permutation モデル

alg-d
http://alg-d.com/math/ac/

2015 年 2 月 21 日

1 permutation モデル

通常の ZF では, 全てのものが集合である．集合ではない物 (アトム, もしくは urelement と呼ぶ) の存在を許したバージョンの ZF も存在し，ZFA (ZF with Atom) もしくは ZFU (ZF with Urelement) と言う．ZFA は ZF とほぼ同じであるが，以下のような点が ZF と異なる．

- アトム全体がなすクラスを A と書く．(A は集合とは限らないが，たいていの場合は集合であると仮定する)
- $a \in A$ ならば $\forall x(x \notin a)$ である．しかし $a \neq \emptyset$ である．
- 外延性公理
$$\forall x \forall y(\forall z(z \in x \leftrightarrow z \in y) \to x = y)$$
は
$$\forall x \forall y((x \notin A \land y \notin A) \to (\forall z(z \in x \leftrightarrow z \in y) \to x = y))$$
と修正する．(つまり変数 x, y の動く範囲を集合に制限する．)
- 他の公理も同様にして，適当に修正する．
- このとき，ZFA $+ A = \emptyset$ が ZF になる．

集合 S と順序数 α に対して $R_\alpha(S)$ を

$$R_\alpha(S) := \begin{cases} S & (\alpha = 0 \text{ のとき}) \\ R_\beta(S) \cup \mathcal{P}(R_\beta(S)) & (\alpha = \beta + 1 \text{ のとき}) \\ \displaystyle\bigcup_{\beta < \alpha} R_\beta(S) & (\alpha \text{が極限順序数のとき}) \end{cases}$$

と定義し，$R_\infty(S) = \bigcup_{\alpha \in \mathrm{ON}} R_\alpha(S)$ と定める．特に $R_\infty(\emptyset)$ を kernel という．$R_\infty(\emptyset)$ は ZF のモデルとなる．また $V = R_\infty(A)$ である．即ち任意の x に対してある順序数 α が存在して $x \in R_\alpha(A)$ となる．そこで集合 x に対して $\mathrm{rank}(x) := \min\{\alpha \in \mathrm{ON} \mid x \in R_{\alpha+1}(A)\}$ を定めることができる．

全単射 $A \longrightarrow A$ の全体がなす群を $\mathrm{Aut}(A)$ と書くことにする．$g \in \mathrm{Aut}(A)$ とする．rank に関する帰納法により，任意の $x \in V$ に対して $g(x) := \{\, g(y) \mid y \in x \,\}$ と定義することができる．このとき次が成り立つ．

命題.

1. $g\colon V \longrightarrow V$ は自己同型である．即ち $x \in y \leftrightarrow g(x) \in g(y)$ となる．
2. $\varphi(x_1, \cdots, x_n)$ を論理式とするとき，$\varphi(x_1, \cdots, x_n) \leftrightarrow \varphi(g(x_1), \cdots, g(x_n))$.
3. $g(\{x, y\}) = \{g(x), g(y)\}$
4. $g(\langle x, y\rangle) = \langle g(x), g(y)\rangle$
5. 写像 f に対して $g(f)$ も写像で，$g(f)(x) = g(f(g^{-1}(x)))$ となる．
6. $x \in R_\infty(\emptyset)$ に対して $g(x) = x$.

証明. (1) 定義から $x \in y$ ならば $g(x) \in g(y)$ である．逆に $g(x) \in g(y)$ ならば $x = g^{-1}(g(x)) \in g^{-1}(g(y)) = y$ である．

(2) 論理式 φ の構造に関する帰納法.

(3) 定義から明らか.

(4) $\langle x, y\rangle := \{\{x\}, \{x, y\}\}$ だったから $g(\langle x, y\rangle) = \{\{g(x)\}, \{g(x), g(y)\}\} = \langle g(x), g(y)\rangle$ となる．

(5) $f = \{\langle x, f(x)\rangle \mid x \in X\}$ と書けば $g(f) = \{\langle g(x), g(f(x))\rangle \mid x \in X\}$ だから $g(f)(g(x)) = g(f(x))$.

