集合に関する命題と選択公理

alg-d
http://alg-d.com/math/ac/

2015 年 7 月 11 日

定理 1. 選択公理
$\Longleftrightarrow$ 非空集合の族 $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ で全ての X_λ の濃度が等しいもの，に対して $\displaystyle\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \neq \emptyset$

証明. $\Longrightarrow$ は明らかなので，$\Longleftarrow$ を示せばよい．$\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を非空集合の任意の族とする．$Y := \left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda\right)^{\mathbb{N}}$ と置く．明らかに $Y \neq \emptyset$ である．$\lambda \in \Lambda$ に対し $F_\lambda\colon Y \times X_\lambda \longrightarrow Y$ を

$$F_\lambda(f, x)(n) := \begin{cases} x & (n = 0 \text{ のとき}) \\ f(n-1) & (n > 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

で定義する．F_λ は単射だから $|Y \times X_\lambda| \leq |Y|$ となる．$|Y| \leq |Y \times X_\lambda|$ だから Bernstein の定理より $|Y \times X_\lambda| = |Y|$ である．従って仮定から $\displaystyle\prod_{\lambda\in\Lambda}(Y \times X_\lambda) \neq \emptyset$ となり，$\displaystyle\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \neq \emptyset$ である． □

この証明で，選択関数の存在が非自明な場合には $|Y| = \infty$ となるから，次の系が分かる．

系 2. 選択公理
$\Longleftrightarrow$ 無限集合の族 $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ で全ての X_λ の濃度が等しいもの，に対して $\displaystyle\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \neq \emptyset$ □

定理 3. 選択公理
$\Longleftrightarrow$ 集合の順序対からなる族 $\{\langle X_\lambda, Y_\lambda\rangle\}_{\lambda\in\Lambda}$ が，各 $\lambda \in \Lambda$ に対し $|X_\lambda| = |Y_\lambda|$ を満たしているとする．このとき写像の族 $\{f_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ で，「各 $\lambda \in \Lambda$ に対し $f_\lambda\colon X_\lambda \longrightarrow Y_\lambda$は全単射」を満たすものが存在する．

証明. $\Longrightarrow$ は明らかなので，$\Longleftarrow$ を示せばよい．$\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を非空集合の任意の族とする．$|X_\lambda \times \mathbb{N}| = |X_\lambda \times \mathbb{N} \cup \{\emptyset\}|$ であるから，族 $\{\langle X_\lambda \times \mathbb{N} \cup \{\emptyset\}, X_\lambda \times \mathbb{N}\rangle\}_{\lambda\in\Lambda}$ に仮定を適用

して全単射 $f_\lambda\colon X_\lambda \times \mathbb{N} \cup \{\emptyset\} \longrightarrow X_\lambda \times \mathbb{N}$ からなる族を得る．$g(\lambda) := (f_\lambda(\emptyset)$ の第一成分) と置けば，g が選択関数である． □

定理 4. 選択公理
$\iff$ 非空集合の族 $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ は全ての X_λ の濃度が等しいとする．このとき写像の族 $\{f_{\lambda,\mu}\}_{\lambda,\mu\in\Lambda}$ が存在して「各 $\lambda,\mu \in \Lambda$ に対し $f_{\lambda,\mu}\colon X_\lambda \longrightarrow X_\mu$ は全単射」を満たす．

証明. $\Longrightarrow$ は明らかなので，$\Longleftarrow$ を示せばよい．$\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を非空集合の任意の族とする．$Y := (\bigcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda)^{\mathbb{N}}$ と置く．明らかに $Y \neq \emptyset$ である．定理 1 の証明で示したように $|X_\lambda \times Y| = |Y|$ である．また，$|X_\lambda \times Y| = |X_\lambda \times Y \cup \{\emptyset\}|$ も容易に分かる．

