

Noether 環の条件について

alg-d

<http://alg-d.com/math/ac/>

2012 年 10 月 14 日

可換環論において、次の命題はよく知られている。

命題. (1 を含む) 可換環 R について次の条件は同値. (この条件を満たす可換環 R を Noether 環という.)

- (1) R のイデアルからなる非空集合は極大元をもつ. (極大条件)
- (2) R の任意のイデアルは有限生成である.
- (3) R のイデアルの上昇列 $I_0 \subseteq I_1 \subseteq I_2 \subseteq \dots$ に対して、ある番号 n が存在して $I_n = I_{n+1} = I_{n+2} = \dots$ となる. (昇鎖条件)

証明. (1 \implies 2) I を R のイデアルとする. $X := \{J \subset I \mid J \text{ は } R \text{ の有限生成イデアル}\}$ とおく. 明らかに $\{0\} \in X$ だから $X \neq \emptyset$. 故に仮定 1 により極大元 $J \in X$ が存在する. $J \neq I$ と仮定する. $x \in I \setminus J$ を取り $J' := J + (x)$ と置けば、明らかに J' は有限生成で $J \subsetneq J' \subset I$ となるから J の極大性に矛盾する. 従って $J = I$ であり、 I は有限生成となる.

(2 \implies 3) $I_0 \subset I_1 \subset I_2 \subset \dots$ をイデアルの上昇列とする. $J := \bigcup_{n=0}^{\infty} I_n$ も R のイデアルとなる. 故に仮定 2 から J は有限個の元 $x_0, \dots, x_m \in J$ で生成される. J の定義から、各 $0 \leq i \leq m$ について $x_i \in I_{n_i}$ となる番号 n_i が存在する. このとき $n = \max\{n_0, \dots, n_m\}$ と置けば $I_n = I_{n+1} = \dots = J$ である.

(3 \implies 1) イデアルの集合 X が極大元を持たないとする. $I_0 \in X$ を一つ取る. これが X の極大でないから、ある $I_1 \in X$ が存在して $I_0 \subsetneq I_1$ となる. これを繰り返して無限上昇列 $I_0 \subsetneq I_1 \subsetneq I_2 \subsetneq \dots$ を得る. □

この 3 \implies 1 の証明は選択公理を使っている. それは I_n に対して $I_n \subsetneq I_{n+1}$ となるよ

うな $I_{n+1} \in X$ を取るところである .

[1] によると , ZF では「任意のイデアルが有限生成な , 極大イデアルを持たない整域が存在する」「イデアルの昇鎖条件を満たす , 有限生成でないイデアルを持つような可換環が存在する」としても矛盾しない . 即ち , $3 \implies 2$ と $2 \implies 1$ は ZF では証明できない .

更に , ZFC では次の条件も同値であるが , この証明にも選択公理を使う .

命題 . R の任意のイデアルは有限生成 $\iff R$ の任意の素イデアルは有限生成

証明 . (\implies) 明らか .

(\impliedby) 有限生成でないイデアルが存在すると仮定する . $X := \{I \subset R \mid I \text{ は有限生成でないイデアル}\}$ と置けば , $X \neq \emptyset$ となる . X に Zorn の補題を適用して , X の極大元 I の存在が分かる . I は有限生成で無いから , 仮定により素イデアルでない . 従ってある $x, y \in R$ が存在して $x, y \notin I$, $xy \in I$ となる . $J := I + (y)$ とすれば J はイデアルで $I \subsetneq J$ だから , $I \in X$ の極大性により J は有限生成である . 故にある $u_0, \dots, u_n \in I$ が存在して $J = (u_0, \dots, u_n, y)$ と書ける . 一方 , $I : y := \{r \in R \mid ry \in I\}$ と置けば , これもイデアルで $I \subsetneq I : y$ となるから , ある $v_0, \dots, v_m \in I : y$ が存在して $I : y = (v_0, \dots, v_m)$ と書ける . このとき $I = (u_0, \dots, u_n, v_0y, \dots, v_my)$ である .

\therefore) 明らかに $I \supset (u_0, \dots, u_n, v_0y, \dots, v_my)$ である .

$r \in I$ とする . $I \subset J = (u_0, \dots, u_n, y)$ だから , ある $a_0, \dots, a_{n+1} \in R$ が存在して $r = a_0u_0 + \dots + a_nu_n + a_{n+1}y$ と書ける . このとき $a_{n+1}y = r - a_0u_0 - \dots - a_nu_n \in I$ だから $a_{n+1} \in I : y$ である . 故にある $b_0, \dots, b_m \in R$ が存在して $a_{n+1} = b_0v_0 + \dots + b_mv_m$ と書ける . すると $r = a_0u_0 + \dots + a_nu_n + b_0v_0y + \dots + b_mv_my$ である .

故に I が有限生成となり矛盾する . □

再び [1] によれば「 R の任意の素イデアルは有限生成である $\implies 3$ 」は ZF では証明できないことが知られている .

最後に , 一般に以下のような事実が知られているので紹介する .

定義 . X を集合 , $R \subset X \times X$ を二項関係とする .

(1) $x \in X$ が R に関する極大元である

\iff 任意の $y \in X$ について「 $xRy \implies yRx$ 」となる .

