後続基数の定義

alg-d
http://alg-d.com/math/ac/

2018 年 2 月 9 日

λ を基数とするとき，λ の「次の大きさの基数」を後続基数 (successor cardinal) という．選択公理があれば基数全体のクラス Card は整列されているから，λ の後続基数 λ^+ は単に $\lambda^+ := \min\{\mu \in \mathrm{Card} \mid \mu > \lambda\}$ と定義すればよい．しかし選択公理がない場合，後続基数をどのように定義すればよいかは自明ではなく，その定義として次の三つが考えられている．

定義． λ, μ を基数とし，$\lambda < \mu$ とする．

1. μ が λ の 1-successor $\iff$ $\lambda < \kappa \leq \mu$ ならば $\kappa = \mu$.
2. μ が λ の 2-successor $\iff$ $\lambda < \kappa$ ならば $\mu \leq \kappa$.
3. μ が λ の 3-successor $\iff$ $\kappa < \mu$ ならば $\kappa \leq \lambda$.

この三つの定義の違いは選択公理と関係があり，次の三つを証明することが目的である．

- 1-successor の存在は ZF で証明できる．
- 2-successor の存在は選択公理と同値である．
- 3-successor の存在は ZF で証明できない．

命題 1． μ が λ の 2-successor ならば，μ は λ の 1-successor である．

証明． $\lambda < \kappa \leq \mu$ とすると 2-successor の定義より $\mu \leq \kappa$ だから $\kappa = \mu$ である． $\square$

命題 2． μ が λ の 3-successor ならば，μ は λ の 1-successor である．

証明． $\lambda < \kappa \leq \mu$ とする．$\kappa < \mu$ と仮定すると 3-successor の定義より $\kappa \leq \lambda$ となり $\lambda < \kappa$ に矛盾する．故に $\kappa = \mu$ である． $\square$

命題 3. 2-successor はもし存在すれば一意である．

証明. μ, ν を λ の 2-successor とする．$\lambda < \mu$ だから，ν が λ の 2-successor であることより $\nu \leq \mu$ となる．同様にして $\lambda < \nu$ より $\mu \leq \nu$ が分かる．よって $\mu = \nu$ である． □

補題 4. 基数 λ, μ, κ が $\lambda + \mu = \lambda + \kappa$ を満たすとする．このとき，ある基数 ξ, ζ, η が存在して $\lambda = \lambda + \xi = \lambda + \zeta$，$\mu = \xi + \eta$，$\kappa = \zeta + \eta$ を満たす．

証明. 順序数・濃度の簡単なまとめを参照． □

補題 5. 基数 λ, ν, κ が $\lambda \leq \nu \leq \lambda + \kappa$ を満たすとき，ある基数 $\zeta \leq \kappa$ が存在して $\nu = \lambda + \zeta$ となる．

証明. $\lambda \leq \nu$，$\nu \leq \lambda + \kappa$ だから，ある基数 μ_0, μ_1 により $\lambda + \mu_0 = \nu$，$\nu + \mu_1 = \lambda + \kappa$ と書ける．このとき $\lambda + (\mu_0 + \mu_1) = \lambda + \kappa$ だから，補題 4 によりある基数 ξ, ζ, η が存在して $\lambda = \lambda + \xi = \lambda + \zeta$，$\mu_0 + \mu_1 = \xi + \eta$，$\kappa = \zeta + \eta$ を満たす．すると $\mu_0 \leq \xi + \eta$ だから，基数 $\xi' \leq \xi$ と $\eta' \leq \eta$ を $\mu_0 = \xi' + \eta'$ となるように取れる．このとき $\lambda \leq \lambda + \xi' \leq \lambda + \xi = \lambda$ だから $\lambda = \lambda + \xi$ である．このとき $\nu = \lambda + \mu_0 = \lambda + \xi' + \eta' = \lambda + \eta'$ となり，また $\eta' \leq \eta \leq \kappa$ である． □

命題 6. 任意の基数 λ の 1-successor は存在する．

証明. λ が $\lambda < \lambda + 1$ を満たすならば，明らかに $\lambda + 1$ が 1-successor である．そうでないとき，即ち λ が $\lambda = \lambda + 1$ を満たすとき，$\lambda + \lambda^*$ が 1-successor であることを示す．(λ^* は λ の Hartogs 数．)

$\lambda < \mu \leq \lambda + \lambda^*$ とする．補題 5 によりある $\zeta \leq \lambda^*$ が存在して $\mu = \lambda + \zeta$ となる．

$\zeta < \lambda^*$ と仮定する．Hartogs 数の定義から $\zeta \leq \lambda$ である．よってある κ により $\lambda = \zeta + \kappa$ と書ける．

