}_\alpha)$ と $Y_\alpha = X_\alpha \times Y_{\alpha+1}$ に補題 3 を適用して空でない閉集合 $C_\alpha := C(\pi_{Y_\alpha}(\mathfrak{A}_\alpha)) \subset X_\alpha$ を得る．$x_\alpha := f(C_\alpha)$ とすれば

$$\begin{aligned}\mathfrak{A}_{\alpha+1} &= \{U \in \mathfrak{A} \mid \text{任意の}\beta < \alpha+1 \text{ に対して } x_\beta \in \pi_{X_\beta}(U)\}\\ &= \{U \in \mathfrak{A} \mid \text{任意の}\beta < \alpha\text{に対して } x_\beta \in \pi_{X_\beta}(U)\} \cap \{U \in \mathfrak{A} \mid x_\alpha \in \pi_{X_\alpha}(U)\}\\ &= \mathfrak{A}_\alpha \cap \{U \in \mathfrak{A} \mid x_\alpha \in \pi_{X_\alpha}(U)\}\\ &= \{U \in \mathfrak{A}_\alpha \mid x_\alpha \in \pi_{X_\alpha}(U)\}\end{aligned}$$

だから $\pi_{X_\alpha} \circ \pi_{Y_\alpha} = \pi_{X_\alpha}$ に気をつけると

$$\begin{aligned}\pi_{Y_\alpha}(\mathfrak{A}_{\alpha+1}) &= \{\pi_{Y_\alpha}(U) \mid U \in \mathfrak{A}_\alpha,\ x_\alpha \in \pi_{X_\alpha}(U)\}\\ &= \{\pi_{Y_\alpha}(U) \mid U \in \mathfrak{A}_\alpha,\ x_\alpha \in \pi_{X_\alpha}(\pi_{Y_\alpha}(U))\}\\ &= \{V \in \pi_{Y_\alpha}(\mathfrak{A}_\alpha) \mid x_\alpha \in \pi_{X_\alpha}(V)\}\end{aligned}$$

である．よって C_α の取り方により $\pi_{Y_{\alpha+1}}(\pi_{Y_\alpha}(\mathfrak{A}_{\alpha+1}))$ は $Y_{\alpha+1}$ 上 admissible である．今 $\pi_{Y_{\alpha+1}} \circ \pi_{Y_\alpha} = \pi_{Y_{\alpha+1}}$ だから，$\pi_{Y_{\alpha+1}}(\mathfrak{A}_{\alpha+1})$ は $Y_{\alpha+1}$ 上 admissible であることが分かった．

(iii) α が極限順序数のとき．

帰納法の仮定により，任意の $\beta < \alpha$ に対して $\pi_{Y_{\beta+1}}(\mathfrak{A}_{\beta+1})$ は $Y_{\beta+1}$ 上 admissible である．定義から明らかに $\mathfrak{A}_\alpha \subset \mathfrak{A}_{\beta+1}$ である．よって $\pi_{Y_{\beta+1}}(\mathfrak{A}_\alpha)$ は $Y_{\beta+1}$ 上 admissible となる．$\pi_{Y_\alpha}(\mathfrak{A}_\alpha)$ は Y_α 上 admissible である．

$\because$) ある $U_0, \cdots, U_n \in \mathfrak{A}_\alpha$ を使って $Y_\alpha = \pi_{Y_\alpha}(U_0) \cup \cdots \cup \pi_{Y_\alpha}(U_n)$ と書けたと仮定する．$A := \{\beta < \alpha \mid$ ある $0 \leq i \leq n$ が存在して $\pi_{X_\beta}(U_i) \neq X_\beta\}$ と置く．各 U_i は Y_0 の基底の元だから，A は有限集合である．そこで

$$\gamma := \begin{cases} \max A & (A \neq \emptyset \text{ のとき}) \\ 0 & (A = \emptyset \text{ のとき}) \end{cases}$$

と定める．$Y_{\gamma+1} = \pi_{Y_{\gamma+1}}(U_0) \cup \cdots \cup \pi_{Y_{\gamma+1}}(U_n)$ を示せばよい (すると $\pi_{Y_{\gamma+1}}(\mathfrak{A}_{\gamma+1})$ が $Y_{\gamma+1}$ 上 admissible であることに矛盾し，証明が終わる)．

それを示すため，$y \in Y_{\gamma+1}$ とする．$\pi_{Y_\alpha}(y) \in Y_\alpha = \pi_{Y_\alpha}(U_0) \cup \cdots \cup \pi_{Y_\alpha}(U_n)$ だから，ある $0 \leq i \leq n$ が存在して $\pi_{Y_\alpha}(y) \in \pi_{Y_\lambda}(U_i)$ である．このとき γ の取り方から，$\gamma < \beta < \alpha$ に対しても $\pi_{X_\beta}(y) \in X_\beta = \pi_{X_\beta}(U_i)$ である．故に $y \in \pi_{Y_{\gamma+1}}(U_i)$ が分かる．

