第三回関西すうがく徒のつどい

数学の諸定理と選択公理の関係

@alg_d　`http://alg-d.com/math/ac/`

2013年3月17日

※ このPDFは第三回関西すうがく徒のつどいにて発表する予定の内容を書いたものです．大体この内容の通りに話すと思いますが，多少は変わる可能性もあります．

d=(^o^)=b

Twitter で「選択公理厨」「選択公理ちゃんマジ公理」などよく分からない言葉を広めてしまった@alg_d と申します．宜しくお願いします．

前回 (第二回) は「選択公理の使ってしまい方」でしたが，今回は「選択公理がないと宇宙がヤバイ」という話をします．

1 導入

まず導入として次の命題を証明します．

命題 1． $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ を関数，$a \in \mathbb{R}$ とする．
f が a で連続 $\Longleftrightarrow$ 点列 $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ が $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ を満たすならば $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$.

証明. $(\Longrightarrow)$ 任意の $\varepsilon > 0$ を取る．f が a で連続だから, ある $\delta > 0$ が存在して「$|x-a| < \delta$ ならば $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$」である．この時，$\lim_{n\to\infty} x_n = a$ より，ある $N > 0$ が存在して「$n \geq N$ ならば $|x_n - a| < \delta$」とできる．よって「$n \geq N$ ならば $|f(x_n) - f(a)| < \varepsilon$」である．故に $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$ が分かった．

$(\Longleftarrow)$ f が a で不連続であると仮定する．即ち，ある $\varepsilon > 0$ が存在して，任意の $\delta > 0$ に対してある $x \in \mathbb{R}$ が存在して「$|x - a| < \delta$ かつ $|f(x) - f(a)| \geq \varepsilon$」が成り立つ．その様な $\varepsilon > 0$ を一つ取る．正整数 n に対して $\delta = \frac{1}{n}$ を考えれば,「$|x_n - a| < \frac{1}{n}$ かつ $|f(x_n) - f(a)| \geq \varepsilon$」を満たすような $x_n \in \mathbb{R}$ の存在が分かる．すると $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ かつ $\lim_{n\to\infty} f(x_n) \neq f(a)$ となり矛盾する． □

この $\Longleftarrow$ の証明には選択公理が使われています．それは，各 $n > 0$ に対して $x_n \in \mathbb{R}$ を《選択》しているところです．該当の箇所を具体的に選択公理を使って書き直すと次のようになります．

$X_n := \{y \in \mathbb{R} \mid |x-y| < \frac{1}{n}$ かつ $|f(x)-f(y)| \geq \varepsilon\}$ と置けば $X_n \neq \emptyset$ である．よって選択公理により $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in \prod_{n=1}^{\infty} X_n$ が取れる．すると $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ かつ $\lim_{n\to\infty} f(x_n) \neq f(a)$ となり矛盾する．

※ ところが，次の同値の証明は選択公理を使わずにできます．
f が $\mathbb{R}$ で連続 $\Longleftrightarrow$ 収束点列 $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ に対して $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(\lim_{n\to\infty} x_x)$.

証明. $(\Longrightarrow)$ 命題 1 と同様.

$(\Longleftarrow)$ $x \in \mathbb{R}$ とする．$A := \mathbb{Q} \cup \{x\}$ とすれば，$f|_A \colon A \longrightarrow \mathbb{R}$ は x で連続である．

$\because$) f が x で不連続であると仮定する．即ち, ある $\varepsilon > 0$ が存在して, 任意の $\delta > 0$ に対してある $y \in A$ が存在して「$|x-y| < \delta$ かつ $|f(x) - f(y)| \geq \varepsilon$」が成り立つ．その様な $\varepsilon > 0$ を一つ取る．正整数 n に対して，$X_n := \{y \in A \mid |x-y| < \frac{1}{n}$ かつ $|f(x) - f(y)| \geq \varepsilon\}$ と置けば $X_n \neq \emptyset$ である．$A = \mathbb{Q} \cup \{x\}$ は可算集合だから，$A = \{a_m \mid m \in \mathbb{N}\}$ と書ける．このとき各 $n > 0$ に対して $m(n) := \min\{m \in \mathbb{N} \mid a_m \in X_n\}$ とすれば $(a_{m(n)})_{n=1}^{\infty} \in \prod_{n=1}^{\infty} X_n$ である．すると $\lim_{n\to\infty} a_{m(n)} = x$ かつ $\lim_{n\to\infty} f(a_{m(n)}) \neq f(x)$ となり矛盾する．

任意の $\varepsilon > 0$ を取る．$f|_A \colon A \longrightarrow \mathbb{R}$ が x で連続だから，ある $\delta > 0$ が存在して「$y \in \mathbb{Q}$ かつ $|x-y| < \delta$ ならば $|f(x) - f(y)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$」とできる．このとき「$z \in \mathbb{R}$ かつ $|x-z| < \delta$ ならば $|f(x) - f(z)| < \varepsilon$」である．

$\because$) 先と同様にして，$f|_{\mathbb{Q}\cup\{z\}}$ も z で連続だから，ある $\delta' > 0$ が存在して「$y \in \mathbb{Q}$ かつ $|z-y| < \delta'$ ならば $|f(z) - f(y)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$」である．この時 $|x-y| < \delta$ かつ $|z-y| < \delta'$ なる $y \in \mathbb{Q}$ を取れば

$$|f(x) - f(z)| \leq |f(x) - f(y)| + |f(y) - f(z)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

故に f は $\mathbb{R}$ で連続である． $\square$

2 濃度

選択公理がないとまずヤバイのが濃度に関する話題で, まずはその辺りを見ていきます.