(i) ζ が無限基数のとき．$\zeta < \lambda^*$ だから ζ はアレフである．よって

$$\mu = \lambda + \zeta = \zeta + \kappa + \zeta = \zeta + \kappa = \lambda$$

となり，$\lambda < \mu$ に矛盾する．

(ii) ζ が有限基数のとき．今 $\lambda = \lambda + 1$ だったから $\lambda = \lambda + \aleph_0 = \zeta + \kappa + \aleph_0 = \aleph_0 + \kappa$ となる．故に (i) と同様にして矛盾する．

よって $\zeta = \lambda^*$ である．故に $\mu = \lambda + \lambda^*$ となるから $\lambda + \lambda^*$ が 1-successor である． □

定理 7. 選択公理 $\Longleftrightarrow$ 任意の基数 λ の 2-successor は存在する．

証明. ($\Longrightarrow$) 明らか.

($\Longleftarrow$) 選択公理と同値な条件「任意の無限基数 λ に対して $\lambda + \lambda^* = \lambda^*$」を示す.

※ 証明等については濃度の性質を参照

λ を任意の無限基数として，$\lambda^* < \lambda + \lambda^*$ と仮定する．λ^* の 2-successor を μ とすると，$\lambda^* < \lambda^{**}$ だから $\mu \leq \lambda^{**}$ である．よって μ はアレフで $\mu \not\leq \lambda^*$ だから $\lambda^{**} \leq \mu$ となる．故に $\mu = \lambda^{**}$ が分かる．今 $\lambda^* < \lambda + \lambda^*$ だったから $\lambda^{**} \leq \lambda + \lambda^*$ である．故に $\lambda^{***} \leq (\lambda + \lambda^*)^* = \lambda^{**}$ となり矛盾する. □

補題 8. ある自然数 $k > 0$ に対して $k\lambda + \mu = (k+1)\lambda + \kappa$ となるとき $\lambda + \mu = 2\lambda + \kappa$ である.

証明. k に関する帰納法．$k = 1$ のときは明らか．$k > 1$ とする．このとき $k\lambda + \mu = (k+1)\lambda + \kappa$ より $\lambda + ((k-1)\lambda + \mu) = \lambda + (k\lambda + \kappa)$ である．よって補題 4 により，ある基数 ξ, ζ, η が存在して $\lambda = \lambda + \xi = \lambda + \zeta$，$(k-1)\lambda + \mu = \xi + \eta$，$k\lambda + \kappa = \zeta + \eta$ を満たす．故に

$$\begin{aligned}
(k-1)\lambda + \mu &= (k-2)\lambda + \lambda + \mu \\
&= (k-2)\lambda + \lambda + \zeta + \mu \\
&= (k-1)\lambda + \zeta + \mu \\
&= \xi + \eta + \zeta \\
&= k\lambda + \kappa + \xi \\
&= k\lambda + \kappa
\end{aligned}$$

となるから帰納法の仮定により $\lambda + \mu = 2\lambda + \kappa$ である. □

補題 9. 基数 λ が $\lambda < 2\lambda$ を満たすとする．μ は基数で，$\lambda + \mu$ が λ の 1-successor であるとする．このとき $\lambda + \mu < 2\lambda + \mu$.

証明. $\lambda + \mu = 2\lambda + \mu$ と仮定する．このとき $\lambda < 2\lambda \leq 3\lambda \leq 3\lambda + \mu = 2\lambda + \mu = \lambda + \mu$ である．$\lambda + \mu$ は λ の 1-successor だったから $2\lambda = 3\lambda$ となる．故に補題 8 から $\lambda = 2\lambda$ となり矛盾する. □

命題 10. 基数 λ が $\lambda < 2\lambda$ を満たすとする．また基数 μ は $\mu \not\leq \lambda$ で $\lambda + \mu$ が λ の 1-successor であるとする．このとき $\lambda + \mu$ の 3-successor は存在しない.

