後続基数の定義

alg-d
http://alg-d.com/math/ac/

2015 年 2 月 1 日

λ を基数とするとき，λ の「次の大きさの基数」を後続基数 (successor cardinal) という．選択公理があれば基数全体のクラス Card は整列されているから，λ の後続基数 λ^+ は単に $\lambda^+ := \min\{\mu \in \mathrm{Card} \mid \mu > \lambda\}$ と定義すればよい．しかし選択公理がない場合，後続基数をどのように定義すればよいかは自明ではなく，その定義として次の三つが考えられている．

定義. λ, μ を基数とし，$\lambda < \mu$ とする．

1. μ が λ の 1-successor $\iff$ $\lambda < \kappa \leq \mu$ ならば $\kappa = \mu$.
2. μ が λ の 2-successor $\iff$ $\lambda < \kappa$ ならば $\mu \leq \kappa$.
3. μ が λ の 3-successor $\iff$ $\kappa < \mu$ ならば $\kappa \leq \lambda$.

この三つの定義の違いは選択公理と関係があり，次の三つを証明することが目的である．

- 1-successor の存在は ZF で証明できる．
- 2-successor の存在は選択公理と同値である．
- 3-successor の存在は ZF で証明できない．

命題 1. μ が λ の 2-successor ならば，μ は λ の 1-successor である．

証明. $\lambda < \kappa \leq \mu$ とすると 2-successor の定義より $\mu \leq \kappa$ だから $\kappa = \mu$ である． □

命題 2. μ が λ の 3-successor ならば，μ は λ の 1-successor である．

証明. $\lambda < \kappa \leq \mu$ とする．$\kappa < \mu$ と仮定すると 3-successor の定義より $\kappa \leq \lambda$ となり $\lambda < \kappa$ に矛盾する．故に $\kappa = \mu$ である． □

命題 3. 2-successor はもし存在すれば一意である．

証明. μ, ν を λ の 2-successor とする．$\lambda < \mu$ だから，ν が λ の 2-successor であることより $\nu \leq \mu$ となる．同様にして $\lambda < \nu$ より $\mu \leq \nu$ が分かる．よって $\mu = \nu$ である． □

補題 4. 基数 λ, μ, κ が $\lambda + \mu = \lambda + \kappa$ を満たすとき，ある基数 ξ, ζ, η が存在して $\lambda = \lambda + \xi = \lambda + \zeta$，$\mu = \xi + \eta$，$\kappa = \zeta + \eta$ を満たす．

証明. 互いに素な集合 X, Y, Z を $|X| = \lambda$，$|Y| = \mu$，$|Z| = \kappa$ となるように取る．すると $|X| + |Y| = |X| + |Z|$ だから全単射 $f\colon X \cup Y \longrightarrow X \cup Z$ が存在する．

$$\begin{aligned} Y_0 &:= \{y \in Y \mid \text{任意の } n > 0 \text{ に対して } f^n(y) \in X\} \\ Y_1 &:= Y \setminus Y_0 \\ X_0 &:= \bigcup_{n>0} f^n(Y_0) \\ X_1 &:= X \setminus X_0 \end{aligned}$$

とする．このとき $f|_{X_0 \cup Y_0}\colon X_0 \cup Y_0 \longrightarrow X_0$ は全単射である．よって $\xi := |Y_0|$ と置けば

$$\lambda + \xi = |X| + |Y_0| = |X_1| + |X_0| + |Y_0| = |X_1| + |X_0| = |X| = \lambda$$

である．$\eta := |Y_1|$ とすれば $\mu = |Y| = |Y_0| + |Y_1| = \xi + \eta$ である．

$g := f^{-1}$ に対しても同様のことをする．即ち

$$\begin{aligned} Z_0 &:= \{z \in Z \mid \text{任意の } n > 0 \text{ に対して } f^n(z) \in X\} \\ Z_1 &:= Z \setminus Z_0 \end{aligned}$$

