Noether 環の条件について

alg-d
http://alg-d.com/math/ac/

2012 年 10 月 14 日

可換環論において，次の命題はよく知られている．

命題. (1 を含む) 可換環 R について次の条件は同値．(この条件を満たす可換環 R を Noether 環という．)

(1) R のイデアルからなる非空集合は極大元をもつ．(極大条件)
(2) R の任意のイデアルは有限生成である．
(3) R のイデアルの上昇列 $I_0 \subseteq I_1 \subseteq I_2 \subseteq \cdots$ に対して，ある番号 n が存在して $I_n = I_{n+1} = I_{n+2} = \cdots$ となる．(昇鎖条件)

証明. ($1 \Longrightarrow 2$) I を R のイデアルとする．$X := \{J \subset I \mid J$ は R の有限生成イデアル $\}$ とおく．明らかに $\{0\} \in X$ だから $X \neq \emptyset$．故に仮定 1 により極大元 $J \in X$ が存在する．$J \neq I$ と仮定する．$x \in I \setminus J$ を取り $J' := J + (x)$ と置けば，明らかに J' は有限生成で $J \subsetneq J' \subset I$ となるから J の極大性に矛盾する．従って $J = I$ であり，I は有限生成となる．

($2 \Longrightarrow 3$) $I_0 \subset I_1 \subset I_2 \subset \cdots$ をイデアルの上昇列とする．$J := \displaystyle\bigcup_{n=0}^{\infty} I_n$ も R のイデアルとなる．故に仮定 2 から J は有限個の元 $x_0, \cdots, x_m \in J$ で生成される．J の定義から，各 $0 \leq i \leq m$ について $x_i \in I_{n_i}$ となる番号 n_i が存在する．このとき $n = \max\{n_0, \cdots, n_m\}$ と置けば $I_m = I_{m+1} = \cdots = J$ である．

($3 \Longrightarrow 1$) イデアルの集合 X が極大元を持たないとする．$I_0 \in X$ を一つ取る．これが X の極大元でないから，ある $I_1 \in X$ が存在して $I_0 \subsetneq I_1$ となる．これを繰り返して無限上昇列 $I_0 \subsetneq I_1 \subsetneq I_2 \subsetneq \cdots$ を得る． □

この $3 \Longrightarrow 1$ の証明は選択公理を使っている．それは I_n に対して $I_n \subsetneq I_{n+1}$ となるよ

うな $I_{n+1} \in X$ を取るところである．

[1] によると，ZF では「任意のイデアルが有限生成な，極大イデアルを持たない整域が存在する」「イデアルの昇鎖条件を満たす，有限生成でないイデアルを持つような可換環が存在する」としても矛盾しない．即ち，$3 \Longrightarrow 2$ と $2 \Longrightarrow 1$ は ZF では証明できない．

更に，ZFC では次の条件も同値であるが，この証明にも選択公理を使う．

命題. R の任意のイデアルは有限生成 $\Longleftrightarrow$ R の任意の素イデアルは有限生成

証明. ($\Longrightarrow$) 明らか．

($\Longleftarrow$) 有限生成でないイデアルが存在すると仮定する．$X := \{I \subset R \mid I$ は有限生成でないイデアル $\}$ と置けば，$X \neq \emptyset$ となる．X に Zorn の補題を適用して，X の極大元 I の存在が分かる．I は有限生成で無いから，仮定により素イデアルでない．従ってある $x, y \in R$ が存在して $x, y \notin I$, $xy \in I$ となる．$J := I + (y)$ とすれば J はイデアルで $I \subsetneq J$ だから, $I \in X$ の極大性により J は有限生成である．故にある $u_0, \cdots, u_n \in I$ が存在して $J = (u_0, \cdots, u_n, y)$ と書ける．一方，$I : y := \{r \in R \mid ry \in I\}$ と置けば，これもイデアルで $I \subsetneq I : y$ となるから, ある $v_0, \cdots, v_n \in I : y$ が存在して $I : y = (v_0, \cdots, v_m)$ と書ける．このとき $I = (u_0, \cdots, u_n, v_0 y, \cdots, v_m y)$ である．

> $\because$) 明らかに $I \supset (u_0, \cdots, u_n, v_1 y, \cdots, v_m y)$ である．
>
> $r \in I$ とする．$I \subset J = (u_0, \cdots, u_n, y)$ だから，ある $a_0, \cdots, a_{n+1} \in R$ が存在して $r = a_0 u_0 + \cdots + a_n u_n + a_{n+1} y$ と書ける．このとき $a_{n+1} y = r - a_0 u_0 + \cdots + a_n u_n \in I$ だから $a_{n+1} \in I : y$ である．故にある $b_0, \cdots, b_m \in R$ が存在して $a_{n+1} = b_0 v_0 + \cdots + b_m v_m$ と書ける．すると $r = a_0 u_0 + \cdots + a_n u_n + b_0 v_0 y + \cdots + b_m v_m y$ である．

故に I が有限生成となり矛盾する． $\square$

再び [1] によれば「R の任意の素イデアルは有限生成である $\Longrightarrow 3$」は ZF では証明できないことが知られている．

最後に，一般に以下のような事実が知られているので紹介する．

定義. X を集合，$R \subset X \times X$ を二項関係とする．

(1) $x \in X$ が R に関する極大元である
$\Longleftrightarrow$ 任意の $y \in X$ について「$xRy \Longrightarrow yRx$」となる．

(2) R が昇鎖条件 (Ascending Chain Condition) を満たす
$\Longleftrightarrow$ 任意の上昇列は有限で止まる．即ち，列 $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ が $x_0 R x_1 R x_2 R \cdots$ を満た

すならば，ある番号 n が存在して $x_n = x_{n+1} = x_{n+2} = \cdots$ となる．

(3) R が極大条件 (Maximal Condition) を満たす
$\iff$ 任意の空でない部分集合 $Y \subset X$ が R に関する極大元を持つ．

定義. 次の命題を従属選択公理 (Axiom of Dependent Choice) という．
非空集合 X 上の二項関係 $R \subset X \times X$ が

$$\text{任意の } x \in X \text{ に対してある } y \in X \text{ が存在して } xRy$$

を満たすとき，X のある点列 $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ が存在して任意の n に対して $x_n R x_{n+1}$ となる．
(詳しくは従属選択公理についてを参照)

定理. 次の命題は (ZF 上) 同値.