定義. X, Y を集合とする．

- $|X| \leq |Y| \Longleftrightarrow$ ある単射 $X \longrightarrow Y$ が存在する
- $|X| = |Y| \Longleftrightarrow$ ある全単射 $X \longrightarrow Y$ が存在する
- $|X| < |Y| \Longleftrightarrow |X| \leq |Y|$ かつ $|X| \neq |Y|$
- $|X| + |Y| := |X \coprod Y| = |(X \times \{0\}) \cup (Y \times \{1\})|$
- $|X| \cdot |Y| := |X \times Y|$

この定義はよく知られていますが，このとき以下の命題が成立します．

命題. X, Y, Z, W を無限集合とする.

(1) $2|X|(= |X| + |X|) = |X|$
(2) $|X|^2(= |X| \cdot |X|) = |X|$
(3) $|X| < |Y|$ かつ $|Z| < |W| \Longrightarrow |X| + |Z| < |Y| + |W|$
(4) $|X| < |Y|$ かつ $|Z| < |W| \Longrightarrow |X| \cdot |Z| < |Y| \cdot |W|$
(5) $|X| \cdot |Y| \leq |X|^2 \Longrightarrow |Y| \leq |X|$
(6) $|X| + |Y| < |X| + |Z| \Longrightarrow |Y| < |Z|$
(7) $|X| \cdot |Y| < |X| \cdot |Z| \Longrightarrow |Y| < |Z|$
(8) $2|X| = 2|Y| \Longrightarrow |X| = |Y|$
(9) $|X|^2 = |Y|^2 \Longrightarrow |X| = |Y|$

命題 (濃度の比較可能性)**.** 任意の X, Y に対して $|X| \leq |Y|$ または $|X| \geq |Y|$ である.

命題 (Partition Principle)**.** X を集合, $\sim$ を X の同値関係とするとき $|X/{\sim}| \leq |X|$.

※ これは「全射 $f\colon X \longrightarrow Y$ が存在すれば $|Y| \leq |X|$」と同値である.

命題 (可算和定理)**.** 各 $n \in \mathbb{N}$ に対して $|X_n| \leq |\mathbb{N}|$ のとき $\left|\bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n\right| \leq |\mathbb{N}|$ となる.

証明. $X_n = \{x_{n0}, x_{n1}, x_{n2}, \cdots\}$ と書けば全単射 $\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ により $\left|\bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n\right| \leq |\mathbb{N}|$ □

以上の命題は濃度の計算に関する基本的な命題で，直感的には明らかな (もしくは成り立って欲しい) ものも含まれていますが，実はこれらは全て証明に選択公理を使っています．特に，(2) (3) (4) (5) (6) (7) (9) と濃度の比較可能性は選択公理と同値です．

※ Prtition Principle が選択公理と同値かどうかは未解決問題らしいです．

※ 可算和定理の証明のどこに選択公理を使っているか?

それは $X_n = \{x_{n0}, x_{n1}, x_{n2}, \cdots\}$ と書くところで，この並べ方は一意でない為，並べ方を《選択》しなければなりません．より具体的に言えば，$X_n = \{x_{n0}, x_{n1}, \cdots\}$ と書くことは全単射 $f\colon \mathbb{N} \longrightarrow X_n$ を一つ定めるのと同じことですから，$A_n := \{f\colon \mathbb{N} \longrightarrow X_n \mid f \text{ は全単射}\}$ として集合族 $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ の選択関数を取ることになります．

と言っても，よく分からないかもしれません．例えば濃度の比較可能性なんかは，かなり変な集合 X, Y を持ってくれば $|X| \not\leq |Y|$ かつ $|X| \not\geq |Y|$ とできそうな気がしないでもない?

そこで $Y = \mathbb{N}$ とした命題を考えてみます．

命題 2. 任意の集合 X に対して $|X| \leq |\mathbb{N}|$ または $|X| \geq |\mathbb{N}|$

実はこの命題でも証明には選択公理を使わなければなりません．この命題は言い換えれば「$|X| \not\leq |\mathbb{N}| \implies |X| \geq |\mathbb{N}|$」即ち「非可算濃度は可算無限濃度より大きい」ということ，つまり「可算無限濃度は最小の無限濃度」を意味しています．故に「可算無限濃度が最小の無限濃度」であることの証明には選択公理が要るのです．

「可算無限濃度が最小の無限濃度」であることは大抵の人が認めることだと思いますが，もしかしたら「かなり変な集合 X を持ってくれば $|X| \not\leq |\mathbb{N}|$ かつ $|X| \not\geq |\mathbb{N}|$ とできるのでは?」と感じる人も居るかも知れません．しかし，実は X に $X \subset \mathbb{R}$ という条件をつけてもこの証明は選択公理が要るのです．即ち，

