

$$\aleph_1 \leq^* 2^{\aleph_0}$$

alg-d

<http://alg-d.com/math/ac/>

2013年3月23日

命題. $W := \{R \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid (\mathbb{N}, R) \text{ は整列順序集合}\}$ とすれば $|W| = 2^{\aleph_0}$

証明. $W \subset \mathcal{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$ だから明らかに $|W| \leq 2^{\aleph_0}$. 故に $|W| \geq 2^{\aleph_0}$ を示せばよい.

$X := (0, 1) \setminus \mathbb{Q}$ とする. $x \in X$ を $x = 0.x_1x_2x_3\cdots$ と 2 進小数展開する. 以下の条件を満たす数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が一意に存在する.

- $x_n = 0$ のとき a_n は偶数
- $x_n = 1$ のとき a_n は奇数
- $x_m = x_n, m < n$ のとき $a_m < a_n$

a_n により \mathbb{N} の整列順序 R_x が定まる. 写像 $X \ni x \mapsto R_x \in W$ は単射である. □

定理. ある族 $\{X_\alpha\}_{\alpha < \aleph_1}$ が存在して, $|X_\alpha| = |\mathbb{R}|$ かつ $\mathbb{R} = \bigsqcup_{\alpha < \aleph_1} X_\alpha$

証明. $\omega \leq \alpha < \aleph_1$ に対して $X_\alpha := \{R \in W \mid (\mathbb{N}, R) \cong \alpha\}$ と置けば明らかに $|X_\alpha| = |\mathbb{R}|$ であり $W = \bigsqcup_{\omega \leq \alpha < \aleph_1} X_\alpha$ となる. □

系. $\aleph_1 \leq^* 2^{\aleph_0}$

定理. $\mathbb{R} = \bigsqcup_{\alpha < \aleph_1} X_\alpha$ と書けば全射 $f: \mathbb{R} \rightarrow \aleph_1$ が $f(x) := \lceil x \in X_\alpha \text{ となる } \alpha < \aleph_1 \rceil$ で定まる.

参考文献

- [1] Alonzo Church, Alternatives to Zermelo's assumption, *Trans. Amer. Math. Soc.* 29 (1927), 178–208,
[http://www.ams.org/journals/tran/1927-029-01/
S0002-9947-1927-1501383-1/](http://www.ams.org/journals/tran/1927-029-01/S0002-9947-1927-1501383-1/)