(1) 従属選択公理
(2) 二項関係 R が昇鎖条件を満たすならば，R は極大条件を満たす.
(3) 順序関係 R が昇鎖条件を満たすならば，R は極大条件を満たす.

証明. ($1 \Longrightarrow 2$) R が極大条件を満たさないとすると，極大元を持たない $Y(\neq \emptyset) \subset X$ が存在する．Y が極大元を持たないから，任意の $x \in Y$ に対してある $y \in Y$ が存在して xRy かつ $\neg yRx$ である．即ち Y の二項関係 $S := R|_Y \setminus \{(y,y) \in Y \times Y \mid y \in Y\}$ は従属選択公理の仮定を満たすからある列 $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ が存在して $y_0 S y_1 S y_2 S \cdots$ である．S の定義から，任意の n に対して $y_n \neq y_{n+1}$ である．$S \subset R$ だから，$\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ は R の無限上昇列である．

($2 \Longrightarrow 3$) 明らか.

($3 \Longrightarrow 1$) X を集合，$R \subset X \times X$ を二項関係で「任意の $x \in X$ に対してある $y \in X$ が存在して xRy」を満たすものとする．ある $x \in X$ に対して xRx だとすると $xRxRxR\cdots$ が条件を満たすから，任意の $x \in X$ に対して $\neg xRx$ とする．

$\overline{R} \subset X \times X$ を R の推移閉包とする．即ち

$$x\overline{R}y \iff \text{ある } n \in \mathbb{N} \text{ と } c_0, \cdots, c_n \in X \text{ が存在して } x = c_0 R c_1 R \cdots R c_{n-1} R c_n = y$$

である．このとき $\leq := \overline{R} \cup \{(x,x) \in X \times X \mid x \in X\}$ と置けば $\leq$ は X の順序関係である．

$\leq$ の定義により「任意の $x \in X$ に対してある $y \in X$ が存在して $x < y$」が成り立つ．故に $(X, \leq)$ は極大元を持たない．従って仮定 3 により $\leq$ は昇鎖条件を満たさない．従属選択公理から可算選択公理が従う (従属選択公理についてを参照) から，後で示す補題に

より R も昇鎖条件を満たさない．よって無限上昇列 $x_0Rx_1Rx_2R\cdots$ が存在する． $\square$

補題. 可算選択公理
$\Longleftrightarrow$ R が昇鎖条件を満たすならば，R の推移閉包 $\overline{R}$ も昇鎖条件を満たす．

証明. ($\Longrightarrow$) $\overline{R}$ の無限上昇列 $x_0\overline{R}x_1\overline{R}x_2\overline{R}\cdots$ が存在したとする．$n \geq 0$ に対して $S_n := \{(c_0, \cdots, c_k) \mid k \in \mathbb{N},\ x_n = c_0Rc_1R\cdots Rc_{k-1}Rc_k = x_{n+1}\}$ と置けば $x_n\overline{R}x_{n+1}$ の定義により $S_n \neq \emptyset$ である．従って可算選択公理により元 $(s_n)_{n=0}^{\infty} \in \prod_{n=0}^{\infty} S_n$ を得る．$s_n = (c_0^{(n)}, \cdots, c_{k_n}^{(n)})$ と書けば $c_0^{(0)}Rc_1^{(0)}R\cdots c_{k_0-1}^{(0)}Rc_0^{(1)}R\cdots$ は R の無限上昇列である．

($\Longleftarrow$) $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ を互いに素な非空集合の族とする．二項関係 R を

$$
\begin{aligned}
R := &\{((n, 2n), (n, 2n+1, x)) \mid n \in \mathbb{N},\ x \in X_n\} \\
&\cup\{((n, 2n+1, x), (n+1, 2n+2)) \mid n \in \mathbb{N},\ x \in X_n\}
\end{aligned}
$$

で定める．R の推移閉包 $\overline{R}$ は明らかに無限上昇列 $((n, 2n))_{n=0}^{\infty}$ を持つ．よって $\overline{R}$ は昇鎖条件を満たさない．従って仮定により R も昇鎖条件を満たさない．

R の無限上昇列を $c_0Rc_1Rc_2R\cdots$ とする．R の定義から $c_0 = (k, 2k)$ または $c_0 = (k, 2k+1, x)$ と書ける．$c_0 = (k, 2k)$ としてよい．このとき R の定義から

$$
c_{2i} = (k+i, 2k+2i),\ c_{2i+1} = (k+i, 2k+2i+1, x_i) \quad (x_i \in X_i)
$$

と書ける．よって，$x_0 \in X_0, \cdots, x_{i-1} \in X_{i-1}$ を任意に取れば $(x_n)_{n=0}^{\infty} \in \prod_{n=0}^{\infty} X_n$ である． $\square$

参考文献

[1] Wilfrid Hodges, Six Impossible Rings, Journal of Algebra 31, 218–224 (1974), http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0021869374900659

[2] Karl-Heinz Diener, A Remark on Ascending Chain Conditions, the Countable Axiom of Choice and the Principle of Dependent Choices, Mathematical Logic Quarterly Vol. 40, Issue 3, pp415–421, 1994