そこで $\pi_{Y_\alpha}(\mathfrak{A}_\alpha)$ と $Y_\alpha = X_\alpha \times Y_{\alpha+1}$ に補題 3 を適用して空でない閉集合 $C_\alpha := C(\pi_{Y_\alpha}(\mathfrak{A}_\alpha)) \subset X_\alpha$ を得る．$x_\alpha := f(C_\alpha)$ とすれば (ii) のときと同様にして $\pi_{Y_{\alpha+1}}(\mathfrak{A}_{\alpha+1})$ は $Y_{\alpha+1}$ 上 admissible であることが分かる．

(i) (ii) (iii) により $x_\alpha \in X_\alpha$ $(\alpha < \nu)$ が取れた．今 ν は後続型だったから，$\alpha + 1 = \nu$ となる $\alpha < \nu$ を取ると $\pi_{X_{\alpha+1}}(\mathfrak{A}_{\alpha+1})$ は $Y_{\alpha+1}$ 上 admissible，即ち $\pi_{X_\nu}(\mathfrak{A}_\nu)$ は $Y_\nu = X_\nu$ 上 admissible である．よって X_ν がコンパクトだから $C := X_\mu \setminus \bigcup_{U \in \mathfrak{A}_\mu} \pi_{X_\mu}(U)$ は空でない閉集合．$x_\nu := f(C)$ と置く．このとき $y = (x_\alpha)_{\alpha \leq \nu} \in Y_0$ は $y \notin \bigcup \mathfrak{A}$ を満たす．

$\because$) ある $U \in \mathfrak{A}$ が存在して $y \in U$ となったとする．勿論任意の $\alpha \leq \nu$ に対して $x_\alpha \in \pi_{X_\alpha}(U)$ である．$x_\nu = f(C) \in C = X \setminus \bigcup_{U \in \mathfrak{A}_\nu} \pi_{X_\nu}(U)$ だから $U \notin \mathfrak{A}_\nu$ でなければならない．従ってある $\alpha < \nu$ が存在して $x_\alpha \notin \pi_{X_\alpha}(U)$ となり，x_α の取り方に矛盾する．

□

系． 選択公理 $\Longrightarrow$ Tychonoff の定理 $\square$

系． 選択公理を使わずに次が証明できる．

1. $[0,1]^{\mathbb{N}}$ はコンパクトである．
2. $n \in \mathbb{N}$ に対して $|X_n| = 2$ のとき $\displaystyle\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$ はコンパクトである．
3. p 進整数環 $\mathbb{Z}_p$ はコンパクトである．

証明． (1) $\mathbb{N}$ は整列可能である．$\mathcal{A}_{[0,1]} \setminus \{\emptyset\}$ は選択関数を持つ．

$\because$) $f : \mathcal{A}_{[0,1]} \setminus \{\emptyset\} \longrightarrow [0,1]$ を $f(F) := \min F$ で定めればよい．(F は有界な閉集合だから，最小値を持つ．)

故に定理から $[0,1]^{\mathbb{N}}$ はコンパクトであることが分かる．

(2) $|X_n| = 2$ だから「$A \in \displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (\mathcal{A}_{X_n} \setminus \{\emptyset\})$ で $|A| \geq 2$ となるもの」は $A = X_n$ しかない．故に $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ の選択関数が存在すれば $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (\mathcal{A}_{X_n} \setminus \{\emptyset\})$ も選択関数を持つ事が分かる．

(i) $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ の選択関数があるとき，$\mathbb{N}$ は整列可能だからよい．

(ii) $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ の選択関数がないとき，$\displaystyle\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n = \emptyset$ はコンパクトである．

(3) $\mathbb{Z}_p \subset \displaystyle\prod_{n=0}^{\infty} \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ は閉部分集合である．1 と同様にして $\displaystyle\prod_{n=0}^{\infty} \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ はコンパクトだから，閉部分集合 $\mathbb{Z}_p$ もコンパクトである． $\square$

2 の $|X_n| = 2$ を $|X_n| = 3$ に変えた命題，即ち「$n \in \mathbb{N}$ に対して $|X_n| = 3$ のとき $\displaystyle\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$ はコンパクト」は選択公理無しには証明できない．何故ならば，次の定理が成立するからである．

定理 2． 正整数 m に対して，次が成り立つ．

$$\begin{aligned} & n \in \mathbb{N} \text{ に対して } 0 < |X_n| \leq m \text{ のとき } \{X_n\}_{n\in\mathbb{N}} \text{は選択関数を持つ．} \\ \Longleftrightarrow\ & n \in \mathbb{N} \text{ に対して } |X_n| \leq m+1 \text{ のとき } \prod_{n\in\mathbb{N}} X_n \text{はコンパクト} \end{aligned}$$

証明． ($\Longrightarrow$) $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が $|X_n| \leq m+1$ を満たすとする．

(i) $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ の選択関数がないとき．

このときは $\displaystyle\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n = \emptyset$ はコンパクトである．