命題 3. 任意の集合 $X \subset \mathbb{R}$ に対して $|X| \leq |\mathbb{N}|$ または $|X| \geq |\mathbb{N}|$

の証明には選択公理が要ります．

> ※ まあ実は実数の集合というのがかなり変な集合だったりするんでしょうが，よく知らないのでその辺は置いておきましょう．

3　選択公理の否定

ここまで来ると選択公理が全くないのはヤバいと感じている方が多いと思いますが，もしかすると「これが証明できないからって何か困るの? 選択公理は本当に必要なの?」と思っている人が居るかも知れません．そこで，命題 3 の反例となるような $X \subset \mathbb{R}$ が存在すると仮定してみましょう．

仮定 A. 集合 $D \subset \mathbb{R}$ で $|D| \not\leq |\mathbb{N}|$ かつ $|D| \not\geq |\mathbb{N}|$ となるものが存在する．

> ※ 以下では ZF は無矛盾であるとします．ここで出てきた ZF というのは「通常の数学から選択公理を取り除いたもの」とでも思ってもらえればいいです．

このとき ZF + 仮定 A は矛盾しないことが知られています．つまり，「選択公理が無い世界」では仮定 A が成り立つことは有りえるのです．

この仮定の下で次が証明できます．

命題. 以下を満たすような関数 $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ と $a \in \mathbb{R}$ が存在する．
f が a で連続 $\not\Longleftarrow$ 点列 $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ が $\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_n = a$ を満たすならば $\displaystyle\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$.

証明. 仮定 A の D は集積点 $a \in D$ を持つ．

∵) D が集積点を持たないと仮定する．集合 $\{(a,b) \mid a,b \in \mathbb{Q},\ a < b\}$ は可算集合であるからこれを $\{I_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ と番号付けしておく．任意の $x \in D$ に対し $A_x := \{n \in \mathbb{N} \mid D \cap I_n = \{x\}\} \neq \emptyset$ である．そこで写像 $D \ni x \longmapsto \min A_x \in \mathbb{N}$ を考えればこれは単射である．故に $|D| \leq |\mathbb{N}|$ となり D の取り方に矛盾する．

そこで $S := D \setminus \{a\}$ と置き，関数 $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ を

$$f(x) := \begin{cases} 1 & (x \in S \text{ のとき}) \\ 0 & (x \notin S \text{ のとき}) \end{cases}$$

と定める．f は a で連続でない．

∵) 任意の $\delta > 0$ に対して，$(a-\delta, a+\delta) \cap S \neq \emptyset$ だから「任意の $x \in (a-\delta, a+\delta)$ に対して $|f(x) - f(a)| < \frac{1}{2}$」とはできない．

一方，点列 $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ が $\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_n = a$ を満たすとする．D の取り方から $\{x_n \mid n \in \mathbb{N},\ x_n \in S\}$ は有限集合であり，従って $\varepsilon := \min\{|x_n - a| \mid n \in \mathbb{N},\ x_n \in S\}$ が定まる．すると $\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_n = a$ であるから，ある $N > 0$ が存在して「$n \geq N$ ならば $|x_n - a| < \varepsilon$」とできる．このとき ε の取り方から「$n \geq N$ ならば $x_n \notin S$」である．従って $\displaystyle\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0 = f(a)$ が成り立つ．

以上により $\Longleftarrow$ は成立しない． □

つまり，ZF(= 選択公理が無い数学) では命題 1 は証明できないことが分かります．

次は可算和定理を考えてみましょう．この命題も，$\mathbb{R}$ の部分集合に制限した場合でも証明に選択公理が要ります．

命題. 各 $n \in \mathbb{N}$ に対して $X_n \subset \mathbb{R}$, $|X_n| = |\mathbb{N}|$ のとき $\displaystyle\left|\bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n\right| = |\mathbb{N}|$ である．特に $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n \neq \mathbb{R}$ である．

そこで次のような仮定をします.

仮定 B. ある $X_n \subset \mathbb{R}$ が存在して $|X_n| = |\mathbb{N}|$ かつ $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n = \mathbb{R}$

定理. ZF + 仮定 B は矛盾しない.

定理. 仮定 B の下では Lebesgue 測度 m の完全加法性が成り立たない

証明. 完全加法性が成立すると仮定する. 仮定 B の $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を取る. $X_n \cap X_m = \emptyset$ $(n \neq m)$ としてよい. 可算集合の Lebesgue 測度は 0 だから

$$\infty = m(\mathbb{R}) = m\Big(\cup_{n\in\mathbb{N}} X_n\Big) = \sum_{n\in\mathbb{N}} m(X_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} 0 = 0$$

となり矛盾. □

つまり, ZF では Lebesgue 測度 m の完全加法性は証明できないことが分かります.

