Łoś の定理，BPI と選択公理

alg-d
http://alg-d.com/math/ac/

2013 年 10 月 19 日

定理. 選択公理 $\Longleftrightarrow$ Łoś の定理 +BPI

証明. $\Longleftarrow$ を示す．$\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を互いに素な非空集合の族, $X := \bigcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ とする．$X \cap \Lambda = \emptyset$ としてよい．$A := X \cup \Lambda$ と置く．二項関係 $R \subset A \times A$ を

$$aRb \Longleftrightarrow \text{「}a \in X,\ b \in \Lambda,\ a \in X_b\text{」または「}a = b \in X\text{」}$$

で定める．$\mathcal{A} := \langle A, R\rangle$ とする．

$\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ が選択関数を持たないと仮定する．

$$I := \{\Sigma \subset \Lambda \mid \{X_\lambda\}_{\lambda\in\Sigma}\text{は選択関数を持つ}\}$$

は Λ 上のイデアルである．BPI により素イデアル $P \supset I$ が存在する．このとき $\mathcal{U} := \{\Sigma \subset \Lambda \mid \Lambda \setminus \Sigma \in P\}$ は Λ 上の超フィルターである．Łoś の定理より $\mathcal{A}$ と $\mathcal{A}^\Lambda/\mathcal{U}$ は初等的同値である．R の定義より $\mathcal{A} \models \forall u \exists v(vRu)$ が成り立つ．よって $\mathcal{A}^\Lambda/\mathcal{U} \models \forall u \exists v(vRu)$ であるから，$u := [\mathrm{id}_\Lambda] \in A^\Lambda/\mathcal{U}$ に対してある $v \in A^\Lambda/\mathcal{U}$ が存在して vRu となる．$f\colon \Lambda \longrightarrow A$ によって $v = [f]$ と書けば $\Sigma := \{\lambda \in \Lambda \mid f(\lambda)\, R\, \mathrm{id}_\Lambda(\lambda)\} \in \mathcal{U}$ である．R の定義から $f(\lambda)\, R\, \mathrm{id}_\Lambda(\lambda) \Longleftrightarrow f(\lambda) \in X_\lambda$ だから $f|_\Sigma$ は $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Sigma}$ の選択関数である．よって $\Lambda \setminus \Sigma \in \mathcal{F} \subset \mathcal{U}$ だから $\emptyset = \Sigma \cap (\Lambda \setminus \Sigma) \in \mathcal{U}$ となり矛盾する． $\Box$

参考文献

[1] Paul E. Howard, Łoś' theorem and the Boolean prime ideal theorem imply the axiom of choice, Proc. Amer. Math. Soc. 49 (1975), 426–428, http://www.ams.org/journals/proc/1975-049-02/S0002-9939-1975-0384548-X/home.html