T_0 部分空間と選択公理

alg-d
http://alg-d.com/math/ac/

2015 年 11 月 24 日

定義. 集合 A が「$Y \in A \iff Y$ の任意の有限部分集合 Z に対し $Z \in A$」を満たすとき，A は有限性を持つという．このとき命題

有限性をもつ非空集合 A は ($\subset$ に関する) 極大元をもつ.

を Tukey の補題という.

定理. 選択公理 $\iff$Tukey の補題

証明. Zorn の補題・極大原理を参照. □

定義. X を位相空間とする.

1. $Y \subset X$ が稠密 $\iff$ 空でない任意の開集合 $O \subset X$ に対し $Y \cap O \neq \emptyset$
2. $Y \subset X$ が codense $\iff$ 空でない任意の閉集合 $F \subset X$ に対し $Y \cap F \neq \emptyset$
3. $Y \subset X$ が thick $\iff$ 空でない任意の開かつ閉な集合 $H \subset X$ に対し $Y \cap H \neq \emptyset$

定理. 次の命題は (ZF 上) 同値.

1. 選択公理
2. 任意の位相空間は極大な T_0 部分空間を持つ.
3. 任意の位相空間は極大な T_1 部分空間を持つ.
4. 任意の位相空間は稠密な T_0 部分空間を持つ.
5. 任意の位相空間は codense な T_0 部分空間を持つ.
6. 任意の位相空間は thick な T_0 部分空間を持つ.

証明. ($1 \implies 2$) $(X, \mathcal{O})$ を位相空間とする．$A := \{ Y \subset X \mid (Y, \mathcal{O}|_Y)$ は T_0 空間 $\}$ とおけば A は有限性を持つ.

$\because$) まず $Y \in A$ とする．任意の有限部分集合 $Z \subset Y$ を取る．異なる二点 $x, y \in Z \subset Y$ を取ると，$(Y, \mathcal{O}|_Y)$ は T_0 だからある $U \in \mathcal{O}|_Y$ が存在して

$$(x \in U \text{ かつ } y \notin U) \text{ または } (x \notin U \text{ かつ } y \in U)$$

を満たす．このとき $U \cap Z \in \mathcal{O}|_Z$ であり

$$(x \in U \cap Z \text{ かつ } y \notin U \cap Z) \text{ または } (x \notin U \cap Z \text{ かつ } y \in U \cap Z)$$

が成り立つ．故に $(Z, \mathcal{O}|_Z)$ は T_0 である．即ち $Z \in A$.

次に $Y \subset X$ が「任意の有限部分集合 $Z \subset Y$ に対し $Z \in A$」を満たすとする．異なる二点 $x, y \in Y$ を取ると $\{x, y\} \in A$ である．よって $(\{x, y\}, \mathcal{O}|_{\{x,y\}})$ は T_0 であるから，ある $U \in \mathcal{O}|_{\{x,y\}}$ が存在して

$$(x \in U \text{ かつ } y \notin U) \text{ または } (x \notin U \text{ かつ } y \in U)$$

を満たす．$\mathcal{O}|_{\{x,y\}}$ の定義から，ある $V \in \mathcal{O}$ が存在して $U = V \cap \{x, y\}$ と書ける．このとき $V \cap Y \in \mathcal{O}|_Y$ で

$$(x \in V \cap Y \text{ かつ } y \notin V \cap Y) \text{ または } (x \notin V \cap Y \text{ かつ } y \in V \cap Y)$$

が成り立つ．故に故に $(Y, \mathcal{O}|_Y)$ は T_0 である．即ち $Y \in A$.

以上より A は有限性を持つ．

従って Tukey の補題により A は極大元を持つ．その極大元が極大な T_0 部分空間である．

$(2 \Longrightarrow 4)$ X を位相空間とする．仮定 2 により，極大 T_0 部分空間 $Y \subset X$ が存在するが，これは稠密である．それを示すため，稠密でないと仮定する．開集合 $\emptyset \neq U \subset X$ で $X \cap U = \emptyset$ となるものが存在する．$x \in U$ を一つ取れば $Y \cup \{x\} \subset X$ は T_0 部分空間である．故に Y の極大性に矛盾する．

$(2 \Longrightarrow 5)$ 同様である．

$(4 \Longrightarrow 6)$ $(5 \Longrightarrow 6)$ 明らか．

$(6 \Longrightarrow 1)$ $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ を互いに素な非空集合の族とする．各 X_λ に密着位相を入れて直和 $X := \displaystyle\bigcup_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ を考える．仮定 6 により X は thick な T_0 部分空間 $Y \subset X$ を持つ．$\lambda \in \Lambda$ に対して $X_\lambda \subset X$ は開かつ閉だから，Y が thick であることより $X_\lambda \cap Y \neq \emptyset$ が分かる．一方 Y は T_0 だから $|X_\lambda \cap Y| = 1$ でなければならない．即ち Y は $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ の選択集合

である.

(1 $\Longleftrightarrow$ 3) 1$\Longleftrightarrow$2 と同様. □

参考文献

[1] Paul S. Schnare, The Maximal T_0 (respectively, T_1) Subspace Lemma is Equivalent to the Axiom of Choice, Amer. Math. Monthly 65, 761, `http://www.jstor.org/pss/2315200`