symmetric モデル

alg-d
http://alg-d.com/math/ac/

2015 年 1 月 11 日

強制法を使って，M に可算個の実数を付け加える．この実数をアトムのように扱って，permutation モデルのような部分モデル $N \subset M[\mathcal{G}]$ を構成すれば $N \models \neg\mathrm{AC}$ とできるのである．

$\langle \mathbb{P}, \leq \rangle \in M$ を (最大元 $\mathbf{1}$ を持つ) 順序集合とする．$g \colon \mathbb{P} \longrightarrow \mathbb{P}$ を自己同型とする．$\sigma \in M^{\mathbb{P}}$ に対して $g(\sigma) := \{\langle g(\tau), g(p) \rangle \mid \langle \tau, p \rangle \in \sigma\}$ と定めて $g \colon M^{\mathbb{P}} \longrightarrow M^{\mathbb{P}}$ とみなす．g は全単射である．

定義. $G \subset \mathrm{Aut}(\mathbb{P})$ を部分群とする．以下の条件を満たす $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(G)$ を G の normal フィルターという．

1. 各 $H \in \mathcal{F}$ は G の部分群.
2. $H \in \mathcal{F}$，$K \subset G$ が部分群で $H \subset K$ ならば $K \in \mathcal{F}$.
3. $H, K \in \mathcal{F}$ ならば $H \cap K \in \mathcal{F}$.
4. $H \in \mathcal{F}$，$g \in G$ ならば $gHg^{-1} \in F$.

$G \subset \mathrm{Aut}(\mathbb{P})$ と G の normal フィルター $\mathcal{F}$ が与えられたとき，$\sigma \in M^{\mathbb{P}}$ に対して $\mathrm{sym}(\sigma) := \{g \in G \mid g(\sigma) = \sigma\}$ として $\mathrm{HS} := \{\sigma \in M^{\mathbb{P}} \mid \mathrm{sym}(\sigma) \in \mathcal{F},\ \mathrm{dom}(\sigma) \subset \mathrm{HS}\}$ と置く．$N := \{\mathrm{val}(\sigma, \mathcal{G}) \mid \sigma \in \mathrm{HS}\}$ と定める．

命題. $M \subset N$ である．

証明. $x \in M$ とする．rank に関する帰納法により，$\check{x} \in \mathrm{HS}$ を示せばよい．帰納法の仮定により，任意の $y \in x$ に対して $\check{y} \in \mathrm{HS}$ である．よって $\mathrm{dom}(\check{x}) \subset \mathrm{HS}$ となる．また $g \in G$ に対して $g(\check{x}) = \{\langle g(\check{y}), g(\mathbf{1}) \rangle \mid y \in x\} = \{\langle \check{y}, \mathbf{1} \rangle \mid y \in x\} = \check{x}$ だから $\mathrm{sym}(\check{x}) = G \in \mathcal{F}$ である．故に $\check{x} \in \mathrm{HS}$ が分かった． □

定理. N は ZF のモデルである. $\square$

この N を symmetric モデルと呼ぶ.

定理. 選択公理は ZF で証明できない.

証明. $\mathbb{P} := \mathrm{Fin}(\omega \times \omega, 2)$ に順序を $\leq := \supset$ で入れる. M を ZFC の可算推移的モデル, $\mathcal{G}$ を M 上 $\mathbb{P}$-ジェネリックとしてジェネリック拡大 $M[\mathcal{G}]$ を作る.

$$\underline{x}_n := \{\langle \check{m}, p\rangle \mid m \in \omega,\ p \in \mathbb{P},\ p(m,n) = 1\}$$

は $\underline{x}_n \in M^{\mathbb{P}}$ を満たすから

$$x_n := \mathrm{val}(\underline{x}_n, \mathcal{G}) = \{m \mid m \in \omega,\ p \in \mathcal{G},\ p(m,n) = 1\}$$

と置けば $x_n \subset \omega$ かつ $x_n \in M[\mathcal{G}]$ である. また $n \neq l$ ならば $x_n \neq x_l$ である.

$\because)$ $n \neq l$ とする.

$$D_{nl} := \{p \in \mathbb{P} \mid \text{ある } m \in \omega \text{ について } p(m,n) = 1 \text{ かつ } p(m,l) = 0\}$$

と置けば $D_{nl} \subset \mathbb{P}$ は稠密である. 故に $p \in D_{nl} \cap \mathcal{G}$ が取れる. $p(m,n) = 1$ かつ $p(m,l) = 0$ となる m を取れば $m \in x_n$ かつ $m \notin x_l$ だから $x_n \neq x_l$ である.

