

# 位相空間の直積・直和と選択公理

alg-d

<http://alg-d.com/math/ac/>

2015年12月26日

## 定理 1. 選択公理

$\iff \{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  と  $\{Y_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  は位相空間の族で、各  $\lambda \in \Lambda$  について  $X_\lambda \cong Y_\lambda$  (同相) とする。  
このとき  $\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda \cong \prod_{\lambda \in \Lambda} Y_\lambda$  である。

証明. ( $\implies$ )  $H_\lambda := \{f: X_\lambda \rightarrow Y_\lambda \mid f \text{ は同相写像}\}$  と置けば仮定により  $H_\lambda \neq \emptyset$  である。  
選択公理によって  $(f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \in \prod_{\lambda \in \Lambda} H_\lambda$  を取る。  $f: \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda \rightarrow \prod_{\lambda \in \Lambda} Y_\lambda$  を  $f((x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}) := (f_\lambda(x_\lambda))_{\lambda \in \Lambda}$  で定めれば  $f$  は同相写像である。

( $\impliedby$ )  $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  を非空集合の族とする。まず、各  $X_\lambda$  が Dedekind 無限であるとする。

※ 「集合  $X$  が Dedekind 無限  $\iff X$  に含まれない元  $\infty$  に対して  $|X| = |X \cup \{\infty\}|$  が成り立つ。定義などは有限集合・無限集合の定義を参照。

どの  $X_\lambda$  にも含まれない元  $\infty$  を一つ取り、 $Y_\lambda := X_\lambda \cup \{\infty\}$  とする。 $X_\lambda, Y_\lambda$  に離散位相を入れると、 $|X_\lambda| = |Y_\lambda|$  だから  $X_\lambda \cong Y_\lambda$  である。故に仮定から  $\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda \cong \prod_{\lambda \in \Lambda} Y_\lambda \neq \emptyset$  が分かる。

$X_\lambda$  が Dedekind 無限とは限らないときは  $Z_\lambda := X_\lambda \times \mathbb{N}$  と置く。 $Z_\lambda$  は Dedekind 無限だから、既に示したように  $\prod_{\lambda \in \Lambda} Z_\lambda \neq \emptyset$  である。よって元  $((x_\lambda, n_\lambda))_{\lambda \in \Lambda} \in \prod_{\lambda \in \Lambda} Z_\lambda$  が取れるが、このとき  $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \in \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$  である。  $\square$

この定理の  $\impliedby$  の証明では  $X_\lambda$  や  $Y_\lambda$  が離散位相である場合しか使っていない。故に次の系が分かる。

系 2. 次の命題は (ZF 上) 同値。

1. 選択公理

2.  $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  と  $\{Y_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  は集合族で, 各  $\lambda \in \Lambda$  について  $|X_\lambda| = |Y_\lambda|$  とする. このとき  $\left| \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda \right| = \left| \prod_{\lambda \in \Lambda} Y_\lambda \right|$  である.
3.  $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  と  $\{Y_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  は離散位相空間の族で, 各  $\lambda \in \Lambda$  について  $X_\lambda \cong Y_\lambda$  とする. このとき  $\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda \cong \prod_{\lambda \in \Lambda} Y_\lambda$  である.
4.  $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  と  $\{Y_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  は距離空間の族で, 各  $\lambda \in \Lambda$  について  $X_\lambda \cong Y_\lambda$  とする. このとき  $\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda \cong \prod_{\lambda \in \Lambda} Y_\lambda$  である.
5.  $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  と  $\{Y_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  は一様空間の族で, 各  $\lambda \in \Lambda$  について  $X_\lambda \cong Y_\lambda$  とする. このとき  $\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda \cong \prod_{\lambda \in \Lambda} Y_\lambda$  である. □

**定理 3.** 選択公理

$\iff \{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  と  $\{Y_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  はコンパクト Hausdorff 空間の族で, 各  $\lambda \in \Lambda$  について  $X_\lambda \cong Y_\lambda$  とする. このとき  $\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda \cong \prod_{\lambda \in \Lambda} Y_\lambda$  である.

**証明.** ( $\implies$ ) 明らか.

( $\impliedby$ )  $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  を非空集合の族とする. 次の性質を満たすような Dedekind 無限集合  $K$  を取ることができる:  $\{F_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  が有限集合の族ならば  $K \not\subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda$  である.

∴)  $A := \{\aleph \mid \text{全射 } \Lambda \times \mathbb{N} \longrightarrow \aleph \text{ が存在する}\}$  として  $|K| > \sup A$  となるような整列順序集合  $K$  を取ればよい.

この  $K$  が条件を満たすことを示すため, 有限集合の族  $\{F_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  が  $K \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda$  を満たすと仮定する.  $K = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda$  としてよい. このとき  $K$  の整列順序により各  $F_\lambda$  に順序が入る. これを使って  $F_\lambda = \{x_\lambda^0, \dots, x_\lambda^{n_\lambda-1}\}$  と書くことができる. 元  $a \in K$  を一つ取り, 写像  $f: \Lambda \times \mathbb{N} \longrightarrow K$  を

$$f(\lambda, n) := \begin{cases} x_\lambda^n & (n < n_\lambda \text{ のとき}) \\ a & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

により定める. この  $f$  は明らかに全射である. 故に  $|K| \in A$  となるが, それは  $|K| > \sup A$  に矛盾する.

定理 1 のときと同様, 必要ならば  $X_\lambda \times K$  を考えることにより,  $|K| \leq |X_\lambda|$  と仮定しても一般性を失わない. (このとき  $X_\lambda$  は Dedekind 無限である.)

