濃度の比較可能性と選択公理

alg-d
http://alg-d.com/math/ac/

2013 年 6 月 23 日

順序数や濃度の基本的な性質，$\Gamma(X), K(X), \kappa^*, \kappa^\dagger$ については順序数・濃度の簡単なまとめを参照.

定義. 濃度 κ, λ が比較可能 $\Longleftrightarrow \kappa \leq \lambda$ または $\lambda \leq \kappa$

定理 1. 次の命題は (ZF 上) 同値

1. 選択公理
2. 任意の濃度 κ, λ は比較可能
3. $\aleph_0 \leq \kappa, \lambda$ ならば κ, λ は比較可能
4. 任意の濃度 κ, λ について，$\kappa \leq^* \lambda$ または $\lambda \leq^* \kappa$.
5. $\aleph_0 \leq \kappa, \lambda$ ならば $\kappa \leq^* \lambda$ または $\lambda \leq^* \kappa$.

証明. ($1 \Longrightarrow 2$) X と Y を任意の集合とする．整列可能定理により X, Y を整列する．すると整列順序の性質から $|X| \leq |Y|$ または $|Y| \leq |X|$ が分かる.

$2 \Longrightarrow 3$ と $3 \Longrightarrow 5$ と $2 \Longrightarrow 4$ と $4 \Longrightarrow 5$ は明らか.

($5 \Longrightarrow 1$) 整列可能定理を示す．X を任意の集合として $Y := X \cup \mathbb{N}$ とする．「$|A| \leq^* |B|$ ならば $|A| \leq |\mathcal{P}(B)|$」であることに注意すると，$|\Gamma(\mathcal{P}(Y))| \not\leq |\mathcal{P}(Y)|$ より $|\Gamma(\mathcal{P}(Y))| \not\leq^* |Y|$ が分かる．従って仮定 4 から $|Y| \leq^* |\Gamma(\mathcal{P}(Y))|$ となる．よって全射 $f \colon \Gamma(\mathcal{P}(Y)) \longrightarrow Y$ が存在する．$\Gamma(\mathcal{P}(Y))$ は順序数だから，$g(a) := \min f^{-1}(a)$ として単射 $g \colon Y \longrightarrow \Gamma(\mathcal{P}(Y))$ が得られる．よって Y は整列可能であり，$X \subset Y$ だから X も整列可能である. $\square$

濃度の比較可能性に制限を加えた，次の命題を考える.

命題 2. 任意の濃度 μ に対して「$\mu \leq \kappa_0 \leq 2^\mu$，$\mu \leq \kappa_1 \leq 2^\mu$ なる濃度 κ_0, κ_1 は比較可

能」である．

補題 3. 命題 2 $\Longrightarrow$ 無限順序数 α に対して $|\Gamma(\alpha)| \le |\mathcal{P}(\alpha)|$

証明. α を無限順序数として $\kappa := |\mathcal{P}(\alpha)|$ と置く．$\aleph_0 \le \kappa$ だから $\kappa + 1 = \kappa$ である．また $\kappa^2 = (2^{|\alpha|})^2 = 2^{2|\alpha|} = 2^{|\alpha|} = \kappa$ である．ここで $\kappa^\dagger$ を考える．$\kappa^\dagger$ の性質により $\kappa < \kappa^\dagger \le 2^{\kappa^2}$ だから $\kappa \le \kappa^\dagger \le 2^\kappa$ が分かる．一方 $|\Gamma(\alpha)| \le 2^{2^{|\alpha|^2}} = 2^{2^{|\alpha|}} = 2^\kappa$ であるから $\kappa \le \kappa + |\Gamma(\alpha)| \le 2^\kappa + 2^\kappa = 2^{\kappa+1} = 2^\kappa$ となる．故に仮定から $\kappa^\dagger$ と $\kappa + |\Gamma(\alpha)|$ は比較可能である．

(i) $\kappa^\dagger \le \kappa + |\Gamma(\alpha)|$ のとき
$\kappa < \kappa^\dagger = 2^\kappa \le |\Gamma(\alpha)|$ である．

※ 順序数・濃度の簡単なまとめの命題 16 を参照.

$\kappa = |\mathcal{P}(\alpha)|$ で，$|\Gamma(\alpha)|$ はアレフだから $\mathcal{P}(\alpha)$ は整列可能である．$|\mathcal{P}(\alpha)| \not\le |\alpha|$ だから $\Gamma(\alpha)$ の最小性により $|\Gamma(\alpha)| \le |\mathcal{P}(\alpha)|$ となる．