(6) 帰納法により $g(x) = \{g(y) \mid y \in x\} = \{y \mid y \in x\} = x$. □

定義. $G \subset \mathrm{Aut}(A)$ を部分群とする．以下の条件を満たす $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(G)$ を G の normal フィルターという．

1. $\mathcal{F} \neq \emptyset$.
2. 各 $H \in \mathcal{F}$ は部分群 $H \subset G$ である．
3. $H \in \mathcal{F}$，$H \subset K$ で $K \subset G$ が部分群ならば $K \in \mathcal{F}$.
4. $H, K \in \mathcal{F}$ ならば $H \cap K \in \mathcal{F}$.
5. $H \in \mathcal{F}$，$g \in G$ ならば $gHg^{-1} \in \mathcal{F}$.
6. $a \in A$ に対して $\{g \in G \mid g(a) = a\} \in \mathcal{F}$

$G \subset \mathrm{Aut}(A)$ と G の normal フィルター $\mathcal{F}$ が与えられたとき，$\mathrm{sym}(x) := \{g \in G \mid g(x) = x\}$ として $U := \{x \mid \mathrm{sym}(x) \in \mathcal{F},\ \forall y \in x(y \in U)\}$ と置く．

※ これの U の定義も，g の様に帰納的な定義になっている．

命題. $\mathbb{N} \subset U$，$\mathbb{N} \in U$，$A \subset U$，$A \in U$ である．

証明. まず $\mathbb{N} \subset U$ を示す．$n \in \mathbb{N}$ を取る．まず既に示したように，$g \in G$ に対して $g(n) = n$ だから，$\mathrm{sym}(n) = G \in \mathcal{F}$ である．$n = 0$ の時は $\forall y \in 0(y \in U)$ は自明 (0 は空集合だから) なので $0 \in U$ が分かる．よって帰納的に $1 \in U,\ 2 \in U,\ \ldots,\ n \in U,\ \ldots$ が分かる．即ち $\mathbb{N} \subset U$ である．

次に $\mathbb{N} \in U$ であるが、自然数 n のときと同様にして $\mathrm{sym}(\mathbb{N}) = G \in \mathcal{F}$ が分かり，また $\forall n \in \mathbb{N}(n \in U)$ は既に示したから $\mathbb{N} \in U$ となる．

次に $A \subset U$ を示すため，$a \in A$ を取る．normal フィルターの定義から $\mathrm{sym}(a) \in \mathcal{F}$ である．また a はアトムだから $y \in a$ は存在しないので $\forall y \in a(y \in U)$ が成り立つ．よって $a \in U$ となる．

最後に $A \in U$ について．明らかに $\mathrm{sym}(A) = G \in \mathcal{F}$ であり，また $\forall a \in A(a \in U)$ だったから $A \in U$ が分かった． □

定理. U は推移的な ZFA のモデルである．

証明. ZF の場合と同様，推移的かつ almost universal で Gödel operation について閉じているモデルは ZFA のモデルとなる．そこで U がこれらの条件を満たすことを示す．

まず定義から明らかに U は推移的である．

almost universal であることを示すため，部分集合 $x \subset U$ を取る．このとき $x \subset V$ だから，ある順序数 α が存在して $x \subset R_\alpha(A)$ となる．よって $x \subset R_\alpha(A) \cap U$ となる．$R_\alpha(A) \cap U \in U$ であることを示せばよい．

最後に，容易に分かるように $\mathrm{sym}(F_i(x, y)) \supset \mathrm{sym}(x) \cap \mathrm{sym}(y)$ であるから，V は Gödel operation で閉じている． □

この U を permutation モデルと呼ぶ．あとは $G \subset \mathrm{Aut}(A)$ と $\mathcal{F}$ を上手くとって，U で選択公理が成り立たなければよいわけである．

normal フィルター $\mathcal{F}$ は通常以下のようにして構成される．

定義. 以下の条件を満たす $I \subset \mathcal{P}(A)$ を A の normal イデアルという．

1. $I \neq \emptyset$.
2. $E \in I$，$F \subset E$ ならば $F \in I$.
3. $E, F \in I$ ならば $E \cup F \in I$.
4. $E \in I$，$g \in G$ ならば $g(E) = \{g(x) \mid x \in E\} \in I$.
5. $a \in A$ に対して $\{a\} \in I$.

定義. 集合 x に対して $\mathrm{fix}(x) := \{g \in G \mid$ 任意の $y \in x$ に対して $g(y) = y\}$ と書く.

命題. normal イデアル I に対して

$$\mathcal{F} := \{H \subset G : \text{部分群} \mid \text{ある } E \in I \text{ に対して} \mathrm{fix}(E) \subset H\}$$

と定めれば，$\mathcal{F}$ は normal フィルターである.

