

Subdirect Decomposition Theorem と選択公理

alg-d

<http://alg-d.com/math/ac/>

2012年2月4日

ここでは環に乘法単位元 1 の存在を仮定しない．1 を含む環を単位的環と呼ぶ．

定義． $\{S_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ を環の族として， $R \subset \prod_{\lambda \in \Lambda} S_\lambda$ を部分環とする．任意の $\lambda \in \Lambda$ に対して標準射影 $\pi_\lambda: R \rightarrow S_\lambda$ が全射であるとき， R を $\{S_\lambda\}$ の subdirect product という．

ある $\lambda \in \Lambda$ について π_λ が同型となるとき，自明な subdirect product という．

以下，subdirect product を部分直積と訳すことにする．

定義．環 R が subdirectly irreducible

$\iff R$ を部分直積として表したとき，それが常に自明な部分直積になる．

以下，subdirectly irreducible を部分直既約と訳すことにする．

命題 1. $\{S_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ を環の族とするとき

R が $\{S_\lambda\}$ の部分直積である

$\iff R$ の (両側) イデアルの族 $\{I_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ が存在して $R/I_\lambda \cong S_\lambda$ ， $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda = 0$ となる．

証明． (\implies) $I_\lambda := \ker \pi_\lambda$ とすればよい．

(\impliedby) $\varphi: R \rightarrow \prod_{\lambda \in \Lambda} R/I_\lambda$ を $\varphi(r) := (r + I_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ で定める． $\ker(\varphi) = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda = 0$ だから φ は単射．そこで φ と同型 $R/I_\lambda \cong S_\lambda$ により R を $\prod_{\lambda \in \Lambda} S_\lambda$ の部分環とみなす．このとき π_λ は自然な全射 $R \rightarrow R/I_\lambda$ と一致するから，明らかに全射である．故に， R は $\{S_\lambda\}$ の部分直積である． \square

命題 2. 環 R に対し $\mathcal{I}(R) := \{I \subset R \mid I \text{ は零でないイデアル}\}$ ， $H(R) := \bigcap_{I \in \mathcal{I}(R)} I$ と置く．

$H(R)$ は R のイデアルである．このとき

R が部分直既約 $\iff H(R) \neq 0$.

証明. (\implies) $H(R) = 0$ とする . このとき命題 1 により R は $\{R/I\}_{I \in \mathcal{I}(R)}$ の部分直積である . 明らかに標準射影 $\pi_I : R \rightarrow R/I$ は同型でないから , この部分直積は自明でない . 故に R は部分直既約でない .

(\impliedby) $R \subset \prod_{\lambda \in \Lambda} S_\lambda$ を部分直積とすると , 命題 1 によりイデアルの族 $\{I_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ が存在して $R/I_\lambda \cong S_\lambda$, $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda = 0$ となる . 今仮定から $H(R) \neq 0$ だから , $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda = 0$ となる為にはある $\lambda \in \Lambda$ に対して $I_\lambda = 0$ でなければならない . このとき $\pi_\lambda : R \rightarrow S_\lambda$ は全射である . \square

補題 3. 部分直既約な単位的可換環は極大イデアルを持つ .

証明. R を部分直既約な単位的可換環として $H := H(R)$ と書く . 命題 2 により $H \neq 0$ である . $\text{Ann}(H) := \{r \in R \mid \text{任意の } h \in H \text{ に対し } rh = 0\} \subset R$ が極大イデアルであることを示せばよい .

その為に $\text{Ann}(H) \subsetneq I \subset R$ をイデアルとする . $x \in I \setminus \text{Ann}(H)$ を一つ取る . $x \notin \text{Ann}(H)$ だから , ある $h_0 \in H$ が存在して $xh_0 \neq 0$ となる . 故に $h_0I \subset R$ は零でないイデアル . H の定義から $H \subset h_0I$, 故にある $y \in I$ が存在して $h_0 = h_0y$ と書ける . このとき $h_0(1-y) = 0$ だから $1-y$ は零因子である . よって $\text{Ann}(1-y) := \{r \in R \mid r(1-y) = 0\}$ は零でないイデアル . 従って H の定義から $H \subset \text{Ann}(1-y)$ となる . 即ち任意の $h \in H$ に対して $h(1-y) = 0$ だから $1-y \in \text{Ann}(H) \subset I$ である . 従って $1 = (1-y) + y \in I$ だから , $I = R$ である . \square

定理. 次の命題は (ZF 上) 同値 .

1. 選択公理
2. 任意の環は部分直既約な環の部分直積である .
3. 任意の一意分解整域は部分直既約な環の部分直積である .
4. 任意の環 R に対して , ある部分直既約な環 $S \neq 0$ と全射環準同型 $R \rightarrow S$ が存在する .
5. 任意の一意分解整域 D に対して , ある部分直既約な環 $S \neq 0$ と全射環準同型 $D \rightarrow S$ が存在する .

証明. (1 \implies 2) R を環とする . $r \in R \setminus \{0\}$ に対し $X_r := \{I \subset R \mid I \text{ はイデアル , } r \notin I\}$, $Y_r := \{I \in X_r \mid I \text{ は } (X_r, \subset) \text{ の極大元}\}$ と置くと Zorn の補題により $Y_r \neq \emptyset$ で

ある .

$\because 0 \in X_r$ だから $X_r \neq \emptyset$. $C \subset X_r$ を部分全順序集合とする . $I := \bigcup_{J \in C} J$ と置けば $I \subset R$ はイデアルである . 全ての $J \in C$ について $r \notin J$ だから $r \notin I$. 従って $I \in X_r$ である . よって C は上界を持つ .

故に選択公理により $\{Y_r\}_{r \in R \setminus \{0\}}$ の選択関数 f が存在する . このとき Y_r の定義から $\bigcap_{r \in R \setminus \{0\}} f(r) = 0$ となる . 故に命題 1 により , R は $\{R/f(r)\}_{r \in R \setminus \{0\}}$ の部分直積である . また各 $r \in R \setminus \{0\}$ について $R/f(r)$ は部分直既約となる .

$\because f(r) \subset R$ は極大イデアルだから , $\mathcal{I}(R/f(r)) = \emptyset$. 故に $H(R/f(r)) \neq 0$ なので命題 2 により $R/f(r)$ は部分直既約である .

従って R は部分直既約な環の部分直積である .

(2 \implies 3) 明らか .

(2 \implies 4) R を環とする . 仮定 2 によりある部分直既約な環の族 $\{S_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ が存在して R は $\{S_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ の部分直積である . このとき $\lambda \in \Lambda$ を一つ取ると標準射影 $\pi_{\lambda \in \Lambda} : R \rightarrow S_\lambda$ は全射である .

(3 \implies 5) 2 \implies 4 と同様 .

(4 \implies 5) 明らか .

(5 \implies 1) 任意の一意分解整域 D が極大イデアルを持つ事を示せばよい .

環の極大イデアルの存在を参照 .

仮定により , 部分直既約な環 $S \neq 0$ と全射環準同型 $\varphi : D \rightarrow S$ が存在する . φ が全射だから S は単位的可換環である . 故に補題 3 により S は極大イデアル \mathfrak{m} を持つ . このとき $\varphi^{-1}(\mathfrak{m}) \subset D$ が D の極大イデアルとなる . □

参考文献

- [1] Yehuda Rav, Subdirect Decomposition of Rings and the Axiom of Choice, Arch. Math., Vol. 51 (1988), 125–127, <http://www.springerlink.com/content/uj17776056246g11/>