(ii) $\kappa + |\Gamma(\alpha)| \le \kappa^\dagger$ のとき
$|\Gamma(\alpha)| \le \kappa^\dagger$ である．$\kappa^\dagger = |K(\mathcal{P}(\alpha))|$ だったから，$W \subset K(\mathcal{P}(\alpha))$ で $|W| = |\Gamma(\alpha)|$ となるものが取れる．K の定義より，各 $f \in W$ はある順序数から $\mathcal{P}(\alpha)$ への単射である．W は整列可能なので $X := \displaystyle\bigcup_{f \in W} \mathrm{Im}\, f \,(\subset \mathcal{P}(\alpha))$ も整列可能となる．$\aleph = |X|$ と置く．$X \subset \mathcal{P}(\alpha)$ だから $\Gamma(X) \le \Gamma(\mathcal{P}(\alpha))$ である．また X の定義より $W \subset K(X)$ であり，$|W| \le |K(X)|$ となる．ここで $\Gamma(\alpha) \le \Gamma(\mathcal{P}(\alpha))$ であるが，もし $\Gamma(\alpha) < \Gamma(\mathcal{P}(\alpha))$ ならば $\Gamma(\mathcal{P}(\alpha))$ の最小性より $|\Gamma(\alpha)| \le |\mathcal{P}(\alpha)|$ となるから，$\Gamma(\alpha) = \Gamma(\mathcal{P}(\alpha))$ としてよい．このとき

$$\aleph < \aleph^* = |\Gamma(X)| \le |\Gamma(\mathcal{P}(\alpha))| = |\Gamma(\alpha)|$$

となる．よって $\Gamma(\alpha)$ の最小性から $\aleph \le |\alpha|$ なので

$$|\Gamma(\alpha)| = |W| \le |K(X)| = \aleph^\dagger = 2^\aleph \le 2^{|\alpha|} = |\mathcal{P}(\alpha)|$$

である． $\square$

定理 4. 選択公理 $\Longleftrightarrow$ 命題 2

証明. $\Longrightarrow$ は定理より明らか．$\Longleftarrow$ を示す．その為には整列可能定理と同値な「順序数 α に対して $\mathcal{P}(\alpha)$ は整列可能」を示せばよい．

※ 整列可能定理についての定理 4 を参照.

α を順序数とする．α は無限順序数としてよい．順序数 $\Gamma(\alpha)$ に補題 3 を適用して $|\Gamma(\Gamma(\alpha))| \leq |\mathcal{P}(\Gamma(\alpha))|$ を得る．よって $|\Gamma(\alpha)| \leq |\Gamma(\Gamma(\alpha))| \leq |\mathcal{P}(\Gamma(\alpha))| = 2^{|\Gamma(\alpha)|}$ となる．$|\alpha| \leq |\Gamma(\alpha)|$ だから $|\Gamma(\alpha)| \leq |\Gamma(\alpha)| + 2^{|\alpha|} \leq 2^{|\Gamma(\alpha)|} + 2^{|\Gamma(\alpha)|} = 2^{|\Gamma(\alpha)|}$ である．従って仮定により $|\Gamma(\Gamma(\alpha))|$ と $|\Gamma(\alpha)| + 2^{|\alpha|}$ は比較可能である．

$|\Gamma(\Gamma(\alpha))| \leq |\Gamma(\alpha)| + 2^{|\alpha|}$ と仮定すると $|\Gamma(\Gamma(\alpha))| \leq |\Gamma(\alpha)|$ または $|\Gamma(\Gamma(\alpha))| \leq 2^{|\alpha|}$ でなければならないが, どちらも成立せず, 矛盾する．よって $|\mathcal{P}(\alpha)| = 2^{|\alpha|} \leq |\Gamma(\alpha)| + 2^{|\alpha|} \leq |\Gamma(\Gamma(\alpha))|$ となり $\mathcal{P}(\alpha)$ は整列可能である． □

系. 一般連続体仮説 ($\kappa \leq \mu \leq 2^\kappa$ ならば $\mu = \kappa$ または $\mu = 2^\kappa$) $\Longrightarrow$ 選択公理 □

定理 5. 次の命題は (ZF 上) 同値

1. 選択公理
2. $\mu < 2^\kappa$ ならば κ と μ は比較可能である．
3. $\aleph < 2^\kappa$ ならば κ と $\aleph$ は比較可能である．

証明. $1 \Longrightarrow 2$ と $2 \Longrightarrow 3$ は明らか.

($3 \Longrightarrow 1$) 整列可能定理を示す．X を任意の集合として $\kappa := |X|$ と置く．$\kappa^* \leq 2^{2^{2^\kappa}}$ である．κ^* はアレフだから，もし $\kappa^* = 2^{2^{2^\kappa}}$ ならば $\kappa \leq 2^{2^{2^\kappa}} = \kappa^*$ より X は整列可能である．そこで $\kappa^* < 2^{2^{2^\kappa}}$ だとすると仮定 3 により κ^* と 2^{2^κ} は比較可能である．もし $2^{2^\kappa} \leq \kappa^*$ ならば $\kappa \leq 2^{2^\kappa} \leq \kappa^*$ となり X は整列可能である．そこで $\kappa^* < 2^{2^\kappa}$ だとすると再び仮定 3 により κ^* と 2^κ は比較可能である．もし $2^\kappa \leq \kappa^*$ ならば $\kappa \leq 2^\kappa \leq \kappa^*$ となり X は整列可能である．そこで $\kappa^* < 2^\kappa$ だとすると再び仮定 3 により κ^* と κ は比較可能である．このとき κ^* の定義から $\kappa \leq \kappa^*$ となり，X は整列可能である． □

補題 6. $\kappa + 1 = \kappa$ ならば $2^\kappa - \kappa = 2^\kappa$

証明. $\kappa = |X|$ となる集合 X を取る．$X \ni x \longmapsto \{x\} \in \mathcal{P}(X)$ により $X \subset \mathcal{P}(X)$ とみなしたとき $|\mathcal{P}(X)| \leq |\mathcal{P}(X) \setminus X|$ を示せばよい.

