Löwenheim-Skolem の定理と選択公理

alg-d
http://alg-d.com/math/ac/

2013 年 6 月 15 日

定理 1. 次の命題は (ZF 上) 同値.

1. 選択公理
2. 下降 Löwenheim-Skolem の定理
3. 一階論理式 φ が濃度 κ のモデルを持つとする. $\aleph_0 \leq \mu \leq \kappa$ ならば φ は濃度 μ のモデルを持つ.
4. 上昇 Löwenheim-Skolem の定理
5. 一階論理式 φ が濃度 κ のモデルを持つとする. $\mu \geq \kappa$ ならば φ は濃度 μ のモデルを持つ.

証明. ($1 \Longrightarrow 2$) 略.

($2 \Longrightarrow 3$) 自明.

($3 \Longrightarrow 1$) 任意の濃度 $\mu \geq \aleph_0$ に対して $\mu^2 = \mu$ を示せばよい. R を三変数関係記号として, φ を次の一階論理式とする.

$$\begin{aligned}&(\forall x \forall y \exists z R(x,y,z)) \wedge \\ &(\forall x \forall y \forall z \forall u \forall v \forall w ((R(x,y,z) \wedge R(u,v,w)) \rightarrow (z = u \leftrightarrow (x = v \wedge y = w))))\end{aligned}$$

「(A,R) が φ のモデルである $\Longleftrightarrow$ R は単射 $A \times A \longrightarrow A$ である」が成り立つ. 故に (A,R) が φ のモデルならば $|A|^2 = |A|$ である. $\mu \geq \aleph_0$ を濃度とする. $\kappa := 2^{\mu \cdot \aleph_0}$ と置けば

$$\kappa^2 = (2^{\mu \cdot \aleph_0})^2 = 2^{\mu \cdot \aleph_0 \cdot 2} = 2^{\mu \cdot \aleph_0} = \kappa$$

だから $|A| = \kappa$ となるモデル (A,R) が存在する. $\aleph_0 \leq \mu \leq \kappa$ だから, 仮定 3 により濃度 μ のモデルが存在する. よって $\mu^2 = \mu$ である.

($1 \Longrightarrow 4$) 略.

($4 \Longrightarrow 5$) 自明.

($5 \Longrightarrow 1$) $3 \Longrightarrow 1$ と同じ φ を考える．φ は明らかに可算モデルを持つ．よって任意の $\mu \geq \aleph_0$ に対して濃度 μ のモデルが存在し，$\mu^2 = \mu$ である． $\square$