4 弱い選択公理

以上のように, 選択公理がない ZF では色々ヤバイということが分かってきたかと思いますが, 実はこれらの命題では選択公理を認める理由としては弱いと思います. 何故かというとこれらの命題は完全な選択公理で無くても, もっと弱い選択公理があれば証明できるからです.

可算選択公理. 非空集合の族 $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ は選択関数を持つ.

定理. 可算選択公理 $\Longrightarrow$ 命題 1, 可算和定理, 命題 2, Lebesgue 測度の完全加法性

とはいえ, いくらなんでも可算選択公理では弱すぎるので, (選択公理は認めないと言っている人でも) 次くらいは仮定しているように思います.

従属選択公理. X を集合, $R \subset X \times X$ を二項関係とし,「任意の $x \in X$ に対してある $y \in X$ が存在して xRy である」とする. このとき X の点列 $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ で各 $n \in \mathbb{N}$ に対して $x_n R x_{n+1}$ となるものが存在する.

定理. 従属選択公理 $\Longrightarrow$ 可算選択公理. また逆は証明できない.

従属選択公理でもまだ弱すぎると私は思いますが, これが人気 (?) なのは, 次の事実があるからです.

定理. ZF + 従属選択公理では Lebesgue 非可測集合の存在は証明できない.

しかし一方で次の重大な事実もあります.

定理. ZF + 従属選択公理では Hahn-Banach の定理は証明できない.

また，次のような命題もあります.

Boolean Prime Ideal Theorem. 任意のブール代数は素イデアルを持つ.

BPI(=Boolean Prime Ideal Theorem) は次の意味で弱い選択公理と言えます.

定理. 選択公理
$\Longleftrightarrow$ 単位的環は極大イデアルを持つ
$\Longleftrightarrow$ コンパクト空間の直積はコンパクト

定理. BPI
$\Longleftrightarrow$ 単位的環は素イデアルを持つ
$\Longleftrightarrow$ コンパクト Hausdorff 空間の直積はコンパクト

5 非可測集合

「選択公理なんか認められない!」と言っている人は大抵 Lebesgue 非可測集合の存在か Banach-Tarski を理由に挙げていると思います．(他に何かあったら教えてください．) Lebesgue 非可測集合といえば $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ ですね (?)．ところで，$\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ の濃度と言うのはどのくらいでしょうか.

命題. $|\mathbb{R}/\mathbb{Q}| \leq |\mathbb{R}|$

証明. Prtition Principle により $|\mathbb{R}/\mathbb{Q}| \leq |\mathbb{R}|$. □

Prtition Principle は選択公理を使っているからこの証明も選択公理を使っていますが, 実はこの命題は選択公理が無いと証明できないことが次の命題から分かります.

定理. $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ が全順序付け可能 $\Longrightarrow$ Lebesgue 非可測集合 $X \subset \mathbb{R}^2$ が存在する.

証明. $(\mathbb{R}/\mathbb{Q}, \leq)$ を全順序とする．$A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid [x] < [y]\}$，$B := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid [x] = [y]\}$，$C := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid [x] > [y]\}$ のどれも Lebesgue 可測であると仮定する．χ_S

で $S \subset \mathbb{R}^2$ の特性関数を表すことにすれば，Fubini の定理により

$$\mu(B) = \int_{\mathbb{R}^2} \chi_B dm = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \chi_B(x,y)dx \right) dy = \int_{-\infty}^{\infty} 0dy = 0$$

である．一方，$x \in \mathbb{Q}^2$ に対して $A + x = A$ であるから $\mu(A) = 0$ または $\mu(\mathbb{R}^2 \setminus A) = 0$ でなければならない．

$\because$) $A_0 = A \cap [0,1]^2$, $B_0 = B \cap [0,1]^2$, $C_0 = C \cap [0,1]^2$ とする．$A_0 \sqcup B_0 \sqcup C_0 = [0,1]$ で $m(B_0) = 0$ だから $0 < m(A_0) \leq 1$ または $0 < m(C_0) \leq 1$ である．どちらの場合でも同様なので $0 < m(A_0) \leq 1$ とする．$g(x) := \displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} \chi_{-A_0}(x-y)\chi_{\mathbb{R}^2 \setminus A}(y)dy$ と置く．$x \in \mathbb{Q}^2$ とすると

$$\begin{aligned} \chi_{-A_0}(x-y) \neq 0 &\Longrightarrow x - y \in -A_0 \\ &\Longrightarrow y \in x + A_0 \subset A \\ &\Longrightarrow \chi_{\mathbb{R}^2 \setminus A}(y) = 0 \end{aligned}$$

だから $\mathbb{Q}^2$ 上で $g(x) = 0$ である．g は連続関数だから $g = 0$ となる．よって Fubini の定理により

$$0 = \int_{\mathbb{R}^2} g(x)dx = \mu(A_0)\mu(\mathbb{R}^2 \setminus A)$$

だから $\mu(\mathbb{R}^2 \setminus A) = 0$ である．

$\mu(A) = 0$ の場合，$C = \{(x,y) \mid (y,x) \in A\}$ だから $\mu(C) = 0$．$\mu(\mathbb{R}^2 \setminus A) = 0$ の場合，$\mathbb{R}^2 \setminus A = B \cup C$ だから $\mu(C) = 0$，故に $\mu(A) = 0$．従って $\infty = \mu(\mathbb{R}^2) = \mu(A) + \mu(B) + \mu(C) = 0$ となり矛盾． $\square$