$I := (\{0\}\times\Lambda)\cup(\{1\}\times\Lambda)$ と置き $\langle 0,\lambda\rangle \in I_0$ に対し $Y_{\langle 0,\lambda\rangle} := X_\lambda \times Y \cup \{\emptyset\}$, $\langle 1,\lambda\rangle \in I_1$ に対し $Y_{\langle 1,\lambda\rangle} := X_\lambda \times Y$ と定める．族 $\{Y_i\}_{i\in I}$ に仮定を適用して全単射の族 $\{f_{i,j}\}_{i,j\in I}$ を得る．このとき各 $\lambda \in \Lambda$ に対し $F_\lambda := f_{\langle 0,\lambda\rangle,\langle 1,\lambda\rangle}\colon X_\lambda \times Y \cup \{\emptyset\} \longrightarrow X_\lambda \times Y$ は全単射である．そこで $g(\lambda) := (F_\lambda(\emptyset)$ の第一成分) と置けば，g が選択関数である． □

集合 X に対して $\mathrm{Aut}(X) := \{f\colon X \longrightarrow X \mid f$ は全単射 $\}$ とおく．

定理 5. 選択公理
$\iff$ 非空集合の族 $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ は全ての X_λ の濃度が等しいとする．このときある $\lambda_0 \in \Lambda$ と写像の族 $\{f_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ が存在して「各 $\lambda \in \Lambda$ に対して $f_\lambda\colon \mathrm{Aut}(X_{\lambda_0}) \longrightarrow \mathrm{Aut}(X_\lambda)$ は群同型」を満たす．

証明. $\Longrightarrow$ は明らかなので，$\Longleftarrow$ を示せばよい．その為には系 2 の条件を示せばよい．

その為に以下の事実を思い出しておく．X を集合とする．$g \in \mathrm{Aut}(X)$ に対して $\mathrm{supp}(g) := \{x \in X \mid g(x) \neq x\}$ と置く．g が互換であるとは，$|\mathrm{supp}(g)| = 2$ となることである．X, Y を無限集合とする．$f\colon \mathrm{Aut}(X) \longrightarrow \mathrm{Aut}(Y)$ が群同型のとき，$g \in \mathrm{Aut}(X)$ が互換ならば $f(g) \in \mathrm{Aut}(Y)$ も互換である．また，二つの互換 $g, h \in \mathrm{Aut}(X)$ が交換不可能である為の必要十分条件は $|\mathrm{supp}(g) \cap \mathrm{supp}(h)| = 1$ となることである．

さて，$\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を無限集合の族で，$\lambda \neq \mu$ ならば $|X_\lambda| = |X_\mu|$ であるとする．仮定により $\lambda_0 \in \Lambda$ と写像の族 $\{f_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ が存在して「各 $\lambda \in \Lambda$ に対して $f_\lambda\colon \mathrm{Aut}(X_{\lambda_0}) \longrightarrow \mathrm{Aut}(X_\lambda)$ は群同型」となる．元 $x, y, z \in X_{\lambda_0}$ を取り，$g \in \mathrm{Aut}(X_{\lambda_0})$ を「x, y を入れ替える互換」，$h \in \mathrm{Aut}(X_{\lambda_0})$ を「x, z を入れ替える互換」とする．このとき $\lambda \in \Lambda$ に対して $\mathrm{supp}(f_\lambda(g)) \cap \mathrm{supp}(f_\lambda(h)) = \{x_\lambda\}$ となる x_λ が一意に取れる．これにより $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \neq \emptyset$ である． □

補題 6. $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ と $\{Y_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ が $\displaystyle\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda = \prod_{\lambda\in\Lambda} Y_\lambda \neq \emptyset$ を満たすならば，各 $\lambda\in\Lambda$ について $X_\lambda = Y_\lambda$ となる．

証明. $x = (x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \in \displaystyle\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ を一つ取る．$\mu\in\Lambda$ に対して $X_\mu = Y_\mu$ を示す．その為に $a \in X_\mu$ を取り

$$y_\lambda := \begin{cases} a & (\lambda = \mu\text{のとき}) \\ x_\lambda & (\lambda \neq \mu\text{のとき}) \end{cases}$$