どの  $X_\lambda$  にも含まれない異なる二つの元  $a, b$  を取る.  $Y_\lambda := X_\lambda \cup \{a\}$  を離散位相空間

$X_\lambda$  の一点コンパクト化,  $Z_\lambda := X_\lambda \cup \{a, b\}$  を離散位相空間  $X_\lambda \cup \{a\}$  の一点コンパクト化, とする. 即ち,  $Y_\lambda, Z_\lambda$  の位相を

$$\begin{aligned}\mathcal{O}_{Y_\lambda} &:= \mathcal{P}(X_\lambda) \cup \{O \subset Y_\lambda \mid |Y_\lambda \setminus O| < \infty\} \\ \mathcal{O}_{Z_\lambda} &:= \mathcal{P}(Y_\lambda) \cup \{O \subset Z_\lambda \mid |Z_\lambda \setminus O| < \infty\}\end{aligned}$$

で定める. これにより  $Y_\lambda, Z_\lambda$  はコンパクト Hausdorff 空間で,  $Y_\lambda \cong Z_\lambda$  となる. 故に仮定から同相写像  $f: \prod_{\lambda \in \Lambda} Y_\lambda \rightarrow \prod_{\lambda \in \Lambda} Z_\lambda$  が存在する.  $z := (a)_{\lambda \in \Lambda} \in \prod_{\lambda \in \Lambda} Z_\lambda$  だから  $f(y) = z$  となるような  $y = (y_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \in \prod_{\lambda \in \Lambda} Y_\lambda$  が存在する.  $y \in \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$  であることを示せば証明が終わる. その為に  $y \notin \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$  と仮定すると, ある  $\mu \in \Lambda$  が存在して  $y_\mu \in Y_\mu \setminus X_\mu = \{a\}$ , 即ち  $y_\mu = a$  である.  $A := \left( \prod_{\lambda \neq \mu} \{y_\lambda\} \right) \times X_\mu \subset \prod_{\lambda \in \Lambda} Y_\lambda$  と置く.  $|A| = |X_\mu| \geq |K|$  である.  $y$  の開近傍  $U \subset \prod_{\lambda \in \Lambda} Y_\lambda$  を任意にとると  $\mathcal{O}_{Y_\lambda}$  の定義から  $|A \setminus U| < \infty$  である.  $B := f(A)$  と置けば  $f$  が同相写像だから,  $|B| = |A| \geq |K|$ , かつ  $z$  の任意の開近傍  $V \subset \prod_{\lambda \in \Lambda} Z_\lambda$  に対し  $|B \setminus V| < \infty$  が分かる.  $\{a\} \subset Z_\lambda$  は開集合だから  $|B \setminus \pi_\lambda^{-1}(a)| < \infty$  である.  $y \notin A$  だから  $z = f(y) \notin B$ , 故に

$$B = B \setminus \{z\} = B \setminus \bigcap_{\lambda \in \Lambda} \pi_\lambda^{-1}(a) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} (B \setminus \pi_\lambda^{-1}(a)).$$

これは  $K$  の取り方に反する. □

同様のことが, 直積を直和に変えても成り立つ.

**定理 4.** 次の命題は (ZF 上) 同値.

1. 選択公理
2.  $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  と  $\{Y_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  は位相空間の族で, 各  $\lambda \in \Lambda$  について  $X_\lambda \cong Y_\lambda$  とする. このとき  $\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda \cong \prod_{\lambda \in \Lambda} Y_\lambda$ .
3.  $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  と  $\{Y_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  は距離空間の族で, 各  $\lambda \in \Lambda$  について  $X_\lambda \cong Y_\lambda$  とする. このとき  $\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda \cong \prod_{\lambda \in \Lambda} Y_\lambda$ .
4.  $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  と  $\{Y_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  はコンパクト Hausdorff 空間の族で, 各  $\lambda \in \Lambda$  について  $X_\lambda \cong Y_\lambda$  とする. このとき  $\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda \cong \prod_{\lambda \in \Lambda} Y_\lambda$ .

証明. 1  $\implies$  2 と 2  $\implies$  3 と 2  $\implies$  4 は明らか.

(4  $\implies$  1)  $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  を互いに素な非空集合の族とする. 定理 3 の証明と同様,  $X_\lambda$  は Dedekind 無限集合としてよい. どの  $X_\lambda$  にも含まれない元  $\infty$  を一つ取り  $Y_\lambda := X_\lambda \cup \{\infty\}$  と置き,  $X_\lambda$  と  $Y_\lambda$  に離散位相を入れる.  $I := (0, 1] \subset \mathbb{R}$  を半开区間として, 直積位相空間  $X_\lambda \times I, Y_\lambda \times I$  を考える. これらは局所コンパクト Hausdorff 空間である.  $X_\lambda^*$  と  $Y_\lambda^*$  を  $X_\lambda \times I$  と  $Y_\lambda \times I$  の一点コンパクト化とすると  $X_\lambda^*$  と  $Y_\lambda^*$  は連結なコンパクト Hausdorff 空間である.

( $\therefore$ ) まず  $X_\lambda \times I$  の一点コンパクト化  $X_\lambda^*$  の定義を確認する. ( $Y_\lambda \times I$  についても同様.)  $X_\lambda \times I$  に含まれない元  $a_\lambda$  を一つ取り  $X_\lambda^* := (X_\lambda \times I) \cup \{a_\lambda\}$  と置く.  $X_\lambda^*$  の位相を

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_{X_\lambda^*} &:= \mathcal{O}_{X_\lambda \times I} \cup \mathcal{Q}_\lambda \\ \mathcal{Q}_\lambda &:= \{O \cup \{a_\lambda\} \mid O \in \mathcal{O}_{X_\lambda \times I}, (X_\lambda \times I) \setminus O \subset X_\lambda \times I \text{ はコンパクト} \} \end{aligned}$$

で定める.

まず  $X_\lambda^*$  がコンパクト Hausdorff 空間であることは簡単に分かる.