(2) R が昇鎖条件 (Ascending Chain Condition) を満たす

\iff 任意の上昇列は有限で止まる . 即ち , 列 $\{x_n\}_{n=0}^\infty$ が $x_0Rx_1Rx_2R\dots$ を満たす

すならば、ある番号 n が存在して $x_n = x_{n+1} = x_{n+2} = \dots$ となる。

(3) R が極大条件 (Maximal Condition) を満たす

\iff 任意の空でない部分集合 $Y \subset X$ が R に関する極大元を持つ。

定義. 次の命題を従属選択公理 (Axiom of Dependent Choice) という。

非空集合 X 上の二項関係 $R \subset X \times X$ が

任意の $x \in X$ に対してある $y \in X$ が存在して xRy

を満たすとき、 X のある点列 $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ が存在して任意の n に対して $x_n R x_{n+1}$ となる。
(詳しくは従属選択公理についてを参照)

定理. 次の命題は (ZF 上) 同値。

(1) 従属選択公理

(2) 二項関係 R が昇鎖条件を満たすならば、 R は極大条件を満たす。

(3) 順序関係 R が昇鎖条件を満たすならば、 R は極大条件を満たす。

証明. (1 \implies 2) R が極大条件を満たさないとすると、極大元を持たない $Y (\neq \emptyset) \subset X$ が存在する。 Y が極大元を持たないから、任意の $x \in Y$ に対してある $y \in Y$ が存在して xRy かつ $\neg yRx$ である。即ち Y の二項関係 $S := R|_Y \setminus \{(y, y) \in Y \times Y \mid y \in Y\}$ は従属選択公理の仮定を満たすからある列 $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ が存在して $y_0 S y_1 S y_2 S \dots$ である。 S の定義から、任意の n に対して $y_n \neq y_{n+1}$ である。 $S \subset R$ だから、 $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ は R の無限上昇列である。

(2 \implies 3) 明らか。

(3 \implies 1) X を集合、 $R \subset X \times X$ を二項関係で「任意の $x \in X$ に対してある $y \in X$ が存在して xRy 」を満たすものとする。ある $x \in X$ に対して xRx だとすると $xRxRxR\dots$ が条件を満たすから、任意の $x \in X$ に対して $\neg xRx$ とする。

$\bar{R} \subset X \times X$ を R の推移閉包とする。即ち

$x\bar{R}y \iff$ ある $n \in \mathbb{N}$ と $c_0, \dots, c_n \in X$ が存在して $x = c_0 R c_1 R \dots R c_{n-1} R c_n = y$

である。このとき $\leq := \bar{R} \cup \{(x, x) \in X \times X \mid x \in X\}$ と置けば \leq は X の順序関係である。

\leq の定義により「任意の $x \in X$ に対してある $y \in X$ が存在して $x < y$ 」が成り立つ。故に (X, \leq) は極大元を持たない。従って仮定 3 により \leq は昇鎖条件を満たさない。従属選択公理から可算選択公理が従う (従属選択公理についてを参照) から、後で示す補題に

より R も昇鎖条件を満たさない．よって無限上昇列 $x_0 R x_1 R x_2 R \cdots$ が存在する． \square

補題．可算選択公理

$\iff R$ が昇鎖条件を満たすならば， R の推移閉包 \bar{R} も昇鎖条件を満たす．

証明．(\implies) \bar{R} の無限上昇列 $x_0 \bar{R} x_1 \bar{R} x_2 \bar{R} \cdots$ が存在したとする． $n \geq 0$ に対して $S_n := \{(c_0, \dots, c_k) \mid k \in \mathbb{N}, x_n = c_0 R c_1 R \cdots R c_{k-1} R c_k = x_{n+1}\}$ と置けば $x_n \bar{R} x_{n+1}$ の定義により $S_n \neq \emptyset$ である．従って可算選択公理により元 $(s_n)_{n=0}^\infty \in \prod_{n=0}^\infty S_n$ を得る． $s_n = (c_0^{(n)}, \dots, c_{k_n}^{(n)})$ と書けば $c_0^{(0)} R c_1^{(0)} R \cdots c_{k_0-1}^{(0)} R c_0^{(1)} R \cdots$ は R の無限上昇列である．
 (\impliedby) $\{X_n\}_{n=0}^\infty$ を互いに素な非空集合の族とする．二項関係 R を

$$R := \{((n, 2n), (n, 2n+1, x)) \mid n \in \mathbb{N}, x \in X_n\} \\ \cup \{((n, 2n+1, x), (n+1, 2n+2)) \mid n \in \mathbb{N}, x \in X_n\}$$

で定める． R の推移閉包 \bar{R} は明らかに無限上昇列 $((n, 2n))_{n=0}^\infty$ を持つ．よって \bar{R} は昇鎖条件を満たさない．従って仮定により R も昇鎖条件を満たさない．

R の無限上昇列を $c_0 R c_1 R c_2 R \cdots$ とする． R の定義から $c_0 = (k, 2k)$ または $c_0 = (k, 2k+1, x)$ と書ける． $c_0 = (k, 2k)$ としてよい．このとき R の定義から

$$c_{2i} = (k+i, 2k+2i), \quad c_{2i+1} = (k+i, 2k+2i+1, x_i) \quad (x_i \in X_i)$$

と書ける．よって， $x_0 \in X_0, \dots, x_{i-1} \in X_{i-1}$ を任意に取れば $(x_n)_{n=0}^\infty \in \prod_{n=0}^\infty X_n$ である． \square

参考文献

- [1] Wilfrid Hodges, Six Impossible Rings, Journal of Algebra 31, 218–224 (1974), <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0021869374900659>
- [2] Karl-Heinz Diener, A Remark on Ascending Chain Conditions, the Countable Axiom of Choice and the Principle of Dependent Choices, Mathematical Logic Quarterly Vol. 40, Issue 3, pp415–421, 1994