位相空間と選択公理 (その他)

alg-d

http://alg-d.com/math/ac/

2015 年 12 月 26 日

定義. 位相空間 X がスーパーコンパクト
$\iff$ 任意の開被覆 $X = \bigcup_{i\in I} U_i$ に対して，ある $i \in I$ が存在して $U_i = X$ となる．

定理. 選択公理 $\iff$ スーパーコンパクト空間の直積はスーパーコンパクト

証明. ($\Longrightarrow$) $\{(X_\lambda, \mathcal{O}_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ をスーパーコンパクト空間の族として $X := \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ とする．各 X_λ はスーパーコンパクトだから $Y_\lambda := \{x \in X_\lambda \mid x \in U \in \mathcal{O} \Rightarrow U = X_\lambda\}$ は空でない．$\{Y_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ に選択公理を適用して元 $x = (x_\lambda) \in \prod_{\lambda\in\Lambda} Y_\lambda \subset X$ を得る．$U \subset X$ を $x \in X$ の開近傍とする．$\prod_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda \subset U$, $x_\lambda \in U_\lambda \in \mathcal{O}_\lambda$ と書ける．すると各 x_λ の取り方から $U_\lambda = X_\lambda$ となる．即ち $U = X$．

($\Longleftarrow$) $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を空でない集合の族とする．$X^*_\lambda := X_\lambda \sqcup \{\infty\}$ の位相を $\{\emptyset, \{\infty\}, X^*_\lambda\}$ で定めると，これはスーパーコンパクトである．よって直積 $X := \prod_{\lambda\in\Lambda} X^*_\lambda$ もスーパーコンパクトである．$\pi_\lambda \colon X \longrightarrow X^*_\lambda$ を標準射影とすれば $\pi_\lambda^{-1}(\infty) \subset X$ は開集合で，明らかに $\pi_\lambda^{-1}(\infty) \neq X$ である．X がスーパーコンパクトだから $\{\pi_\lambda^{-1}(\infty) \mid \lambda \in \Lambda\}$ は開被覆ではない．故に $x \in X \setminus \bigcup_{\lambda\in\Lambda} \pi_\lambda^{-1}(\infty)$ が存在する．このとき明らかに $x \in \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ である． □

※ スーパーコンパクト T_0 空間の直積がスーパーコンパクトになることは選択公理を使わずに証明できる．

次の命題を Hewitt-Marczewski-Pondiczery の定理という．

命題 (Hewitt-Marczewski-Pondiczery の定理). κ を無限基数，$\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を位相空間の族とする．$\lambda \in \Lambda$ に対して X_λ は濃度 κ 以下の稠密部分集合を持ち，$|\Lambda| \leq 2^\kappa$ が成り立つとする．このとき直積空間 $\displaystyle\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ は濃度 κ 以下の稠密部分集合を持つ．

定理. 選択公理 $\Longleftrightarrow$ Hewitt-Marczewski-Pondiczery の定理

証明. ($\Longrightarrow$) 省略.

($\Longleftarrow$) 選択公理と同値な「無限集合 X に対して $|X|^2 = |X|$」を示す (濃度の性質を参照)．X を無限集合として離散位相を入れる．$X \subset X$ は濃度 $|X|$ の稠密部分集合である．直積空間 $X \times X$ を考えると，$2 \leq 2^{|X|}$ が成り立つから Hewitt-Marczewski-Pondiczery の定理により濃度 X 以下の稠密部分集合 $D \subset X \times X$ が存在する．$X \times X$ は離散位相空間だから $D = X \times X$ となり $|X|^2 = |X \times X| = |D| \leq |X| \leq |X|^2$ より $|X|^2 = |X|$ である． $\square$

参考文献

[1] Horst Herrlich, Axiom of Choice，Springer, 2006

[2] Edwin Hewitt, A remark on density characters, Bull. Amer. Math. Soc. 52 (1946), 641–643, `http://www.ams.org/journals/bull/1946-52-08/S0002-9904-1946-08613-9/`

[3] Eric Hall, Kyriakos Keremedis, Independent Families and Some Notions of Finiteness, `http://www.samos.aegean.gr/math/kker/`