次に  $X_\lambda^*$  が連結であることを示す.  $O_1, O_2 \subset X_\lambda^*$  を互いに素な開集合で  $X_\lambda^* = O_1 \cup O_2$  を満たすとする.  $a_\lambda \in O_1$  としてよい.  $O_2 \neq \emptyset$  と仮定する. ある  $x \in X_\lambda, r \in I$  が存在して  $\langle x, r \rangle \in O_2$  である. すると,  $I$  は連結だから  $\{x\} \times I \subset O_2$  である.  $\mathcal{O}_{X_\lambda^*}$  の定義から  $(X_\lambda \times I) \setminus O_1 = O_2$  は  $(X_\lambda \times I)$  のコンパクト閉集合である  $O_2$  がコンパクトだから, その閉部分集合  $\{x\} \times I \subset O_2$  もコンパクト. しかし, 明らかに  $\{x\} \times I$  はコンパクトでないから矛盾する. 故に  $O_2 = \emptyset$  となり  $X_\lambda^*$  の連結性が分かった.

$\lambda \in \Lambda$  とする. このとき  $X_\lambda^* \cong Y_\lambda^*$  である.

( $\therefore$ )  $X_\lambda$  が Dedekind 無限であるから全単射  $h_\lambda: X_\lambda \rightarrow Y_\lambda$  が存在する. このとき  $g_\lambda := h_\lambda \times \text{id}_I: X_\lambda \times I \rightarrow Y_\lambda \times I$  とすると  $g_\lambda$  は同相写像である.  $Y_\lambda^* \setminus (Y_\lambda \times I) = \{b_\lambda\}$  と書いて,  $f_\lambda: X_\lambda^* \rightarrow Y_\lambda^*$  を

$$f(y) := \begin{cases} g(x) & (x \in X_\lambda \times I \text{ のとき}) \\ b_\lambda & (x = a_\lambda \text{ のとき}) \end{cases}$$

で定めれば  $f_\lambda$  は同相写像である.

よって仮定 4 から同相写像  $f: \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda^* \rightarrow \prod_{\lambda \in \Lambda} Y_\lambda^*$  が存在する.  $X_\lambda^*, Y_\lambda^*$  はそれぞれ

れ  $\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda^*$ ,  $\prod_{\lambda \in \Lambda} Y_\lambda^*$  の連結成分である. 故にある写像  $h: \Lambda \rightarrow \Lambda$  が存在して, 任意の  $\lambda \in \Lambda$  に対して  $f(X_\lambda^*) = Y_{h(\lambda)}^*$  となる.  $\langle \infty, 1 \rangle \in Y_{h(\lambda)} \times I \subset Y_{h(\lambda)}^*$  だから  $\langle x_\lambda, r_\lambda \rangle := f^{-1}(\langle \infty, 1 \rangle)$  と定めると  $\langle x_\lambda, r_\lambda \rangle \in X_\lambda \times I$  である.

(3  $\implies$  1) 4  $\implies$  1 の証明において  $X_\lambda^*, Y_\lambda^*$  の位相を次のように変更すればよい.  $X_\lambda^*$  の位相は

$$a_\lambda \text{ の開近傍系を } \{X_\lambda \times (0, r) \mid r \in I\}$$

$$\langle x, r \rangle \text{ の開近傍系を } \{\langle x \rangle \times U \mid r \in U \in \mathcal{O}_I\}$$

で定める.  $Y_\lambda^*$  についても同様. □

※ 系 2 の条件 2 の直和バージョン「 $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  と  $\{Y_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  は集合族で, 各  $\lambda \in \Lambda$  について  $|X_\lambda| = |Y_\lambda|$  とする. このとき  $\left| \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda \right| = \left| \prod_{\lambda \in \Lambda} Y_\lambda \right|$  である」が選択公理と同値かどうかは未解決問題であるが, Partition Principle を導くことは知られている. Partition Principle を参照.

定義.  $(X, \mathcal{O})$  を位相空間,  $\mathcal{U} \subset \mathcal{O}$  とする.

1.  $\mathcal{V} \subset \mathcal{O}$  が  $\mathcal{U}$  の開細分  $\iff$  任意の  $V \in \mathcal{V}$  に対してある  $U \in \mathcal{U}$  が存在して  $V \subset U$  となる.
2.  $\mathcal{U}$  が局所有限  $\iff$  任意の  $x \in X$  に対してある  $x \in O \in \mathcal{O}$  が存在して  $|\{U \in \mathcal{U} \mid U \cap O \neq \emptyset\}| < \infty$  となる.
3.  $\mathcal{U}$  が点有限  $\iff$  任意の  $x \in X$  に対して  $|\{U \in \mathcal{U} \mid x \in U\}| < \infty$  となる.
4.  $\mathcal{U}$  が shrinkable  $\iff$  開被覆  $\{V_U\}_{U \in \mathcal{U}}$  で, 任意の  $U \in \mathcal{U}$  に対して  $\emptyset \neq \bar{V}_U \subset U$  となるものが存在する.

定義.  $X$  を位相空間とする.

1.  $X$  がパラコンパクト  $\iff X$  の開被覆は局所有限な開細分を持つ.
2.  $X$  がメタコンパクト  $\iff X$  の開被覆は点有限な開細分を持つ.
3.  $X$  が PFCS  $\iff X$  の点有限な開被覆は shrinkable である.

定理 5. AMC  $\iff$  パラコンパクト空間の直和はパラコンパクトである.