系. $|\mathbb{R}/\mathbb{Q}| \leq |\mathbb{R}| \Longrightarrow$Lebesgue 非可測集合 $X \subset \mathbb{R}^2$ が存在する．

証明. $|\mathbb{R}/\mathbb{Q}| \geq |\mathbb{R}|$ である．

$\because$) $|\mathbb{R}/\mathbb{Q}| \geq (0,1)$ を示せばよい．$x \in (0,1)$ を $x = 0.x_1x_2x_3\cdots$ と 10 進展開して ($1.000\cdots = 0.999\cdots$ については $0.999\cdots$ の方を採用することにする) $f\colon (0,1) \longrightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Q}$ を $f(x) = [0.x_10x_1x_200x_1x_2x_3000x_1\cdots]$ で定めればこれは単射である．

故に $|\mathbb{R}/\mathbb{Q}| = |\mathbb{R}|$ であり，全単射 $\mathbb{R}/\mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}$ により $\mathbb{R}$ の全順序から $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ の全順序を定義できる． $\square$

この証明の中で示したように，$|\mathbb{R}/\mathbb{Q}| \geq |\mathbb{R}|$ は ZF で成り立っています．故に ZF では $|\mathbb{R}/\mathbb{Q}| \not\leq |\mathbb{R}| \iff |\mathbb{R}/\mathbb{Q}| > |\mathbb{R}|$ となります．つまり，($\mathbb{R}^2$ の)Lebesgue 非可測集合が存在しないようにするためには $|\mathbb{R}/\mathbb{Q}| > |\mathbb{R}|$ でなければならないのです．

6 Banach-Tarski の定理

Banarch-Tarski の定理というのは，よく言われているのは「選択公理があれば，一つの球体を有限個に分解して組みなおすことで元と同じ大きさの球体を二つ作ることができる」というものです．

定義.
- $X = Y \sqcup Z \iff X = Y \cup Z$ かつ $Y \cap Z = \emptyset$
- $X, Y \subset \mathbb{R}^3$ を有界部分集合とする．このときある $r = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ が存在して $X \cap (Y + r) = \emptyset$ $(Y + r := \{(x + a, y + b, z + c) \mid (x, y, z) \in Y\})$ とできる．この r を使って $X \oplus Y := X \sqcup (Y + r)$ と定める．

  ※ もちろんこの $X \oplus Y$ は r の取り方によるが，以下では r の取り方は特に関係ない場面でしか $X \oplus Y$ は使用しない．

G_3 を R^3 の回転と平行移動がなす群とする．

定義. $X, Y \subset \mathbb{R}^3$ が分割合同 ($X \sim Y$ で表す)
$\iff$ ある $n \in \mathbb{N}$ と $X_i, Y_i \subset \mathbb{R}^3$, $\sigma_i \in G_3$ $(0 \leq i \leq n)$ が存在して $X = X_0 \sqcup \cdots \sqcup X_n$, $Y = Y_0 \sqcup \cdots \sqcup Y_n$, $Y_i = \sigma_i X_i$.

命題.
(1) 分割合同 $\sim$ は同値関係である．
(2) $X_0 \sim Y_0$, $X_1 \sim Y_1$ ならば $X_0 \oplus X_1 \sim Y_0 \oplus Y_1$ である．特に $X_0 \cap X_1 = \emptyset$, $Y_0 \cap Y_1 = \emptyset$ ならば $X_0 \sqcup X_1 \sim Y_0 \sqcup Y_1$ となる．

Banach-Tarski とは次のような主張をいいます．

命題 (Banach-Tarski の定理)**.** $B := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ とすれば $B \sim B \oplus B$.

より一般に，次が成り立つ．

命題. 内部が空でない有界部分集合 $X, Y \subset \mathbb{R}^3$ に対して $X \sim Y$.

例. 適当な方法で $S^1 = \{x \in \mathbb{C} \mid |x| = 1\} \subset \mathbb{R}^3$ とみなす．

$X := \{e^{n\sqrt{-1}} \mid n \in \mathbb{N}\}$, $Y := S^1 \setminus X$ とする．原点を中心とした 1 ラジアンの回転を σ とすれば $\sigma A = \{e^{n\sqrt{-1}} \mid n > 0\} = A \setminus \{1\}$ であるから $S^1 = X \sqcup Y \sim (X \setminus \{1\}) \sqcup Y = S^1 \setminus \{1\}$ となる．即ち「円周から一点を抜いた集合」は円周と分割合同である． $\square$

この例から分かるように，分割合同というのは (物理的には) かなり変な分割の仕方も許しています．

例. $O \in \mathbb{R}^3$ を原点として，(適当に縮小した)S^1 を B の中に $O \in B \cap S^1$ となるように埋め込めば $B = (B \setminus S^1) \sqcup S^1 \sim (B \setminus S^1) \sqcup (S^1 \setminus \{O\}) = B \setminus \{O\}$ だから「球体から原点を抜いた集合」は球体と分割合同である． $\square$