$\underline{A} := \{\langle \underline{x}_n, \mathbf{1}\rangle \mid n \in \omega\} \in M^{\mathbb{P}}$ だから

$$A := \mathrm{val}(\underline{A}, \mathcal{G}) = \{\mathrm{val}(\underline{x}_n, \mathcal{G}) \mid n \in \omega\} = \{x_n \mid n \in \omega\}$$

と置けば $A \subset \mathcal{P}(\omega)$ で $A \in M[\mathcal{G}]$ である.

$G := \mathrm{Aut}(\omega)$ とする. $g \in G$ に対して自己同型 $\overline{g} \colon \mathbb{P} \longrightarrow \mathbb{P}$ が $p \in \mathbb{P}$ に対して

$$\overline{g}(p) := \{\langle m, g(n), k\rangle \mid \langle m, n, k\rangle \in p\}$$

により定まる. この $g \mapsto \overline{g}$ により $G \subset \mathrm{Aut}(\mathbb{P})$ とみなす.

$E \subset \omega$ に対して $\mathrm{fix}(E) := \{g \in G \mid \text{任意の } n \in E \text{ に対して } g(n) = n\}$ と書く. このとき $\mathcal{F} := \{H \subset G : \text{部分群} \mid \text{ある } E \in \mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(\omega) \text{ に対して } \mathrm{fix}(E) \subset H\}$ は normal フィルターである. これにより symmetric モデル N が定まる.

$n \in \omega$, $g \in G$ に対して

$$\begin{aligned} g(\underline{x}_n) &= \{\langle g(\check{m}), g(p)\rangle \mid m \in \omega,\ p \in \mathbb{P},\ p(m,n)=1\} \\ &= \{\langle \check{m}, g(p)\rangle \mid m \in \omega,\ p \in \mathbb{P},\ p(m,n)=1\} \\ &= \{\langle \check{m}, p\rangle \mid m \in \omega,\ p \in \mathbb{P},\ g^{-1}(p)(m,n)=1\} \\ &= \{\langle \check{m}, p\rangle \mid m \in \omega,\ p \in \mathbb{P},\ p(m,g(n))=1\} \\ &= \underline{x}_{g(n)} \end{aligned}$$

だから $\mathrm{fix}(\{n\}) \subset \mathrm{sym}(\underline{x}_n)$ となり，$\underline{x}_n \in \mathrm{HS}$, 即ち $x_n \in N$ である．また任意の $g \in G$ について $g(\underline{A}) = \underline{A}$ となるから，$\mathrm{fix}(\emptyset) = G = \mathrm{sym}(\underline{A})$ であり $A \in N$ が分かる．$\aleph_0 \not\leq |A|$ である．

∵) 単射 $f\colon \omega \longrightarrow A$ で $f \in N$ となるものが存在すると仮定する．$\underline{f} \in \mathrm{HS}$ を $f = \mathrm{val}(\underline{f}, \mathcal{G})$ となるように取る．ある $p_0 \in \mathcal{G}$ が存在して

$$p_0 \Vdash (\underline{f}\ \text{は単射}\ \check{\omega} \longrightarrow \underline{A}\ \text{である})$$

を満たす．$\underline{f}$ の support を E とする．E が有限集合だから，ある $i \in \omega$，$n \in \omega \setminus E$，$p \in \mathcal{G}$ が存在して $p \Vdash \underline{f}(\check{i}) = \underline{x}_n$ となる．$p \leq p_0$ としてよい．

$g \in \mathrm{fix}(E)$ を $g(n) \neq n$，$p \cup g(p) \in \mathbb{P}$ となるように取る．このとき $g \in \mathrm{fix}(E)$ だから $g(\underline{f}) = \underline{f}$ で $g(p) \Vdash g(\underline{f})(g(\check{i})) = g(\underline{x}_n)$ となる．よって $p \cup g(p) \Vdash \underline{f}(\check{i}) = \underline{x}_n \wedge \underline{f}(\check{i}) = \underline{x}_{g(n)}$ となり矛盾する．

よって N で選択公理が成り立たないことが分かる． □

系． 「$\mathbb{R}$ の Dedekind 有限な部分集合は有限集合」は ZF で証明できない．特に，可算選択公理は ZF で証明できない． □

参考文献

[1] ケネス・キューネン,『集合論-独立性証明への案内』, 藤田博司訳, 日本評論社, 2008

[2] Thomas J. Jech, the Axiom of Choice, Dover Books on Mathematics, 2008