として $\zeta := |Z_0|$，$\eta' := |Z_1|$ とすれば $\lambda + \zeta = \lambda$，$\kappa = \zeta + \eta'$ となる．後は $\eta = \eta'$ を示せばよい．

$y \in Y_1$ とすると，定義からある $n_y > 0$ が一意に存在して $f^1(y), \cdots, f^{n_y - 1}(y) \in X$，$f^{n_y}(y) \in Z$ が成り立つ．このとき $g^{n_y}(f^{n_y}(y)) \in Y$ だから $f^{n_y}(y) \in Z_1$ である．よって写像 $Y_1 \longrightarrow Z_1$ が $Y_1 \ni y \longmapsto f^{n_y}(y) \in Z_1$ により定義される．これは明らかに全単射である．よって $\eta = |Y_1| = |Z_1| = \eta'$ である． □

補題 5. 基数 λ, ν, κ が $\lambda \leq \nu \leq \lambda + \kappa$ を満たすとき，ある基数 $\zeta \leq \kappa$ が存在して $\nu = \lambda + \zeta$ となる．

証明. $\lambda \leq \nu$，$\nu \leq \lambda + \kappa$ だから，ある基数 μ_0, μ_1 により $\lambda + \mu_0 = \nu$，$\nu + \mu_1 = \lambda + \kappa$ と書ける．このとき $\lambda + (\mu_0 + \mu_1) = \lambda + \kappa$ だから，補題 4 によりある基数 ξ, ζ, η が存在して

$\lambda = \lambda + \xi = \lambda + \zeta$，$\mu_0 + \mu_1 = \xi + \eta$，$\kappa = \zeta + \eta$ を満たす．すると $\mu_0 \le \xi + \eta$ だから，基数 $\xi' \le \xi$ と $\eta' \le \eta$ を $\mu_0 = \xi' + \eta'$ となるように取れる．このとき $\lambda \le \lambda + \xi' \le \lambda + \xi = \lambda$ だから $\lambda = \lambda + \xi$ である．このとき $\nu = \lambda + \mu_0 = \lambda + \xi' + \eta' = \lambda + \eta'$ となり，また $\eta' \le \eta \le \kappa$ である． □

命題 6. 任意の基数 λ の 1-successor は存在する．

証明. λ が $\lambda < \lambda + 1$ を満たすならば，明らかに $\lambda + 1$ が 1-successor である．そうでないとき，即ち λ が $\lambda = \lambda + 1$ を満たすとき，$\lambda + \lambda^*$ が 1-successor であることを示す．(λ^* は λ の Hartogs 数．)

$\lambda < \mu \le \lambda + \lambda^*$ とする．補題 5 によりある $\zeta \le \lambda^*$ が存在して $\mu = \lambda + \zeta$ となる．

$\zeta < \lambda^*$ と仮定する．Hartogs 数の定義から $\zeta \le \lambda$ である．よってある κ により $\lambda = \zeta + \kappa$ と書ける．

(i) ζ が無限基数のとき．$\zeta < \lambda^*$ だから ζ はアレフである．よって

$$\mu = \lambda + \zeta = \zeta + \kappa + \zeta = \zeta + \kappa = \lambda$$

となり，$\lambda < \mu$ に矛盾する．

(ii) ζ が有限基数のとき．今 $\lambda = \lambda + 1$ だったから $\lambda = \lambda + \aleph_0 = \zeta + \kappa + \aleph_0 = \aleph_0 + \kappa$ となる．故に (i) と同様にして矛盾する．

よって $\zeta = \lambda^*$ である．故に $\mu = \lambda + \lambda^*$ となるから $\lambda + \lambda^*$ が 1-successor である． □

定理. 選択公理 $\Longleftrightarrow$ 任意の基数 λ の 2-successor は存在する．

証明. ($\Longrightarrow$) 明らか．

($\Longleftarrow$) 選択公理と同値な条件「任意の無限基数 λ に対して $\lambda + \lambda^* = \lambda^*$」を示す．