命題. $S^2 \sim S^2 \oplus S^2$ とする．このとき $B \sim B \oplus B$

証明. $S^2 = X_0 \sqcup \cdots \sqcup X_n$, $S^2 \oplus S^2 = Y_0 \sqcup \cdots \sqcup Y_n$, $Y_i = \sigma_i X_i$ とする．$X \subset S^2$ に対して $\bar{X} := \{tx \mid x \in X, 0 < t \leq 1\}$ とすれば $\bar{S^2} = B \setminus \{O\}$ となり，$B \setminus \{O\} = \bar{X}_0 \sqcup \cdots \sqcup \bar{X}_n$, $B \setminus \{O\} \oplus B \setminus \{O\} = \bar{Y}_0 \sqcup \cdots \sqcup \bar{Y}_n$, $\bar{Y}_i = \sigma_i \bar{X}_i$ である．故に $B \sim B \setminus \{O\} \sim B \setminus \{O\} \oplus B \setminus \{O\} \sim B \oplus B$ である． $\square$

定義. X を集合とする．有限列の集合 $\{x_1 \cdots x_n \mid n \in \mathbb{N},\ x_i \in X \cup X^{-1}\}$ に積を列の 結合 $(x_1 \cdots x_n) \cdot (y_1 \cdots y_m) := x_1 \cdots x_n y_1 \cdots y_m$ で定めるとこれは群になる (ただし，x と x^{-1} が隣り合ったときはキャンセルする．また空文字列を単位元とみなす)．これを X で生成される自由群という．

二元集合 $\{\rho, \tau\}$ で生成される自由群を F_2 と書く．

命題. $W(\sigma) := \{x_1 \cdots x_n \in F_2 \mid x_1 = \sigma\}$ と置けば

$$
\begin{aligned}
F_2 &= \{1\} \sqcup W(\rho) \sqcup W(\rho^{-1}) \sqcup W(\tau) \sqcup W(\tau^{-1}) \\
&= W(\rho) \sqcup \rho W(\rho^{-1}) \\
&= W(\tau) \sqcup \tau W(\tau^{-1}).
\end{aligned}
$$

Banach-Tarski の証明において，選択公理を使用するのは次の部分だけである．

命題 4. 選択公理を仮定する．F_2 が集合 X に自由に作用しているとき，ある $A, B \subset X$ が存在して $A \sqcup B \subset X$, $X \sim A \sim B$

証明. X に同値関係 $\sim$ を「$x \sim y \iff$ ある $\sigma \in F_2$ が存在して $y = \sigma x$」で定める．選択公理により商集合 $X/\sim$ の完全代表系 M を取ることができる．すると作用が自由である

から $X = \bigsqcup_{\sigma \in F_2} \sigma M$ となる．

$$A_0 := \bigsqcup_{\sigma \in W(\rho)} \sigma M,\ A_1 := \bigsqcup_{\sigma \in W(\rho^{-1})} \sigma M,\ A := A_0 \sqcup A_1$$
$$B_0 := \bigsqcup_{\sigma \in W(\tau)} \sigma M,\ B_1 := \bigsqcup_{\sigma \in W(\tau^{-1})} \sigma M,\ B := B_0 \sqcup B_1$$

と置けば，$X = A_0 \sqcup \rho A_1 = B_0 \sqcup \tau B_1 \supset A_0 \sqcup A_1 \sqcup B_0 \sqcup B_1$ であるから $A \sqcup B \subset X$ かつ $X \sim A \sim B$ となる． □

定義. $A, B \subset \mathbb{R}^3$ に対して二項関係 $\precsim$ を次のように定める．

$$A \precsim B \iff \text{ある } B' \subset B \text{ が存在して } A \sim B'$$

命題 5 (Banach-Bernstein-Schröder の定理)**.** $A \precsim B$ かつ $B \precsim A$ ならば $A \sim B$.

証明. $A \sim B$ のとき，全単射 $f\colon A \longrightarrow B$ で「$A' \subset A$ に対して $A' \sim f(A)$」を満たすものが取れることに注意しておく．

$A \precsim B$ かつ $B \precsim A$ とする．ある $A' \subset A$ と $B' \subset B$ が存在して $A \sim B'$ かつ $B \sim A'$ である．よって全単射 $f\colon A \longrightarrow B'$ と $g\colon A' \longrightarrow B$ で先の条件を満たすものが取れる．$A_0 := A \setminus A',\ A_{n+1} := g^{-1} \circ f(A_n), X := \bigsqcup_{n=0}^{\infty} A_n$ と定める．

$X \subset A,\ A \setminus X \subset A'$ だから $X \sim f(X),\ A \setminus X \sim g(A \setminus X)$ である．従って $A = X \sqcup (A \setminus X) \sim f(X) \sqcup g(A \setminus X) = B$ が分かる． □

命題. $\mathbb{R}^3$ の原点を中心とする回転がなす，G_3 の部分群を $SO(3)$ で表す．$SO(3)$ は F_2 と同型な部分群を持つ．