証明. ( $\implies$ )  $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  をパラコンパクト空間の族として  $X := \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$  を直和,  $\mathcal{U}$  を  $X$  の開被覆とする. 任意の  $U \in \mathcal{U}$  に対して  $\lambda \in \Lambda$  が一意に存在して  $U \subset X_\lambda$  となる, と

してよい.  $\mathcal{U}_\lambda := \{U \in \mathcal{U} \mid U \subset X_\lambda\}$ ,  $A_\lambda := \{\mathcal{V} \mid \mathcal{V} \text{ は } \mathcal{U}_\lambda \text{ の局所有限な開細分}\}$  と置く.  $\mathcal{U}_\lambda$  は  $X_\lambda$  の開被覆で  $X_\lambda$  がパラコンパクトだから,  $A_\lambda \neq \emptyset$  である. 故に  $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  に AMC を適用して, 有限集合の族  $\{F_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  を  $\emptyset \neq F_\lambda \subset A_\lambda$  となるように取ることが出来る. このとき  $\mathcal{V}_\lambda := \bigcup_{W \in F_\lambda} W$  は  $\mathcal{U}_\lambda$  の局所有限開細分で,  $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{V}_\lambda$  は  $\mathcal{U}$  の局所有限な開細分である.

( $\Leftarrow$ )  $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  を非空集合の族とする. 各  $X_\lambda$  は無限集合としてよい.  $X_\lambda$  に離散位相を入れて  $X_\lambda^* = X_\lambda \cup \{\infty_\lambda\}$  を一点コンパクト化とする.  $X_\lambda^*$  はパラコンパクトだから, 仮定により直和  $X := \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda^*$  もパラコンパクトである.

$$\mathcal{U} := \{U \subset X \mid \text{ある } \lambda \in \Lambda \text{ に対して } U \subsetneq X_\lambda^* \text{ かつ } U \text{ は } \infty_\lambda \text{ の開近傍}\}$$

は  $X$  の開被覆だから, 局所有限な開細分  $\mathcal{V}$  が存在する. このとき  $F_\lambda := \bigcup_{\infty_\lambda \in U \in \mathcal{V}} X_\lambda \setminus U$  は有限集合である. □

**定理 6.** AMC  $\iff$  メタコンパクト空間の直和はメタコンパクトである.

証明. 定理 5 と同様. □

**定理 7.** AMC  $\iff$  PFCS 空間の直和は PFCS である.

証明. ( $\implies$ ) 定理 5 と同様.

( $\Leftarrow$ )  $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  を非空集合の族とする. 各  $X_\lambda$  は無限集合としてよい. 定理 5 の証明と同様の構成をすれば,  $X_\lambda^*$  は PFCS だから仮定より  $X$  も PFCS である.  $\mathcal{U} := \{X_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\} \cup \{X_\lambda^* \mid \lambda \in \Lambda\}$  は  $X$  の開被覆だから, 開被覆  $\{V_U\}_{U \in \mathcal{U}}$  で, 任意の  $U \in \mathcal{U}$  に対して  $\emptyset \neq \bar{V}_U \subset U$  となるものが存在する. 即ち  $\lambda \in \Lambda$  に対して  $\emptyset \neq \bar{V}_{X_\lambda} \subset X_\lambda$  である. このとき  $V_{X_\lambda} \subset X_\lambda$  は空でない有限集合である. □

**定理 8.** AMC  $\iff$  コンパクト Hausdorff 空間の直和はパラコンパクトである.

証明. ( $\implies$ ) 定理 5 から明らか.

( $\Leftarrow$ ) 定理 5 の証明の  $X_\lambda^*$  はコンパクト Hausdorff である. 故に同様にして AMC がわかる. □

**定理 9.** AMC  $\iff$  コンパクト Hausdorff 空間の直和はメタコンパクトである.

証明. 定理 8 と同様. □

定理 10. AMC  $\iff$  コンパクト Hausdorff 空間の直和は PFCS である.

証明. 定理 8 と同様. □

定義. 1. 集合  $A$  に対して  $\bigcup A := \bigcup_{x \in A} x$  と書く.

2. 集合  $S$  が  $\Delta$ -システム

$\iff$  ある集合  $r$  が存在して任意の  $x, y \in S$  に対して 「 $x \neq y \implies x \cap y = r$ 」.

この集合  $r$  を根と呼ぶ.

補題 11.  $n$  を正整数,  $S$  を  $n$  元集合からなる無限集合とすると, ある有限部分集合  $r \subset \bigcup S$  が存在して任意の正整数  $k$  に対してある  $T \subset S$  が存在して 「 $|T| = k$  かつ  $T$  は  $r$  を根とする  $\Delta$ -システム」 となる.

証明.  $n$  に関する帰納法.  $n = 1$  のときは  $r = \emptyset$  とすればよい.

$n > 1$  のとき.  $x \in S$  と  $m \geq 0$  に対して

$$E_m(x) := \begin{cases} \{x\} & (m = 0 \text{ のとき}) \\ \{y \in S \mid y \cap (\bigcup E_{m-1}(x)) \neq \emptyset\} & (m > 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

とする.  $S$  の同値関係  $\sim$  を

$$x \sim y \iff \text{ある } m \geq 0 \text{ が存在して } y \in E_m(x)$$

で定める.  $x \in S$  の属する同値類を  $[x]$  で表すことにする. 明らかに,  $[x] \neq [y]$  のとき  $x \cap y = \emptyset$  である. よって  $S/\sim$  が無限集合のときは  $r = \emptyset$  とすればよいから,  $S/\sim$  は有限集合であるとする.  $[x]$  が無限集合となるような  $x \in S$  が存在するので, そのような  $x \in S$  を一つ取る.

(i) 任意の有限部分集合  $z \subset \bigcup [x]$  に対して, ある  $y \in [x]$  が存在して  $y \cap z = \emptyset$  となるとき. 任意の正整数  $k$  に対してある  $T \subset [x]$  が存在して 「 $|T| = k$  かつ  $T$  は  $\emptyset$  を根とする  $\Delta$ -システム」 となる.

∴)  $k$  に関する帰納法.  $k = 1$  のときは明らか.