証明. $\lambda + \mu$ の 3-successor ν が存在すると仮定する．$\lambda \leq \lambda + \mu < \nu$ である．よってあ

る基数 κ により $\lambda+\kappa=\nu$ と書ける．$\kappa<\nu$ である．

$\because$) $\kappa=\nu$ と仮定すると $\lambda+\kappa=\kappa$ である．$\lambda<2\lambda$ で，$\lambda+\mu$ が λ の 1-successor だから補題 9 により $\lambda+\mu<2\lambda+\mu$ となる．よって補題 8 により $2\lambda+\mu<3\lambda+\mu$ である．従って

$$\lambda+\mu<2\lambda+\mu<3\lambda+\mu\leq 2\lambda+\nu=3\lambda+\kappa=\lambda+\kappa=\nu$$

となる．ν が $\lambda+\mu$ の 3-successor，故に 1-successor だからこれは矛盾する．

故に 3-successor の定義から $\kappa\leq\lambda+\mu$ となる．よって $\lambda+\mu<\nu=\lambda+\kappa\leq 2\lambda+\mu$ である．補題 5 により，ある $\zeta\leq\lambda$ を使って $\nu=\lambda+\mu+\zeta$ と書ける．このとき $\lambda\leq\lambda+\zeta\leq\lambda+\mu$ となる．

$\because$) $\lambda+\zeta<\lambda+\mu+\zeta=\nu$ が示せれば，3-successor の定義から $\lambda+\zeta\leq\lambda+\mu$ となる．よって $\lambda+\zeta<\lambda+\mu+\zeta$ を示せばよい．

$\lambda+\zeta=\lambda+\mu+\zeta$ と仮定する．$\zeta\leq\lambda$ だから $\zeta+\zeta'=\lambda$ と書ける．このとき

$$\lambda+\lambda=\lambda+\zeta+\zeta'=\lambda+\mu+\zeta+\zeta'=\lambda+(\lambda+\mu)$$

である．故に補題 4 によりある基数 ξ,ρ,η が存在して $\lambda=\lambda+\xi=\lambda+\rho$，$\lambda=\xi+\eta$，$\lambda+\mu=\rho+\eta$ を満たす．このとき

$$\lambda=\lambda+\rho=\xi+\eta+\rho=\xi+\lambda+\mu=\lambda+\mu$$

となり $\lambda+\mu$ が λ の 1-successor であることに矛盾する．

よって $\lambda+\mu$ が λ の 1-successor だったから $\lambda=\lambda+\zeta$ または $\lambda+\zeta\leq\lambda+\mu$ である．
(i) $\lambda=\lambda+\zeta$ のとき．$\nu=\lambda+\mu+\zeta=\lambda+\mu$ となり ν が $\lambda+\mu$ の 3-successor であることに矛盾する．
(ii) $\lambda+\zeta=\lambda+\mu$ のとき．補題 4 によりある基数 ξ,ρ,η が存在して $\lambda=\lambda+\xi=\lambda+\rho$，$\zeta=\xi+\eta$，$\mu=\rho+\eta$ を満たす．このとき

$$\mu=\rho+\eta\leq\xi+\rho+\eta=\zeta+\rho\leq\lambda+\rho=\lambda$$

となり $\mu\not\leq\lambda$ に矛盾する． □

命題 11. 基数 λ が $\lambda\geq\aleph_0$ かつ $\lambda<2\lambda$ を満たすとする．このとき $\lambda+\lambda^*$ の 3-successor は存在しない．

証明. $\lambda\geq\aleph_0$ ならば $\lambda+\lambda^*$ が λ の 1-successor である．故に命題 10 から $\lambda+\lambda^*$ の

3-successor は存在しない． □

系 12. 任意の基数が 3-successor を持つ $\Longrightarrow$ 任意の無限基数 λ に対して $\lambda + \lambda = \lambda$.

証明. 命題 11 から，ある無限基数 λ について $\lambda < 2\lambda$ となるとき，ある基数 $\mu \geq \aleph_0$ について $\mu < 2\mu$ となることを示せばよい．

その為に $\mu := \lambda + \aleph_0$ と置く．$\lambda \not\geq \aleph_0$ としてよい．$\mu = 2\mu$ と仮定する．即ち $\lambda+\aleph_0 = \lambda+\lambda+\aleph_0$ である．補題 4 により，ある基数 ξ, ζ, η が存在して $\lambda = \lambda+\xi = \lambda+\zeta$, $\aleph_0 = \xi + \eta$，$\lambda + \aleph_0 = \zeta + \eta$ を満たす．今 $\lambda \not\geq \aleph_0$ だから，$\lambda = \lambda + \xi = \lambda + \zeta$ となる為には $\xi = \zeta = 0$ でなければならない．故に $\lambda + \aleph_0 = \eta = \aleph_0$ だから $\lambda \leq \aleph_0$ となり矛盾する． □

系 13. ZF では任意の基数が 3-successor を持つことは証明できない． □

なお，他にも「任意の基数が一意な 1-successor を持つ」は選択公理を導かないこと，等も知られている．

参考文献

[1] John Truss, On successors in cardinal arithmetic, Fund. Math. 78 (1971), 7–21, `http://pldml.icm.edu.pl/pldml/element/bwmeta1.element.bwnjournal-article-fmv78i1p2bwm`