証明. $\theta = \arccos(\frac{1}{3})$ として，$\mathbb{R}^3$ の z 軸を軸とする θ ラジアンの回転を ρ，x 軸を軸とする θ ラジアンの回転を τ とすれば ρ, τ が生成する $SO(3)$ の部分群は ρ, τ が生成する自由群 F_2 であることが分かる． □

この命題により $F_2 \subset SO(3)$ とみなせば，F_2 は球面 S^2 に作用する．各元 $\sigma \in F_2$ の不動点 $x \in S^2$ は丁度 2 つある．よって $D := \{x \in S^2 \mid \text{ある } \sigma \in F_2 \text{ が存在して } \sigma x = x\}$ は可算集合である．このとき F_2 は $X := S^2 \setminus D$ に自由に作用する．故に命題 4 からある $A, B \subset X,\ A \cap B = \emptyset$ が存在して $A \sim X$ かつ $B \sim X$ である．A, B の取り方から $X \sim B \subset X \setminus A \subset X$，即ち $X \precsim X \setminus A$ かつ $X \setminus A \precsim X$ であるから命題 5 により

$X \setminus A \sim X$ が分かる．改めて $B := X \setminus A$ と書き直せば $X = A \sqcup B \sim A \sim B$ が分かる．即ち，$S^2 \setminus D \sim (S^2 \setminus D) \oplus (S^2 \setminus D)$ である．

命題． $S^2 \sim S^2 \oplus S^2$

証明． $\sigma \in SO(3)$ で $D, \sigma D, \sigma^2 D, \cdots$ が互いに素となるものが存在する．

> $\because$) D を通らない，原点を通る直線 $l \subset \mathbb{R}^3$ を一つ取る．正整数 $n > 0$ と $x \in D$ に対して
>
> $$A(n, P) := \{\theta \in (0, 2\pi) \mid l \text{ を軸とする}\theta\text{ラジアン回転を}\sigma\text{とすれば}\sigma^n(P) \in D\}$$
>
> と書くと $A(n, P)$ は可算集合である．故に $A := \bigcup_{n=0}^{\infty} \bigcup_{P \in D} A(n, P)$ は可算集合である．
>
> > ※ 可算和定理を使えば明らかであるが，選択公理を使わずに可算といえる．何故か？ また，実は D が可算であるという部分でも同様の問題が発生している．
>
> 故に $(0, 1) \setminus A \neq \emptyset$ であるから $\theta \in (0, 1) \setminus A$ を一つ取り l を軸とする θ ラジアンの回転を $\sigma \in SO(3)$ とすればこれが条件を満たす．

このとき $Y := S^2 \setminus \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} \sigma^n D \right)$ と置けば $S^2 = Y \sqcup \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} \sigma^n D \right) \sim Y \sqcup \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} \sigma^{n+1} D \right) = S^2 \setminus D$ である．故に $S^2 \sim S^2 \setminus D \sim (S^2 \setminus D) \oplus (S^2 \setminus D) \sim S^2 \oplus S^2$ となる． □

以上により次が証明された．

命題 (Banach-Tarski の定理)**．** $B \sim B \oplus B$

命題． 内部が空でない有界部分集合 $X, Y \subset \mathbb{R}^3$ に対して $X \sim Y$

証明． 仮定によりある球体 K, L が存在して $X \subset K$ かつ $L \subset Y$ となる．$n \in \mathbb{N}$ を十分大きく取り，L の n 個のコピー $L_1, \cdots, L_n$ で K を被覆する．このとき $X \subset K \precsim L_1 \oplus \cdots \oplus L_n \sim L \subset Y$ より $X \precsim Y$ が分かる．同様にして $Y \precsim X$ だから $X \sim Y$ となる． □

ところで，Banach-Tarski の証明から得られる B の分割の仕方を見ると，この分割が物理的に可能であったとしても，そもそも物理的に移動させることが不可能のようにみえます．そこで，《物理的な移動まで含めた分割合同》というものを考えてみると，次のような定義になります．

定義. $X, Y \subset \mathbb{R}^3$ とする．
$X \approx Y \iff n \in \mathbb{N},\ X_i, Y_i \subset \mathbb{R}^3$，連続写像 $\sigma_i \colon [0,1] \longrightarrow G_3\ (0 \leq i \leq n)$ が存在して以下を満たす．

- $X = X_0 \sqcup \cdots \sqcup X_n$
- $Y = Y_0 \sqcup \cdots \sqcup Y_n$
- $\sigma_i(0) = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$
- $Y_i = \sigma_i(1) X_i$
- $i \neq j$ ならば，任意の $t \in [0,1]$ に対して $\sigma_i(t)X_i \cap \sigma_j(t)X_j = \emptyset$.

