Subdirect Decomposition Theorem と選択公理

alg-d
http://alg-d.com/math/ac/

2012 年 2 月 4 日

※ ここでは環に乗法単位元 1 の存在を仮定しない．1 を含む環を単位的環と呼ぶ.

定義. $\{S_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を環の族として．$R \subset \prod_{\lambda\in\Lambda} S_\lambda$ を部分環とする．任意の $\lambda \in \Lambda$ に対して標準射影 $\pi_\lambda : R \longrightarrow S_\lambda$ が全射であるとき，R を $\{S_\lambda\}$ の subdirect product という．

ある $\lambda \in \Lambda$ について π_λ が同型となるとき，自明な subdirect product という．

以下，subdirect product を部分直積と訳すことにする．

定義. 環 R が subdirectly irreducible
$\Longleftrightarrow$ R を部分直積として表したとき，それが常に自明な部分直積になる．

以下，subdirectly irreducible を部分直既約と訳すことにする．

命題 1. $\{S_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を環の族とするとき
R が $\{S_\lambda\}$ の部分直積である
$\Longleftrightarrow$ R の (両側) イデアルの族 $\{I_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ が存在して $R/I_\lambda \cong S_\lambda$, $\displaystyle\bigcap_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda = 0$ となる．

証明. $(\Longrightarrow)$ $I_\lambda := \ker \pi_\lambda$ とすればよい．

$(\Longleftarrow)$ $\varphi : R \longrightarrow \displaystyle\prod_{\lambda\in\Lambda} R/I_\lambda$ を $\varphi(r) := (r + I_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ で定める．$\ker(\varphi) = \displaystyle\bigcap_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda = 0$ だから φ は単射．そこで φ と同型 $R/I_\lambda \cong S_\lambda$ により R を $\prod_{\lambda\in\Lambda} S_\lambda$ の部分環とみなす．このとき π_λ は自然な全射 $R \longrightarrow R/I_\lambda$ と一致するから，明らかに全射である．故に，R は $\{S_\lambda\}$ の部分直積である． □

命題 2. 環 R に対し $\mathcal{I}(R) := \{I \subset R \mid I \text{ は零でないイデアル}\}$, $H(R) := \displaystyle\bigcap_{I\in\mathcal{I}(R)} I$ と置く．$H(R)$ は R のイデアルである．このとき

R が部分直既約 $\iff H(R) \neq 0$.

証明. ($\Longrightarrow$) $H(R)=0$ とする．このとき命題 1 により R は $\{R/I\}_{I\in\mathcal{I}(R)}$ の部分直積である．明らかに標準射影 $\pi_I : R \longrightarrow R/I$ は同型でないから，この部分直積は自明でない．故に R は部分直既約でない．

($\Longleftarrow$) $R \subset \prod_{\lambda\in\Lambda} S_\lambda$ を部分直積とすると，命題 1 によりイデアルの族 $\{I_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ が存在して $R/I_\lambda \cong S_\lambda$，$\displaystyle\bigcap_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda = 0$ となる．今仮定から $H(R)\neq 0$ だから，$\displaystyle\bigcap_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda = 0$ となる為にはある $\lambda\in\Lambda$ に対して $I_\lambda = 0$ でなければならない．このとき $\pi_\lambda : R \longrightarrow S_\lambda$ は全射である． □

補題 3. 部分直既約な単位的可換環は極大イデアルを持つ.

証明. R を部分直既約な単位的可換環として $H := H(R)$ と書く．命題 2 により $H \neq 0$ である．$\mathrm{Ann}(H) := \{r \in R \mid$ 任意の $h\in H$ に対し $rh = 0\} \subset R$ が極大イデアルであることを示せばよい.