$k > 1$  のとき. 帰納法の仮定により  $T \subset [x]$  で 「 $|T| = k-1$  かつ  $T$  は  $\emptyset$  を根とする  $\Delta$ -システム」 となるものが存在する.  $T = \{y_1, \dots, y_{k-1}\}$  と書く.  $y_1 \cup \dots \cup y_{k-1} \subset \bigcup [x]$  は有限部分集合だから, ある  $y_k \in [x]$  が存在して  $y_k \cap (y_1 \cup \dots \cup y_{k-1}) = \emptyset$  である. よって  $T \cup \{y_k\}$  が条件を満たす.

故に  $r = \emptyset$  とすればよい.

(ii) ある有限部分集合  $z \subset \bigcup[x]$  が存在して, 任意の  $y \in [x]$  に対して  $y \cap z \neq \emptyset$  となるとき.  $w \subset z$  で  $U := \{y \in [x] \mid y \cap z = w\}$  が無限集合となるものを取る. ( $[x]$  が無限集合だからこのような  $w$  は存在する.)  $|w| \geq 1$  である.  $A := \{y \setminus w \mid y \in U\}$  と置く.  $w$  の取り方から,  $A$  は  $(n - |w|)$  元集合からなる集合である. 故に帰納法の仮定から,  $r_0 \subset \bigcup A$  が取れる.

$r := r_0 \cup w$  とする. 正整数  $k$  を取る.  $r_0$  の取り方から, ある  $B \subset A$  が存在して「 $|B| = k$  かつ  $B$  は  $r_0$  を根とする  $\Delta$ -システム」となる. よって  $T := \{b \cup w \mid b \in B\}$  と置けば「 $|T| = k$  かつ  $T$  は  $r$  を根とする  $\Delta$ -システム」である.  $\square$

**補題 12.**  $\mathcal{A}$  を有限集合からなる無限集合として,  $k$  は非負整数,  $x$  は  $\bigcup \mathcal{A}$  の有限部分集合を動くとする.  $D(x) := \{a \in \mathcal{A} \mid a \cap x = \emptyset\}$  と置く.  $\mathcal{A}$  は「ある  $k, x$  に対して  $|D(x)| \leq k$ 」を満たすとして

$$n_0 := \min\{n > 0 \mid \text{ある } x, k \text{ が存在して } |x| = n \text{ かつ } |D(x)| \leq k\}$$

と置き,

$$k_0 \in \{k \geq 0 \mid \text{ある } x \text{ が存在して } |x| = n_0 \text{ かつ } |D(x)| \leq k\}$$

を一つ取る. このとき  $S := \{x \subset \bigcup \mathcal{A} \mid |x| = n_0, |D(x)| \leq k_0\}$  は有限集合である.

**証明.**  $S$  が無限集合であると仮定する.  $S$  に補題 11 を適用して  $r \subset \bigcup S$  を得る. 明らかに  $|r| < n_0$  であり, また  $n_0$  の最小性から  $D(r)$  は無限集合である.  $T \subset S$  を  $r$  を根とする  $\Delta$ -システムとすると任意の  $a \in D(r)$  に対して  $|\{x \in T \mid x \cap a \neq \emptyset\}| \leq |a|$  である.

$\therefore x_1, \dots, x_m \in \{x \in T \mid x \cap a \neq \emptyset\}$  を互いに異なる元とする.  $T$  の取り方から  $i \neq j$  に対して  $x_i \cap x_j = r$  である. 故に  $x_1 \setminus r, \dots, x_m \setminus r$  は互いに素である. 一方  $b \in D(r)$  だから  $b \cap r = \emptyset$  となる. よって  $(x_i \setminus r) \cap a = x_i \cap a \neq \emptyset$  である. 従って  $((x_1 \setminus r) \cap a) \cup \dots \cup ((x_m \setminus r) \cap a) \subset b$  から  $m \leq |a|$  でなければならない.

異なる  $k_0$  個の元  $a_1, \dots, a_{k_0} \in D(r)$  を取る.  $\left| \bigcup_{i=1}^{k_0} \{x \in T \mid x \cap a_i \neq \emptyset\} \right| \leq \sum_{i=1}^{k_0} |a_i| =: M$  である.  $N > 0$  を任意に取る.  $r$  の取り方により, ある  $T \subset S$  が存在して「 $|T| = M + N$  かつ  $T$  は  $r$  を根とする  $\Delta$ -システム」とできる.  $T' := T \setminus \bigcup_{i=1}^{k_0} \{x \in T \mid x \cap a_i \neq \emptyset\}$  と置けば  $|T'| \geq N$  である.  $a_0 \in D(r) \setminus \{a_1, \dots, a_{k_0}\}$  を一つ取る.

任意の  $x \in T'$  を取る. 任意の  $1 \leq i \leq k_0$  に対して  $x \cap a_i = \emptyset$  となる. また  $x \in T' \subset S$  だから  $|D(x)| \leq k_0$  であり,  $a \cap x = \emptyset$  となる  $a \in \mathcal{A}$  は高々  $k_0$  個しかない. よって  $a_0 \cap x \neq \emptyset$  でなければならない.  $x \in T'$  は任意だったから,  $T' \subset \{x \in T \mid a_0 \cap x \neq \emptyset\}$



である。故に  $N \leq |T'| \leq |\{x \in T \mid x \cap a_0 \neq \emptyset\}| \leq |a_0|$  となる。  $N > 0$  は任意だったから  $a_0$  が無限集合となり矛盾する。  $\square$

定義.  $X$  を位相空間とする.