証明. normal フィルターの条件 2，3 は明らか．$E, F \in I$ ならば $E \cup F \in I$ だから，条件 4 も明らか.

条件 5 を示すため，$H \in \mathcal{F}$，$g \in G$ とする．$E \in I$ で $\mathrm{fix}(E) \subset H$ となるものを取る．このとき $g(E) \in I$ であり

$$\begin{aligned}\mathrm{fix}(g(E)) &= \{h \in G \mid \text{任意の } y \in g(E) \text{ に対して } h(y) = y\} \\ &= \{h \in G \mid \text{任意の } y \in E \text{ に対して } hg(y) = g(y)\} \\ &= \{h \in G \mid \text{任意の } y \in E \text{ に対して } g^{-1}hg(y) = y\} \\ &= g(\mathrm{fix}(E))g^{-1}\end{aligned}$$

である．故に $\mathrm{fix}(g(E)) \subset gHg^{-1}$ となり $gHg^{-1} \in \mathcal{F}$ が分かる.

条件 6 は $\mathrm{fix}(\{a\}) = \{g \in G \mid g(a) = a\}$ と $\{a\} \in I$ から明らか. □

これにより，normal イデアル I を定めれば permutation モデル U が定まる．定義から，$x \in U$ に対して $\mathrm{fix}(E) \subset \mathrm{sym}(x)$ となる $E \in I$ が存在する．このような E を x の support と呼ぶ.

2 The Second Fraenkel Model

アトム全体の集合 A が可算無限集合であるとする．$A = \{\, a_n \mid n \in \omega \,\} \cup \{\, b_n \mid n \in \omega \,\}$ と書く．$X_n := \{a_n, b_n\}$，$Y := \{X_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ とする．$\pi_n \colon A \longrightarrow A$ を

$$\pi_n(a) = \begin{cases} b_n & (a = a_n) \\ a_n & (a = b_n) \\ a & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

で定めて，$G \subset \mathrm{Aut}(A)$ を $\{\pi_n \mid n \in \omega\}$ で生成される群とする．$I := \mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(A) = \{E \subset A \mid |E| < \infty\}$ は normal イデアルである．よって permutation モデル U が定まる．

命題. $X_n, Y \in U$ である．

証明. 任意の $g \in G$ に対して $g(X_n) = X_n$，$g(Y) = Y$ だから $\mathrm{sym}(X_n) = G \in \mathcal{F}$，$\mathrm{sym}(Y) = G \in \mathcal{F}$ である．既に示したように $A \subset U$ だったから，任意の $y \in X_n$ について $y \in U$ である．故に $X_n \in U$ である．よって任意の $y \in Y$ に対して $y \in U$ が成り立つので $Y \in U$ も分かる． $\square$

U が「Y は選択関数を持つ」を満たすと仮定する．即ち, Y が選択関数 $f\colon \omega \longrightarrow \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$ を持ち, $f \in U$ であるとする．f の support を $E \subset A$ とする．$E = \{a_1, b_1, a_2, \ldots, b_{n-1}\}$ としてよい．このとき $\pi_n \in \mathrm{fix}(E)$ だから $\pi_n(f) = f$ である．簡単のため $f(n) = a_n$ とする．このとき $\pi_n(f)(n) = f(n) = a_n$ であるが，一方 $\pi_n(f)(n) = \pi_n(f(\pi_n^{-1}(n))) = b_n$ であるから矛盾する．

故に U では「Y は選択関数を持つ」は成り立たない．即ち U は選択公理を満たさない．以上により

定理. $\mathrm{AC}(2)_{\aleph_0}$ は ZFA で証明できない．よって選択公理は ZFA で証明できない． $\square$

3 The Basic Fraenkel Model

A を可算無限として $A = \{a_n \mid n \in \omega\}$ と書く．$G = \mathrm{Aut}(A)$ とする．normal フィルター $I := \mathcal{P}_{\mathrm{fin}}(A)$ により permutation モデル U が定まる．この U を使うと，色々なことが証明できないと分かる．

補題. $B \subset A$ を部分集合とするとき，$|B| < \infty$ または $|A \setminus B| < \infty$ である．(以下，一々断らないが，これは「U の中で」の話である．)

証明. $|B| = \infty$ とする．B の support を E とする．ある $m \in \omega$ により $E = \{a_n \mid n < m\}$ と書けるとしてよい．$a \in B \setminus E$ を一つ取る．任意の $n \geq m$ に対して $g(a) = a_n$ となる $g \in \mathrm{fix}(E)$ が存在する．故に $a_n \in g(B) = B$ である．よって $A \setminus E \subset B$ となり $|A \setminus B| < \infty$ である． $\square$

定理. 「無限集合は可算無限部分集合をもつ」は ZFA で証明できない． $\square$

定理. 代数閉包の存在は ZFA で証明できない.