命題. 内部が空でない有界部分集合 $X, Y \subset \mathbb{R}^3$ に対して $X \approx Y$

証明. 有界な X, Y について「$X \sim Y \iff X \approx Y$」が分かる． □

ところで，Banach-Tarski の定理の証明で選択公理を使っている部分は命題 4 のみでした．実は次の定理が知られています．

定理. Hahn-Banach の定理 $\Longrightarrow$ 命題 4

系. Hahn-Banach の定理 $\Longrightarrow$Banach-Tarski の定理

つまり，Banach-Tarski については諦めてください．(と書きましたが，証明を見れば分かるように Banach-Tarski の定理は直感的におかしいというわけではないと思います．)

参考文献

[1] Paul Howard, Jean E. Rubin, Consequences of the Axiom of Choice, American Mathematical Society, 1998

[2] Horst Herrlich, Axiom of Choice, Springer, Lecture Notes in Mathematics, 2006

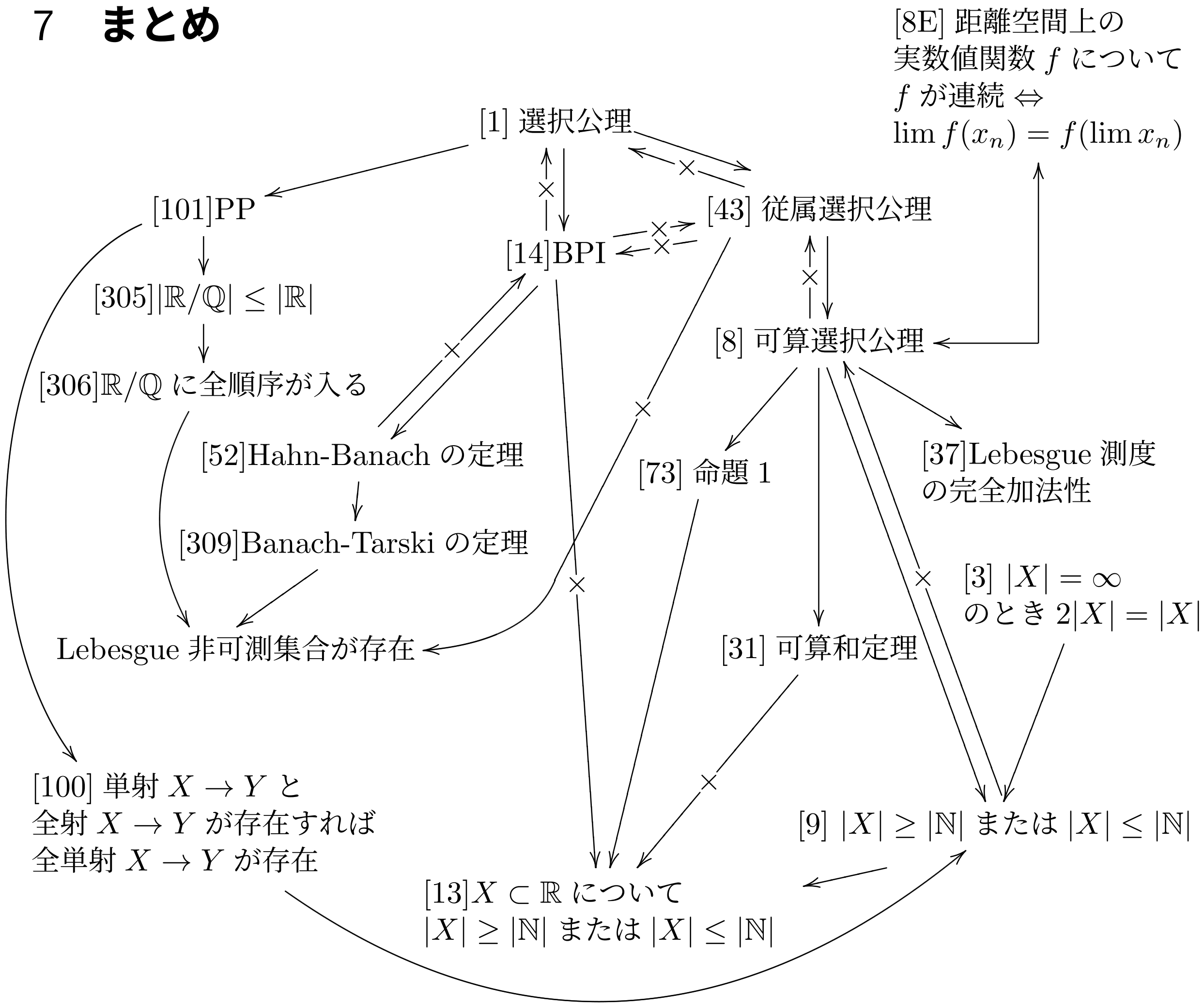
[3] Thomas J. Jech, the Axiom of Choice, Dover Books on Mathematics, 2008

[4] Stan Wagon, The Banach-Tarski Paradox, Cambridge University Press, 1994

[5] Janusz Pawlikowski, The Hahn-Banach theorem implies the Banach-Tarski paradox, Fundamenta Mathematicae 138 (1991), 21–22

[6] Trevor M. Wilson, A continuous movement version of the Banach-Tarski paradox: A solution to de Groot's Problem, J. Symbolic Logic 70 (2005), 946–952

7　まとめ



[ ] 内の数字は『Consequences of the Axiom of Choice』での命題番号です.