※ 証明等については濃度の性質を参照

λ を任意の無限基数として，$\lambda^* < \lambda + \lambda^*$ と仮定する．λ^* の 2-successor を μ とすると，$\lambda^* < \lambda^{**}$ だから $\mu \le \lambda^{**}$ である．よって μ はアレフで $\mu \not\le \lambda^*$ だから $\lambda^{**} \le \mu$ となる．故に $\mu = \lambda^{**}$ が分かる．今 $\lambda^* < \lambda + \lambda^*$ だったから $\lambda^{**} \le \lambda + \lambda^*$ である．故に $\lambda^{***} \le (\lambda + \lambda^*)^* = \lambda^{**}$ となり矛盾する． □

補題 7. ある自然数 $k > 0$ に対して $k\lambda + \mu = (k+1)\lambda + \kappa$ となるとき $\lambda + \mu = 2\lambda + \kappa$ である．

証明. k に関する帰納法．$k = 1$ のときは明らか．$k > 1$ とする．このとき $k\lambda + \mu =$

$(k+1)\lambda+\kappa$ より $\lambda+((k-1)\lambda+\mu)=\lambda+(k\lambda+\kappa)$ である．よって補題 4 により，ある基数 ξ,ζ,η が存在して $\lambda=\lambda+\xi=\lambda+\zeta$，$(k-1)\lambda+\mu=\xi+\eta$，$k\lambda+\kappa=\zeta+\eta$ を満たす．故に

$$\begin{aligned}(k-1)\lambda+\mu &= (k-2)\lambda+\lambda+\mu\\ &= (k-2)\lambda+\lambda+\zeta+\mu\\ &= (k-1)\lambda+\zeta+\mu\\ &= \xi+\eta+\zeta\\ &= k\lambda+\kappa+\xi\\ &= k\lambda+\kappa\end{aligned}$$

となるから帰納法の仮定により $\lambda+\mu=2\lambda+\kappa$ である． □

補題 8. 基数 λ が $\lambda<2\lambda$ を満たすとする．μ は基数で，$\lambda+\mu$ が λ の 1-successor であるとする．このとき $\lambda+\mu<2\lambda+\mu$.

証明. $\lambda+\mu=2\lambda+\mu$ と仮定する．このとき $\lambda<2\lambda\leq 3\lambda\leq 3\lambda+\mu=2\lambda+\mu=\lambda+\mu$ である．$\lambda+\mu$ は λ の 1-successor だったから $2\lambda=3\lambda$ となる．故に補題 7 から $\lambda=2\lambda$ となり矛盾する． □

命題 9. 基数 λ が $\lambda<2\lambda$ を満たすとする．また基数 μ は $\mu\not\leq\lambda$ で $\lambda+\mu$ が λ の 1-successor であるとする．このとき $\lambda+\mu$ の 3-successor は存在しない．

証明. $\lambda+\mu$ の 3-successor ν が存在すると仮定する．$\lambda\leq\lambda+\mu<\nu$ である．よってある基数 κ により $\lambda+\kappa=\nu$ と書ける．$\kappa<\nu$ である．

∵) $\kappa=\nu$ と仮定すると $\lambda+\kappa=\kappa$ である．$\lambda<2\lambda$ で，$\lambda+\mu$ が λ の 1-successor だから補題 8 により $\lambda+\mu<2\lambda+\mu$ となる．よって補題 7 により $2\lambda+\mu<3\lambda+\mu$ である．従って

$$\lambda+\mu<2\lambda+\mu<3\lambda+\mu\leq 2\lambda+\nu=3\lambda+\kappa=\lambda+\kappa=\nu$$

となる．ν が $\lambda+\mu$ の 3-successor，故に 1-successor だからこれは矛盾する．

故に 3-successor の定義から $\kappa\leq\lambda+\mu$ となる．よって $\lambda+\mu<\nu=\lambda+\kappa\leq 2\lambda+\mu$ である．補題 5 により，ある $\zeta\leq\lambda$ を使って $\nu=\lambda+\mu+\zeta$ と書ける．このとき $\lambda\leq\lambda+\zeta\leq\lambda+\mu$ となる．