1.  $X$  が  $T_4$  空間  
 $\iff$  互いに素な閉集合  $E, F \subset X$  に対して, ある開集合  $U, V \subset X$  が存在して  $E \subset U, F \subset V, U \cap V = \emptyset$  となる
2.  $X$  が U-空間  
 $\iff$  互いに素な閉集合  $E, F \subset X$  に対してある連続関数  $f: X \rightarrow [0, 1]$  が存在して  $f|_E = 0, f|_F = 1$  となる.
3.  $X$  が T-空間  
 $\iff F \subset X$  を閉集合,  $f: F \rightarrow [0, 1]$  を連続関数とすると, ある連続関数  $\bar{f}: X \rightarrow [0, 1]$  が存在して  $\bar{f}|_F = f$  となる.
4.  $X$  が collectionwise Hausdorff  
 $\iff F \subset X$  が離散閉集合ならば,  $X$  の互いに素な開集合の族  $\{U_x\}_{x \in F}$  が存在して,  $x \in F$  に対して  $x \in U_x$  となる.
5.  $X$  が collectionwise  $T_4$   
 $\iff \{F_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  が  $X$  の互いに素な閉集合の族ならば,  $X$  の互いに素な開集合の族  $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  が存在して,  $\lambda \in \Lambda$  に対して  $F_\lambda \subset U_\lambda$  となる.

命題 13. 1. T-空間は U-空間である.

2. U-空間は  $T_4$  空間である.
3. パラコンパクト Hausdorff 空間は  $T_4$  空間である.
4. 選択公理  $\implies T_4$  空間は U-空間である. (Urysohn の補題)
5. 選択公理  $\implies T_4$  空間は T-空間である. (Tietze の拡張定理)  $\square$

※ 即ち, 選択公理の下では  $T_4$  空間, U-空間, T-空間は同一の概念である. また「 $T_4$  空間  $\implies$  U-空間」や「 $T_4$  空間  $\implies$  T-空間」は ZF では証明できないことが知られている. [3]

定理 14. 次の命題は (ZF 上) 同値.

1. AMC
2. T-空間の直和は T-空間である.

3. T-空間の直和は U-空間である.
4. T-空間の直和は  $T_4$  空間である.
5. U-空間の直和は U-空間である.
6. U-空間の直和は  $T_4$  空間である.
7.  $T_4$  空間の直和は  $T_4$  空間である.
8. パラコンパクト Hausdorff 空間の直和は  $T_4$  空間である.
9. collectionwise Hausdorff 空間の直和は collectionwise Hausdorff である.
10. collectionwise  $T_4$  空間の直和は collectionwise  $T_4$  である.
11. collectionwise  $T_4$  空間の直和は  $T_4$  空間である.

証明.  $2 \implies 3$ ,  $3 \implies 4$ ,  $5 \implies 6$ ,  $6 \implies 4$ ,  $8 \implies 7$ ,  $7 \implies 6$ ,  $10 \implies 11$  は明らかだから,  $1 \implies 2$ ,  $1 \implies 5$ ,  $1 \implies 8$ ,  $4 \implies 1$  と  $1 \implies 9$ ,  $9 \implies 1$  と  $1 \implies 10$ ,  $11 \implies 1$  を示せばよい.

( $1 \implies 2$ )  $\{(X_\lambda, \mathcal{O}_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$  を T-空間の族として  $X := \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$  とする.  $F \subset X$  を閉集合,  $f: F \rightarrow [0, 1]$  を連続写像とする.  $F_\lambda := F \cap X_\lambda$ ,  $f_\lambda := f|_{F_\lambda}$  とすれば,  $X_\lambda$  が T-空間であることから

$$A_\lambda := \{g: X_\lambda \rightarrow [0, 1] \mid g|_{F_\lambda} = f_\lambda\}$$

は空でない.  $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  に AMC を適用して空でない有限集合  $B_\lambda \subset A_\lambda$  を得る. このとき連続関数  $\bar{f}: X \rightarrow [0, 1]$  を  $x \in X_\lambda$  に対して  $\bar{f}(x) := \max\{g(x) \mid g \in B_\lambda\}$  で定めれば  $\bar{f}|_F = f$  である.

( $4 \implies 1$ )  $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  を非空集合の族とする. 各  $X_\lambda$  は無限集合としても一般性を失わない.  $\mathcal{P}_{\text{fin}}^0(X_\lambda) := \{F \subset X_\lambda \mid 0 < |F| < \infty\}$  として

$$M_\lambda := \left\{ \langle \mathcal{A}, \mathcal{B} \rangle \mid \begin{array}{l} \mathcal{A}, \mathcal{B} \subset \mathcal{P}_{\text{fin}}^0(X_\lambda), \mathcal{A}, \mathcal{B} \neq \emptyset \\ \text{任意の } F \in \mathcal{A} \text{ と任意の } G \in \mathcal{B} \text{ に対して } F \cap G \neq \emptyset \end{array} \right\}$$

と定義する. このとき  $f_\lambda: M_\lambda \rightarrow \mathcal{P}_{\text{fin}}^0(X_\lambda)$  となる写像の族  $(f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  が存在する.

∴)  $\langle \mathcal{A}, \mathcal{B} \rangle \in M_\lambda$  とする. まず  $\mathcal{A}$  が無限集合だとする. ( $\mathcal{A}$  に補題 12 を適用する.)  $G \in \mathcal{B}$  に対して  $G \cap \bigcup \mathcal{A}$  は  $\bigcup \mathcal{A}$  の有限部分集合であり,  $M_\lambda$  の定義から  $|D(G \cap \bigcup \mathcal{A})| \leq 0$  を満たす. よって

$$n_0 := \min\{n > 0 \mid \text{ある } x, k \text{ が存在して } |x| = n \text{ かつ } |D(x)| \leq k\}$$

が存在する.

$$k_0 := \min\{k \geq 0 \mid \text{ある } x \text{ が存在して } |x| = n_0 \text{ かつ } |D(x)| \leq k\}$$

とすれば, 補題 12 により  $S := \{x \in \bigcup \mathcal{A} \mid |x| = n_0, |D(x)| \leq k_0\}$  は有限集合である.