(ii) $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ の選択関数があるとき．
$\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(\mathcal{A}_{X_n}\setminus\{\emptyset, X_n\})$ の元 A は $0<|A|\leq m$ を満たす．よって $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(\mathcal{A}_{X_n}\setminus\{\emptyset, X_n\})$ は選択関数を持つ．$\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ の選択関数とあわせれば $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(\mathcal{A}_{X_n}\setminus\{\emptyset\})$ が選択関数を持つ事が分かる．勿論添え字集合 $\mathbb{N}$ は整列可能だから，定理 1 により $\displaystyle\prod_{n\in\mathbb{N}}X_n$ はコンパクトである．

($\Longleftarrow$) 通常の「Tychonoff の定理 $\Longrightarrow$ 選択公理」の証明と同様にしてできる． □

2 Tychonoff の定理の別証明 2

次の命題を BPI (Boolean Prime Ideal Theorem) という．

命題 (BPI)**.** 任意のブール代数は素イデアルを持つ．

命題. 選択公理 $\Longrightarrow$ BPI □

命題. BPI を仮定すると，以下が成り立つ．

1. $\mathcal{B}$ がブール代数で $\mathcal{F}\subset\mathcal{B}$ が有限交差性を持つとき，超フィルター $\mathcal{U}\subset\mathcal{B}$ で $\mathcal{U}\supset\mathcal{F}$ となるものが存在する．
2. 位相空間 X がコンパクト $\Longleftrightarrow$ 任意の超フィルター $\mathcal{U}\subset\mathcal{P}(X)$ が収束する． □

定理 3. 選択公理 $\Longrightarrow$ Tychonoff の定理

証明. $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ をコンパクト位相空間の族として，$X:=\displaystyle\prod_{\lambda\in\Lambda}X_\lambda$ とする．$\mathcal{F}\subset\mathcal{A}_X$ が有限交差性を持つとする．このとき BPI により，超フィルター $\mathcal{U}\subset\mathcal{P}(X)$ で $\mathcal{U}\supset\mathcal{F}$ となるものが存在する．

$\mathcal{U}_\lambda:=\{\pi_{X_\lambda}(Y)\mid Y\in\mathcal{U}\}\subset\mathcal{P}(X_\lambda)$ は超フィルターである．よって X_λ のコンパクト性と BPI から，$C_\lambda:=\{x\in X_\lambda\mid \mathcal{U}_\lambda$ が x に収束する $\}\neq\emptyset$ である．従って選択公理により元 $x=(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}\in\displaystyle\prod_{\lambda\in\Lambda}C_\lambda\subset X$ が取れる．このとき x の任意の開近傍 $U\subset X$ に対して $U\in\mathcal{U}$ である．

$\because$) 任意の $\lambda\in\Lambda$ と開近傍 $x_\lambda\in U_\lambda\subset X_\lambda$ を取る．$\mathcal{U}_\lambda$ が x_λ に収束することと，$\mathcal{U}_\lambda$ が超フィルターであることから，$U_\lambda\in\mathcal{U}_\lambda$ が分かる．故にある $Y\in\mathcal{U}$ により

$U_\lambda = \pi_{X_\lambda}(Y)$ と書けるが，このとき $Y \subset U_\lambda \times \prod_{\mu \neq \lambda} X_\mu$ である．$\mathcal{U}$ がフィルターだから $U_\lambda \times \prod_{\mu \neq \lambda} X_\mu \in \mathcal{U}$ となる．よって，直積位相の定義から，任意の開近傍 $x \in U \subset X$ に対して $U \in \mathcal{U}$ が分かる．

今，$F \in \mathcal{F}$ が $x \notin F$ を満たすと仮定する．すると $X \setminus F \ni x$ は x の開近傍であり，よって $X \setminus F \in \mathcal{U}$ である．$F \in \mathcal{F} \subset \mathcal{U}$ だったから $\emptyset = F \cap (X \setminus F) \in \mathcal{U}$ となり矛盾する．故に任意の $F \in \mathcal{F}$ に対して $x \in F$，即ち $x \in \bigcap \mathcal{F}$ であり，X がコンパクトであることが分かった． □

系． BPI $\Longrightarrow$ コンパクト Hausdorff 空間の直積はコンパクト．

証明． 先の定理 3 で選択公理を使っている部分は三箇所ある．一つ目、二つ目は BPI を使っているところだから，BPI があればよい．三つ目は $x_\lambda \in C_\lambda$ を取る所であるが，今 X_λ は Hausdorff と仮定しているから，収束先は一意に定まる．故に選択公理を使わずに x_λ を取ることができる． □

参考文献

[1] Horst Herrlich, Axiom of Choice，Springer, 2006

[2] Peter A. Loeb, A New Proof of the Tychonoff Theorem, Amer. Math. Monthly, Vol. 72, No. 7 (1965), 711–717, http://www.jstor.org/stable/2314411