任意の群の p-Sylow 部分群の存在と選択公理

alg-d
http://alg-d.com/math/ac/

2013 年 1 月 13 日

定義. G を群，p を素数とする．

1. 部分群 $H \subset G$ が p-部分群 $\Longleftrightarrow$ 任意の元 $x \in H$ の位数が p 冪である
2. 部分群 $H \subset G$ が p-Sylow 部分群 $\Longleftrightarrow$ H は極大な p-部分群である

定理. p を素数とする．このとき
選択公理 $\Longleftrightarrow$ 任意の群 G の p-Sylow 部分群が存在する．

証明. ($\Longrightarrow$) Zorn の補題より明らか．

($\Longleftarrow$) $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を非空集合の族とする．$G_\lambda := \{x_1x_2\cdots x_n \mid n \in \mathbb{N},\ x_i \in X_\lambda$, 同じ元は p 個連続して現れない $\}$ とすると G_λ は結合 $(x_1\cdots x_n, y_1\cdots y_m) \mapsto x_1\cdots x_n y_1\cdots y_m$ により群になる．(ただし，結合により同じ元が p 個連続した場合はその部分を単位元 1 とみなす．)

$G := \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda$ として $\pi_\lambda\colon G \longrightarrow G_\lambda$ を λ 成分への射影とする．仮定により G の p-Sylow 部分群 $H \subset G$ が存在する．このとき $\pi_\lambda(H)$ は G_λ の p-Sylow 部分群である．

> $\because$) 明らかに $\pi_\lambda(H)$ は p-部分群である．$\pi_\lambda(H) \subsetneq H_\lambda \subset G_\lambda$ を p-部分群とする．$g \in H_\lambda \setminus \pi_\lambda(H)$ が取れる．$i_\lambda\colon G_\lambda \longrightarrow G$ を標準入射として H と $i_\lambda(g)$ で生成される部分群を $\tilde{H} \subset G$ とすれば $H \subsetneq \tilde{H} \subset G$ で $\tilde{H}$ は p-部分群である．故に H の極大性に矛盾する．従って $\pi_\lambda(H)$ は p-Sylow 部分群である．

$g = x_1\cdots x_n \in \pi_\lambda(H)$ $(x_i \in X_\lambda)$ とすると，g の位数 k は勿論有限であり $1 = g^k = (x_1\cdots x_n)(x_1\cdots x_n)\cdots(x_1\cdots x_n)$ である．よって積の定義から，$x_1 = x_n$ でなければならない．

次に $g = x_1\cdots x_n \in \pi_\lambda(H)$, $h = y_1\cdots y_m \in \pi_\lambda(H)$ $(x_i, y_i \in X_\lambda)$ とすると，$x_1 = y_1$

である.

$\because$) $gh = z_1 \cdots z_l$ $(z_i \in X_\lambda)$ と書ける.

(i) $m+n=l$ のとき.この場合,先に述べたことにより $x_1 = z_1 = z_l = y_m = y_1$ である.

(ii) $m+n<l$ のとき.この場合,積の定義から $x_n = y_1$ であるから,$x_1 = y_1$ である.

即ち,各 $\lambda \in \Lambda$ に対して $\pi_\lambda(H)$ の元の先頭に来る X_λ の元は一意に定まる.そこでそれを x_λ とすれば $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \in \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ が取れる. □

参考文献

[1] Paul E. Howard and Mary Yorke, Maximal p-Subgroups and the Axiom of Choice, Notre Dame Journal of Formal Logic, 28 (1987), 276–283, http://projecteuclid.org/euclid.ndjfl/1093636944