とすれば $(y_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \in \displaystyle\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda = \prod_{\lambda\in\Lambda} Y_\lambda$ であるから $a \in Y_\mu$ である．故に $X_\mu \subset Y_\mu$ であり，逆も同様であるから $X_\mu = Y_\mu$ が分かる． □

定理 7. 選択公理
$\Longleftrightarrow$ 非空集合の族 $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$，$\{Y_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ が $\displaystyle\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda = \prod_{\lambda\in\Lambda} Y_\lambda$ を満たすならば，各 $\lambda\in\Lambda$ について $X_\lambda = Y_\lambda$ となる．

証明. ($\Longrightarrow$) 選択公理により $\displaystyle\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \neq \emptyset$ だから補題 6 より明らか．

($\Longleftarrow$) $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を非空集合の族とする．$\displaystyle\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda = \emptyset$ と仮定する．$|X_\mu| \geq 2$ となる $\mu\in\Lambda$ を一つ取り，$a \in X_\mu$ を取る．非空集合の族 $\{Y_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を

$$Y_\lambda := \begin{cases} X_\lambda \setminus \{a\} & (\lambda = \mu\text{のとき}) \\ X_\lambda & (\lambda \neq \mu\text{のとき}) \end{cases}$$

により定めれば $\displaystyle\prod_{\lambda\in\Lambda} Y_\lambda \subset \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda = \emptyset$ により $\displaystyle\prod_{\lambda\in\Lambda} Y_\lambda = \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ である．よって仮定により $X_\mu = Y_\mu = X_\mu \setminus \{a\}$ となり矛盾する． □

定理 8. 次の命題は (ZF 上) 同値.

1. 選択公理
2. 任意の $X \neq \emptyset$ と写像 $F\colon X \longrightarrow Y$ に対して写像 $G\colon Y \longrightarrow X$ が存在して $F \circ G \circ F = F$ となる．
3. 任意の全射 $F\colon X \longrightarrow Y$ に対して，ある $G\colon Y \longrightarrow X$ が存在して $F \circ G = \mathrm{id}_Y$．
4. 任意の二項関係 $R \subset X \times Y$ に対して，ある関数 f が存在して $\mathrm{dom}(R) = \mathrm{dom}(f)$ かつ $f \subset R$ となる．
5. 二項関係 $R \subset X \times X$ が「任意の $x \in X$ に対してある $y \in X$ が存在して xRy」を満たすとき，写像 $f\colon X \longrightarrow X$ で任意の $x \in X$ に対して $xRf(x)$ を満たすものが

存在する．

証明． (1 $\Longrightarrow$ 2) $X \neq \emptyset$, $F\colon X \longrightarrow Y$ とする．$Y' := \mathrm{Im}(F) \subset Y$ と置く．各 $y \in Y'$ について $F^{-1}(y) \neq \emptyset$．よって $\{F^{-1}(y)\}_{y \in Y'}$ に選択公理を適用して選択関数 $f\colon Y' \longrightarrow \bigcup_{y \in Y'} F^{-1}(y) = X$ を得る．$y \in Y'$ に対し $f(y) \in F^{-1}(y)$，即ち $F(f(y)) = y$ である．また $X \neq \emptyset$ だから，X から 1 つ元 $a \in X$ が取れる．写像 $G\colon Y \longrightarrow X$ を

$$G(y) := \begin{cases} f(y) & (y \in Y' \text{のとき}) \\ a & (y \notin Y' \text{のとき}) \end{cases}$$

と定義すれば，任意の元 $x \in X$ に対し

$$F \circ G \circ F(x) = F(G(F(x))) = F(f(F(x))) = F(x)$$

(2 $\Longrightarrow$ 3) $F\colon X \longrightarrow Y$ を全射とする．$X = \emptyset$ のときは自明なので $X \neq \emptyset$ とする．すると仮定 2 よりある写像 $G\colon Y \longrightarrow X$ があって $F \circ G \circ F = F = \mathrm{id}_Y \circ F$．よって F の全射性から $F \circ G = \mathrm{id}_Y$ である．