∵) $\lambda+\zeta<\lambda+\mu+\zeta=\nu$ が示せれば，3-successor の定義から $\lambda+\zeta\leq\lambda+\mu$ とな

る．よって $\lambda+\zeta<\lambda+\mu+\zeta$ を示せばよい．

$\lambda+\zeta=\lambda+\mu+\zeta$ と仮定する．$\zeta\leq\lambda$ だから $\zeta+\zeta'=\lambda$ と書ける．このとき

$$\lambda+\lambda=\lambda+\zeta+\zeta'=\lambda+\mu+\zeta+\zeta'=\lambda+(\lambda+\mu)$$

である．故に補題 4 によりある基数 ξ,ρ,η が存在して $\lambda=\lambda+\xi=\lambda+\rho$，$\lambda=\xi+\eta$，$\lambda+\mu=\rho+\eta$ を満たす．このとき

$$\lambda=\lambda+\rho=\xi+\eta+\rho=\xi+\lambda+\mu=\lambda+\mu$$

となり $\lambda+\mu$ が λ の 1-successor であることに矛盾する．

よって $\lambda+\mu$ が λ の 1-successor だったから $\lambda=\lambda+\zeta$ または $\lambda+\zeta\leq\lambda+\mu$ である．
(i) $\lambda=\lambda+\zeta$ のとき．$\nu=\lambda+\mu+\zeta=\lambda+\mu$ となり ν が $\lambda+\mu$ の 3-successor であることに矛盾する．
(ii) $\lambda+\zeta=\lambda+\mu$ のとき．補題 4 によりある基数 ξ,ρ,η が存在して $\lambda=\lambda+\xi=\lambda+\rho$，$\zeta=\xi+\eta$，$\mu=\rho+\eta$ を満たす．このとき

$$\mu=\rho+\eta\leq\xi+\rho+\eta=\zeta+\rho\leq\lambda+\rho=\lambda$$

となり $\mu\not\leq\lambda$ に矛盾する． □

命題 10. 基数 λ が $\lambda\geq\aleph_0$ かつ $\lambda<2\lambda$ を満たすとする．このとき $\lambda+\lambda^*$ の 3-successor は存在しない．

証明. $\lambda\geq\aleph_0$ ならば $\lambda+\lambda^*$ が λ の 1-successor である．故に命題 9 から $\lambda+\lambda^*$ の 3-successor は存在しない． □

系. 任意の基数が 3-successor を持つ $\Longrightarrow$ 任意の無限基数 λ に対して $\lambda+\lambda=\lambda$.

証明. 命題 10 から，ある無限基数 λ について $\lambda<2\lambda$ となるとき，ある基数 $\mu\geq\aleph_0$ について $\mu<2\mu$ となることを示せばよい．

その為に $\mu:=\lambda+\aleph_0$ と置く．$\lambda\not\geq\aleph_0$ としてよい．$\mu=2\mu$ と仮定する．即ち $\lambda+\aleph_0=\lambda+\lambda+\aleph_0$ である．補題 4 により，ある基数 ξ,ζ,η が存在して $\lambda=\lambda+\xi=\lambda+\zeta$，$\aleph_0=\xi+\eta$，$\lambda+\aleph_0=\zeta+\eta$ を満たす．今 $\lambda\not\geq\aleph_0$ だから，$\lambda=\lambda+\xi=\lambda+\zeta$ となる為には $\xi=\zeta=0$ でなければならない．故に $\lambda+\aleph_0=\eta=\aleph_0$ だから $\lambda\leq\aleph_0$ となり矛盾する． □

系. ZF では任意の基数が 3-successor を持つことは証明できない． □

なお，他にも「任意の基数が一意な 1-successor を持つ」は選択公理を導かないこと，等も知られている．

参考文献

[1] John Truss, On successors in cardinal arithmetic, Fund. Math. 78 (1971), 7–21, http://pldml.icm.edu.pl/pldml/element/bwmeta1.element.bwnjournal-article-fmv78i1p2bwm