$\aleph_1 \leq^* 2^{\aleph_0}$

alg-d
http://alg-d.com/math/ac/

2013 年 3 月 23 日

命題. $W := \{R \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid (\mathbb{N}, R)$ は整列順序集合 $\}$ とすれば $|W| = 2^{\aleph_0}$

証明. $W \subset \mathcal{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$ だから明らかに $|W| \leq 2^{\aleph_0}$．故に $|W| \geq 2^{\aleph_0}$ を示せばよい．

$X := (0, 1) \setminus \mathbb{Q}$ とする．$x \in X$ を $x = 0.x_1x_2x_3\cdots$ と 2 進小数展開する．以下の条件を満たす数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が一意に存在する．

- $x_n = 0$ のとき a_n は偶数
- $x_n = 1$ のとき a_n は奇数
- $x_m = x_n,\ m < n$ のとき $a_m < a_n$

a_n により $\mathbb{N}$ の整列順序 R_x が定まる．写像 $X \ni x \longmapsto R_x \in W$ は単射である． □

定理. ある族 $\{X_\alpha\}_{\alpha<\aleph_1}$ が存在して，$|X_\alpha| = |\mathbb{R}|$ かつ $\mathbb{R} = \displaystyle\bigsqcup_{\alpha<\aleph_1} X_\alpha$

証明. $\omega \leq \alpha < \aleph_1$ に対して $X_\alpha := \{R \in W \mid (\mathbb{N}, R) \cong \alpha\}$ と置けば明らかに $|X_\alpha| = |\mathbb{R}|$ であり $W = \displaystyle\bigsqcup_{\omega\leq\alpha<\aleph_1} X_\alpha$ となる． □

系. $\aleph_1 \leq^* 2^{\aleph_0}$

定理. $\mathbb{R} = \displaystyle\bigsqcup_{\alpha<\aleph_1} X_\alpha$ と書けば全射 $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \aleph_1$ が $f(x) :=$「$x \in X_\alpha$ となる $\alpha < \aleph$」で定まる．

参考文献

[1] Alonzo Church, Alternatives to Zermelo's assumption, Trans. Amer. Math. Soc. 29 (1927), 178–208,
http://www.ams.org/journals/tran/1927-029-01/S0002-9947-1927-1501383-1/