その為に $\mathrm{Ann}(H) \subsetneq I \subset R$ をイデアルとする．$x \in I \setminus \mathrm{Ann}(H)$ を一つ取る．$x \notin \mathrm{Ann}(H)$ だから, ある $h_0 \in H$ が存在して $xh_0 \neq 0$ となる．故に $h_0 I \subset R$ は零でないイデアル．H の定義から $H \subset h_0 I$, 故にある $y\in I$ が存在して $h_0 = h_0 y$ と書ける．このとき $h_0(1-y) = 0$ だから $1-y$ は零因子である．よって $\mathrm{Ann}(1-y) := \{r \in R \mid r(1-y) = 0\}$ は零でないイデアル．従って H の定義から $H \subset \mathrm{Ann}(1-y)$ となる．即ち任意の $h\in H$ に対して $h(1-y) = 0$ だから $1-y \in \mathrm{Ann}(H) \subset I$ である．従って $1 = (1-y)+y \in I$ だから，$I = R$ である． □

定理. 次の命題は (ZF 上) 同値.

1. 選択公理
2. 任意の環は部分直既約な環の部分直積である.
3. 任意の一意分解整域は部分直既約な環の部分直積である.
4. 任意の環 R に対して，ある部分直既約な環 $S \neq 0$ と全射環準同型 $R \longrightarrow S$ が存在する.
5. 任意の一意分解整域 D に対して，ある部分直既約な環 $S \neq 0$ と全射環準同型 $D \longrightarrow S$ が存在する.

証明. ($1 \Longrightarrow 2$) R を環とする．$r \in R\setminus\{0\}$ に対し $X_r := \{I \subset R \mid I$ はイデアル, $r \notin I\}$, $Y_r := \{I \in X_r \mid I$ は $(X_r, \subset)$ の極大元 $\}$ と置くと Zorn の補題により $Y_r \neq \emptyset$ で

ある．

$\because$) $0 \in X_r$ だから $X_r \neq \emptyset$．$C \subset X_r$ を部分全順序集合とする．$I := \bigcup_{J \in C} J$ と置けば $I \subset R$ はイデアルである．全ての $J \in C$ について $r \notin J$ だから $r \notin I$．従って $I \in X_r$ である．よって C は上界を持つ．

故に選択公理により $\{Y_r\}_{r \in R \setminus \{0\}}$ の選択関数 f が存在する．このとき Y_r の定義から $\displaystyle\bigcap_{r \in R \setminus \{0\}} f(r) = 0$ となる．故に命題 1 により，R は $\{R/f(r)\}_{r \in R \setminus \{0\}}$ の部分直積である．また各 $r \in R \setminus \{0\}$ について $R/f(r)$ は部分直既約となる．

$\because$) $f(r) \subset R$ は極大イデアルだから，$\mathcal{I}(R/f(r)) = \emptyset$．故に $H(R/f(r)) \neq 0$ なので命題 2 により $R/f(r)$ は部分直既約である．

従って R は部分直既約な環の部分直積である．

$(2 \Longrightarrow 3)$ 明らか．

$(2 \Longrightarrow 4)$ R を環とする．仮定 2 によりある部分直既約な環の族 $\{S_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ が存在して R は $\{S_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ の部分直積である．このとき $\lambda \in \Lambda$ を一つ取ると標準射影 $\pi_{\lambda \in \Lambda} : R \longrightarrow S_\lambda$ は全射である．

$(3 \Longrightarrow 5)$ $2 \Longrightarrow 4$ と同様．

$(4 \Longrightarrow 5)$ 明らか．

$(5 \Longrightarrow 1)$ 任意の一意分解整域 D が極大イデアルを持つ事を示せばよい．

※ 環の極大イデアルの存在を参照．

仮定により，部分直既約な環 $S \neq 0$ と全射環準同型 $\varphi : D \longrightarrow S$ が存在する．φ が全射だから S は単位的可換環である．故に補題 3 により S は極大イデアル $\mathfrak{m}$ を持つ．このとき $\varphi^{-1}(\mathfrak{m}) \subset D$ が D の極大イデアルとなる．$\square$

参考文献

[1] Yehuda Rav, Subdirect Decomposition of Rings and the Axiom of Choice, Arch. Math., Vol. 51 (1988), 125–127, `http://www.springerlink.com/content/uj17776056246g11/`