そこで  $f_\lambda(\mathcal{A}, \mathcal{B}) := \begin{cases} \bigcup \mathcal{A} & (\mathcal{A} \text{ が有限集合のとき}) \\ \bigcup S & (\mathcal{A} \text{ が無限集合のとき}) \end{cases}$  とすれば  $f_\lambda(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \in \mathcal{P}_{\text{fin}}^0(X_\lambda)$  である.

$a_\lambda := \langle 0, X_\lambda \rangle$ ,  $b_\lambda := \langle 1, X_\lambda \rangle$  として  $Y_\lambda := \{a_\lambda, b_\lambda\} \cup \mathcal{P}_{\text{fin}}^0(X_\lambda)$  と置く.  $F \in \mathcal{P}_{\text{fin}}^0(X_\lambda)$  に対して  $F^\uparrow := \{G \in \mathcal{P}_{\text{fin}}^0(X_\lambda) \mid F \subset G\}$ ,  $F^* := \{G \in \mathcal{P}_{\text{fin}}^0(X_\lambda) \mid F \cap G \neq \emptyset\}$  とする.  $Y_\lambda$  の開集合  $U \subset Y_\lambda$  を次の二条件を満たすものとして定める.

- (1)  $a_\lambda \in U$  ならばある  $F \in \mathcal{P}_{\text{fin}}^0(X_\lambda)$  が存在して  $F^\uparrow \subset U$
- (2)  $b_\lambda \in U$  ならばある  $F \in \mathcal{P}_{\text{fin}}^0(X_\lambda)$  が存在して  $F^* \subset U$

すると各  $Y_\lambda$  は T-空間である.

∴) まず  $Y_\lambda$  が位相空間であることを示す.

(i) 明らかに  $\emptyset$  と  $Y_\lambda$  は開集合である.

(ii) 開集合の和集合も明らかに開である.

(iii)  $U, V$  を開集合とする.  $a_\lambda \in U \cap V$  とする. このとき  $a_\lambda \in U$ ,  $a_\lambda \in V$  である. よってある  $F_U, F_V \in \mathcal{P}_{\text{fin}}^0(X_\lambda)$  が存在して  $F_U^\uparrow \subset U$ ,  $F_V^\uparrow \subset V$  となる. このとき  $F := F_U \cup F_V$  と置けば明らかに  $F^\uparrow \subset U \cap V$  である. 故に  $U \cap V$  は開集合の定義 (1) を満たす. (2) についても同様である.

以上により  $Y_\lambda$  は位相空間である.

$Y_\lambda$  が T-空間であることを示すため,  $A \subset Y_\lambda$  を閉集合,  $f: A \rightarrow [0, 1]$  を連続写像とする.  $Y_\lambda$  の位相の定義から,  $y \neq a_\lambda, b_\lambda$  のとき  $\{y\} \subset Y_\lambda$  が開であることに注意し,  $\bar{f}: Y_\lambda \rightarrow [0, 1]$  を以下のように定義すればよい.

(i)  $a_\lambda, b_\lambda \notin A$  のとき.

$$\bar{f}(y) := \begin{cases} f(y) & (y \in A \text{ のとき}) \\ 0 & (y \notin A \text{ のとき}) \end{cases}$$

と定義すれば  $\bar{f}$  は連続である.

(ii)  $a_\lambda, b_\lambda \in A$  のとき.

開近傍  $U \ni a_\lambda, V \ni b_\lambda, U \cap V = \emptyset$  を取り

$$\bar{f}(y) := \begin{cases} f(y) & (y \in A \text{ のとき}) \\ f(a_\lambda) & (y \in U \setminus A \text{ のとき}) \\ f(b_\lambda) & (y \in V \setminus A \text{ のとき}) \\ 0 & (\text{それ以外の場合}) \end{cases}$$

と定義すれば  $\bar{f}$  は連続である.

(iii)  $a_\lambda \in A, b_\lambda \notin A$  のとき.

開近傍  $U \ni a_\lambda, V \ni b_\lambda, U \cap V = \emptyset, V \cap A = \emptyset$  を取り

$$\bar{f}(y) := \begin{cases} f(y) & (y \in A \text{ のとき}) \\ f(a_\lambda) & (y \in U \setminus A \text{ のとき}) \\ 0 & (\text{それ以外の場合}) \end{cases}$$

と定義すれば  $\bar{f}$  は連続である.

(iv)  $a_\lambda \notin A, b_\lambda \in A$  のとき.

(iii) と同様.

$Y := \coprod_{\lambda \in \Lambda} Y_\lambda$  と置く. 仮定により  $Y$  は  $T_4$  空間である.  $A := \{a_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}, B := \{b_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$  とすればこれらは  $Y$  の閉集合で互いに素である. 故に  $U \supset A, V \supset B, U \cap V = \emptyset$  となる開集合  $U, V$  が存在する.  $\mathcal{A}_\lambda := \{F \in \mathcal{P}_{\text{fin}}^0(X_\lambda) \mid F^\uparrow \subset U\}, \mathcal{B}_\lambda := \{F \in \mathcal{P}_{\text{fin}}^0(X_\lambda) \mid F^* \subset V\}$  と置くと  $\mathcal{A}_\lambda \neq \emptyset, \mathcal{B}_\lambda \neq \emptyset$  で, 任意の  $F \in \mathcal{A}_\lambda$  と任意の  $G \in \mathcal{B}_\lambda$  に対して  $F \cap G \neq \emptyset$  となる.

∴  $F \cap G = \emptyset$  とすると  $F \in G^*$  である. よって  $F^\uparrow \cap G^* \neq \emptyset$  となり  $U \cap V = \emptyset$  に矛盾する.