(3 $\Longrightarrow$ 4) $R \subset X \times Y$ を二項関係とする．$\pi_X\colon R \longrightarrow \mathrm{dom}(R)$ を $\pi_X(x, y) := x$ で定めれば π_X は全射である．故に仮定 3 から，$\pi_X \circ g = \mathrm{id}$ となる写像 $g\colon \mathrm{dom}(R) \longrightarrow R$ が存在する．このとき $\pi_Y\colon R \longrightarrow Y$ を $\pi_Y(x, y) := y$ で定めて $f := \pi_Y \circ g$ とすれば，任意の $x \in X$ に対して

$$R \ni g(x) = \langle \pi_X(g(x)), \pi_Y(g(x)) \rangle = \langle x, f(x) \rangle.$$

(4 $\Longrightarrow$ 5) 明らか．

(5 $\Longrightarrow$ 1) $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ を非空集合の族とする．$X := \Lambda \sqcup \bigcup_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ と置き，X 上の二項関係 R を次で定める．

$$aRb \Longleftrightarrow (a \in \Lambda \text{かつ } b \in X_a) \text{ または } a = b \in \bigcup_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda.$$

この R に仮定 5 を適用し，写像 $f\colon X \longrightarrow X$ を得る．このとき明らかに $f|_\Lambda\colon \Lambda \longrightarrow X$ が選択関数である． $\square$

定理 9. 次の命題は (ZF 上) 同値．

1. 選択公理，即ち
   任意の非空集合の族 $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ に対して，ある写像 $f\colon \Lambda \longrightarrow \bigcup_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ が存在して，任意の $\lambda \in \Lambda$ に対して $f(\lambda) \in X_\lambda$

2. 任意の集合族 $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ に対して，ある写像 $g\colon \bigcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \longrightarrow \Lambda$ が存在して，任意の $x \in \bigcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ に対して $x \in X_{g(x)}$.
3. 任意の集合族 $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ に対して，ある互いに素な集合族 $\{Y_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ が存在して $Y_\lambda \subset X_\lambda$，$\bigcup_{\lambda\in\Lambda} Y_\lambda = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ を満たす.

証明. $(1 \Longrightarrow 2)$ $X := \bigcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ と置き，$x \in X$ に対し $A_x := \{\lambda \in \Lambda \mid x \in X_\lambda\} \neq \emptyset$ と定める．$\{A_x\}_{x\in X}$ に選択公理を適用し，選択関数 $g\colon X \longrightarrow \bigcup_{x\in X} A_x \subset \Lambda$ を得る．この g は $x \in X_{g(x)}$ を満たす.

$(2 \Longrightarrow 3)$ $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を集合族とする．仮定 2 により $g\colon \bigcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \longrightarrow \Lambda$ で「任意の $x \in \bigcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ に対して $x \in X_{g(x)}$」を満たすものが取れる．$Y_\lambda := g^{-1}(\lambda)$ とすれば明らかに $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} Y_\lambda = X$ かつ $Y_\lambda \cap Y_\mu = \emptyset$ $(\lambda \neq \mu)$ である．$y \in Y_\lambda$ とすると $g(y) = \lambda$ だから $y \in X_{g(y)} = X_\lambda$．よって $Y_\lambda \subset X_\lambda$ となる.

$(3 \Longrightarrow 1)$ 定理 8 の条件 3 を示す．$F\colon A \longrightarrow B$ を全射とする．$a \in A$ に対し $X_a := \{F(a)\}$ と置き，族 $\{X_a\}_{a\in A}$ に仮定を適用して $Y_a \subset X_a$，$\bigcup_{a\in A} Y_a = \bigcup_{a\in A} X_a (= B)$，$Y_a \cap Y_{a'} = \emptyset$ $(a \neq a')$ を満たす $\{Y_a\}_{a\in A}$ を得る．各 $b \in B$ に対して $b \in Y_{G(b)}$ となる $G(b) \in A$ が唯一つ存在する．この写像 $G : B \longrightarrow A$ は $F \circ G = \mathrm{id}_B$ を満たす. $\square$

定理 10. 次の命題は (ZF 上) 同値.