証明. $\langle K,+,\cdot,0,1\rangle$ を $A\subset K$ なる標数 0 の体とする．代数閉包 $\bar{K}/K$ が存在すると仮定する．$\langle \bar{K},+,\cdot,0,1\rangle$ の support を E とする．異なる二つの元 $a,b\in A\setminus E$ を取り $g\in G$ を

$$g(x)=\begin{cases} b & (x=a)\\ a & (x=b)\\ x & (\text{それ以外})\end{cases}$$

で定めれば $g\in \mathrm{fix}(E)$ である．よって g は自己同型 $\bar{K}\longrightarrow\bar{K}$ となる．$z:=\sqrt{a-b}\in\bar{K}$ とすれば $g(z)=\sqrt{g(a)-g(b)}=\sqrt{b-a}=iz$ だから

$$i=g(i)=g\left(\frac{g(z)}{z}\right)=\frac{g(g(z))}{g(z)}=\frac{z}{g(z)}=\frac{1}{i}.$$

故に $-1=1$ となり矛盾する． $\Box$

定理. 「自由群の交換子群は自由群である」は ZFA で証明できない.

証明. FA を A で生成される自由群とする．交換子群 $[FA,FA]\subset FA$ が自由群でないことを示すため，ある $X\subset[FA,FA]$ により $[FA,FA]=FX$ と書けたと仮定する．X の support $E\subset A$ を取る．異なる二つの元 $a,b\in A\setminus E$ を取り，$g\in G$ を

$$g(x)=\begin{cases} b & (x=a)\\ a & (x=b)\\ x & (\text{それ以外})\end{cases}$$

で定めれば $g\in\mathrm{fix}(E)$ である．$\alpha:=aba^{-1}b^{-1}\in[FA,FA]$ を取る．

$$g(\alpha)=g(aba^{-1}b^{-1})=bab^{-1}a^{-1}=\alpha^{-1}$$

である．今，$[FA,FA]=FX$ だから $\alpha=x_1^{\varepsilon_1}\cdots x_n^{\varepsilon_n}$ $(\varepsilon_i=\pm1)$ と一意に表示できる．このとき $\alpha^{-1}=x_n^{-\varepsilon_n}\cdots x_1^{-\varepsilon_1}$，$g(\alpha)=g(x_1)^{\varepsilon_1}\cdots g(x_n)^{\varepsilon_n}$ だから，表示の一意性により $n=2k$，$g(x_1)=x_n,\ldots,g(x_k)=x_{n-k+1}$，$\varepsilon_1=\varepsilon_n,\ldots,\varepsilon_k=\varepsilon_{n-k+1}$ となる．故に $\beta:=x_1^{\varepsilon_1}\cdots x_k^{\varepsilon_k}$ と置けば $\alpha=\beta g(\beta^{-1})$ である．今 $\beta\in FA$ だから，$\beta=a_1^{\nu_1}\cdots a_l^{\nu_l}$ と書ける．すると $aba^{-1}b^{-1}=\alpha=\beta g(\beta^{-1})=a_1^{\nu_1}\cdots a_l^{\nu_l}g(a_l)^{-\nu_l}\cdots g(a_1)^{-\nu_1}$ となるから，表現の一意性により $a_1=a$，$a_2=b$，$\nu_1=1$，$\nu_2=1$ で $g(a_3)=a_3,\ldots,g(a_l)=a_l$ でなければならない．故に $a_3\neq a,\ldots,a_l\neq a$ となる．$\beta\in FX=[FA,FA]$ で，$[FA,FA]$ は $uvu^{-1}v^{-1}$ $(u,v\in A)$ で生成されるから，$\beta=aba_3^{\nu_3}\cdots a_l^{\nu_l}$ のどこかに a^{-1} が現れなければならず，矛盾する． $\Box$