故に  $\langle \mathcal{A}_\lambda, \mathcal{B}_\lambda \rangle \in M_\lambda$  である. そこで  $F_\lambda := f_\lambda(\mathcal{A}_\lambda, \mathcal{B}_\lambda)$  と置けばよい.

(1  $\implies$  5) 1  $\implies$  2 と同様.

(1  $\implies$  7)  $\{(X_\lambda, \mathcal{O}_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$  を  $T_4$  空間の族として  $X := \coprod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$  とする.  $E, F \subset X$  を互いに素な閉集合とする.  $E_\lambda := E \cap X_\lambda, F_\lambda := F \cap X_\lambda$  と置けばこれらは  $X_\lambda$  の互いに素な閉集合. よって  $X_\lambda$  が  $T_4$  だから

$$A_\lambda := \{\langle U, V \rangle \in \mathcal{O}_\lambda \times \mathcal{O}_\lambda \mid U \supset E_\lambda, V \supset F_\lambda, U \cap V = \emptyset\}$$

は空でない.  $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  に AMC を適用して空でない有限集合  $B_\lambda \subset A_\lambda$  を得る. このと

き  $U_\lambda := \bigcap_{\langle U, V \rangle \in B_\lambda} U$ ,  $V_\lambda := \bigcap_{\langle U, V \rangle \in B_\lambda} V$  とすれば  $E_\lambda \subset U_\lambda$ ,  $F_\lambda \subset V_\lambda$ ,  $U_\lambda \cap V_\lambda = \emptyset$  である. そこで  $U := \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \in \mathcal{O}$ ,  $V := \bigcup_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda \in \mathcal{O}$  とすれば明らかに

$$U \supset E, V \supset F, U \cap V = \emptyset.$$

故に  $X$  は  $T_4$  である.

(9  $\implies$  1) 4 $\implies$ 1 の証明で定義した  $Y_\lambda$  は collectionwise Hausdorff である. 故に仮定 11 から  $Y := \prod_{\lambda \in \Lambda} Y_\lambda$  は collectionwise Hausdorff となる.  $A, B \subset Y$  は離散閉集合となるから, 4 $\implies$ 1 と同様にして AMC を示すことができる.

(11  $\implies$  1) 4 $\implies$ 1 の証明で定義した  $Y_\lambda$  は collectionwise  $T_4$  である. 故に仮定 11 から  $Y := \prod_{\lambda \in \Lambda} Y_\lambda$  は  $T_4$  空間となり, 4 $\implies$ 1 と同様にして AMC を示すことができる.  $\square$

**命題 15.** 可算選択公理  $\iff$  コンパクトな空間の可算直和は Lindelöf である.

**証明.** ( $\implies$ ) 明らか.

( $\impliedby$ )  $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  を非空集合の族とする. 離散位相空間  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n$  の一点コンパクト化を  $X = \{\infty\} \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n$  とする.  $X$  はコンパクトだから, 仮定より  $X \sqcup \mathbb{N} = X \sqcup \{0\} \sqcup \{1\} \sqcup \dots$  は Lindelöf である.  $\{X\} \cup \{\{n, x\} \mid n \in \mathbb{N}, x \in X_n\}$  は  $X \cup \mathbb{N}$  の開被覆だから, 可算部分被覆  $\{U_n \mid n \in \mathbb{N}\}$  が存在する.  $n \in \mathbb{N}$  に対して  $n^* := \min\{m \in \mathbb{N} \mid n \in U_m\}$  として  $U_{n^*} = \{n, x_n\}$  と書けば  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \prod_{n \in \mathbb{N}} X_n$  である.  $\square$

**定理 16.** 選択公理

$\iff$  コンパクトな空間の直積は Lindelöf である, かつコンパクトな空間の可算直和は Lindelöf である.

**証明.** ( $\implies$ ) 明らか.

( $\impliedby$ ) 選択公理が成り立たないと仮定する. 非空集合の族  $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  で  $\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda = \emptyset$  となるものが存在する. 各  $X_\lambda$  に密着位相を入れて直和  $Y_\lambda := X_\lambda \cup \{\infty\}$  を考える.  $Y_\lambda$  はコンパクトだから仮定により  $Y := \prod_{\lambda \in \Lambda} Y_\lambda$  は Lindelöf となる.  $\pi_\lambda: Y \rightarrow Y_\lambda$  を標準射影とすると,  $\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda = \emptyset$  だから  $\{\pi_\lambda^{-1}(\infty) \mid \lambda \in \Lambda\}$  は  $Y$  の開被覆である.  $Y$  が Lindelöf だから, 可算部分集合  $\Gamma \subset \Lambda$  が存在して  $\{\pi_\lambda^{-1}(\infty) \mid \lambda \in \Gamma\}$  が  $Y$  の開被覆となる. こ

のとき  $\prod_{\lambda \in \Gamma} X_\lambda = \emptyset$  であるが, 一方命題 15 より可算選択公理が成立するから, 矛盾する. □

## 参考文献

- [1] Paul Howard, Kyriakos Keremedis, Herman Rubin and Jean E. Rubin, Disjoint Unions of Topological Spaces and Choice, *Math. Log. Quart.* 44 (1998), 493–508, <http://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1002/malq.19980440408/>
- [2] Horst Herrlich and Kyriakos Keremedis, Topological sums and products in ZF-set theory, *Topology and its Applications* 156 (2009), 1994–1999, <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0166864109000960>
- [3] H. Läuchli, Auswahlaxiom in der Algebra, *Comment. Math. Helv.* 37 (1963), 1–18
- [4] Horst Herrlich, Products of Lindelöf  $T_2$ -spaces are Lindelöf — in some models of ZF, *Comment. Math. Univ. Carolin.* 43,2 (2002), 319–333, <http://dml.cz/handle/10338.dmlcz/119322>