1. 選択公理
2. A を集合，$B \subset A$ を部分集合，$f\colon A \longrightarrow B$ を全射とするとき，任意の写像 $g\colon A \longrightarrow B$ に対してある写像 $h\colon A \longrightarrow A$ が存在して $g = f \circ h$ となる.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, two heads, "f"] & B \\ & A \arrow[u, "g"'] \arrow[ul, dashed, "h"] \end{tikzcd}$$

3. A を集合，$B \subset A$ を部分集合，$f\colon A \longrightarrow B$ を全射とするとき，任意の全射 $g\colon A \longrightarrow B$ に対してある写像 $h\colon A \longrightarrow A$ が存在して $g = f \circ h$ となる.
4. A を集合，$B \subset A$ を部分集合，$f\colon A \longrightarrow B$ を全射とする．写像 $g\colon A \longrightarrow B$ が

$g|_B = \mathrm{id}_B$ を満たすとき，ある写像 $h\colon A \longrightarrow A$ が存在して $g = f \circ h$ となる．

証明． $(1 \Longrightarrow 2)$ 定理 8 の 3 を f に適用して，$f \circ k = \mathrm{id}_B$ となる写像 $k\colon B \longrightarrow A$ を得る．そこで $h := k \circ g$ と置けば $f \circ h = f \circ k \circ g = \mathrm{id}_B \circ g = g$ である．

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, shift left, "f"] & B \arrow[l, dashed, shift left, "k"] \\ & A \arrow[u, "g"'] \arrow[ul, dashed, "h"] \end{tikzcd}$$

$2 \Longrightarrow 3$ と $3 \Longrightarrow 4$ は明らか．

$(4 \Longrightarrow 1)$ $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を互いに素な非空集合の族とする．$X := \bigcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ とする．$X \cap \Lambda = \emptyset$ としてよい．X にも Λ にも含まれない元 $\infty \notin X \cup \Lambda$ を一つ取る．$A := X \cup \Lambda \cup \{\infty\}$, $B := \Lambda \cup \{\infty\}$ として全射 $f\colon A \longrightarrow B$ を

$$f(a) := \begin{cases} \lambda & (a \in X_\lambda \text{ のとき}) \\ \infty & (a \in \Lambda \text{ のとき}) \\ \infty & (a = \infty \text{ のとき}) \end{cases}$$

と定める．写像 $g\colon A \longrightarrow B$ を

$$g(a) := \begin{cases} \infty & (a \in X_\lambda \text{ のとき}) \\ a & (a \in \Lambda \text{ のとき}) \\ \infty & (a = \infty \text{ のとき}) \end{cases}$$

とする．仮定により，ある写像 $h\colon A \longrightarrow A$ が存在して $g = f \circ h$ となる．このとき $\lambda \in \Lambda$ に対して $\lambda = g(\lambda) = f(h(\lambda))$ だから，f の定義により $h(\lambda) \in X_\lambda$ である．故に $h|_\Lambda$ は $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ の選択関数である． □

参考文献

[1] Horst Herrlich, Axiom of Choice，Springer, 2006

[2] 田中 尚夫,『選択公理と数学【増訂版】』，遊星社，2005 年

[3] ケネス・キューネン,『集合論-独立性証明への案内』，藤田博司訳, 日本評論社, 2008

[4] H. Rubin and J. Rubin, Equivalents of the Axiom of Choice II, North Holland, 1985.

[5] Perry Smith, Three Propositions Equivalent to the Axiom of Choice, Publ. Inst. Math., 32 (1982), 165–166