X に含まれない元 ∞ を一つ取り $\bar{X} := X \cup \{\infty\}$ と置く．$f\colon \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathcal{P}(\bar{X}) \setminus \bar{X}$ を $f(Y) := Y \cup \{\infty\}$ で定める．これは明らかに単射だから $|\mathcal{P}(X)| \leq |\mathcal{P}(\bar{X}) \setminus \bar{X}|$ である．ここで $\kappa + 1 = \kappa$ だから $|\bar{X}| = |X|$ であり，よって $|\mathcal{P}(\bar{X}) \setminus \bar{X}| = |\mathcal{P}(X) \setminus X|$ となる．従って $|\mathcal{P}(X)| \leq |\mathcal{P}(X) \setminus X|$. □

定理 7. 選択公理

$\Longleftrightarrow$ $\kappa_0, \kappa_1 \geq \aleph_0$ とする．次の条件を満たすとき κ_0 と κ_1 は比較可能である．ある

$\mu \geq \kappa_0, \kappa_1$ が存在して，任意の ν_0, ν_1 に対して「$\kappa_0 + \nu_0 = \kappa_1 + \nu_1 = \mu \Longrightarrow \nu_0 = \nu_1$」

証明. ($\Longrightarrow$) 明らか

($\Longleftarrow$) 定理の条件 3 を示す．κ_0, κ_1 を $\aleph_0 \leq \kappa_0, \kappa_1$ なる濃度とする．$\mu := 2^{\kappa_0+\kappa_1}$ と置けば $\mu \geq \kappa_0, \kappa_1$ である．$\kappa_0 + \nu_0 = \mu$ とすると補題 6 より明らかに $\nu_0 = \mu$ である．κ_1 についても同様だから，「$\kappa_0 + \nu_0 = \kappa_1 + \nu_1 = \mu \Longrightarrow \nu_0 = \nu_1$」が成立する．よって κ_0, κ_1 は比較可能である． □

定理 8. 次の命題は (ZF 上) 同値

1. 選択公理
2. 任意の x, y に対して $|\mathcal{P}_{\text{fin}}(x)|$ と $|\mathcal{P}_{\text{fin}}(y)|$ は比較可能である．
3. 任意の x, y に対して $|x|$ と $|\mathcal{P}_{\text{fin}}(y)|$ は比較可能である．
4. 任意の x, y に対して $|x| \leq |\mathcal{P}_{\text{fin}}(y)|$ または $|y| \leq |\mathcal{P}_{\text{fin}}(x)|$ である．

証明. $1 \Longrightarrow 2$ と $1 \Longrightarrow 3$ は明らか．

($2 \Longrightarrow 4$) $|\mathcal{P}_{\text{fin}}(x)| \leq |\mathcal{P}_{\text{fin}}(y)|$ ならば $|x| \leq |\mathcal{P}_{\text{fin}}(x)| \leq |\mathcal{P}_{\text{fin}}(y)|$ であり，$|\mathcal{P}_{\text{fin}}(y)| \leq |\mathcal{P}_{\text{fin}}(x)|$ ならば $|y| \leq |\mathcal{P}_{\text{fin}}(y)| \leq |\mathcal{P}_{\text{fin}}(x)|$ である．

($3 \Longrightarrow 4$) $|x| \leq |\mathcal{P}_{\text{fin}}(y)|$ ならばよい．$|\mathcal{P}_{\text{fin}}(y)| \leq |x|$ ならば $|y| \leq |\mathcal{P}_{\text{fin}}(y)| \leq |x| \leq |\mathcal{P}_{\text{fin}}(x)|$ である．

($4 \Longrightarrow 1$) 整列可能定理を示す．x を集合として $y := \Gamma(\mathcal{P}_{\text{fin}}(x))$ と置く．仮定 4 より $|x| \leq |\mathcal{P}_{\text{fin}}(y)|$ または $|y| \leq |\mathcal{P}_{\text{fin}}(x)|$ である．y の定義により $|y| \not\leq |\mathcal{P}_{\text{fin}}(x)|$ だから $|x| \leq |\mathcal{P}_{\text{fin}}(y)|$ となる．y は順序数だから $|y| = |\mathcal{P}_{\text{fin}}(y)|$ である．

※ 順序数・濃度の簡単なまとめの命題 11 を参照.

故に $|x| \leq |y|$ である．よって x は整列可能である． □

参考文献

[1] H. Rubin and J. Rubin, Equivalents of the axiom of choice II, North Holland, 1985.