

Löwenheim-Skolem の定理と選択公理

alg-d

<http://alg-d.com/math/ac/>

2013 年 6 月 15 日

定理 1. 次の命題は (ZF 上) 同値 .

1. 選択公理
2. 下降 Löwenheim-Skolem の定理
3. 一階論理式 φ が濃度 κ のモデルを持つとする . $\aleph_0 \leq \mu \leq \kappa$ ならば φ は濃度 μ のモデルを持つ .
4. 上昇 Löwenheim-Skolem の定理
5. 一階論理式 φ が濃度 κ のモデルを持つとする . $\mu \geq \kappa$ ならば φ は濃度 μ のモデルを持つ .

証明. (1 \implies 2) 略 .

(2 \implies 3) 自明 .

(3 \implies 1) 任意の濃度 $\mu \geq \aleph_0$ に対して $\mu^2 = \mu$ を示せばよい . R を三変数関係記号として , φ を次の一階論理式とする .

$$(\forall x \forall y \exists z R(x, y, z)) \wedge \\ (\forall x \forall y \forall z \forall u \forall v \forall w ((R(x, y, z) \wedge R(u, v, w)) \rightarrow (z = u \leftrightarrow (x = v \wedge y = w))))$$

「 (A, R) が φ のモデルである $\iff R$ は単射 $A \times A \rightarrow A$ である」が成り立つ . 故に (A, R) が φ のモデルならば $|A|^2 = |A|$ である . $\mu \geq \aleph_0$ を濃度とする . $\kappa := 2^{\mu \cdot \aleph_0}$ と置けば

$$\kappa^2 = (2^{\mu \cdot \aleph_0})^2 = 2^{\mu \cdot \aleph_0 \cdot 2} = 2^{\mu \cdot \aleph_0} = \kappa$$

だから $|A| = \kappa$ となるモデル (A, R) が存在する . $\aleph_0 \leq \mu \leq \kappa$ だから , 仮定 3 により濃度 μ のモデルが存在する . よって $\mu^2 = \mu$ である .

(1 \implies 4) 略 .

(4 \implies 5) 自明 .

(5 \implies 1) 3 \implies 1 と同じ φ を考える . φ は明らかに可算モデルを持つ . よって任意の $\mu \geq \aleph_0$ に対して濃度 μ のモデルが存在し , $\mu^2 = \mu$ である . \square