Partition Principle

alg-d
http://alg-d.com/math/ac/

2014 年 12 月 7 日

　次の命題を Partition Principle という．

命題 (Partition Principle)**.** $|x| \leq^* |y|$ ならば $|x| \leq |y|$ である．

　これは「$\sim$ を集合 X の同値関係とするとき $|X/{\sim}| \leq |X|$」と同値である．つまり Partition を取ると集合は小さくなるという命題なのである．この命題と選択公理の関係を述べるのがこの PDF の目的である．

定義. 集合 x が idemmultiple $\iff |x| + |x| = |x|$

命題 (Weak Partition Principle)**.** $|x| \leq^* |y|$ ならば $|y| \not< |x|$ である．

命題 (Idemmultiple Partition Principle)**.** y が idemmultiple のとき，$|x| \leq^* |y|$ ならば $|x| \leq |y|$ である．

命題 (PP^-)**.** $f\colon y \longrightarrow x$ を全射として x を整列可能，y を idemmultiple とする．任意の $a \in x$ に対して $f^{-1}(a)$ が Dedekind 無限であるならば $|x| \leq |y|$ である．

定理. 選択公理 $\Longrightarrow$ Partition Principle □

定理. Partition Principle $\Longrightarrow$ Weak Partition Principle □

定理. Weak Partition Principle $\Longrightarrow$ Idemmultiple Partition Principle

証明. y を idemmultiple で $|x| \leq^* |y|$ とする．$|x| + |y| \leq^* |y| + |y| = |y|$ だから Week Partition Principle により $|y| \not< |x| + |y|$ である．故に $|y| = |x| + |y|$ となる．従って $|x| \leq |y|$ である． □

定理. Idemmultiple Partition Principle $\Longrightarrow$ PP$^-$ $\square$

定理. PP$^-$ $\Longleftrightarrow$ 任意の順序数 α に対して $\mathrm{AC}_{\aleph_\alpha}$.

証明. $\Longleftarrow$ は明らかであるから，$\Longrightarrow$ を示せばよい．

α に関する超限帰納法で示す．$\{X_\beta\}_{\beta<\omega_\alpha}$ を非空集合の族とする．$\gamma < \omega_\alpha$ に対して $C_\gamma := \prod_{\beta<\gamma} X_\beta$ と置く．帰納法の仮定から $C_\gamma \neq \emptyset$ である．Γ を Hartogs 関数として，$\gamma < \omega_\alpha$ に関する超限帰納法で集合 D_γ と基数 λ_γ を

$$\begin{aligned}\lambda_\gamma &:= \max\Big\{\Big|\Gamma\Big(\bigcup_{\delta<\gamma} D_\delta\Big)\Big|,\ \sup_{\delta<\gamma}\lambda_\delta^+\Big\}\\ D_\gamma &:= \omega\times C_\gamma\times\lambda_\gamma\end{aligned}$$

と定義し，$D := \bigcup_{\gamma<\omega_\alpha} D_\gamma$，$\lambda := \sup_{\gamma<\omega_\alpha}\lambda_\gamma$ と定める．$f\colon D \longrightarrow \lambda$ を射影とすればこれは全射で，任意の $\mu < \lambda$ に対して $f^{-1}(\mu)$ は Dedekind 無限である．PP$^-$ により単射 $g\colon \lambda \longrightarrow D$ が存在する．g が単射だから，任意の $\beta < \omega_\alpha$ に対して，ある $\beta < \gamma < \omega_\alpha$ と $\mu < \lambda$ が存在して $f(\mu) \in \omega\times C_\gamma\times\lambda_\gamma$ となる．故に g を使って $\{X_\beta\}_{\beta<\omega_\alpha}$ の選択関数を構成することができる． $\square$

※「任意の順序数 α に対して $\mathrm{AC}_{\aleph_\alpha}$」から選択公理は従わないことが知られている．故に PP$^-$ は選択公理より真に弱い．一方 Partition Principle が選択公理と同値かどうかは未解決問題らしい．

定理. 双対 Bernstein の定理 $\Longrightarrow$ Weak Partition Principle

証明. $|x| \leq^* |y|$ とする．$|y| < |x|$ と仮定する．$|y| \leq^* |x|$ である．故に双対 Bernstein の定理から $|x| = |y|$ となり $|y| < |x|$ に矛盾する．従って $|y| \not< |x|$ である． $\square$

系. 双対 Bernstein の定理 $\Longrightarrow$ 任意の順序数 α に対して $\mathrm{AC}_{\aleph_\alpha}$. $\square$

命題 (PP$'$). $f\colon y \longrightarrow x$ を全射とする．任意の $a \in x$ に対して $f^{-1}(a)$ が有限または Dedekind 無限であるならば $|x| \leq |y|$ である．

命題. Partition Principle $\Longleftrightarrow$ PP$'$

証明. $\Longrightarrow$ は明らかであるから，$\Longleftarrow$ を示せばよい．

PP$'$ が成り立つとする．明らかに PP$^-$ が成り立つ．よって可算選択公理 ($\mathrm{AC}_{\aleph_0}$) が成

り立つから，任意の集合は有限または Dedekind 無限である．故に Partition Principle が成り立つ． $\square$

定理． $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$，$\{Y_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ が互いに素な集合族で，$\lambda\in\Lambda$ に対して $|X_\lambda| = |Y_\lambda|$ ならば $\left|\bigcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda\right| = \left|\bigcup_{\lambda\in\Lambda} Y_\lambda\right|$ である．$\Longrightarrow$ Partition Principle

証明． PP$'$ を示せばよい．

$f\colon y \longrightarrow x$ を全射として，任意の $a\in x$ に対して $f^{-1}(a)$ が有限または Dedekind 無限であるとする．$a\in x$ に対して

$$
\begin{aligned}
X_a &:= f^{-1}(a)\\
Y_a &:= \begin{cases} n & (|X_a| = n \text{ のとき})\\ X_a \sqcup \{0\} & (X_a \text{ が Dedekind 無限のとき}) \end{cases}
\end{aligned}
$$

と定める．任意の $a\in x$ に対して $|X_a| = |Y_a|$ だから，仮定により $\left|\bigcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda\right| = \left|\bigcup_{\lambda\in\Lambda} Y_\lambda\right|$ である．任意の $a\in x$ に対して $0\in Y_a$ だから $|x| \leq \sum_{a\in x}|Y_a| = \left|\bigcup_{\lambda\in\Lambda} Y_\lambda\right| = \left|\bigcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda\right| = |y|$ である． $\square$

参考文献

[1] M. Higasikawa, Partition Principles and Infinite Sums of Cardinal Numbers, Notre Dame Journal of Formal Logic, Vol. 36 (1995), 425–434, `http://projecteuclid.org/euclid.ndjfl/1040149358`